

Università degli studi Milano Bicocca - Dipartimento di Fisica

Esperimentazioni di Fisica Computazionale

S. Franceschina

June 16, 2025

Abstract

La presente relazione contiene gli esercizi svolti durante il corso di Esperimentazioni di Fisica Computazionale.

Gli esercizi sono stati svolti in Julia e sono raccolti in una cartella git, di cui si riporta il link:

https://github.com/bunchi3/lab_computazionale1.git

Contents

1	Analisi dell'errore	4
1.1	Esercizio 1.0.1	4
1.1.1	Soluzione	4
1.2	Esercizio 1.2.1	5
1.2.1	Soluzione	5
1.3	Esercizio 1.4.1	6
1.3.1	Soluzione	7
1.4	Esercizio 1.4.2	8
1.4.1	Soluzione	8
2	Sistemi lineari	10
2.1	Esercizi 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4	10
2.1.1	Soluzione	11
2.2	Esercizi 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4	12
2.2.1	Soluzione	12
2.3	Esercizio 2.3.3	13
2.3.1	Soluzione	13
2.4	Esercizi 2.4.1, 2.4.2	14
2.4.1	Soluzione	14
2.5	Esercizio 2.5.1	14
2.5.1	Soluzione	15
2.5.2	Conclusioni	16
2.6	Esercizio 2.6.1	16
2.6.1	Soluzione	16
2.7	Esercizio 2.6.2	16
2.7.1	Soluzione	17
2.8	Esercizio 2.6.3	17

2.8.1	Soluzione	18
2.8.2	Conclusioni	19
3	Radici di equazioni non lineari	19
3.1	Esercizi 3.2.1, 3.2.2	19
3.1.1	Soluzione	19
3.2	Esercizi 3.3.1, 3.3.2	22
3.2.1	Soluzione	22
3.3	Esercizio 3.3.3	25
3.3.1	Soluzione	25
3.4	Esercizio 3.3.4	27
3.5	Soluzione	27
3.6	Esercizi 3.4.1, 3.4.2	28
3.6.1	Soluzione	28
3.7	Esercizio 3.4.3	29
3.7.1	Soluzione	29
4	Interpolazioni	30
4.1	Esercizi 4.2.1, 4.2.2	30
4.1.1	Soluzione	30
4.2	Esercizi 4.4.1, 4.4.2	31
4.2.1	Soluzione	31
4.3	Esercizio 4.4.3	32
4.3.1	Soluzione	33
4.4	Esercizio 4.4.4	33
4.4.1	Soluzione	33
4.5	Esercizio 4.6.1	34
4.5.1	Soluzione	34
5	Integrazione numerica	36
5.1	Esercizi 5.1.1, 5.1.2	36
5.1.1	Soluzione	37
5.2	Esercizi 5.1.3, 5.1.4	39
5.2.1	Soluzione	39
5.3	Esercizio 5.3.1	40
5.3.1	Soluzione	41
5.4	Esercizio 5.4.1	42
5.4.1	Soluzione	42
5.5	Esercizio 5.4.2	44
5.5.1	Soluzione	44
5.6	Esercizio 5.4.3	44
5.6.1	Soluzione	45
6	Equazioni differenziali ordinarie	47
6.1	Esercizi 6.2.1, 6.2.2	47
6.1.1	Soluzione	47
6.2	Esercizio 6.2.3	48
6.2.1	Soluzione	48
6.3	Esercizio 6.3.1	49
6.3.1	Soluzione	50
6.4	Esercizio 6.3.2	51

6.4.1	Soluzione	51
6.5	Esercizio 6.3.3	52
6.5.1	Soluzione	53
6.6	Esercizio 6.3.5	53
6.6.1	Soluzione	54
6.7	Esercizio 6.3.6	54
6.7.1	Soluzione	54
6.8	Esercizio 6.3.7	56
6.8.1	Soluzione	57
7	Appendice	57
7.1	Dati	57

1 Analisi dell'errore

1.1 Esercizio 1.0.1

Considera la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $x \in [0, 1]$. Scrivi un programma che calcoli la serie approssimante:

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}. \quad (1)$$

1. Verifica che l'errore assoluto $\Delta = |f(x) - g_N(x)|$ scali approssimativamente come $x^{N+1}/(N+1)!$ per $N = 1, 2, 3, 4$.
2. L'errore Δ , nell'intervallo dato di x , differisce da $x^{N+1}/(N+1)!$. Perché accade questo e per quali valori di x ?

1.1.1 Soluzione

Si sono rappresentate nel grafico 1 le funzioni Δ e $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$, con $N = 1, 2, 3, 4$, al variare di x nell'intervallo $[0, 1]$.

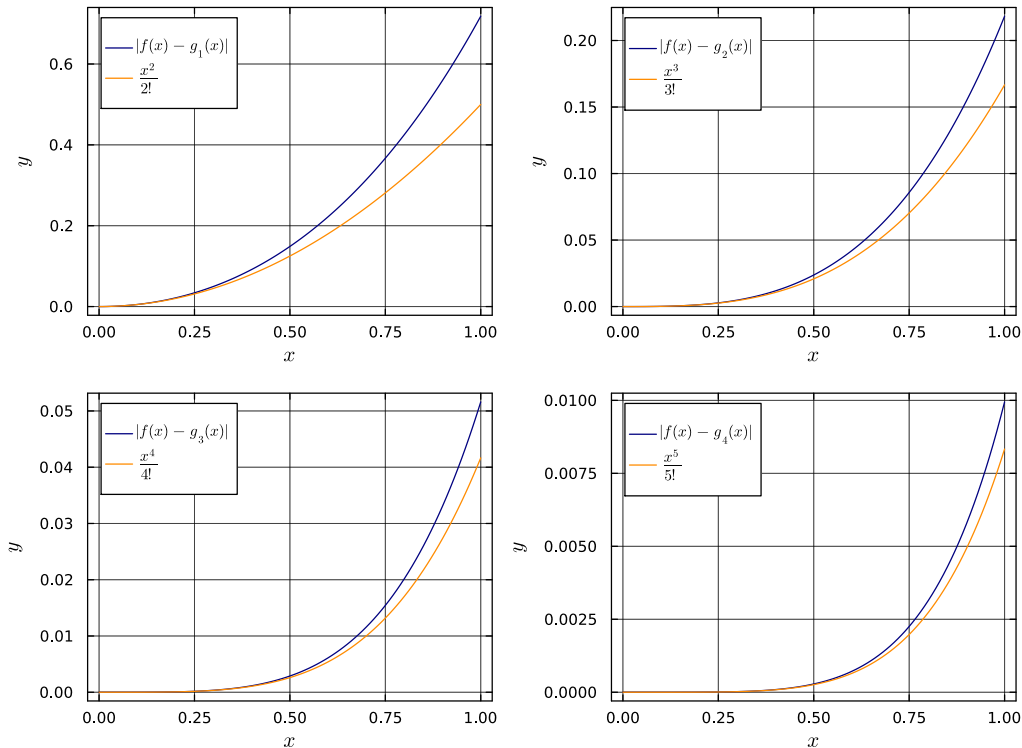


Figure 1: Confronto tra Δ e $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ per $N = 1, 2, 3, 4$.

Una prima considerazione è che all'aumentare di N la funzione Δ si avvicina globalmente a zero. Questo significa che la distanza tra il valore della funzione $f(x)$ presa in esame e la sua espansione di Taylor troncata all'ordine N diminuisce. In effetti ci aspettiamo che la funzione Δ sia esattamente zero nel caso in cui $N \rightarrow \infty$. Inoltre ciascuno dei grafici mostra che la funzione Δ è tanto più prossima allo zero quanto più ci si avvicina all'origine, poichè l'espansione in serie richiede $x \rightarrow 0$.

La seconda considerazione è che le funzioni Δ e $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ si avvicinano tra loro all'aumentare

di N . Il motivo è che la funzione $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ è l'ordine successivo della serie di Taylor troncata all'ordine N e può essere presa come stima per l'errore commesso nell'approssimazione di f . Non è però una stima ottima: la serie di Taylor associata a f conta infiniti termini e la sola $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$ non li contiene tutti. Per questa ragione essa non coincide con Δ ma si avvicina, essendo all'aumentare di N una stima migliore dell'errore.

1.2 Esercizio 1.2.1

Calcolare la seguente somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \lim_{N \rightarrow \infty} S(N) \quad \text{con} \quad S(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

1. Calcolarla in single precision utilizzando l'ordinamento normale, $n = 1, 2, 3, \dots, N$.
2. Calcolarla in single precision utilizzando l'ordinamento inverso, $n = N, \dots, 2, 1$.
3. Studiare la convergenza di entrambe le implementazioni in funzione di N tracciando il grafico di $|S(N) - \pi^2/6|$.
4. Ripetere i punti da 1 a 3 utilizzando double precision.

1.2.1 Soluzione

Procediamo prendendo in esame i due casi, single precision e double precision.

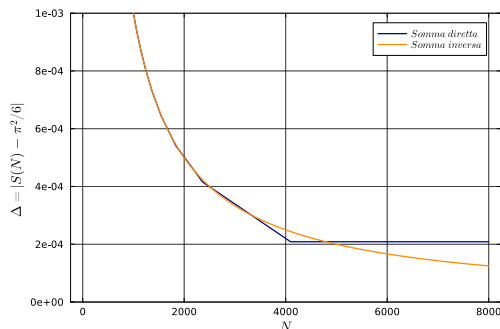


Figure 2: Δ in Float32.

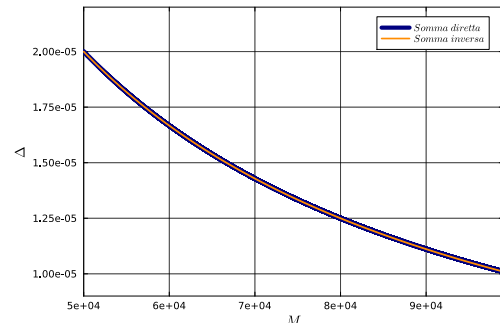


Figure 3: Ingrandimento di Δ in Float64

Single precision: Si riportano in figura 2 gli errori di troncamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, laddove N è il troncamento. Le somme sono state eseguite con variabili di tipo Float32 (single precision).

In figura 2 notiamo due comportamenti degni di nota. Il primo riguarda la curva blu, che arresta la sua discesa poco dopo $N = 4000$. Il secondo riguarda il discostarsi delle due curve a causa dell'andamento a linea spezzata della curva blu.

La spiegazione del primo fenomeno è la seguente: nel caso della somma con ordinamento diretto, all'aumentare dell'indice di somma, gli addendi sono sempre più piccoli. In particolare la somma comincia da 1, e sappiamo che dovrà raggiungere $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1.64$, perciò per tutto il processo la somma parziale resterà nell'intervallo $[1, 2)$. In tale intervallo la distanza tra due floating point numbers è $\varepsilon_{mach} = 2^{-23}$. Osserviamo il grafico 2: la curva blu comincia ad essere costante a partire da $N = 4096 = 2^{12}$. L'addendo corrispondente è $\frac{1}{N^2} = 2^{-24}$. Essendo più piccolo di ε_{mach} , la distanza tra due floating point numbers in $[1, 2)$, viene considerato come 0.

La spiegazione del secondo fenomeno è simile: in questo caso alla somma viene aggiunto un addendo che è più piccolo del precedente, ma non così tanto da essere più piccolo di ε_{mach} . In questo modo alla somma viene aggiunto un valore arrotondato rispetto al suo valore vero. Il successivo addendo, pur essendo differente in teoria, a causa dell'arrotondamento risulta essere uguale al precedente. Ciò fa in modo che venga sommato sempre lo stesso numero, e così l'andamento della curva blu è lineare.

I due fenomeni non si verificano per la somma con ordinamento inverso perchè il primo numero della somma è molto piccolo. Questo fa in modo che i successivi floating point number siano molto vicini tra loro, e così sommare l'addendo successivo fa cadere la somma parziale vicina al floating point number che la approssima.

Si può mostrare matematicamente che gli errori $\Delta = |S(N) - \pi^2/6|$ scalano come $O(\frac{1}{N})$. Per verificare questa affermazione possiamo interpolare la curva degli errori con un metodo che vedremo nella sezione 2. Sulla base delle considerazioni di questa sezione, possiamo aspettarci che sia più conveniente interpolare la curva con ordinamento inverso, perchè i valori che la compongono sono meno affetti da errori di tipo numerico. Utilizzando il modello linearizzato $\log(\Delta) = -c \log(N)$ con $c = 1$ si ottiene per l'ordinamento inverso $c_{fit} = 1.00003$ e per quello diretto $c_{fit} = 0.986$. Come atteso il caso di ordinamento diretto restituisce un risultato peggiore di quello inverso.

Double precision: Si riporta in figura 3 un ingrandimento del grafico degli errori di troncamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, laddove N è il troncamento. Le somme sono state eseguite con variabili di tipo Float64 (double precision). Nel caso di figura 3 possiamo notare che le due curve sono sovrapposte, nonostante l'ingrandimento a valori di $N \in [5000, 10000]$. Per osservare un fenomeno simile a quello di figura 2 dovremmo raggiungere valori di $N = 2^{26}$. Infatti l'approssimazione non migliora quando vengono sommati numeri dell'ordine di ε_{mach} per double precision, cioè $\frac{1}{N^2} \simeq 2^{-52}$.

1.3 Esercizio 1.4.1

(a) In statistica, definiamo la varianza di un campione di valori x_1, \dots, x_n come

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3)$$

Scrivi una funzione che prenda in input un vettore x di lunghezza arbitraria e restituisca σ^2 calcolata con la formula sopra.

(b) La formula 3 ha lo svantaggio di scorrere due volte il vettore dei dati. Considera la formula 4 a un ciclo:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \left(u - \frac{1}{n} v^2 \right), \quad u = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad v = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4)$$

Prova entrambe le formule per i seguenti dataset, ciascuno dei quali ha varianza esattamente uguale a 1. Esegui i calcoli sia in single che in double precision.

$$\begin{aligned} x_1 &= [1 \cdot 10^3, 1 + 10^3, 2 + 10^3] & x_2 &= [1 \cdot 10^6, 1 + 10^6, 2 + 10^6] \\ x_3 &= [1 \cdot 10^7, 1 + 10^7, 2 + 10^7] & x_4 &= [1 \cdot 10^8, 1 + 10^8, 2 + 10^8] \end{aligned} \quad (5)$$

1.3.1 Soluzione

(a) Si è testato il codice che implementa la formula 3 su tre vettori contenenti elementi di tipo Float64. Il primo contiene solo numeri 1, il secondo contiene numeri generati a partire da una distribuzione uniforme, il terzo numeri generati a partire da una distribuzione normale. I valori sono riportati in tabella 1.

Table 1: Risultati del test della formula 3 su tre vettori di tipo Float64

Vettore	Lunghezza	Varianza attesa	Varianza (output)
Solo uno	10^3	0.000	0.000
Uniforme	10^8	0.083	0.083
Normale	10^8	1.000	1.000

I risultati di tabella 1 mostrano che l'implementazione del codice è corretta.

(b) Si è testato il codice che implementa la formula 4 su quattro vettori contenenti elementi di tipo Float32, Float64 e LongDouble. I risultati sono riportati in tabella 2.

Table 2: Valori di varianza. Metodo 1: equazione 3. Metodo 2: equazione 4.

Set	σ^2 attesa	Float32		Float64		Long Double	
		Metodo 1	Metodo 2	Metodo 1	Metodo 2	Metodo 1	Metodo 2
x_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
x_2	1.0	1.0	-131072.0	1.0	1.0	1.0	1.0
x_3	1.0	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0
x_4	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0

I risultati di tabella 2 mostrano che il calcolo della varianza con la formula 4 è più affetto dalla mancanza di precisione della rappresentazione dei numeri durante il calcolo. All'aumento della precisione di rappresentazione, il risultato della formula 4 si avvicina a quello atteso. C'è da notare che anche la formula 3 è affetta dalla stessa problematica, ma in maniera meno evidente. Basti osservare il risultato del metodo 1 per il vettore x_4 in Float32, che è 0.0, contro l'atteso 1.0.

Parte del problema risiede nella cancellazione numerica. Infatti, per valori degli elementi del vettore molto grandi, la differenza tra il quadrato della somma e la somma dei quadrati è molto piccola e incorre in problema di cancellazione. Per verificare questa affermazione, si riportano in tabella 3 i valori della differenza $u - \frac{v^2}{n}$ per la formula 4.

Table 3: Differenza $u - \frac{v^2}{n}$ per ciascun dataset.

Dataset	Single	Double	Long Double
x_1	2.0	2.0	2.0
x_2	-262144.0	2.0	2.0
x_3	0.0	2.0	2.0
x_4	0.0	0.0	2.0

Leggendo la tabella 3 possiamo notare che per il dataset x_1 la differenza è esattamente 2.0, il risultato atteso. Per il dataset x_2 la differenza è molto grande, -262144.0 , indice di un significativo problema di cancellazione numerica. Per il dataset x_3 e x_4 la differenza è 0.0. Evidentemente i singoli valori u e $\frac{v^2}{n}$ distano tra loro meno del floating point number più vicino, la loro differenza è quindi zero.

Per concludere, possiamo dire che la formula 4 è più efficiente in termini di tempo di calcolo, ma è più affetta da errori numerici rispetto alla formula 3.

1.4 Esercizio 1.4.2

Sia $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

- (a) Trova il numero di condizionamento $\kappa_f(x)$. Qual è il massimo di $\kappa_f(x)$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$?
 (b) Usa l'algoritmo "naive"

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad (6)$$

per calcolare $f(x)$ per $x = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \dots, 10^{-16}$.

- (c) Crea un secondo algoritmo utilizzando i primi n termini della serie di McLaurin, cioè

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)!}x^n. \quad (7)$$

Valutalo sugli stessi valori di x del punto (b). Per farlo devi scegliere un valore per n . Verifica la stabilità del risultato al variare di n . Avresti potuto indovinare un buon valore di n fin dall'inizio?

- (d) Confronta i risultati delle due implementazioni in funzione di x . Quale algoritmo pensi sia più accurato, e perché?

1.4.1 Soluzione

- (a) Il numero di condizionamento di una funzione f è definito come:

$$\kappa_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|. \quad (8)$$

Per la funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}. \quad (9)$$

Quindi il numero di condizionamento diventa:

$$\kappa_f(x) = \left| \frac{x \left(\frac{e^x(x-1)+1}{x^2} \right)}{\frac{e^x-1}{x}} \right| = \left| \frac{e^x(x-1)+1}{(e^x-1)x} \right| = \left| \frac{e^x x}{(e^x-1)} - 1 \right|. \quad (10)$$

La derivata di $k_f(x)$ non si annulla mai nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$, e $\kappa_f(0) = 0$. Dato che $\kappa_f(x)$ è monotona crescente per $x \geq 0$ e monotona decrescente per $x < 0$, il massimo si ha in $x = 1$, dove assume il valore $\kappa_f(1) = 0.58198$.

(b)-(c): Si riportano in figura 4 i risultati dei due algoritmi. La dicitura $f(x)$ si riferisce alla funzione calcolata con l'algoritmo "naive", mentre $p_n(x)$ si riferisce alla funzione calcolata con la serie di Maclaurin, fino al termine n .

Per uno studio più accurato, si riportano nelle figure 5 e 6 ingrandimenti delle curve di figura 4.

Per quanto riguarda il comportamento della funzione $f(x)$ calcolata con l'algoritmo 6, possiamo notare che per valori di x piccoli la funzione assume valori non corretti, nonostante

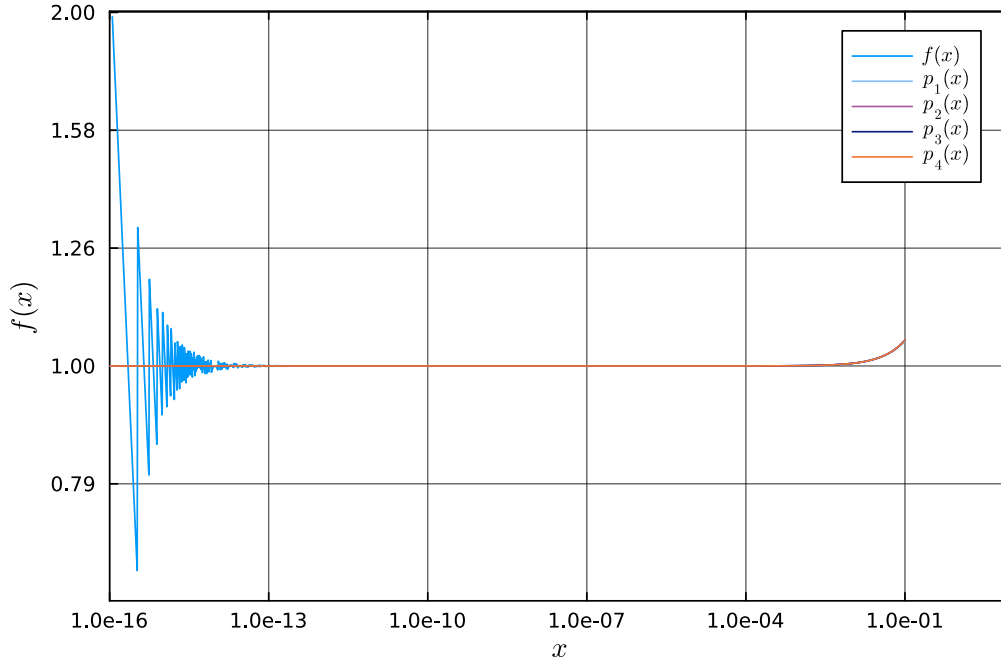


Figure 4: Confronto tra $f(x)$ e $p_n(x)$ al variare di x .

