Laboratorio computazionale

Appunti lezione 1

Stefano Franceschina

05/03/2025

1 Introduzione

L'Analisi numerica è una branca della matematica che si occupa di trovare soluzioni approssimate a problemi matematici, in cui gli errori computazionali e di modellazione giocano un ruolo fondamentale. Le principali fonti di errore sono:

- **Errori di rounding**: derivano dall'approssimazione necessaria perché il computer rappresenta i numeri reali con una precisione limitata.
- **Errori di approssimazione**: dipendono dal tipo di problema e dall'algoritmo utilizzato. Ad esempio, nel calcolo dell'esponenziale tramite la somma della sua espansione in serie, è necessario un troncamento, introducendo un errore dovuto al tralasciare gli infiniti termini successivi. Tale errore viene indicato con O.

2 Rappresentazione dell'esponenziale

Un esempio di errore di approssimazione è il calcolo dell'esponenziale tramite la sua espansione in serie di Taylor:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Per x molto piccoli, ad esempio per $x \in [0, 1]$ la serie converge e l'errore di approssimazione è trascurabile. Tuttavia, per x grandi, la serie diverge e perciò non è possibile utilizzarla per la rappresentazione dell'esponenziale. Per ovviare a questo problema, si possono adottare diverse strategie, come la riscrittura dell'esponenziale o l'utilizzo di metodi iterativi più stabili. Vediamo come riscrivere l'esponenziale. Si può esprimere $\exp(x)$ come:

$$\exp(x) = \exp(x_1) \cdot \exp(k \cdot \log 2) = \exp(x_1) \cdot 2^k,$$

ovvero, riscrivendo x come $x_1 + k \log 2$, il calcolatore lavora sempre con un x_1 compreso tra 0 e 1, migliorando così la precisione nel calcolo.

3 Rappresentazione dei Numeri

Prima dell'avvento dei computer è stato fondamentale comprendere come rappresentare un numero. Si sceglie una base B e ogni numero viene scritto come una sommatoria di coefficienti (da 0 a $B - 1$) moltiplicati per potenze di B. Nelle dispense si approfondisce come la scelta della base, e in particolare la normalizzazione del coefficiente, massimizzi la precisione della rappresentazione.

I computer, per motivi hardware, adottano la base binaria. Questo perché è più semplice rappresentare due stati fisici (ad esempio, alto o basso livello di tensione) rispetto a rappresentare dieci stati differenti.

3.1 Floating Point Representation

Per rappresentare i numeri reali si è passati dalla *fixed-point representation* (con un numero fisso di cifre decimali o binarie prima e dopo la virgola) alla *floating point representation*, che consente di rappresentare un range molto più ampio. In questo sistema un numero x si scrive come:

$$x = (-1)^s (1 + f) \cdot 2^b,$$

dove:

- s rappresenta il segno (0 per numeri positivi e 1 per numeri negativi),
- f è la mantissa, che rappresenta la parte frazionaria,
- b è l'esponente.

La normalizzazione (cioè l'assicurarsi che $1 + f$ cada in un intervallo prestabilito, solitamente tra 1 e 2) è fondamentale per mantenere costante la precisione relativa tra i numeri, nonostante l'intervallo assoluto tra essi possa variare. Nelle dispense vengono illustrati in dettaglio i motivi di questa scelta, anche in relazione alla distribuzione degli errori.

3.2 Standard di Precisione e IEEE 754

Gli standard più comuni sono:

- **Double Precision**: 64 bit totali, suddivisi in 1 bit per il segno, 11 bit per l'esponente e 52 bit per la mantissa. La precisione macchina, ovvero il più piccolo incremento rappresentabile, è 2^{-52}.
- **Single Precision**: 32 bit totali, con 1 bit per il segno, 8 bit per l'esponente e 23 bit per la mantissa, e una precisione macchina pari a 2^{-23}.

Lo standard IEEE 754 definisce non solo la rappresentazione ma anche le regole di arrotondamento (tipicamente "round to nearest") e il comportamento in presenza di eccezioni, come i numeri denormalizzati (che permettono di rappresentare numeri estremamente piccoli in modo graduale), infiniti e NaN (Not a Number). Le dispense offrono un'analisi approfondita di questi concetti, evidenziando come il design di IEEE 754 contribuisca a ridurre gli errori cumulativi nei calcoli numerici.

4 Approfondimenti e Informazioni dalle Dispense

Le dispense forniscono ulteriori dettagli riguardo:

- **Analisi degli errori**: Oltre a distinguere tra errori di rounding e di approssimazione, si studia come questi errori possano propagarsi nelle operazioni aritmetiche e nei metodi iterativi. Un concetto chiave è l'*epsilon di macchina* (ϵ_{mach}), il più piccolo numero tale che $1 + \epsilon \neq 1$, che fornisce un limite teorico alla precisione.

- **Stabilità numerica**: Le dispense esaminano come alcuni algoritmi possano essere più o meno sensibili agli errori di approssimazione. Ad esempio, in metodi iterativi per la risoluzione di equazioni o sistemi lineari (come il metodo di Newton o la pivotazione nelle eliminazioni gaussiane), la scelta dell'algoritmo e delle tecniche di normalizzazione è determinante per ottenere risultati attendibili.

- **Convergenza degli algoritmi**: Viene studiato il comportamento degli algoritmi iterativi e le condizioni necessarie affinché convergano verso una soluzione, anche in presenza di errori numerici.

- **Applicazioni pratiche**: Tra gli argomenti trattati nelle dispense ci sono anche esempi pratici di calcolo numerico, come l'integrazione numerica (metodi dei trapezi e di Simpson), la risoluzione di equazioni differenziali e la decomposizione LU per sistemi lineari.

Questi approfondimenti sono essenziali per comprendere non solo la teoria, ma anche per sviluppare un senso critico sui metodi numerici e sulle potenziali fonti di errore nelle simulazioni e nei calcoli reali.

5 Conclusioni

Questa lezione offre una panoramica della rappresentazione numerica nei computer e degli errori che ne derivano. Le dispense, che approfondiscono gli aspetti teorici e pratici, rappresentano un ottimo strumento per approfondire la conoscenza degli algoritmi numerici e per capire come ridurre e gestire gli errori computazionali. Studi approfonditi permettono di affrontare problemi complessi con strumenti matematici e computazionali affidabili.