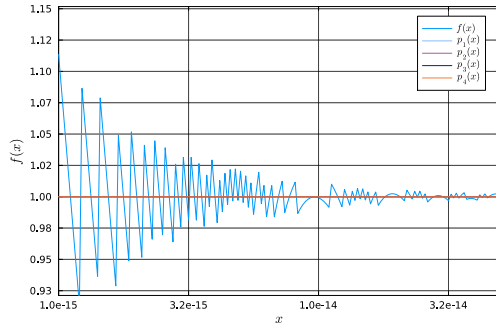


Figure 5: Ingrandimento. $x \in [10^{-15}, 10^{-14}]$.

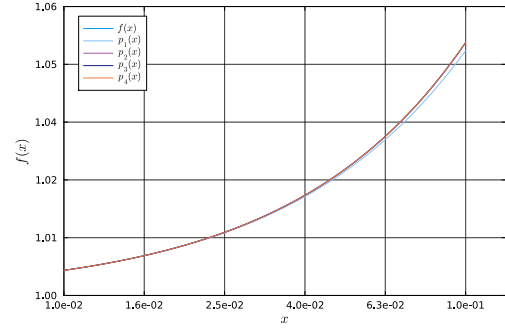


Figure 6: Ingrandimento. $x \in [10^{-2}, 10^{-1}]$.

$\kappa_f(x)$ abbia un massimo non molto grande e peraltro non assunto nell'intorno di zero. La spiegazione di questo fenomeno è che l'algoritmo 6, nonostante non abbia $\kappa_f(x)$ complessivo molto grande, è affetto da errori di cancellazione numerica a causa della forma in cui è scritta la funzione, ma non a causa del fatto che il problema sia intrinsecamente instabile. Si può perciò intuire l'esistenza di una possibile riformulazione dell'algoritmo di calcolo che non sia affetto da cancellazione numerica. Una riformulazione possibile è l'utilizzo della serie di Mc Laurin, implementata nell'algoritmo $p_n(x)$.

L'algoritmo 7 non essendo affetto da cancellazione numerica restituisce valori corretti per x piccoli. Nella regione evidenziata da figura 6 restituisce valori errati perchè ci allontaniamo dalla regione di convergenza della serie di Mc Laurin.

Osservando la figura 6 si nota che per valori di x fissati l'algoritmo 7 è stabile, cioè le curve che descrivono i valori di $p_n(x)$ sono sempre più vicine tra loro all'aumentare di n , fino a sovrapporsi.

In linea di principio si sarebbe potuto stimare a priori un buon valore di n da utilizzare per calcolare $p_n(x)$. La serie di Mc Laurin è una stima peggiore di f quanto più ci si allontana da zero. Nel caso di studio valutiamo la distanza tra i valori di $p_n(x)$ al variare di n , fissato $x = 0.1$, punto sufficientemente lontano dall'origine. Si è rappresentato in figura 7 l'andamento

della distanza tra i valori di $p_n(0.1)$ e $p_{n+1}(0.1)$ al variare di n . In formula:

$$\Delta_n = |p_n(0.1) - p_{n+1}(0.1)|. \quad (11)$$

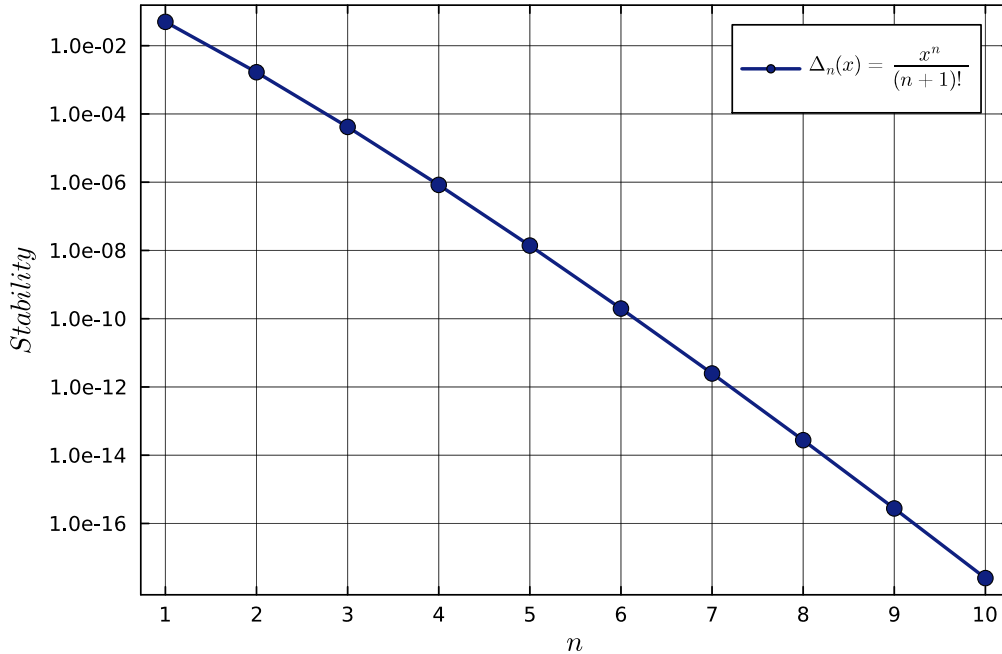


Figure 7: Distanza tra $p_n(0.1)$ e $p_{n+1}(0.1)$ al variare di n .

Ai fini di questo esercizio possiamo dire che $n = 2$ è già un buon valore perchè le distanze tra i polinomi successivi non sono apprezzabili nel range $[1, 1.06]$, caratteristico della figura 6. È chiaro che volendo raggiungere precisione massima occorrerà scegliere $n = 10$, dato che Δ_n corrispondente è più piccolo di ϵ_{mach}

(d): Come confronto tra i due algoritmi si riporta in figura 8 il grafico dell'errore tra i due algoritmi, cioè

$$\Delta(x) = |f(x) - p_n(x)|. \quad (12)$$

La figura 8 mostra un'evidente differenza tra i due algoritmi nella regione di instabilità numerica dell'algoritmo 6, cioè per valori di x piccoli. E' interessante notare che la distanza tra i due algoritmi diminuisce all'aumentare di x , ma torna ad aumentare a partire da $x = 10^{-5}$, laddove l'algoritmo 7 esce dalla regione di convergenza della serie di Mc Laurin.

Conclusioni L'algoritmo 7 è più accurato per valori di x piccoli, mentre l'algoritmo 6 è più accurato per valori di x grandi.

2 Sistemi lineari

2.1 Esercizi 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4

Scrivi una funzione che esegua la sostituzione in avanti su una matrice triangolare inferiore $n \times n$.

2. Testa il tuo codice sui seguenti sistemi lineari:

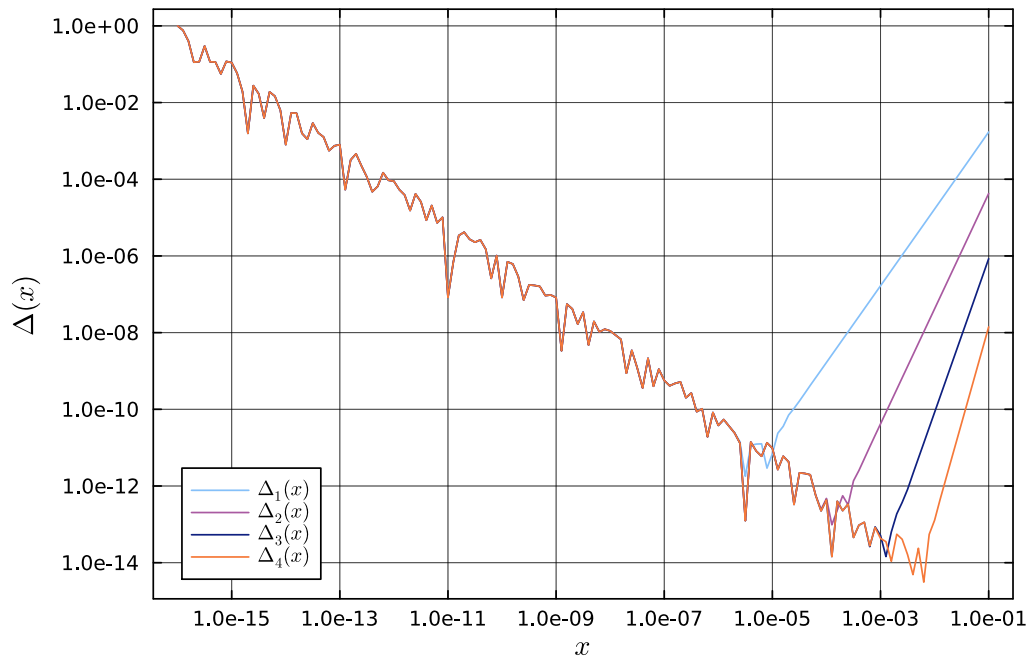


Figure 8: Distanza tra $f(x)$ e $p_n(x)$.

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Puoi verificare la soluzione risolvendo il sistema a mano e/o calcolando $\mathbf{Lx} - \mathbf{b}$.

3. Scrivi una funzione che esegua la sostituzione all'indietro su una matrice triangolare superiore $n \times n$.

4. Testa il tuo codice sui seguenti sistemi lineari:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Puoi verificare la soluzione risolvendo il sistema a mano e/o calcolando $\mathbf{Ux} - \mathbf{b}$.

2.1.1 Soluzione

Per risolvere i sistemi lineari proposti, si sono implementate le funzioni di sostituzione in avanti e all'indietro. Di seguito sono riportati i risultati delle soluzioni.

Sostituzione in avanti:

- Per il sistema (a) si ha $\mathbf{x} = [-4.0 \ 2.0 \ 1.0]$.
- Per il sistema (b) si ha $\mathbf{x} = [-4.0 \ 1.0 \ -3.0 \ 5.0]$.

Risolvendo i sistemi a mano, i valori sono:

- Per il sistema (a) si ha $\mathbf{x} = [-4 \ 2 \ 1]$.
- Per il sistema (b) si ha $\mathbf{x} = [-4 \ 1 \ -3 \ 5]$.

Sostituzione all'indietro:

- Per il sistema (a) si ha $\mathbf{x} = [1.0 \ 1.0 \ 6.0]$.
- Per il sistema (b) si ha $\mathbf{x} = [4.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 5.0]$.

Risolvendo i sistemi a mano, i valori sono:

- Per il sistema (a) si ha $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 6]$.
- Per il sistema (b) si ha $\mathbf{x} = [4 \ 1 \ 1 \ 5]$.

I risultati confermano la correttezza delle implementazioni delle funzioni di sostituzione in avanti e all'indietro.

2.2 Esercizi 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4

1. Scrivi una funzione che esegua la fattorizzazione LU di una matrice $n \times n$.
2. Per ciascuna matrice, calcola la fattorizzazione LU e verifica la correttezza.

$$\text{(A)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(B)} \quad \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(C)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Calcola il determinante delle matrici dell'esercizio 2.3.2 tramite la fattorizzazione LU.

2.2.1 Soluzione

Punti 1 e 2: Si sono implementati gli algoritmi di fattorizzazione LU, e si sono testati sui tre sistemi proposti. Le scomposizioni ottenute sono le seguenti:

$$\mathbf{L}_A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & -2.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_A = \begin{bmatrix} 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & -2.0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{L}_B = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 1.0 & -2.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} 6.0 & -2.0 & -4.0 & 4.0 \\ 0.0 & -2.0 & -4.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 5.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{L}_C = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & -0.25 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & -1.25 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_C = \begin{bmatrix} 1.0 & 4.0 & 5.0 & -5.0 \\ 0.0 & 4.0 & 4.0 & -10.0 \\ 0.0 & 0.0 & -2.0 & 6.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

Per verificare la correttezza delle scomposizioni, si è calcolato il prodotto \mathbf{LU} per ciascuna matrice e lo si è sottratto alla matrice originale. Si sono ottenute matrici di zeri, in tutti i casi, confermando la correttezza dell'algoritmo.

Punto 4: Si è calcolato il determinante delle matrici dell'esercizio 2.3.2 utilizzando la loro fattorizzazione LU. Ricordando le proprietà del determinante e che la matrice \mathbf{L} è triangolare inferiore con elementi diagonali unitari, si ha che:

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{U}). \quad (13)$$

Per il calcolo del determinante delle matrici proposte si è eseguito il prodotto degli elementi della diagonale principale della matrice \mathbf{U} . A titolo di confronto si è calcolato il determinante delle matrici con la funzione `det()` di Julia. I risultati sono riportati in tabella 4.

Table 4: Determinanti delle matrici dell'esercizio 2.

Matrice	Determinante (LU)	Determinante (Julia)
A	4.0	4.0
B	-480.0	-480.0
C	80.0	80.0

2.3 Esercizio 2.3.3

Le matrici

$$\mathbf{T}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono usate per rappresentare traslazioni e rotazioni di punti del piano in computer grafica. Per quanto segue, sia

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}(3, -1) \mathbf{R}(\pi/5) \mathbf{T}(-3, 1), \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcolare $\mathbf{b} = \mathbf{Az}$.
- (b) Trovare la fattorizzazione LU di \mathbf{A} .
- (c) Usare i fattori e le sostituzioni triangolari per risolvere $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e calcolare $\mathbf{x} - \mathbf{z}$.

2.3.1 Soluzione

- (a) Si calcola il prodotto tra le matrici \mathbf{A} e \mathbf{z} , ottenendo:

$$\mathbf{b} = \mathbf{Az} = \begin{bmatrix} 3.95 \\ 2.01 \\ 1.0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

- (b) Si calcola la fattorizzazione LU della matrice \mathbf{A} , ottenendo:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.8 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.59 & 1.16 \\ 0.0 & 1.24 & 2.42 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

(c) Si risolve il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ utilizzando le sostituzioni triangolari. Si ottiene, con le dovute approssimazioni:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} - \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -2.22 \cdot 10^{-16} \\ -4.44 \cdot 10^{-16} \\ 0.0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

2.4 Esercizi 2.4.1, 2.4.2

1. Scrivi un programma che esegua la decomposizione di Cholesky di una matrice $n \times n$.
2. Per ciascuna matrice, utilizza la decomposizione di Cholesky per determinare se è definita positiva.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.1 Soluzione

Si è implementato l'algoritmo di decomposizione di Cholesky, e si sono testate le matrici proposte. L'algoritmo è giunto a conclusione per le matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} , ma ha restituito un messaggio di errore per le matrici \mathbf{C} e \mathbf{E} , indicando che non sono definite positive. Si riportano i risultati delle decomposizioni giunte a termine, con i dovuti arrotondamenti.

$$\mathbf{R}_\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2.45 & 0.82 & 0.41 & 0.00 \\ 0.00 & 2.29 & 0.73 & 0.41 \\ 0.00 & 0.00 & 2.06 & 0.82 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.84 \end{bmatrix}$$

2.5 Esercizio 2.5.1

Consideriamo la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se $\epsilon = 0$, la fattorizzazione LU senza pivoting parziale fallisce per \mathbf{A} . Ma se $\epsilon \neq 0$, possiamo procedere senza pivoting, almeno in linea di principio.

- (a) Costruisci $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ prendendo $\epsilon = 10^{-12}$ per la matrice \mathbf{A} e $\mathbf{x} = [1, 1]$ come soluzione.
- (b) Fattorizza la matrice usando la decomposizione LU senza pivoting e risolvi numericamente per \mathbf{x} . Quanto è accurato il risultato?
- (c) Verifica la fattorizzazione LU calcolando $\mathbf{A} - \mathbf{LU}$. Funziona?
- (d) Ripeti per $\epsilon = 10^{-20}$. Quanto è accurato ora il risultato?

- (e) Calcola il numero di condizionamento della matrice \mathbf{A} ; puoi scegliere la norma che preferisci. Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è mal condizionato?
- (f) Calcola le matrici \mathbf{L} e \mathbf{U} della fattorizzazione LU di $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ a mano.
- (g) Calcola i numeri di condizionamento di \mathbf{L} e \mathbf{U} .

2.5.1 Soluzione

Per poter operare un confronto tra i risultati ottenuti con $\epsilon = 10^{-12}$ e $\epsilon = 10^{-20}$, si è scelto di trattare il punto (d) insieme ai punti (a), (b) e (c). Il pedice 1 è legato al caso $\epsilon = 10^{-12}$, il pedice 2 al caso $\epsilon = 10^{-20}$.

(a) Si è calcolato il prodotto tra la matrice \mathbf{A} e il vettore \mathbf{x} , ottenendo, a meno di arrotondamenti, i vettori:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

(b) Si è calcolata la fattorizzazione LU della matrice \mathbf{A} , ottenendo:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ -1.0 \cdot 10^{12} & 1.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} -1.0 \cdot 10^{-12} & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 \cdot 10^{12} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ -1.0 \cdot 10^{20} & 1.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} -1.0 \cdot 10^{-20} & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 \cdot 10^{20} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Si è risolto il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ utilizzando le sostituzioni triangolari, ottenendo:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

(c) Si è calcolato il prodotto tra le matrici \mathbf{L} e \mathbf{U} , in seguito lo si è sottratto ad \mathbf{A} ottenendo:

$$\mathbf{A}_1 - (\mathbf{LU})_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 - (\mathbf{LU})_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

È evidente che il risultato per $\epsilon = 10^{-12}$ è accurato contrariamente al risultato ottenuto per $\epsilon = 10^{-20}$, in cui la verifica della fattorizzazione LU non porta alla matrice di zeri.

(e) Si è calcolato $\kappa(A)$ utilizzando sia la norma 1 che la norma infinito, ottenendo lo stesso risultato a causa della natura simmetrica della matrice \mathbf{A} . La formula generale per il numero di condizionamento della matrice \mathbf{A} presa in esame è $\kappa(A) = \frac{4}{1-\epsilon}$.

$$\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = 4.0000000000004, \quad \kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = 4.0. \quad (22)$$

Come si può notare, in entrambi i casi il numero di condizionamento non è molto grande, quindi il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ non è mal condizionato.

(f) Si sono calcolate a mano le matrici \mathbf{L} e \mathbf{U} della fattorizzazione LU di \mathbf{A} per ciascun valore di ϵ . I calcoli dettagliati sono disponibili nella cartella git, nel percorso `lab_computazionale1\esercizi\pen_and_paper`. Ad ogni modo le matrici ottenute sono già state riportate al punto 2.5.1.

(g) Si sono calcolati i numeri di condizionamento di \mathbf{L} e \mathbf{U} , utilizzando sia la norma 1 che la norma infinito, ancora una volta ottenendo lo stesso numero.

Le formule generali per il numero di condizionamento delle matrici \mathbf{L} e \mathbf{U} sono:

$$\kappa_1(L) = \kappa_\infty(L) = \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)^2, \quad \kappa_1(U) = \kappa_\infty(U) = \frac{1}{\epsilon^2}. \quad (23)$$

In tabella 5 sono riassunti i risultati ottenuti.

Table 5: Valori dei numeri di condizionamento al variare di ϵ

	$\epsilon = 10^{-12}$	$\epsilon = 10^{-20}$
L	$1.0 \cdot 10^{24}$	$1.0 \cdot 10^{40}$
U	$1.0 \cdot 10^{24}$	$1.0 \cdot 10^{40}$

2.5.2 Conclusioni

L'esercizio ha mostrato come il numero di condizionamento di una matrice non sia un indicatore sufficiente per valutare l'esattezza della risoluzione del sistema lineare associato. Sebbene il numero di condizionamento della matrice \mathbf{A} sia relativamente basso, la risoluzione del sistema richiede il calcolo delle matrici \mathbf{L} e \mathbf{U} . Nel caso con $\epsilon = 10^{-20}$, in cui $\kappa(A) = 4.0$ si ha $\kappa(L) = 1.0 \cdot 10^{40}$ e $\kappa(U) = 1.0 \cdot 10^{40}$. Dato che l'algoritmo utilizza le matrici \mathbf{L} e \mathbf{U} per risolvere il sistema è evidente che l'errore numerico aumenta a causa delle stesse.

2.6 Esercizio 2.6.1

- Scrivi un programma che prenda in input una matrice \mathbf{A} e un vettore \mathbf{b} e risolva il problema dei minimi quadrati $\arg\min \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2$ utilizzando la decomposizione di Cholesky.
- Per verificare il funzionamento del tuo codice, calcola la soluzione ai minimi quadrati quando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2.6.1 Soluzione

Si è implementato l'algoritmo per il metodo dei minimi quadrati e lo si è testato sulle matrici proposte, ottenendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

2.7 Esercizio 2.6.2

Keplero ha scoperto che il periodo orbitale τ di un pianeta dipende dalla sua distanza media R dal Sole secondo la legge $\tau = cR^\alpha$, dove α è un semplice numero razionale.

- Esegui un fit lineare ai minimi quadrati utilizzando la tabella 12 per determinare il valore più probabile e semplice di α .
- Realizza un grafico dei dati e del risultato del fit.

2.7.1 Soluzione

(a) Il metodo dei minimi quadrati sviluppato durante il corso è adatto a risolvere problemi lineari. Non è il caso del problema proposto, dato che α si trova ad esponente. Per risolvere la questione si è scelto di linearizzare il problema tramite il logaritmo naturale. In formule:

$$\ln(\tau) = \ln(c) + \alpha \ln(R). \quad (25)$$

Da qui in poi si è implementato il metodo dei minimi quadrati, applicando la scomposizione di Cholesky alla matrice $n \times n$ ottenuta dal prodotto della matrice di design e la sua trasposta. Per chiarezza si riporta la matrice di design trasposta:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \ln(57.59) & \ln(108.11) & \cdots & \ln(4499.9) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

La matrice di regressione è stata costruita in modo che la prima colonna fosse composta da 1 per poter calcolare il termine noto della retta e la seconda colonna fosse composta dai logaritmi naturali delle distanze dei pianeti dal Sole.

La legge di Keplero prevista è la seguente:

$$\tau = cR^{3/2}, \quad \text{con } \alpha = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{2\pi}{\sqrt{G(M+m)}} \quad (27)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M è la massa del Sole, m è la massa del pianeta.

La regressione lineare che si vuole effettuare considera c costante nonostante dipenda dalla massa del pianeta. Consideriamo Giove, il pianeta più massivo di quelli presi in esame ($m \approx 1.90 \cdot 10^{27}$ kg). Si ha:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2\pi}{\sqrt{G(M+m)}} = 5.47 \cdot 10^{-10} \frac{\text{sec}}{m^{3/2}} = 0.203 \frac{\text{days}}{Mkm^{3/2}} \\ c_2 &= \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} = 5.47 \cdot 10^{-10} \frac{\text{sec}}{m^{3/2}} = 0.203 \frac{\text{days}}{Mkm^{3/2}} \\ \frac{c_1}{c_2} &\approx 1.0 \end{aligned}$$

Possiamo quindi affermare che la costante c è indipendente dalla massa del pianeta, entro la precisione necessaria per il nostro scopo.

Si sono quindi stimati il valore di α e della costante c , tramite la regressione, ottenendo:

$$c = 0.206 \frac{\text{days}}{Mkm^{3/2}} \quad \alpha = 1.499$$

I risultati sono in accordo con quanto atteso.

(b) Si riporta in figura 9 il grafico dei dati e relativo fit.

2.8 Esercizio 2.6.3

In questo esercizio si vuole trovare un'approssimazione della funzione periodica $g(t) = e^{\sin(t-1)}$ su un periodo, $0 < t \leq 2\pi$. Come dati, si definiscono

$$t_i = \frac{2\pi i}{60}, \quad y_i = g(t_i), \quad i = 1, \dots, 60. \quad (28)$$

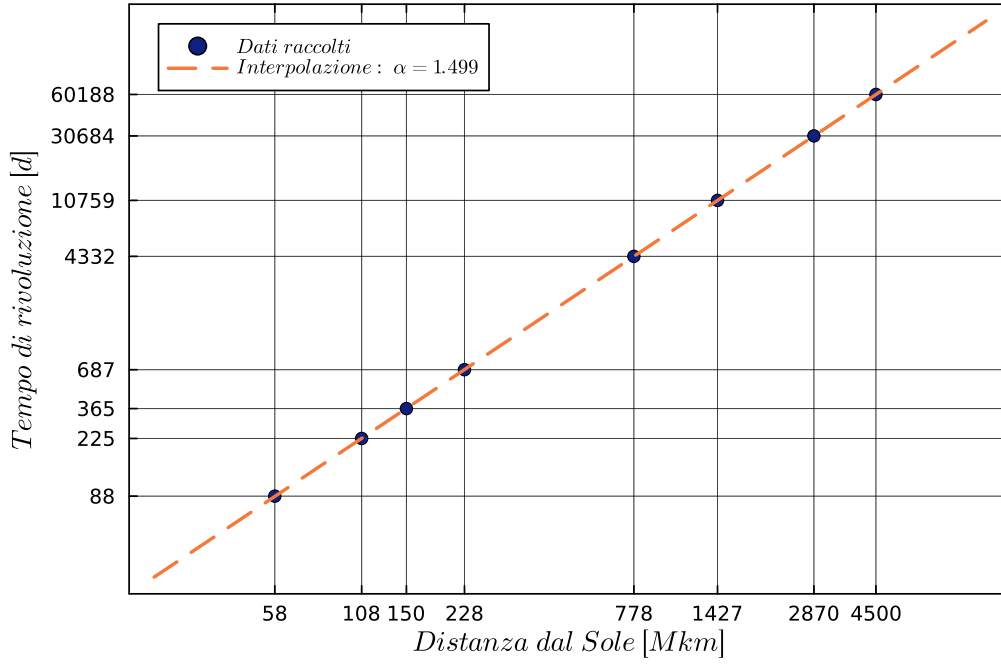


Figure 9: Fit lineare ai minimi quadrati dei dati dei pianeti del Sistema Solare.

(a) Trova i coefficienti del fit ai minimi quadrati

$$y(t) \approx c_1 + c_2 t + \dots + c_7 t^6. \quad (29)$$

Sovrapponi un grafico dei valori dei dati come punti con una curva che mostra il fit.

(b) Trova i coefficienti del fit ai minimi quadrati

$$y \approx d_1 + d_2 \cos(t) + d_3 \sin(t) + d_4 \cos(2t) + d_5 \sin(2t). \quad (30)$$

A differenza del punto (a), questa funzione di fitting è essa stessa periodica. Sovrapponi un grafico dei valori dei dati come punti con una curva che mostra il fit.

2.8.1 Soluzione

Dopo avere generato i dati richiesti, si è eseguito il metodo dei minimi quadrati con le seguenti matrici di regressione:

$$\mathbf{D}_{\text{pol}} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^6 \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{60} & \dots & t_{60}^6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\text{Four}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(t_1) & \sin(t_1) & \cos(2t_1) & \sin(2t_1) \\ 1 & \cos(t_2) & \sin(t_2) & \cos(2t_2) & \sin(2t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(t_{60}) & \sin(t_{60}) & \cos(2t_{60}) & \sin(2t_{60}) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

ottenendo i coefficienti delle formule 29 e 30:

- Coefficienti del polinomio: $[0.712; -1.351; 2.225; -0.538; -0.074; 0.033; -0.003]$
- Coefficienti della funzione di Fourier: $[1.266; -0.951; 0.611; 0.113; -0.247]$

Si riportano i grafici dei dati e dei fit in figura 10.

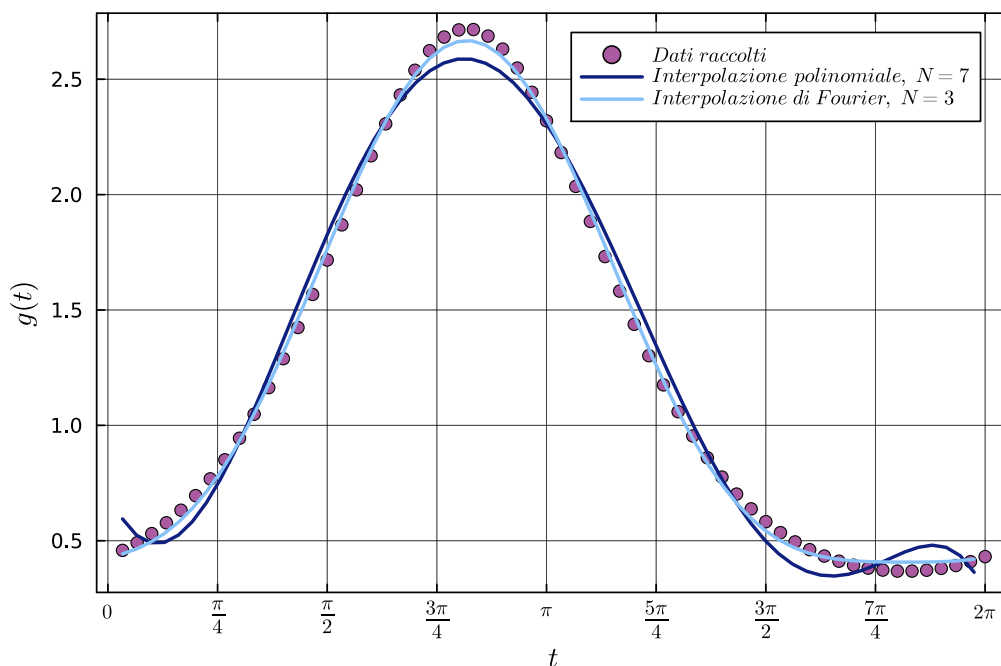


Figure 10: Fit polinomiale e di Fourier ai minimi quadrati della funzione $g(t) = e^{\sin(t-1)}$.

2.8.2 Conclusioni

In figura 10 si osserva che il fit meglio riuscito è quello di Fourier, nonostante richieda meno parametri. Il motivo è che la funzione $g(t)$ è periodica, di conseguenza il fit con modello 30 riesce a catturare meglio la periodicità della funzione rispetto al fit esguito con 29.

In un contesto sperimentale la funzione $g(t)$ non è nota a priori, anzi lo scopo dell'esperimento è solitamente quello di risalire a tale funzione. Il fatto che il fit secondo il modello di Fourier riesca meglio è indice della natura periodica del fenomeno osservato.

3 Radici di equazioni non lineari

3.1 Esercizi 3.2.1, 3.2.2

1. Implementa il metodo di bisezione e testalo con una funzione semplice, ad esempio $f(x) = x$.
2. (a) Usa il metodo di bisezione per trovare le soluzioni di $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ su $[0, 1]$.
(b) Studia la convergenza del metodo di bisezione rispetto alla radice trovata in (a). (Puoi prendere come approssimazione per la radice $r = m_{n_{\max}}$, dove n_{\max} è l'indice corrispondente all'ultima iterazione di bisezione.)

Qual è il suo ordine di convergenza q ? Puoi stimare la costante d'errore asintotica C ?

Suggerimento: Studia $d_n = -\log_{10} |x_n - r|$ come funzione di n .

3.1.1 Soluzione

(1) Si è implementato il metodo di bisezione, e si è testato con la funzione $f(x) = x$ per due intervalli: $[-1.0, 1.0]$ e $[-5.0, 1.0]$. Il motivo della scelta di questi due intervalli è che ci aspettiamo che il metodo restituisca $x = 0$ come soluzione e nel caso di intervallo simmetrico il numero di iterazioni è pari ad 1. Con un intervallo asimmetrico il test è più efficiente perchè il numero di iterazioni aumenta.

Il metodo si interrompe quando la distanza tra gli estremi risulta minore di $\max(|a|, |b|) \cdot 10^{-16}$, dove a e b sono gli estremi dell'intervallo. Il metodo ha prodotto i seguenti risultati:

- Intervallo $[-1.0, 1.0]$: $x = 0.0$ in 1 iterazione.
- Intervallo $[-5.0, 1.0]$: $x = 1.1 \cdot 10^{-162}$ in 539 iterazioni.

(2a) Si è implementato il metodo di bisezione per la funzione $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$. Il metodo ha restituito un valore della radice $r = 0.5857864376269051$ con $f(r) = 0.0$, in 50 iterazioni. In figura 11 si riporta il grafico della funzione e delle radici successive trovate.

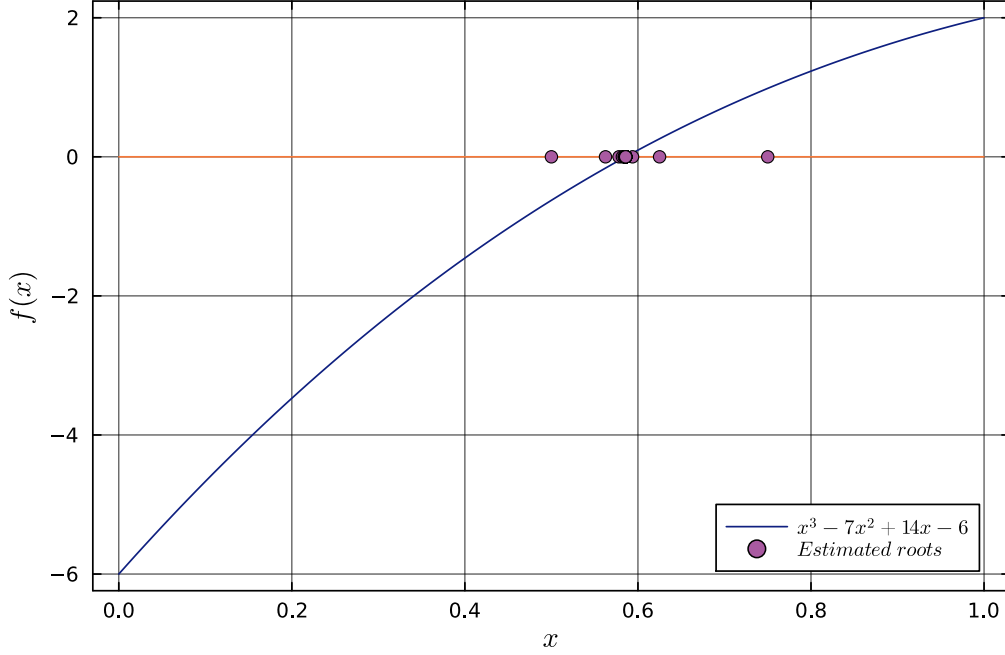


Figure 11: Grafico della funzione $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ e della radice trovata con il metodo di bisezione.

(2b) Per studiare la convergenza del metodo di bisezione bisogna fare alcune considerazioni preliminari.

È noto che per il metodo di bisezione vale la relazione $|m_n - r| < 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$, dove m_n è la stima della radice al passo n , r è la radice cercata, a_0 e b_0 sono gli estremi dell'intervallo iniziale.

Ad ogni iterazione l'intervallo viene dimezzato, in modo che al passo successivo la stima della radice si trovi in una delle due metà dell'intervallo nella quale si trovava la stima precedente. In formule: $|m_{n+1} - r| < \frac{|m_n - r|}{2}$.

Unendo le due relazioni presentate sopra si ricava $\frac{|m_{n+1} - r|}{|m_n - r|} < \frac{1}{2}$, e passando al limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|m_{n+1} - r|}{|m_n - r|} = \frac{1}{2}, \quad (32)$$

da cui si ottiene che q , ordine di convergenza, è 1, mentre C , la costante di errore asintotico, vale $\frac{1}{2}$.

Verifichiamolo numericamente, ricordando le relazioni:

Per verificare i valori teorici di q e C è necessario tenere a mente le seguenti relazioni. La prima si ottiene applicando il logaritmo decimale alla 32:

$$d_{n+1} \approx q d_n - \log_{10} |C| \quad \Rightarrow \quad \frac{d_{n+1}}{d_n} \approx q - \frac{\log_{10} |C|}{d_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q \quad (33)$$

dove $d_n = -\log_{10} |m_n - r|$.

La seconda si ottiene iterando la relazione $|x_{k+1} - r| = C|x_k - r|$:

$$|x_{k+1} - r| = C^{k+1}|x_0 - r| \quad (34)$$

Stima di q e C Per stimare q si è calcolato il rapporto tra i valori di d_n e d_{n+1} e lo si è messo in grafico in funzione di n , ottenendo la figura 12, in cui è presente un ingrandimento per i valori più alti di n .

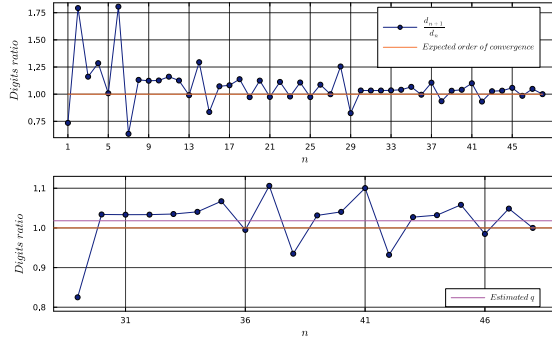


Figure 12: Stima di q

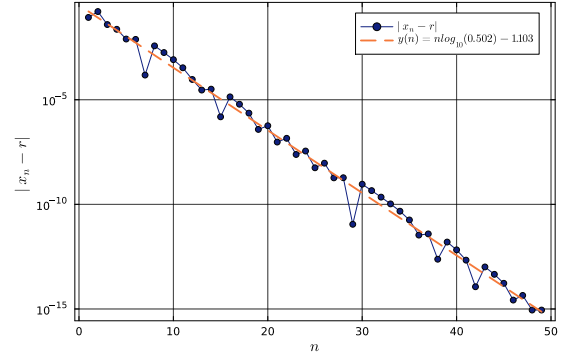


Figure 13: Stima di C

Il rapporto tende a 1, come atteso. Si vuole ora quantificare tale valore.

La relazione 33 vale per $n \rightarrow \infty$. Ciò significa che la stima di q dovrebbe essere calcolata per l' n più grande possibile. Ciononostante si è deciso di stimare il valore di q tramite l'interpolazione con funzione costante perchè il valore di q fluttua attorno a 1, ed è possibile che per n maggiori di quelli disponibili il valore cercato continui a fluttuare attorno a 1. Per l'interpolazione si sono considerati gli ultimi 20 punti della serie, riportati nell'ingrandimento di 12. Il fit su tali punti restituisce un valore di $q = 1.02$.

Per stimare C si è eseguito il fit con metodo dei minimi quadrati sul modello:

$$\log|x_{k+1} - r| = (k + 1)\log(C) + \log|x_0 - r| \rightarrow y(x) = x\log(C) + A, \quad (35)$$

avendo considerato r come l'ultimo valore di m_n calcolato. Si riporta il grafico del fit in figura 13.

Il fit ha restituito i seguenti valori:

$$C = 0.5, \quad A = -0.1. \quad (36)$$

Si osserva che il valore di C è in accordo con quanto atteso, mentre il valore di A non è significativo.

Commento: È possibile stimare i valori di q e C anche in modo diverso, e con un solo fit. Interpolando la relazione 33 con un'iperbole, e ignorando il limite, si riescono a ottenere i valori di q e C in un colpo solo. I risultati ottenuti hanno una precisione minore di quelli ottenuti con i metodi precedenti, pertanto non sono riportati. Si rimanda alla cartella `git lab\computazionale1\esercizi\3_2_2.ipynb` per i dettagli.

3.2 Esercizi 3.3.1, 3.3.2

1. Scrivi un programma che implementi il metodo di Newton.
 2. Per ciascuna delle seguenti funzioni, esegui i seguenti passi.
 - (a) Riscrivi l'equazione nella forma standard per la ricerca degli zeri, $f(x) = 0$, e calcola $f'(x)$.
 - (b) Traccia il grafico di f nell'intervallo indicato e determina quante radici sono presenti nell'intervallo.
 - (c) Usa il metodo di Newton per trovare ciascuna radice.
 - (d) Studia l'errore nella sequenza di Newton per determinare numericamente se la convergenza è approssimativamente quadratica per la radice trovata.
- Suggerimento: Studia d_{n+1}/d_n con $d_n = -\log_{10} |x_n - r|$ per verificare il tasso di convergenza q . Una volta stabilito, prova a stimare la costante d'errore asintotica C .

- $x^2 = e^{-x}$, su $[-2, 2]$
- $2x = \tan x$, su $[-0.2, 1.4]$
- $e^{x+1} = 2 + x$, su $[-2, 2]$

3.2.1 Soluzione

(1) Si è implementato il metodo di Newton, e si è testato con la funzione $f(x) = e^x - 1$ con valore iniziale $x_0 = 10$. Il metodo ha restituito il valore $-6.68 \cdot 10^{-17}$ in 16 iterazioni. Valore atteso: $x = 0$.

(2a) Le funzioni in forma di ricerca degli zeri sono:

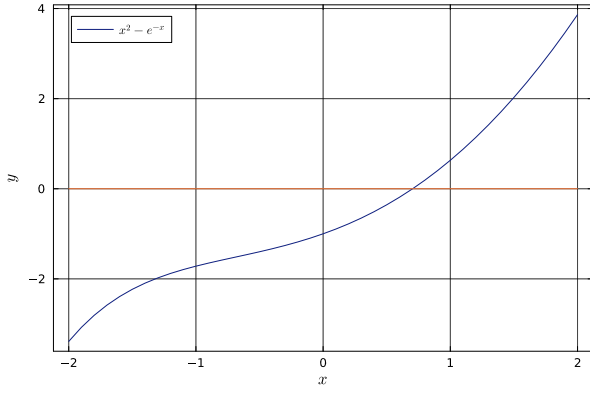
- $f_1(x) = x^2 - e^{-x}$, con $f'_1(x) = 2x + e^{-x}$, su $[-2, 2]$.
- $f_2(x) = 2x - \tan x$, con $f'_2(x) = 2 - \tan^2 x$, su $[-0.2, 1.4]$.
- $f_3(x) = e^{x+1} - 2 - x$, con $f'_3(x) = e^{x+1} - 1$, su $[-2, 2]$.

(2b) I grafici delle funzioni sono riportati in figura 14, da cui si evince che:

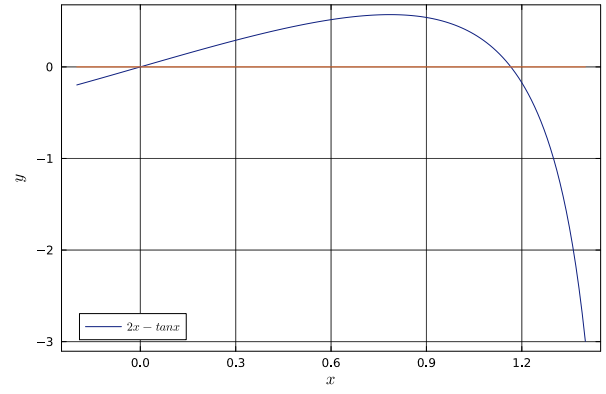
- f_1 ha una radice nell'intervallo $[-2, 2]$.
- f_2 ha due radici nell'intervallo $[-0.2, 1.4]$.
- f_3 ha una radice nell'intervallo $[-2, 2]$.

(2c) L'algoritmo di Newton è stato applicato alle tre funzioni, con i seguenti risultati:

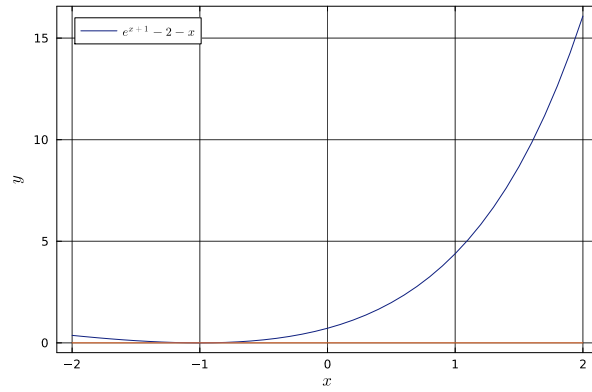
- f_1 : radice $x = 0.703$, in 8 iterazioni. Punto di partenza $x_0 = -2$.
- f_2 : radici $x_1 = 0.000$, $x_2 = 1.166$, entrambe in 7 iterazioni. Punti di partenza $x_{0,1} = 0.65$, $x_{0,2} = 1.4$.
- f_3 : radice $x = -1.000$ in 29 iterazioni. Punto di partenza $x_0 = 2$.



(a)



(b)



(c)

Figure 14: Grafici delle funzioni f_1 , f_2 e f_3 .

(2d) - Prima funzione Scopo dello studio dell'errore è verificare se i valori di q e C sono in accordo con quanto atteso. In particolare ci aspettiamo che il metodo di Newton per questo particolare zero abbia $q = 2$ e $C = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(r)}{f'(r)} \right| = 0.396$. Per determinare i valori di q , qui e nelle altre funzioni, si fa riferimento alla formula 33, e si calcola il rapporto tra i valori di d_n e d_{n+1} ; per determinare C , qui e nelle altre funzioni, si fa riferimento alla relazione $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^q} = C$. Si riportano i due grafici in figura 15.

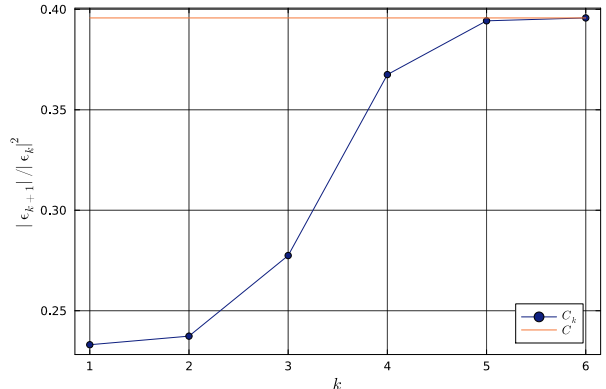
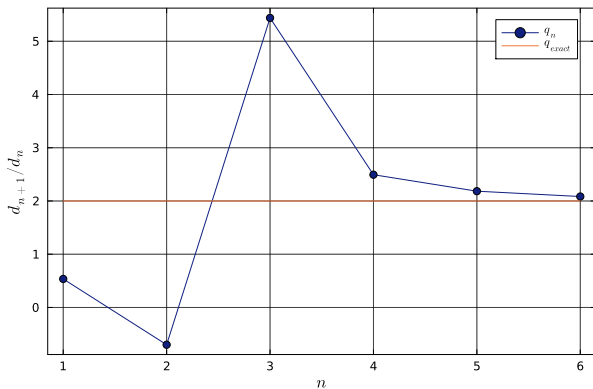


Figure 15: Studio del valore di q e C per f_1 .

Per le stime di q e C si è scelto di considerare l'ultimo punto della successione corrispondente, a causa del numero limitato di iterazioni. Si ottiene:

$$q = 2.084, \quad C = 0.396. \quad (37)$$

Si osserva che i valori ottenuti sono in accordo con quanto atteso, e quindi si può concludere che il metodo di Newton converge in modo quadratico per la radice trovata.

(2d) - Seconda funzione

Prima radice, $x = 0.0$: È importante notare che la funzione f_2 in zero ha un andamento lineare, e perciò la sua derivata seconda è nulla. Questo implica che i valori di q e C non sono determinati dalle formule precedenti, perchè tali formule sono ricavate a partire da un'espansione di Taylor al secondo ordine. Per ovviare al problema si è scelto di ricavare le formule già utilizzate ma a ordine 3. I calcoli sono riportati nella cartella `git lab\computazionale1\esercizi\pen_and_paper`.

Di seguito sono riportati i valori per q e C con le dovute correzioni:

$$q = 3, \quad C = \frac{f'''(r)}{3f'(r)} = 0.667. \quad (38)$$

In figura 16 si riportano i grafici delle successioni q_n e C_n per la prima radice di f_2 .

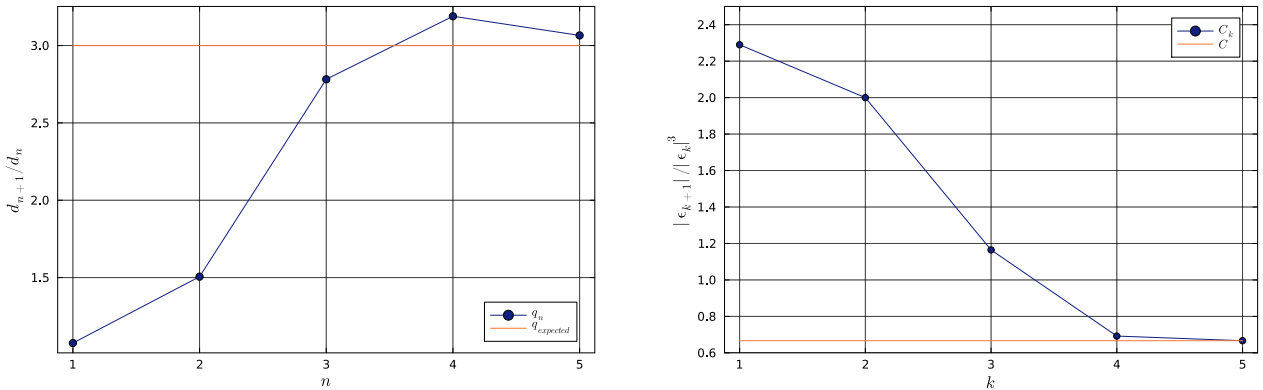


Figure 16: Studio del valore di q e C per f_2 , prima radice.

Si ottengono i seguenti valori:

$$q = 3.065, \quad C = 0.667. \quad (39)$$

Ci si può chiedere cosa succede se, non conoscendo l'andamento della funzione, si utilizzano le formule precedenti. In particolare cosa succede se si fissa $q = 2$ e si stima C come l'ultimo elemento della successione $C_n = \frac{|x_{n+1}-r|}{|x_n-r|^2}$. L'aspettativa è che C risulti nullo, dato che la derivata seconda è nulla. Il grafico corrispondente può essere trovato nella cartella `git lab_computazionale1\esercizi\3_3_2.ipynb`, e mostra che il valore di C è effettivamente nullo.

Seconda radice, $x = 1.166$: la seconda radice di f_2 non presenta problemi, così le formule sono quelle viste inizialmente. I valori attesi sono $q = 2$ e $C = 3.383$. Si riportano i grafici delle successioni q_n e C_n in figura 17. Si ottengono i seguenti valori:

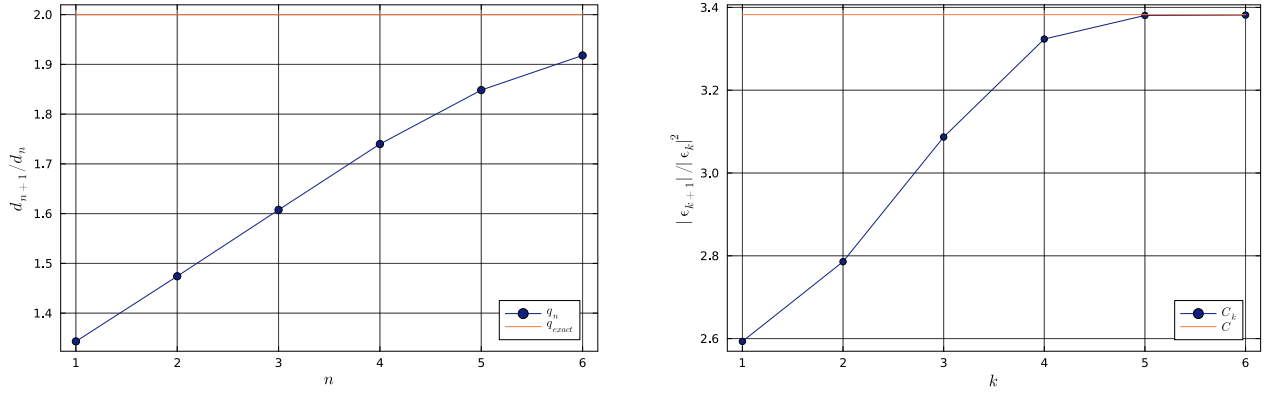


Figure 17: Studio del valore di q e C per f_2 , seconda radice.

$$q = 2.000, \quad C = \frac{f''(r)}{2f'(r)} = 3.382. \quad (40)$$

In accordo con quanto atteso, il metodo di Newton converge in modo quadratico per la radice trovata.

(2d) - Terza funzione Osservando il grafico della funzione f_3 si nota che la radice è un punto di minimo, e quindi ha una molteplicità m . D'altra parte, possiamo intuire che la radice di f_3 ha una molteplicità anche dal numero di iterazioni, molto elevato rispetto alle altre funzioni. Come è noto dalla teoria, il metodo di Newton in caso di radici multiple converge linearmente, e nella formula $\epsilon_{n+1} = C(\epsilon_n)^q$ ci aspettiamo $q = 1$. Inoltre in caso di radici multiple la costante d'errore asintotica diviene $(1 - \frac{1}{m})$.

Il primo passo è verificare il valore di q . Si riporta in figura 18 il grafico della successione q_n , da cui possiamo confermare stimare $q = 1.067$.

Si riportano in figura 18 i grafici della successione C_n , una volta senza considerare la molteplicità della radice, e una volta considerando la molteplicità della radice.

Come si può notare da 18, non avendo considerato la molteplicità della radice, il valore di C si discosta molto da quello calcolato con la solita formula $C = \frac{f''(r)}{2f'(r)}$. Invece, nel secondo grafico della stessa figura si osserva che i valori successivi di C_n si stabilizzano attorno al valore $C = 0.5$, per poi calare nuovamente a causa di errori di cancellazione numerica.

Scegliendo $C = C_{15}$ come stima del plateau si ottengono i seguenti valori:

$$C = 0.500, \quad m = 2.000, \quad (41)$$

in accordo con quanto atteso.

3.3 Esercizio 3.3.3

Traccia la funzione $f(x) = x^{-2} - \sin x$ nell'intervallo $x \in [0.5, 10]$. Per ciascun valore iniziale $x_1 = 1, x_1 = 2, \dots, x_1 = 7$, applica il metodo di Newton a f e realizza una tabella che mostri x_1 e la radice trovata dal metodo. In quale caso l'iterazione converge a una radice diversa da quella più vicina al valore iniziale? Usa il grafico per spiegare perché ciò è accaduto.

3.3.1 Soluzione

Si riporta in figura 19 il grafico della funzione $f(x) = x^{-2} - \sin x$ nell'intervallo $[0.5, 10]$, con i punti di partenza del metodo di Newton.

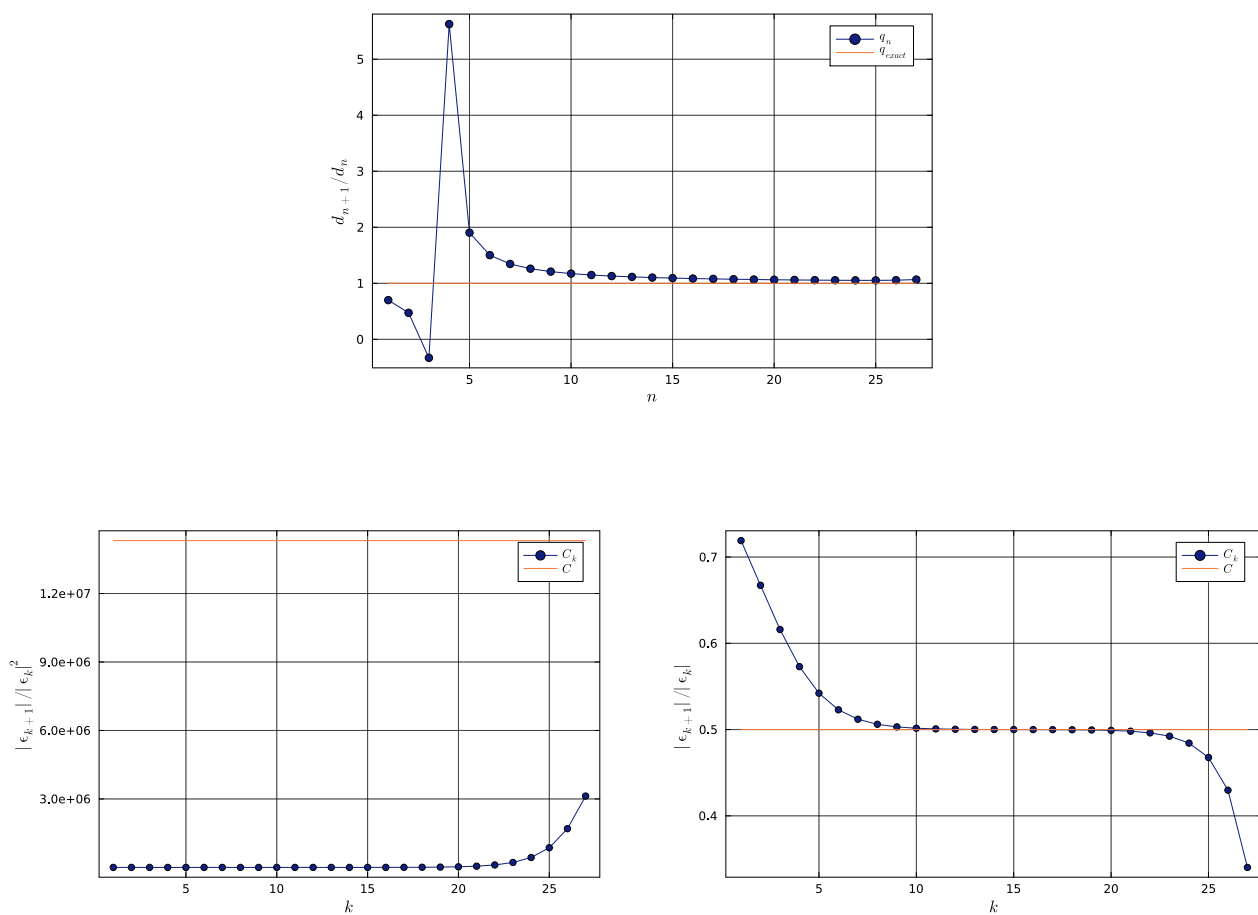


Figure 18: Studio del valore di q (sopra) e C (sotto) per f_3 .

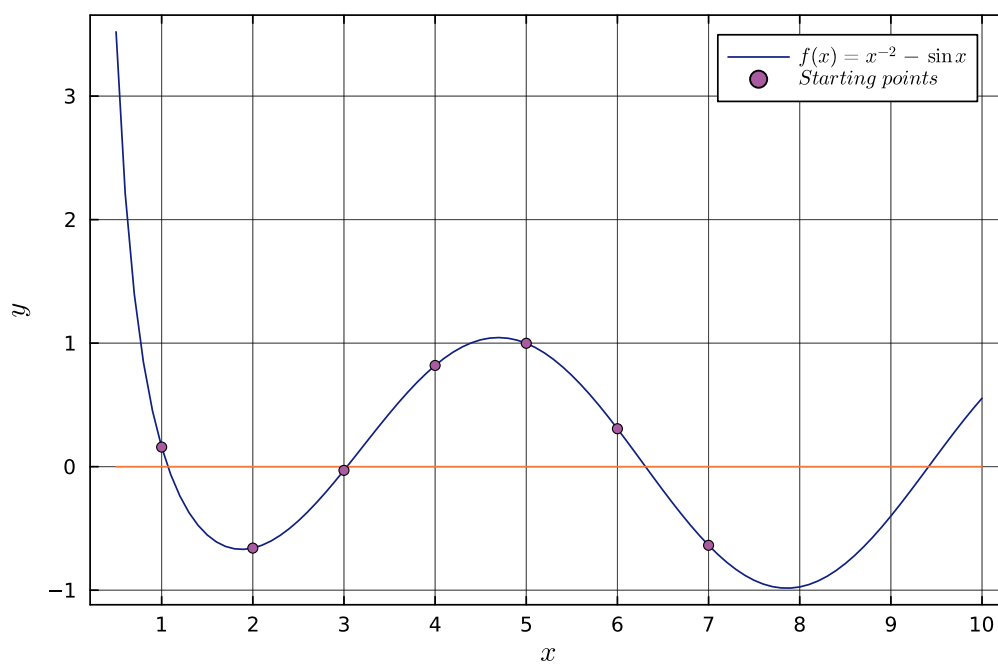


Figure 19: Grafico della funzione $f(x) = x^{-2} - \sin x$ nell'intervallo $[0.5, 10]$.

Applicando il metodo di Newton con i valori iniziali, non sempre si ottengono le radici più vicine al valore di partenza. Si riportano i risultati in tabella 6.

Table 6: Valori relativi ai punti x_1, \dots, x_7

	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	$x_6 = 6$	$x_7 = 7$
x_{start}	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
x_{root}	1.1	6.3	3.0	3.0	9.4	6.3	6.3
$f'(x)$	-2.5	0.2	0.9	0.6	-0.3	-0.9	-0.8

Le due colonne evidenziate in arancione sono i punti iniziali che non convergono alla radice più vicina. Osservando il grafico della funzione è facile osservare che i punti iniziali x_2 e x_5 sono vicini a un minimo e a un massimo locali, rispettivamente. In effetti la derivata prima in questi punti è vicina a zero, come riportato in tabella. Non è esattamente zero, altrimenti il caso sarebbe quello della seconda funzione all'esercizio 3.3.2, ma è comunque piccola: ciò significa che il metodo di Newton converge quadraticamente, ma non necessariamente alla radice più vicina.

3.4 Esercizio 3.3.4

Le proprietà più facilmente osservabili dell'orbita di un corpo celeste attorno al Sole sono il periodo τ e l'eccentricità ellittica ϵ . (Un cerchio ha $\epsilon = 0$.) Da questi parametri è possibile determinare, in ogni istante t , la *vera anomalia* $\theta(t)$. Questa è l'angolo tra la direzione del perielio (il punto dell'orbita più vicino al Sole) e la posizione attuale del corpo, visto dal fuoco principale dell'ellisse (dove si trova il Sole). Questo si ottiene tramite

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan \frac{\psi}{2} \quad (42)$$

dove l'*anomalia eccentrica* $\psi(t)$ soddisfa l'equazione di Keplero:

$$\psi - \epsilon \sin \psi - \frac{2\pi t}{\tau} = 0. \quad (43)$$

L'equazione 43 deve essere risolta numericamente per trovare $\psi(t)$, e poi la 42 può essere risolta analiticamente per ottenere $\theta(t)$. L'asteroide Eros ha $\tau = 1.7610$ anni e $\epsilon = 0.2230$. Utilizzando il metodo di Newton per la 43, realizza un grafico di $\theta(t)$ per 100 valori di t compresi tra 0 e τ , cioè per un'orbita completa.

(Nota: usa $\text{mod}(\theta, 2\pi)$ per riportare l'angolo tra 0 e 2π se vuoi che il risultato sia una funzione continua.)

3.5 Soluzione

Per prima cosa si è risolta l'equazione 43 con il metodo di Newton. Per capire meglio il procedimento si riporta l'equazione 43 nel grafico sinistro di 20, dove si osserva che la funzione ha un solo zero nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Il metodo di Newton è stato applicato al variare del tempo t , cioè è stato applicato alla stessa funzione ma traslata in verticale, come si può vedere nella figura.

Ottenuti i valori di ψ in corrispondenza dei 100 valori di t compresi tra 0 e τ , si è calcolata la vera anomalia θ tramite la relazione 42. Si riporta il grafico di $\theta(t)$ in figura sinistra di 20.

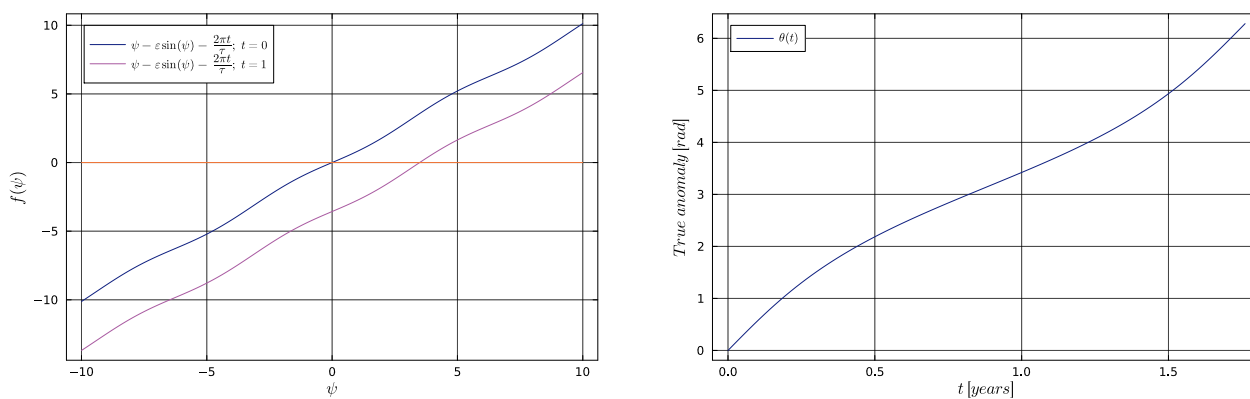


Figure 20: Grafico dell'equazione 43 (sinistra) e $\theta(t)$ (destra).

3.6 Esercizi 3.4.1, 3.4.2

1. Scrivi un programma che implementi il metodo della secante.
2. Per ciascuna delle seguenti funzioni, esegui i seguenti passi.
 - (a) Riscrivi l'equazione nella forma standard per la ricerca degli zeri, $f(x) = 0$.
 - (b) Traccia il grafico di f nell'intervallo indicato e determina quante radici sono presenti nell'intervallo.
 - (c) Per ciascuna radice determina un intervallo che la racchiuda. Poi usa il metodo della secante, partendo dagli estremi dell'intervallo, per trovare ciascuna radice.
 - (d) Per una delle radici, usa gli errori nella sequenza della secante per determinare numericamente se la convergenza è apparentemente compresa tra lineare e quadratica.
1. $x^2 = e^{-x}$, su $[-2, 2]$
2. $2x = \tan x$, su $[-0.2, 1.4]$
3. $e^{x+1} = 2 + x$, su $[-2, 2]$

3.6.1 Soluzione

(1) Si è implementato il metodo della secante e lo si è testato con la funzione $x^2 - 1$, ottenendo come radice $x = 1.0$ in 10 iterazioni.

(2a)-(2b) Per questi esercizi si rimanda alle sezioni 3.2.1 e 3.2.1.

(2c) L'algoritmo della secante è stato applicato alle tre funzioni, con i seguenti risultati:

- f_1 : radice $x = 0.703$, in 9 iterazioni. Intervallo iniziale $[1, 2]$.
- f_2 : radici $x_1 = 0.000$, $x_2 = 1.166$, in 6 e 11 iterazioni, rispettivamente. Intervalli iniziali: $[-0.1, 0.2]$ e $[0.9, 1.3]$.
- f_3 : radice $x = -1.000$ in 42 iterazioni. Intervallo iniziale $[-2, 0]$.

In generale si può notare che il numero di iterazioni nel metodo della secante è maggiore rispetto a quello del metodo di Newton, nonostante gli intervalli iniziali nel caso della secante siano stati scelti in modo da essere molto vicini alla radice. Ciò è dovuto al fatto che il metodo della secante converge con ordine del rapporto aureo, mentre il metodo di Newton converge con ordine quadratico per radici semplici.

(2d) Si è scelto di studiare l'errore della secante per la radice di f_1 . Si riporta in figura 21 il grafico della successione $d_k = |x_k - x_{k-1}|$. Come stima di q si è scelto di considerare l'ultimo punto della successione, e si ottiene $q = 1.692$, sufficientemente in accordo con $q_{atteso} = 1.618$.

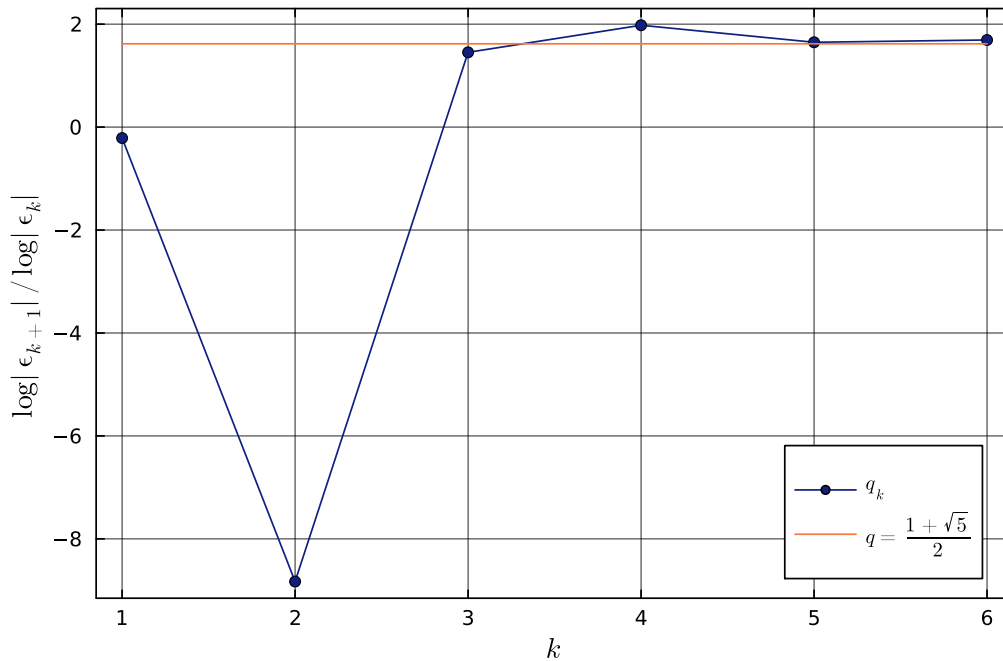


Figure 21: Studio del valore di q per la radice di f_1 .

3.7 Esercizio 3.4.3

Utilizza un grafico per localizzare approssimativamente tutte le radici di $f(x) = x^{-2} - \sin(x)$ nell'intervallo $[0.5, 10]$. Poi trova una coppia di punti iniziali per ciascuna radice tale che il metodo della secante converga a quella radice.

3.7.1 Soluzione

Si riporta in figura 22 il grafico della funzione $f(x) = x^{-2} - \sin(x)$ nell'intervallo $[0.5, 10]$, da cui si evince che la funzione ha 4 radici nell'intervallo. In figura sono riportate anche le radici stimate.

Si riportano in tabella 7 le radici stimate, i punti iniziali scelti e il numero di iterazioni necessarie per la convergenza. Possiamo osservare che le radici trovate sono in accordo con

Radice	Radice stimata	Punti iniziali	Numero di iterazioni
r_1	1.068	[1.0, 2.0]	11
r_2	3.033	[2.0, 4.0]	8
r_3	6.308	[6.0, 7.0]	7
r_4	9.413	[9.0, 10.0]	7

Table 7: Radici stimate e punti iniziali per il metodo della secante.

quelle stimate nell'esercizio 3.3 con metodo di Newton.

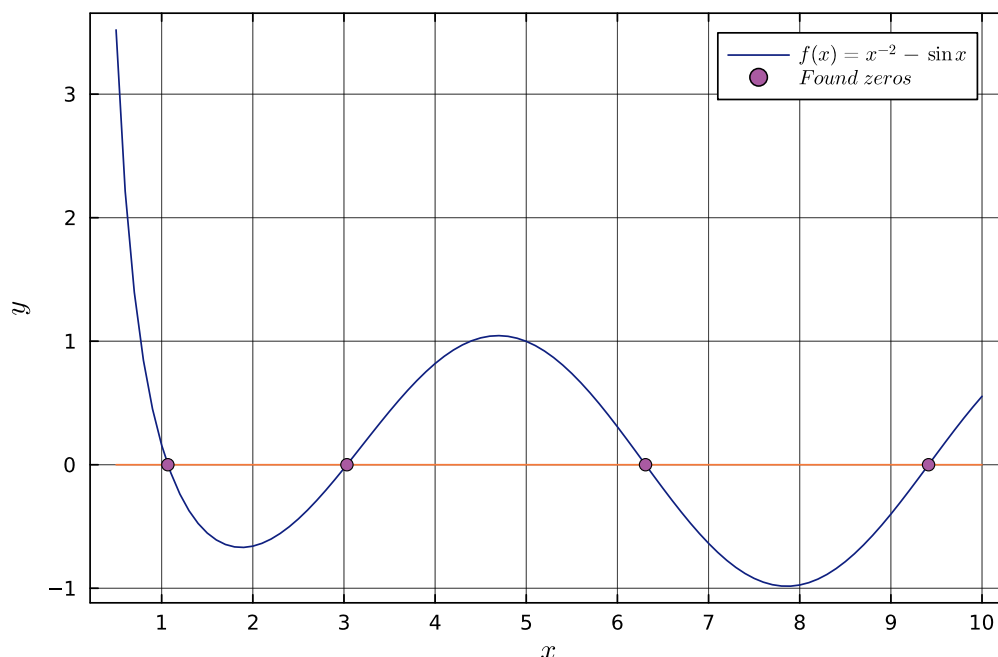


Figure 22: Grafico della funzione $f(x) = x^{-2} - \sin(x)$ nell'intervallo $[0.5, 10]$.

4 Interpolazioni

4.1 Esercizi 4.2.1, 4.2.2

1. Scrivi un programma che implementi la formula baricentrica dell'interpolazione di Lagrange per nodi in posizioni generiche.
2. In ciascun caso, interpola la funzione data usando n nodi equispaziati nell'intervallo indicato. Rappresenta graficamente ciascuna funzione interpolante insieme alla funzione esatta.

- (a) $f(x) = \ln(x)$, $n = 2, 3, 4$, $x \in [1, 10]$
- (b) $f(x) = \tanh(x)$, $n = 2, 3, 4$, $x \in [-3, 2]$
- (c) $f(x) = \cosh(x)$, $n = 2, 3, 4$, $x \in [-1, 3]$
- (d) $f(x) = |x|$, $n = 3, 5, 7$, $x \in [-2, 1]$

4.1.1 Soluzione

(1) Si è implementata la formula baricentrica dell'interpolazione di Lagrange per nodi in posizioni generiche, e la si è testata nell'esercizio 4.2.2.

(2) In questo esercizio, nonostante sia data la possibilità di utilizzare la formula baricentrica semplificata dai nodi equispaziati, si è scelto di utilizzare la formula baricentrica per nodi generici, come test dell'implementazione dell'esercizio precedente. In esercizi successivi sarà richiesto di implementare la formula baricentrica per nodi di Chebyshev, e in tale contesto si è sviluppata una funzione Julia che chiede la natura dei nodi e restituisce la funzione baricentrica corrispondente, anche per il caso equispaziato.

Si riportano i grafici delle funzioni interpolanti in figura 23.

Come si può notare, all'aumentare del numero di nodi l'interpolazione migliora. Il grafico della funzione $|x|$ però richiede un numero di nodi maggiore per essere interpolato con una certa accuratezza, ciò è dovuto alla non derivabilità della funzione in $x = 0$. Il problema è che si

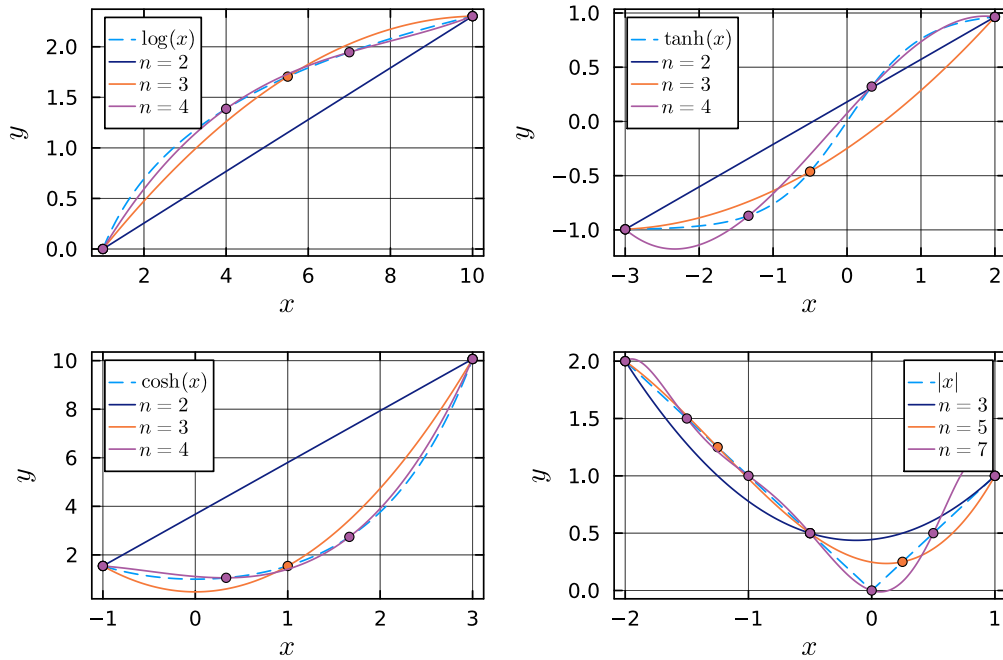


Figure 23: Grafici delle funzioni interpolanti per i vari casi.

sta cercando di interpolare una funzione non derivabile con un polinomio, che notoriamente è derivabile in ogni punto.

4.2 Esercizi 4.4.1, 4.4.2

1. Scrivi un programma che implementi la formula baricentrica dell'interpolazione di Lagrange per il caso particolare dei nodi di Chebyshev, utilizzando i risultati analitici per i pesi. Verifica la correttezza della tua implementazione confrontandola con la routine per nodi generici.

2. (a) Per ciascun caso sotto riportato, calcola il polinomio interpolante usando n nodi di Chebyshev di seconda specie in $[-1, 1]$ per $n = 4, 8, 12, \dots, 60$. Per ogni valore di n , calcola l'errore in norma ∞ (ossia, $\|f - p\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |p(x) - f(x)|$ valutato su almeno 4000 valori di x). Utilizzando una scala log-lineare, rappresenta graficamente l'errore in funzione di n e determina una buona approssimazione della costante K .

- $f(x) = 1/(25x^2 + 1)$
- $f(x) = \tanh(5x + 2)$
- $f(x) = \cosh(\sin x)$
- $f(x) = \sin(\cosh x)$

(b) Realizza un grafico analogo utilizzando n punti equidistanti per l'interpolazione.

4.2.1 Soluzione

(1) Si è implementata la formula baricentrica dell'interpolazione di Lagrange per il caso particolare dei nodi di Chebyshev, e la si è testata nell'esercizio 4.4.2, confrontandola con il caso di nodi equidistanti.

(2a) Il calcolo dell'errore in norma ∞ è stato effettuato con un passo di campionamento sulle x pari a 0.0005, in modo da ottenere 4000 punti tra -1 e 1 . Si riportano in figura 24 a sinistra

i grafici dell'errore in norma ∞ in funzione di n , per i casi delle varie funzioni.

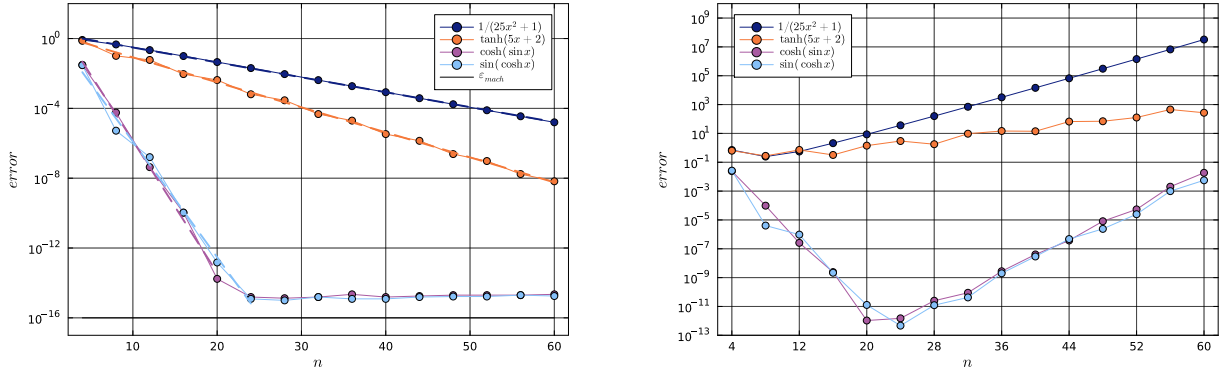


Figure 24: Errori per nodi di Chebyshev (sinistra) e nodi equidistanti (destra).

La prima osservazione che si può fare è che l'errore in norma ∞ decresce all'aumentare di n , come ci si aspetta data la scelta dei nodi di Chebyshev. La seconda osservazione è che l'errore decresce con un andamento esponenziale, fino ad arrestare la sua discesa intorno al valore di $\epsilon_{mach} = 10^{-16}$.

La relazione che ha consentito di stimare la costante K è la seguente:

$$|p(x) - f(x)| = C \cdot K^{(-n)}, \quad \log_{10} |p(x) - f(x)| = \log_{10}(C) + n(-\log_{10}(K)), \quad (44)$$

dove si è scelto di linearizzare i dati con il logaritmo per poter stimare la costante K tramite il coefficiente angolare della retta di regressione. I fit sono stati eseguiti scartando i punti corrispondenti a errori minori di 10^{-16} , e in figura 24 sono rappresentati dalle linee tratteggiate. Si riportano i valori di K ottenuti per le varie funzioni:

- $f_1(x) = 1/(25x^2 + 1)$: $K = 1.217$.
- $f_2(x) = \tanh(5x + 2)$: $K = 1.391$.
- $f_3(x) = \cosh(\sin x)$: $K = 5.704$.
- $f_4(x) = \sin(\cosh x)$: $K = 4.598$.

(2b) Si è ripetuto lo stesso procedimento con i nodi equidistanti, e si riportano in figura 24 a destra i grafici dell'errore in norma ∞ in funzione di n , per i vari casi. Come atteso, l'errore in norma ∞ non decresce globalmente all'aumentare di n . Per le prime due funzioni l'errore è crescente fin dall'inizio, mentre per le ultime due funzioni l'errore decresce fino a un certo punto, per tornare a crescere successivamente. È un comportamento noto come *fenomeno di Runge*, ed è dovuto alla scelta dei nodi equidistanti.

4.3 Esercizio 4.4.3

I punti di Chebyshev possono essere utilizzati anche quando l'intervallo di interpolazione è $[a, b]$ invece di $[-1, 1]$, tramite un opportuno cambiamento di variabile. Traccia il polinomio interpolante di $f(z) = \cosh(\sin z)$ su $[0, 2\pi]$ utilizzando $n = 40$ nodi di Chebyshev.

4.3.1 Soluzione

Il cambio di variabile utilizzato per passare da $[-1, 1]$ a $[a, b]$ è il seguente:

$$z = \psi(x) = a + (b - a) \frac{x + 1}{2}, \quad (45)$$

dove x è il nodo di Chebyshev.

L'algoritmo implementato tiene conto di questo cambio di variabile. In particolare si sono calcolati i nodi di Chebyshev, li si è trasformati con 45 e poi si è calcolato il polinomio nei nuovi punti con i soliti pesi. Si riporta in figura 25 il grafico ottenuto con $n = 40$ nodi di Chebyshev, per la funzione $f(z) = \cosh(\sin z)$ su $[0, 2\pi]$.

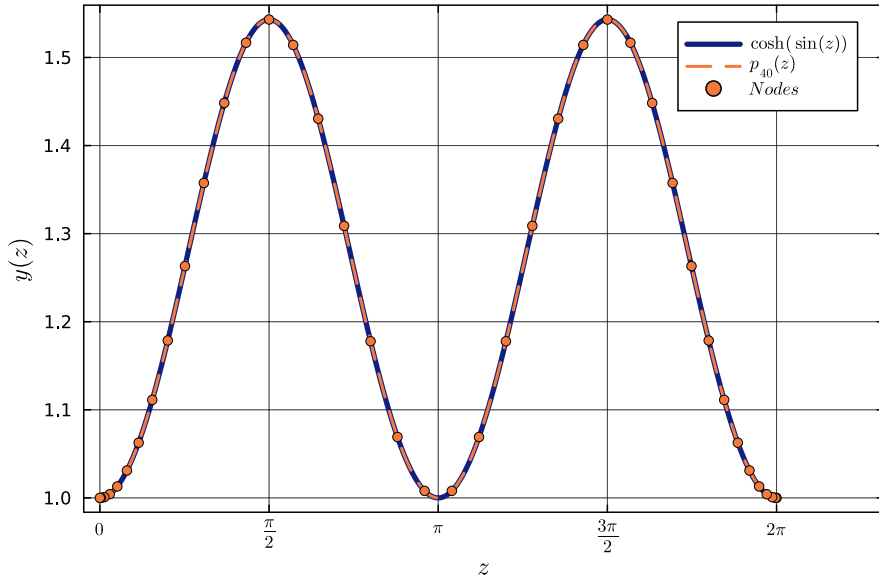


Figure 25: $f(z) = \cosh(\sin z)$ su $[0, 2\pi]$ con $n = 40$ nodi di Chebyshev.

4.4 Esercizio 4.4.4

Siano x_1, \dots, x_n i punti di Chebyshev standard. Questi vengono mappati nella variabile z come $z_i = \phi(x_i)$ per ogni i , dove ϕ è una trasformazione sulla retta reale. Supponiamo che $f(z)$ sia una funzione data, il cui dominio è l'intera retta reale. Allora i valori della funzione $y_i = f(z_i)$ possono essere associati ai nodi di Chebyshev x_i , portando a un polinomio interpolante $p(x)$. Questo implica a sua volta una funzione interpolante sulla retta reale, definita come

$$q(z) = p(\phi^{-1}(z)) = p(x). \quad (46)$$

Implementa questa idea per tracciare un interpolante di $f(z) = (z^2 - 2z + 2)^{-1}$ usando $n = 30$. Il tuo grafico deve mostrare $q(z)$ valutato in 1000 punti equispaziati in $[-6, 6]$, con marcatori sui valori nodali (quelli che ricadono nella finestra $[-6, 6]$).

Suggerimento: se preferisci evitare di gestire potenziali infiniti considera l'uso dei nodi di Chebyshev di prima specie.

4.4.1 Soluzione

Il cambio di variabile utilizzato è il seguente:

$$z = \phi(x) = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad (47)$$

La funzione Julia implementata tiene conto di questo cambio di variabile. In particolare calcola i nodi di Chebyshev del secondo tipo nell'intervallo $[-1, 1]$, che vengono denotati come x_i , e li trasformati con 47 per ottenere i nodi di Chebyshev z_i , ora distribuiti sull'intera retta reale. I punti per i quali passa il polinomio vengono indicati con $y_i = f(z_i)$.

La funzione restituisce il polinomio interpolante $q(z)$. Per calcolarlo si utilizza la trasformazione inversa di 47 per portare i punti z in cui verrà calcolato il polinomio q nell'intervallo $[-1, 1]$. A questo punto avviene l'interpolazione con i nodi di Chebyshev x_i e i valori y_i , e così il polinomio restituito interpola su tutto l'asse reale avendo calcolato l'interpolazione su un intervallo finito. Si riporta in figura 26 il grafico della funzione $f(z) = (z^2 - 2z + 2)^{-1}$ e della sua interpolazione con $n = 30$ nodi di Chebyshev. Per motivi di rappresentazione grafica l'intervallo è stato limitato a $[-6, 6]$, si noti infatti che il numero di nodi in grafico è pari a venti: i dieci restanti sono al di fuori dell'intervallo.

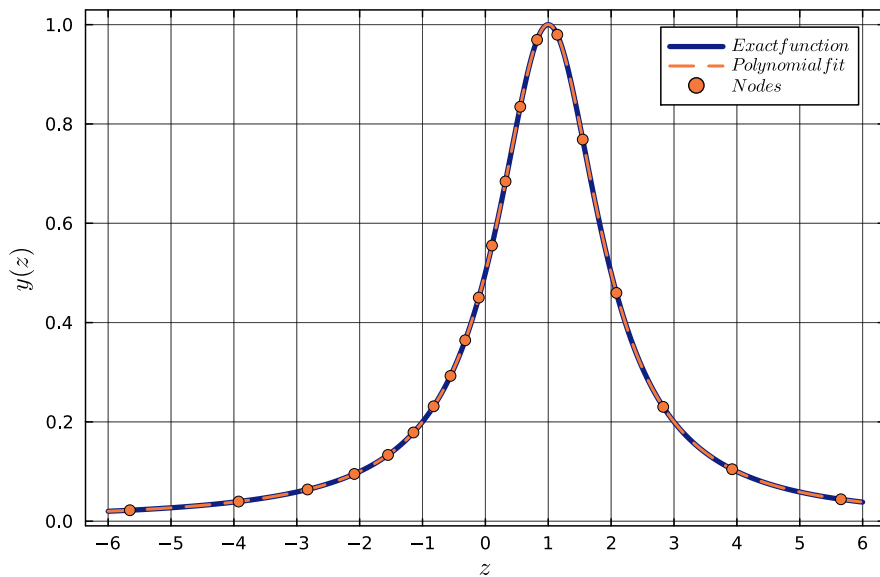


Figure 26: $f(z) = (z^2 - 2z + 2)^{-1}$ e relativa interpolazione con 30 nodi di Chebyshev.

4.5 Esercizio 4.6.1

Ognuna delle seguenti funzioni è 2-periodica. Scrivi una funzione che esegua l'interpolazione trigonometrica su $[-1, 1]$ e traccia la funzione insieme ai suoi interpolanti trigonometrici per $n = 3, 6, 9$. Poi, per $n = 2, 3, \dots, 30$, calcola l'errore in norma ∞ dell'interpolante trigonometrico campionando in almeno 1000 punti, e realizza un grafico di convergenza in scala semi-logaritmica.

- (a) $f(x) = e^{\sin(2\pi x)}$
- (b) $f(x) = \log[2 + \sin(3\pi x)]$
- (c) $f(x) = \cos^{12}[\pi(x - 0.2)]$

4.5.1 Soluzione

Ai fini dell'esercizio si è sviluppata una funzione Julia che calcola l'interpolazione trigonometrica su un intervallo $[-1, 1]$ per una funzione $f(x)$, e restituisce il polinomio interpolante. Dato che le funzioni sono 2-periodiche le si è interpolate correttamente sull'intervallo $[-1, 1]$. Per poter interpolare funzioni T-periodiche bisogna inserire nell'algoritmo un cambio di variabile, proprio come per l'esercizio 4.4.3.

(a) Si riporta in figura 27 il grafico della funzione $f(x) = e^{\sin(2\pi x)}$ e dei suoi interpolanti trigonometrici per $n = 3, 6, 9$. A fianco si riporta anche il grafico dell'errore in norma ∞ dell'interpolante trigonometrica al variare del numero di nodi, avendo campionato in 1000 punti l'intervallo.

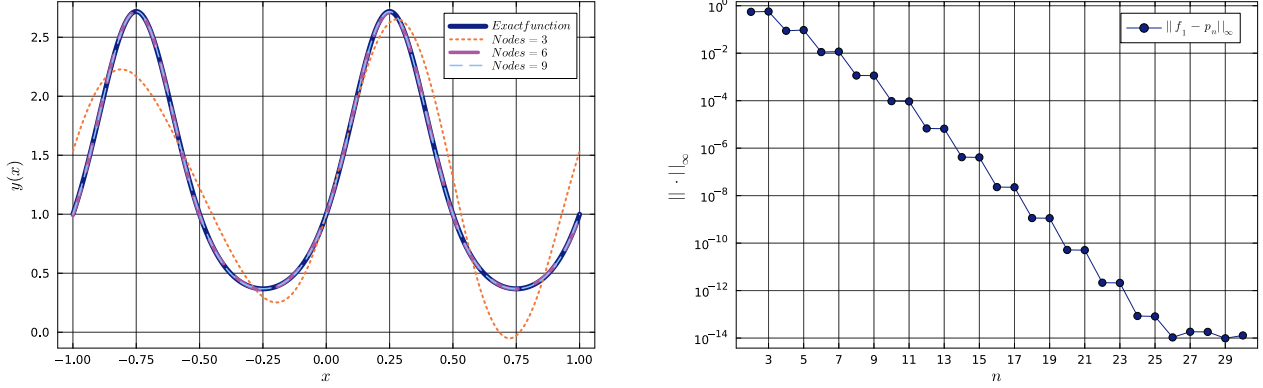


Figure 27: Studio delle interpolazioni trigonometriche per la funzione $f(x) = e^{\sin(2\pi x)}$.

(b) Si riporta in figura 28 il grafico della funzione $f(x) = \log[2 + \sin(3\pi x)]$ e dei suoi interpolanti trigonometrici per $n = 3, 6, 9$. A fianco si riporta anche il grafico dell'errore in norma ∞ dell'interpolante trigonometrica al variare del numero di nodi, avendo campionato in 1000 punti l'intervallo.

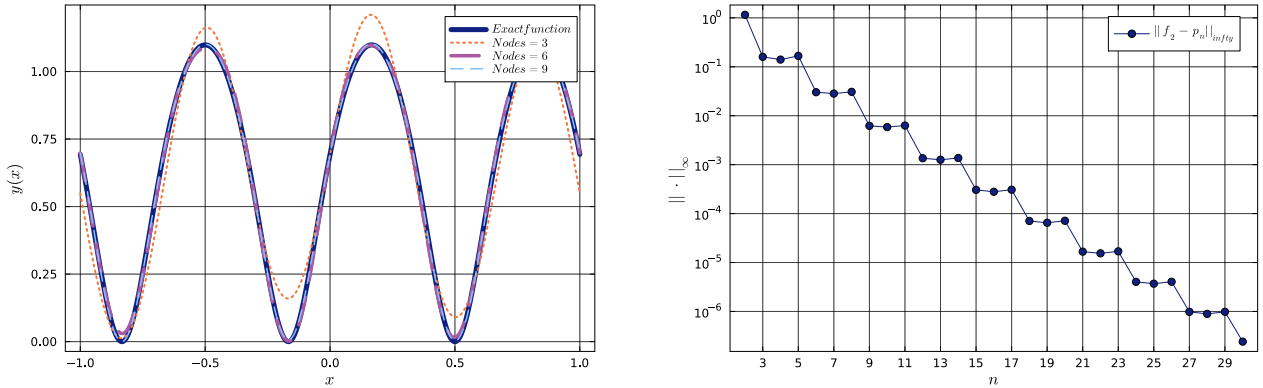


Figure 28: Studio delle interpolazioni trigonometriche per la funzione $f(x) = \log[2 + \sin(3\pi x)]$.

(c) Si riporta in figura 29 il grafico della funzione $f(x) = \cos^{12}[\pi(x - 0.2)]$ e dei suoi interpolanti trigonometrici per $n = 3, 6, 9$. A fianco si riporta anche il grafico dell'errore in norma ∞ dell'interpolante trigonometrica al variare del numero di nodi, avendo campionato in 1000 punti l'intervallo.

Osservazioni Si osserva che l'errore in norma ∞ diminuisce all'aumentare del numero di nodi in tutti e tre i casi, confermando la convergenza dell'interpolazione trigonometrica. In generale l'errore non diminuisce mai oltre il valore di 10^{-14} per motivazioni legate alla rappresentazione numerica. È interessante notare che in tutti e tre i casi l'errore ha un andamento a gradino. Questo fenomeno mostra che l'aggiunta di nodi non sempre migliora l'accuratezza dell'interpolazione, anche se globalmente l'errore diminuisce.

Curioso infine è il comportamento dell'errore per la terza funzione, in cui per $n = 12$ si osserva

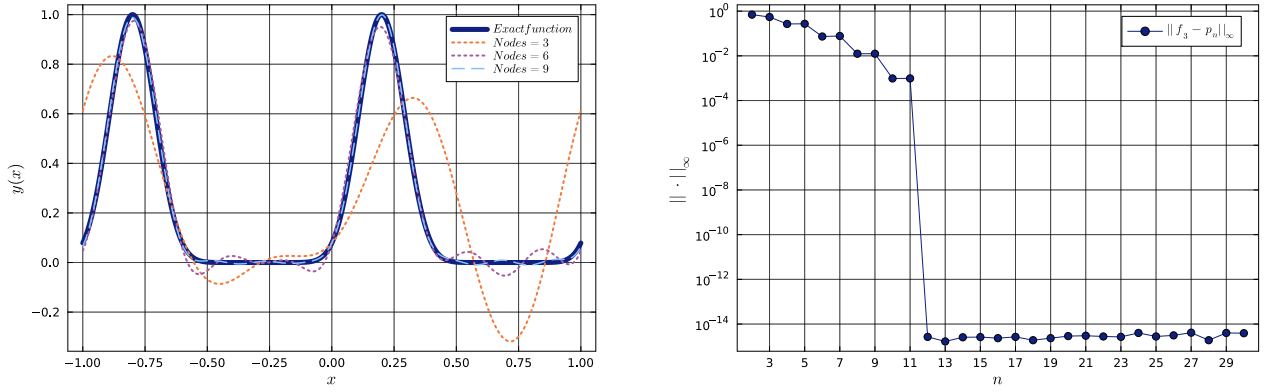


Figure 29: Studio delle interpolazioni trigonometriche per la funzione $f(x) = \cos^{12}[\pi(x - 0.2)]$.

una diminuzione drastica dell'errore. Sulle ragioni di questo fatto si è avanzata una spiegazione. Osservando il grafico 29 si nota che all'aumento di n le zone che sono peggio approssimate sono quelle di appiattimento della funzione, e cioè sono quelle che contribuiscono all'errore, calcolato come il massimo della distanza tra la funzione e il polinomio interpolante, su tutto l'intervallo. La figura 30 è un ingrandimento di figura 29 nella regione interessata e si osserva che per $n = 12$ il polinomio interpolante si appiattisce definitivamente, con la conseguente riduzione dell'errore.

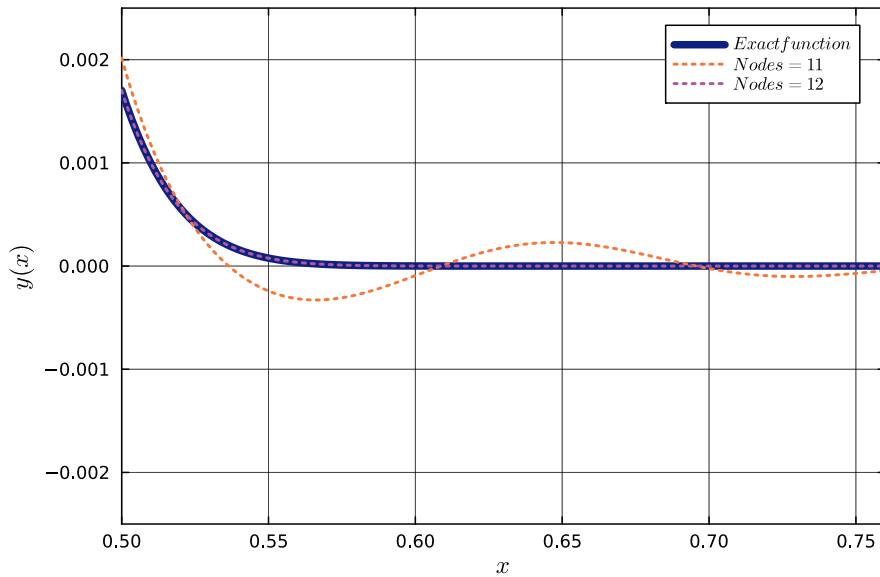


Figure 30: Ingrandimento della figura 29 nella regione di appiattimento della funzione.

5 Integrazione numerica

5.1 Esercizi 5.1.1, 5.1.2

1. Scrivi un programma che implementi la regola del trapezio composta per un intervallo generico $[a, b]$.
2. Per ciascuno dei seguenti integrali, utilizza la regola del trapezio per stimare il valore dell'integrale con $m = 10 \cdot 2^k$ nodi, per $k = 1, 2, \dots, 10$. Per ogni caso, rappresenta in scala log-log l'errore in funzione di m e verifica se la convergenza è di secondo ordine.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \int_0^1 x \log(1+x) dx = \frac{1}{4} & \text{(b)} \quad & \int_0^1 x^2 \tan^{-1} x dx = \frac{\pi - 2 + 2 \log 2}{12} \\
\text{(c)} \quad & \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2} & \text{(d)} \quad & \int_0^1 \frac{\tan^{-1}(\sqrt{2+x^2})}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}} dx = \frac{5\pi^2}{96} \\
\text{(e)} \quad & \int_0^1 \sqrt{x} \log(x) dx = -\frac{4}{9} & \text{(f)} \quad & \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

5.1.1 Soluzione

(1) Si è implementata la regola del trapezio composta per un intervallo generico $[a, b]$, e la si è testata nell'esercizio 5.1.2.

(2) Si è calcolato l'integrale con la regola del trapezio per tutti i casi, al variare del numero di nodi. Oltre ai grafici dell'errore, si sono rappresentate le derivate seconde delle integrande, in modo verificare la convergenza della regola del trapezio. Infatti l'errore della regola del trapezio scala al secondo ordine con il passo di campionamento, ma ha per coefficiente la derivata seconda dell'integranda, calcolata in un certo ξ appartenente all'intervallo di integrazione. In formule:

$$R_T(h) = -\frac{(b-a)^3}{12} h^2 f''(\xi)$$

Si riportano nelle figure 31, 32, 33, 34, 35, 36 gli studi dei vari casi.

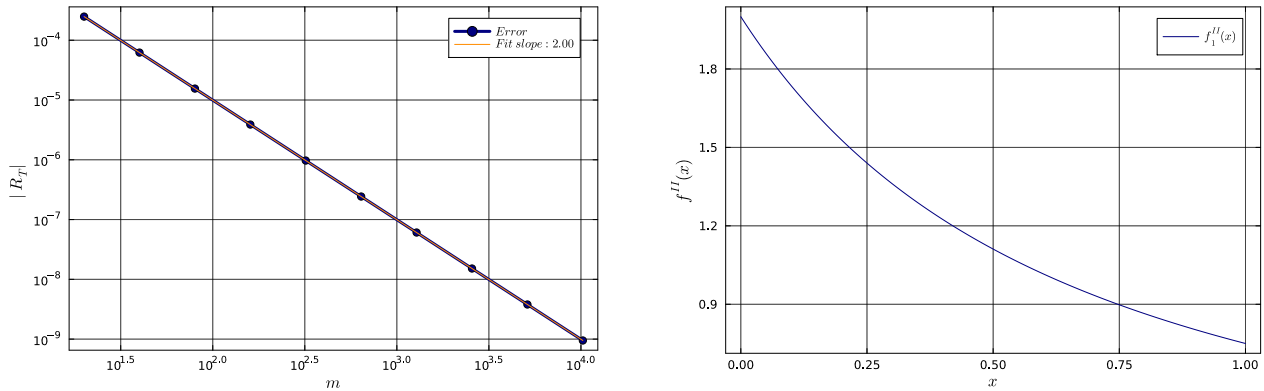


Figure 31: Studio della regola del trapezio per l'integrale $\int_0^1 x \log(1+x) dx$.

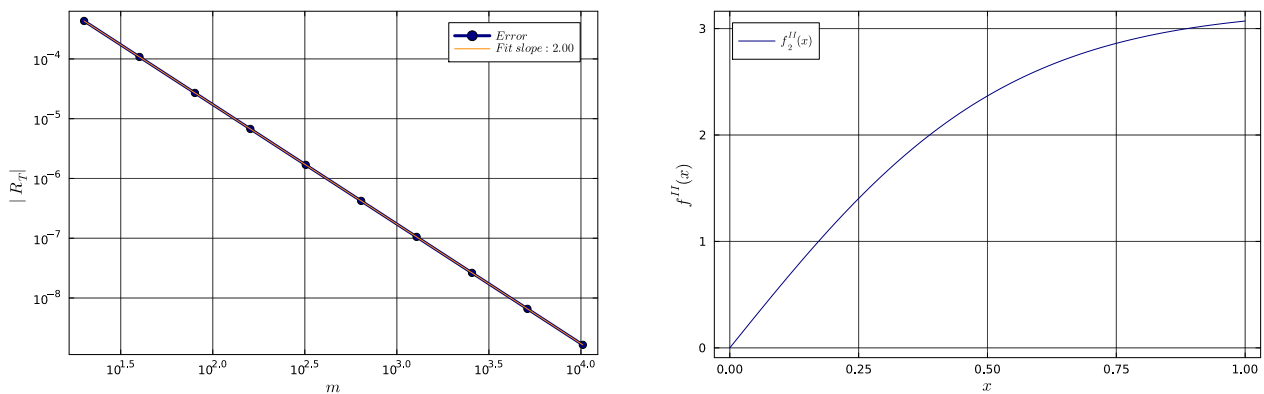


Figure 32: Studio della regola del trapezio per l'integrale $\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x dx$.

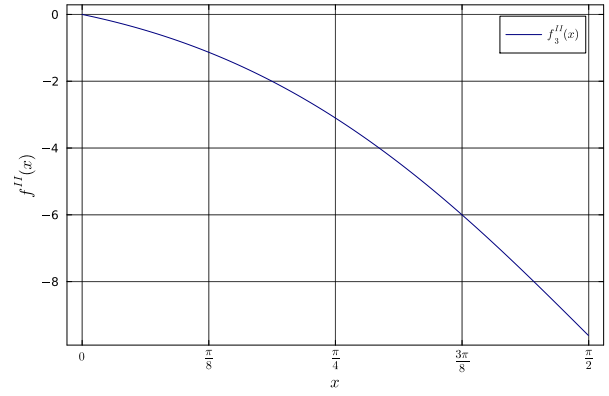
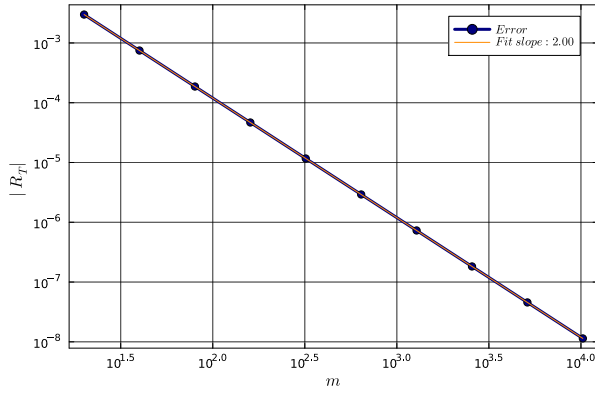


Figure 33: Studio della regola del trapezio per l'integrale $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$.

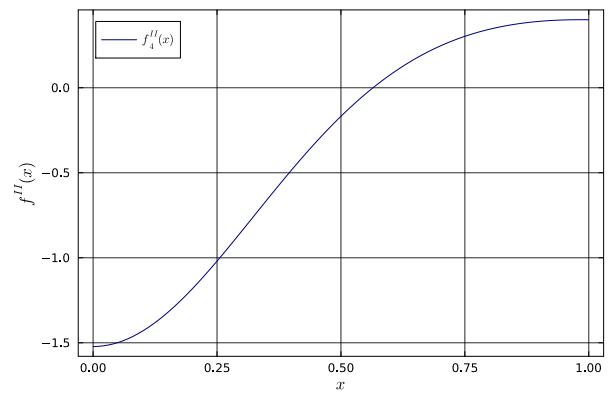
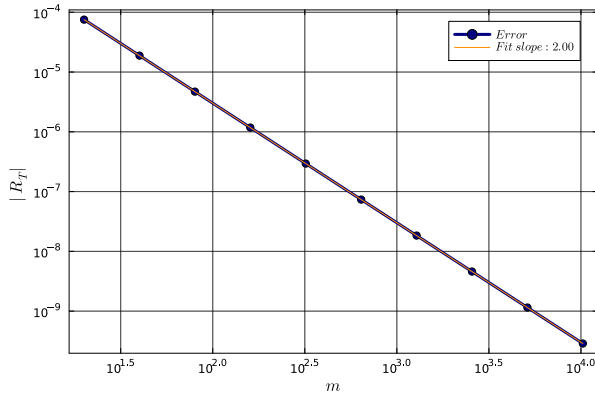


Figure 34: Studio della regola del trapezio per l'integrale $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}(\sqrt{2+x^2})}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}} \, dx$.

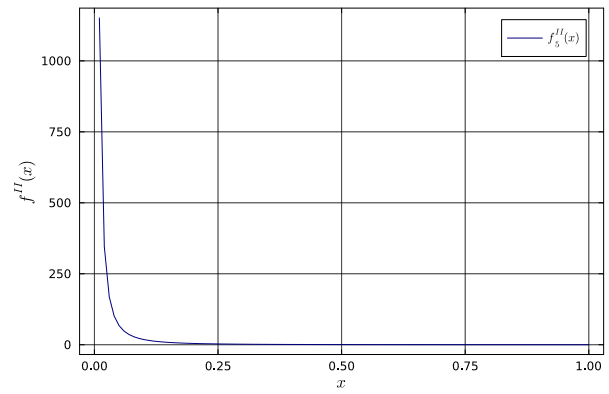
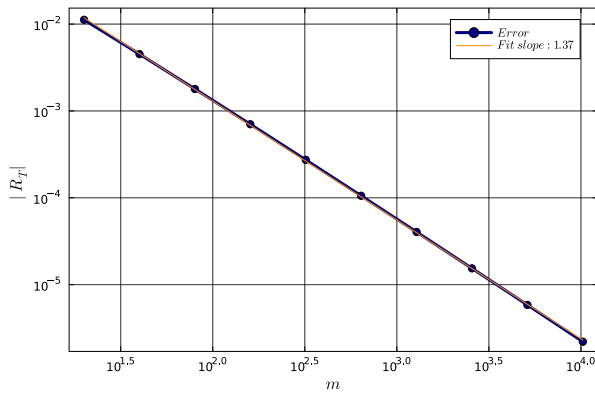


Figure 35: Studio della regola del trapezio per l'integrale $\int_0^1 \sqrt{x} \log(x) \, dx$.

Nei grafici viene riportata la pendenza dell'interpolante dell'errore. Nei primi quattro casi l'errore decresce con un andamento quadratico nel passo h , come atteso. Nel quinto e sesto caso l'errore decresce con un ordine inferiore. Come già accennato, questo è dovuto al fatto che l'integranda ha derivata seconda discontinua nel dominio di integrazione.

Commento: Qui e nei prossimi esercizi l'interpolazione per l'errore R_T (o R_S) è stata eseguita in funzione del passo h , anche se in grafico viene riportata rispetto al numero di nodi m . Ciò vuole dire che le pendenze si riferiscono non alla retta rappresentata ma alla retta interpolata, rappresentando l'ordine di convergenza del metodo studiato.

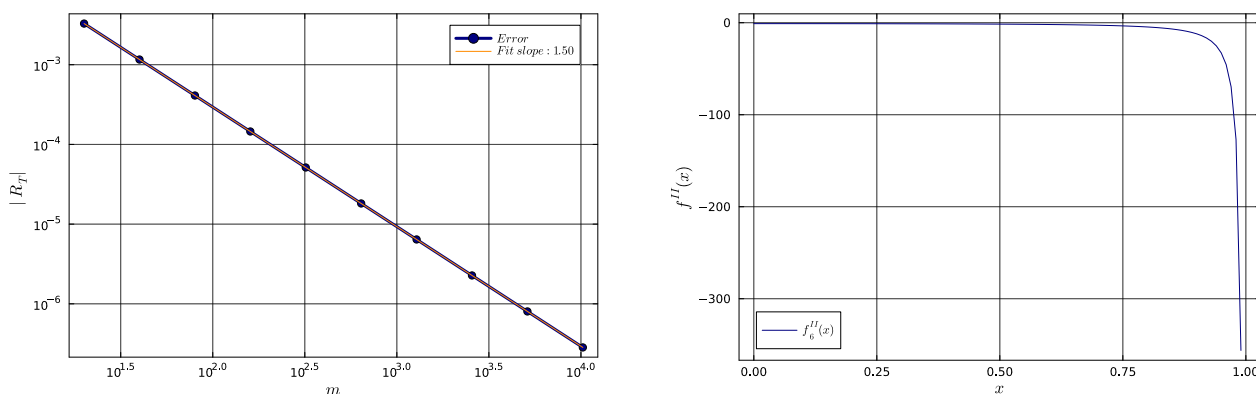


Figure 36: Studio della regola del trapezio per l'integrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

5.2 Esercizi 5.1.3, 5.1.4

3. Scrivi un programma che implementi la regola di Simpson composta per un intervallo $[a, b]$.
4. Per ciascun integrale dell'esercizio 5.1.1, applica la formula di Simpson e confronta gli errori con la convergenza di ordine quattro.

5.2.1 Soluzione

(3) Si è implementata la regola di Simpson composta per un intervallo $[a, b]$, e la si è testata nell'esercizio 5.1.4.

(4) Si è calcolato l'integrale con la regola di Simpson per tutti i casi, al variare del numero di nodi. Per le stesse ragioni dell'esercizio 5.1.2 si sono rappresentate, oltre ai grafici dell'errore, le derivate quarte dell'integranda. Nel caso di Simpson la formula dell'errore è:

$$R_S(h) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \text{con } \xi \in (a, b)$$

Si riportano nelle figure 37, 38, 39, 40, 41, 42 gli studi dei vari casi.

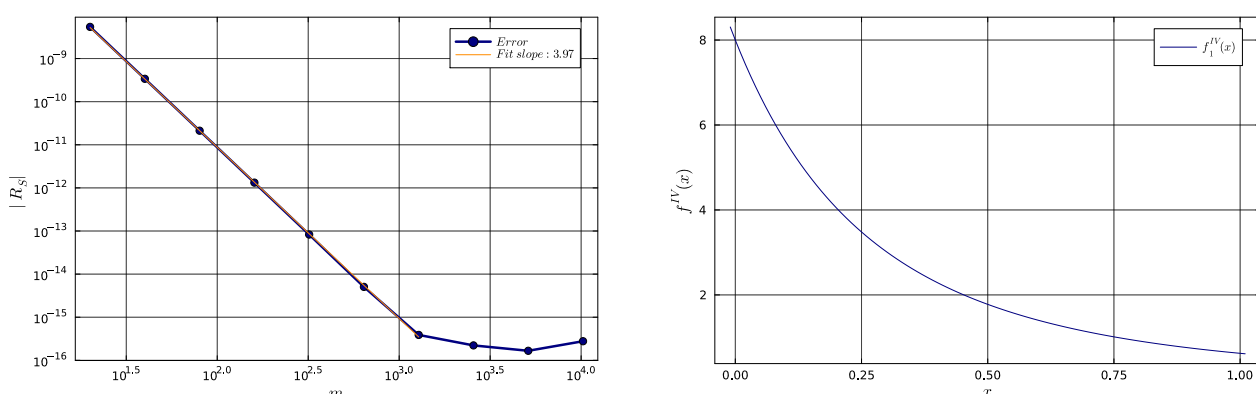


Figure 37: Studio della regola di Simpson per l'integrale $\int_0^1 x \log(1+x) dx$.

Si può osservare che l'errore decresce con un andamento quartico nei primi quattro casi, e con uno di ordine inferiore negli altri due. Nei primi quattro casi, si osserva che l'errore diminuisce rapidamente fino a ε_{mach} , per poi stabilizzarsi per motivazioni numeriche. Chiaramente l'interpolazione dell'errore è stata eseguita solo sui punti che si trovano al di sopra di questo valore.

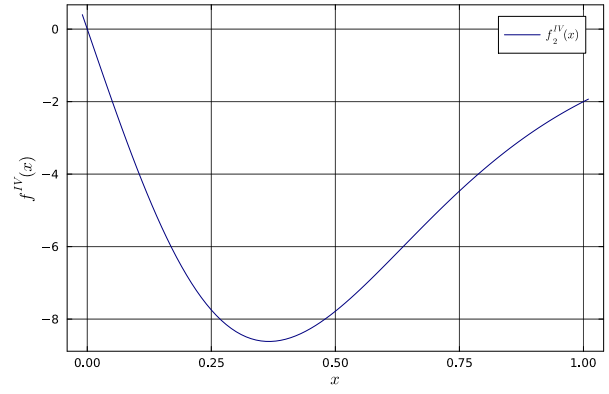
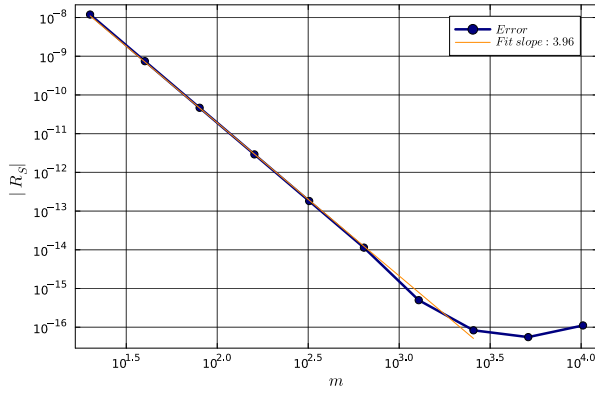


Figure 38: Studio della regola di Simpson per l'integrale $\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x \, dx$.

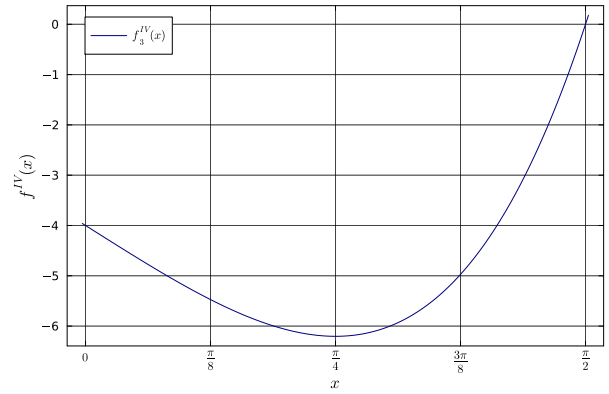
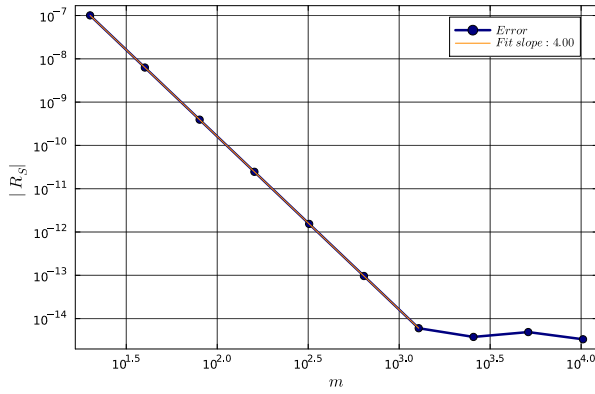


Figure 39: Studio della regola di Simpson per l'integrale $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$.

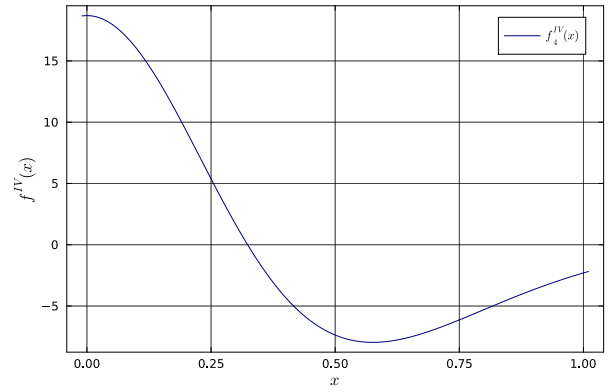
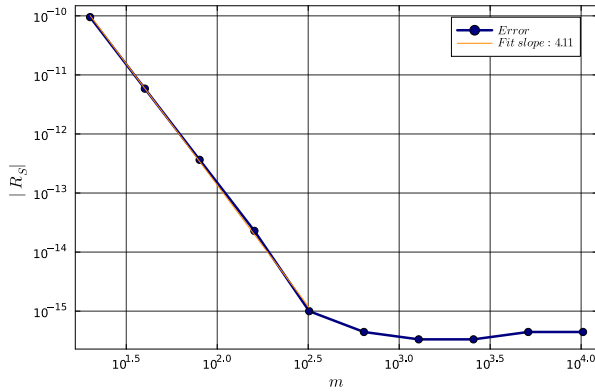


Figure 40: Studio della regola di Simpson per l'integrale $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}(\sqrt{2+x^2})}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}} \, dx$.

5.3 Esercizio 5.3.1

1. Scrivi un programma che calcoli i nodi e i pesi per la quadratura di Gauss-Legendre nell'intervallo $[-1, 1]$. Di seguito alcuni suggerimenti per l'implementazione.
 - (a) Per trovare le radici x_k , con $k = 1, \dots, n$, del polinomio di Legendre $P_n(x)$ di ordine n , usa il metodo di Newton. Come condizione iniziale per la k -esima radice, utilizza

$$x_k^{(0)} = \cos(\phi_k), \quad \phi_k = \frac{4k-1}{4n+2}\pi. \quad (48)$$

- (b) Per applicare il metodo di Newton è necessario valutare $P_n(x_k^{(i)})$ e la derivata $P'_n(x_k^{(i)})$,

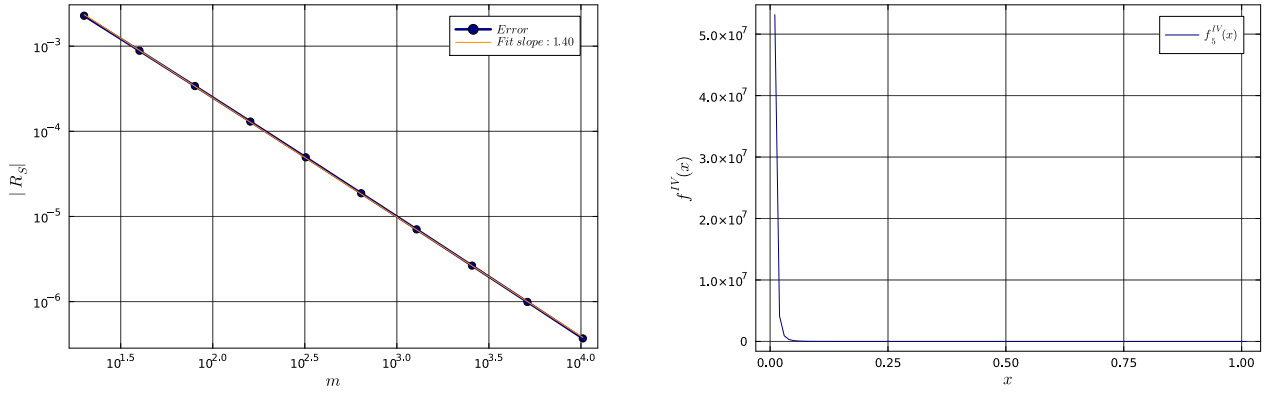


Figure 41: Studio della regola di Simpson per l'integrale $\int_0^1 \sqrt{x} \log(x) dx$.

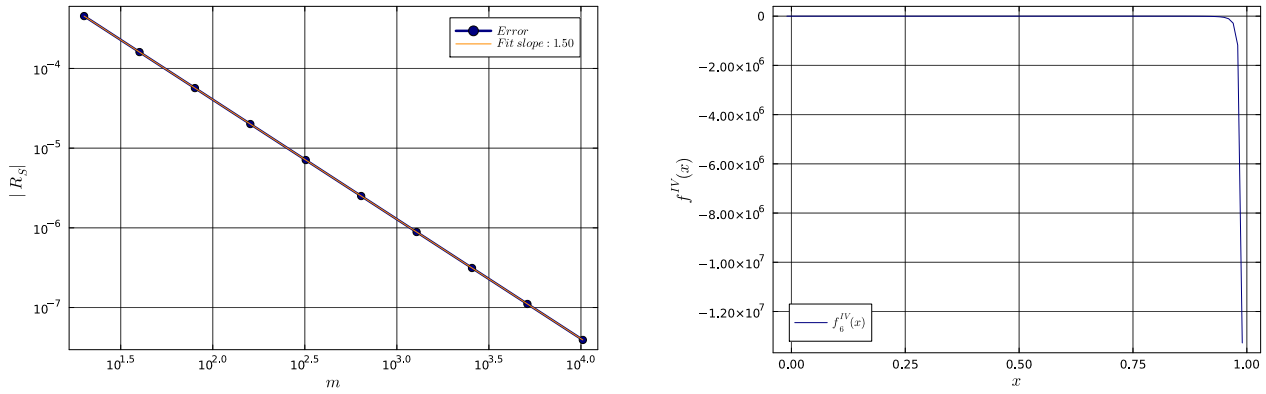


Figure 42: Studio della regola di Simpson per l'integrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

dove $x_k^{(i)}$ è la i -esima iterazione nella ricerca della k -esima radice x_k . Puoi ottenerle risolvendo la relazione di ricorrenza

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)xP_m(x) - mP_{m-1}(x), \quad (49)$$

per $m = 1, \dots, n-1$, dove $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, con $x = x_k^{(i)}$. La derivata si calcola poi tramite la relazione

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]. \quad (50)$$

(c) Una volta raggiunta la radice x_k entro una certa tolleranza, il valore della derivata $P'_n(x_k)$ permette di ottenere il peso corrispondente tramite:

$$w_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}. \quad (51)$$

(d) Verifica i tuoi risultati confrontandoli con quelli tabulati.

5.3.1 Soluzione

Per comodità di implementazione la soluzione riporta i quattro passaggi nel seguente ordine: (b), (a), (c), (d).

(b) Si è sviluppato un algoritmo che calcola sia i polinomi di Legendre $P_n(x)$ che le loro derivate $P'_n(x)$ utilizzando la relazione di ricorrenza 49. Si riporta in figura 43 il grafico dei polinomi e delle loro derivate fino ad ordine $n = 4$.

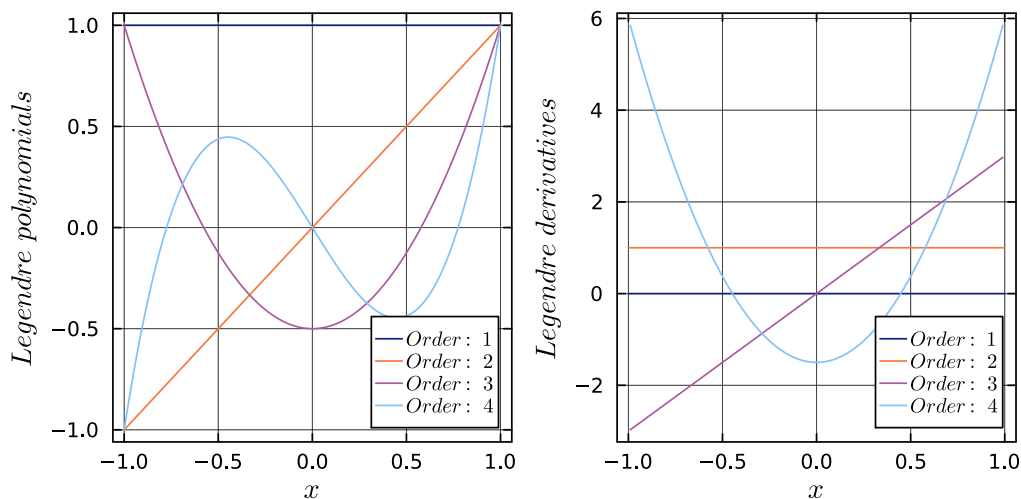


Figure 43: Polinomi di Legendre $P_n(x)$ e le loro derivate $P'_n(x)$ fino ad ordine $n = 4$.

(a) (c) (d) Si è implementato il metodo di Newton per trovare le radici dei polinomi di Legendre $P_n(x)$ e dei pesi associati. Una volta calcolati gli zeri di $P_n(x)$, si sono trovati i pesi associati utilizzando la formula 51. Si riporta in tabella 8 il confronto tra i nodi e pesi calcolati con i corrispettivi valori tabulati, con ordine del polinomio $n = 4$.

Table 8: Confronto tra zeri e pesi del polinomio di Legendre di ordine 4

x_i	x_i^{tab}	w_i	w_i^{tab}
0.86114	0.86114	0.65215	0.65215
0.33998	0.33998	0.34785	0.34785
-0.33998	-0.33998	0.34785	0.34785
-0.86114	-0.86114	0.65215	0.65215

5.4 Esercizio 5.4.1

Per ciascun integrale, utilizza le regole di quadratura di Gauss-Legendre e Clenshaw-Curtis con $n = 4, 6, 8, \dots, 40$. Rappresenta graficamente gli errori $|I_n - I|$ di entrambi i metodi in funzione di n su una scala semi-logaritmica. Implementa la regola di Clenshaw-Curtis solo per n pari.

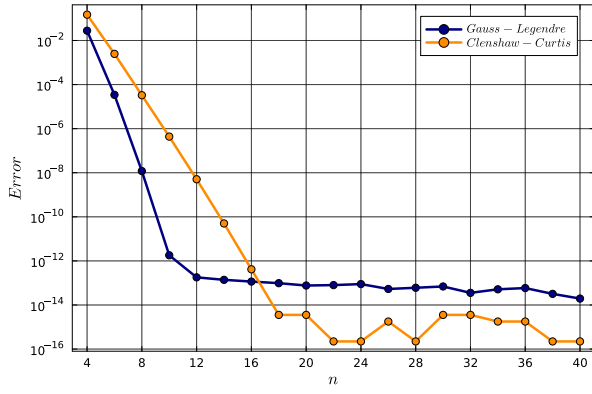
$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \int_{-1}^1 e^{-4x} dx = \frac{1}{2} \sinh(4) & \text{(b)} \quad & \int_{-1}^1 e^{-9x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \operatorname{erf}(3) \\
 \text{(c)} \quad & \int_{-1}^1 \operatorname{sech}(x) dx = 2 \tan^{-1}[\sinh(1)] & \text{(d)} \quad & \int_{-1}^1 \frac{1}{1+9x^2} dx = \frac{2}{3} \tan^{-1}(3) \\
 \text{(e)} \quad & \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \sin 8x dx = -\frac{3\pi^2}{32}
 \end{aligned}$$

5.4.1 Soluzione

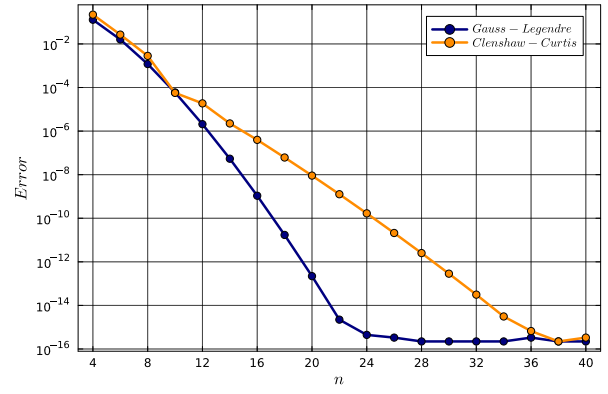
Per ciascun integrale sono state calcolate le approssimazioni utilizzando le regole di quadratura di Gauss-Legendre e Clenshaw-Curtis con $n = 4, 6, 8, \dots, 40$.

Dato che la convergenza dei due metodi dipende dalle proprietà di olomorfia delle funzioni integrande estese al piano complesso, i grafici non sono presentati nell'ordine richiesto. Si riportano in figura 44, gli studi degli errori per gli integrali di funzioni olomorfe.

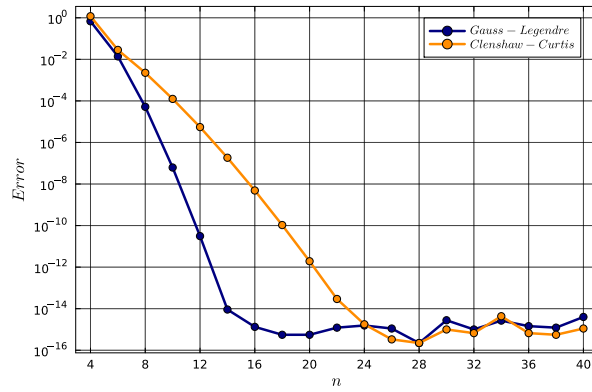
I grafici di figura 44 mostrano che gli errori decrescono in maniera molto rapida all'aumentare di n , raggiungendo l'ordine di grandezza di $\varepsilon_{\text{mach}}$ per n piccoli. Questo fenomeno è legato



(a)



(b)



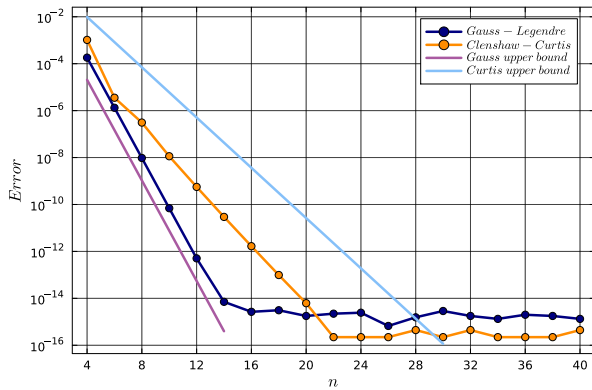
(e)

Figure 44: Studio degli errori per gli integrali di funzioni olomorfe.

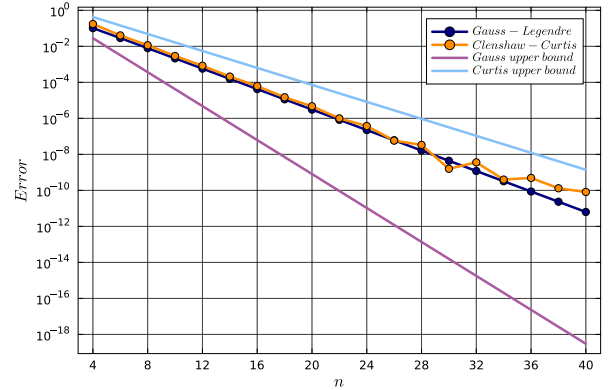
all'olomorfia dell'integranda su tutto il piano complesso.

Il metodo di Clenshaw-Curtis integra esattamente polinomi di ordine $n - 1$, il metodo di Gauss-Legendre integra esattamente polinomi di ordine $2n - 1$. Tale proprietà è mostrata graficamente dal fatto che gli errori di Clenshaw sono sempre maggiori degli errori di Gauss.

Infine si può mostrare matematicamente che inizialmente gli errori del metodo di Clenshaw-Curtis coincidono con gli errori del metodo di Gauss-Legendre, proprio come si nota in figura. Si riportano in figura 45 gli studi degli errori per gli integrali di funzioni non olomorfe.



(c)



(d)

Figure 45: Studio degli errori per gli integrali di funzioni non olomorfe.

Nei casi di figura 45 si è potuto studiare l'errore in maniera più accurata tramite le ellissi di Bernstein. Dalla teoria è noto che la più grande ellissi nel piano complesso definita da:

$$E_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2} (\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}), \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad (52)$$

non contenente singolarità determina il parametro ρ delle seguenti maggiorazioni:

$$|I[f] - I_n[f]| \leq \frac{64}{15} \frac{M \rho^{1-n}}{\rho^2 - 1}, \quad |I[f] - I_n[f]| \leq \frac{64}{15} \frac{M \rho^{-2n}}{\rho^2 - 1}. \quad (53)$$

La prima riguarda Clenshaw-Curtis, la seconda Gauss-Legendre.

Si è perciò calcolato il parametro ρ per i casi (c) e (d), sapendo che le singolarità delle integrande estese al piano complesso si trovano in $\frac{i\pi}{2} + ik\pi$ per $k \in \mathbb{N}$ nel primo caso, in $\pm \frac{i}{3}$ nel secondo. Tramite ρ si sono stimati i limiti superiori degli errori al variare di n . Nei grafici vengono riportate le rette, ma dato che nelle 53 è presente anche M , il grafico si concentra sulla pendenza e non sulla traslazione verticale. Si può notare che nel caso (c) le rette ricalcano precisamente la pendenza degli errori.

Nel caso (d) gli errori di Curtis rispettano l'andamento atteso, al contrario degli errori di Legendre. Sono necessari più punti per osservare la regione in cui gli errori scalano come $O(n^2)$, infatti i grafici dell'errore sono ancora nella regione in cui gli errori coincidono e la precisione non è scesa sotto 10^{-11} . Per questi motivi in (d) non si osserva il comportamento atteso.

5.5 Esercizio 5.4.2

Per ciascun integrale improprio, calcola le approssimazioni utilizzando la regola di quadratura double-exponential appropriata con $N = n/2$ e $n = 4, 6, 8, \dots, 60$. Rappresenta graficamente gli errori in funzione di n su una scala semi-logaritmica.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{(b)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(x) dx = e^{-1/4} \sqrt{\pi} \\ \text{(c)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-2/3} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)} & \text{(d)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \\ \text{(e)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

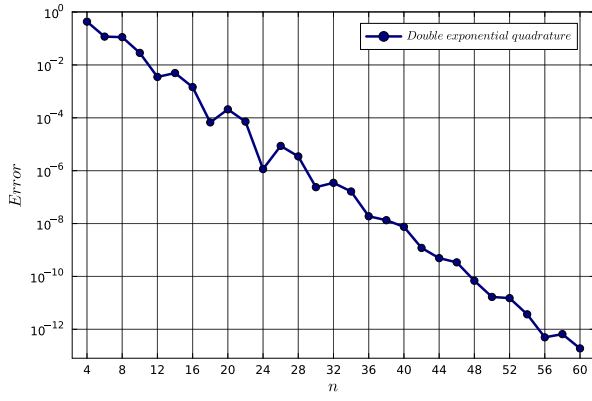
5.5.1 Soluzione

Si riportano nella figura 46 gli studi degli errori per gli integrali impropri, con la regola di quadratura double-exponential.

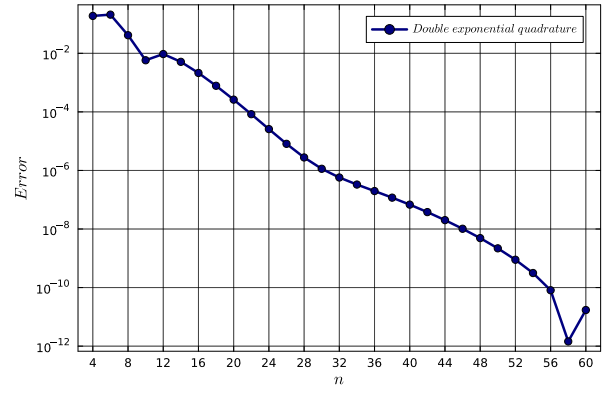
In figura 46 possiamo notare che si sono riusciti a integrare correttamente integrali definiti su intervalli non limitati, grazie al cambio di variabile della quadratura double-exponential. Nell'ultimo grafico si sono rappresentati gli errori dell'integrazione con il cambio di variabile standard e con l'utilizzo del cambio di variabile apposito per funzioni con e^{-x} . Si può notare che nel secondo caso l'errore ha una convergenza molto più rapida, raggiungendo l'ordine di ε_{mach} . Infine il caso (e) è particolarmente adatto all'integrazione doppio esponenziale poichè presenta singolarità all'estremo di integrazione.

5.6 Esercizio 5.4.3

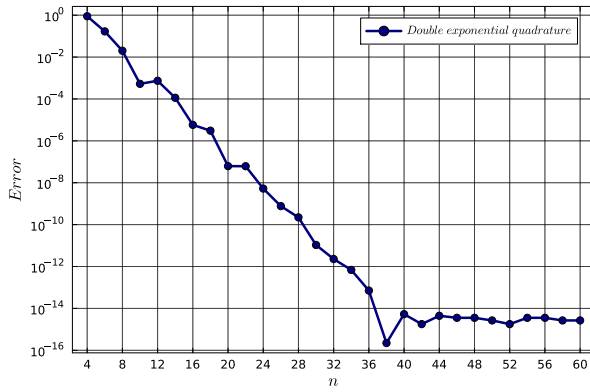
Per ciascun integrale, calcola le approssimazioni utilizzando la regola di quadratura di Gauss-Legendre con $n = 4, 6, 8, \dots, 60$ e la regola di quadratura double-exponential appropriata con $N = n/2$. Rappresenta graficamente gli errori in funzione di n su una scala semi-logaritmica.



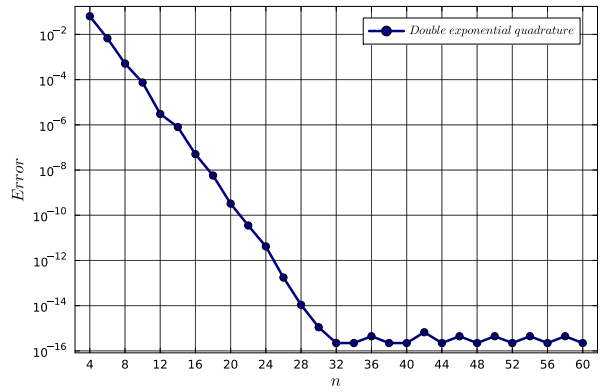
(a)



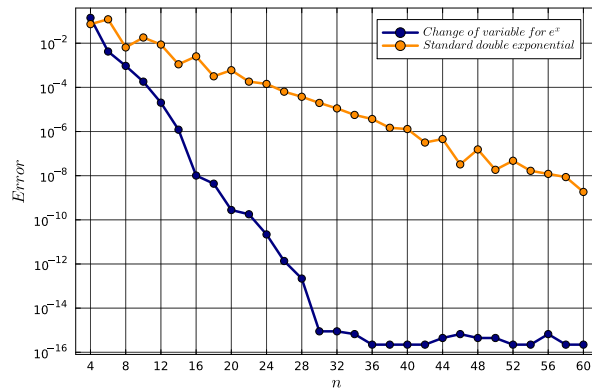
(b)



(c)



(d)



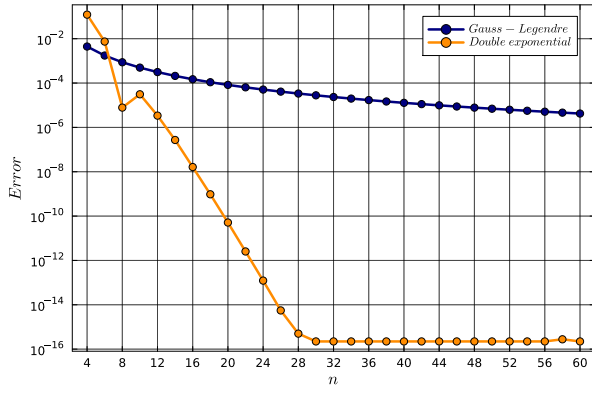
(e)

Figure 46: Studio degli errori per integrali con la regola double-exponential.

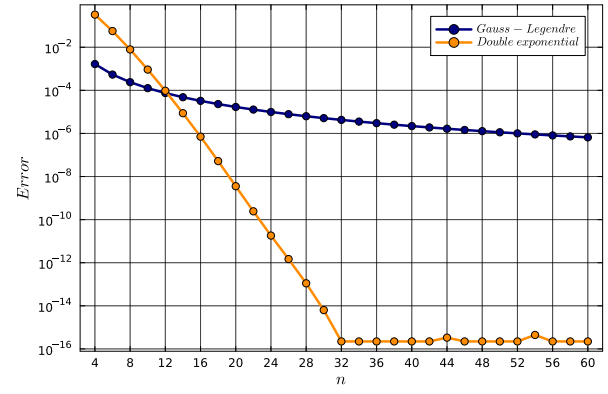
$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \int_0^1 \sqrt{x} \log(x) dx = -\frac{4}{9} & \text{(b)} \quad & \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \\
 \text{(c)} \quad & \int_0^1 (\log x)^2 dx = 2 & \text{(d)} \quad & \int_0^{\pi/2} \log(\cos(x)) dx = -\frac{\pi}{2} \log(2) \\
 \text{(e)} \quad & \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

5.6.1 Soluzione

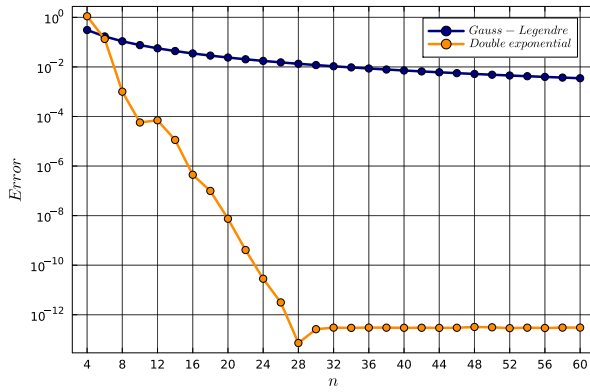
Si riportano in figura 47 gli studi degli errori per gli integrali con la regola di quadratura di Gauss-Legendre, insieme agli errori della regola di quadratura double-exponential.



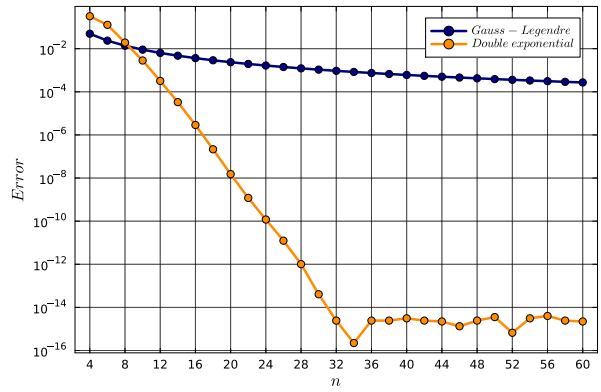
(a)



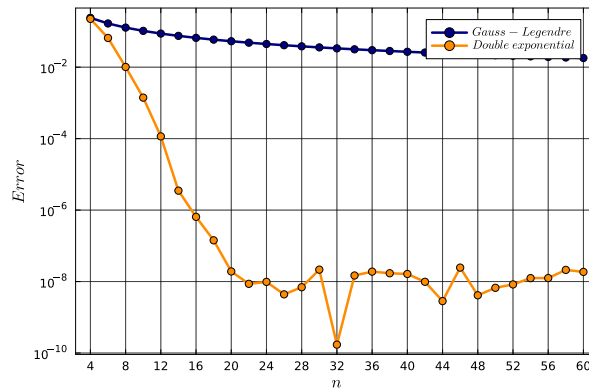
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure 47: Studio degli errori per gli integrali con la regola di quadratura di Gauss-Legendre e double-exponential.

Dai grafici si osserva la rapidità del metodo di quadratura double-exponential. Lo svantaggio di tale tecnica di integrazione è il costo computazionale elevato perchè il cambio di variabile richiede un numero maggiore di valutazioni di funzione rispetto all'algoritmo di Gauss-Legendre. Ricordando i risultati degli esercizi precedenti si conclude che Gauss-Legendre è un algoritmo migliore nel caso di integrande regolari, mentre la quadratura double-exponential è migliore nel caso di singolarità nell'intervallo di integrazione. Clenshaw-Curtis, per come è stato sviluppato nel corso, converge più lentamente di Gauss e si sarebbe tentati di affermare che sia peggiore degli altri due metodi. Ciò non è vero nel momento in cui il calcolo dei pesi di Clenshaw-Curtis viene unito all'algoritmo della *fast Fourier transform*, che abbassa di molto il costo

computazionale.

6 Equazioni differenziali ordinarie

6.1 Esercizi 6.2.1, 6.2.2

1. Scrivi un programma che implementi il metodo di Eulero per risolvere un *sistema* di equazioni differenziali.
 2. Per ciascun problema ai valori iniziali (IVP), risolvi il problema usando il metodo di Eulero.
 - (i) Traccia il grafico della soluzione per $n = 320$.
 - (ii) Per $n = 10 \cdot 2^k$, $k = 2, 3, \dots, 10$, calcola l'errore come $\|u - \hat{u}\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq n} |u_i - \hat{u}(t_i)|$ e all'istante finale, $|u_n - \hat{u}(t_n)|$. Realizza un grafico di convergenza log-log, includendo una retta di riferimento per la convergenza del primo ordine.
- (a) $u' = -2tu$, $0 \leq t \leq 2$, $u(0) = 2$; $\hat{u}(t) = 2e^{-t^2}$
 (b) $u' = u + t$, $0 \leq t \leq 1$, $u(0) = 2$; $\hat{u}(t) = -1 - t + 3e^t$
 (c) $(1 + t^3)uu' = t^2$, $0 \leq t \leq 3$, $u(0) = 1$; $\hat{u}(t) = [1 + (2/3) \ln(1 + t^3)]^{1/2}$

6.1.1 Soluzione

Si è implementato il metodo di Eulero per risolvere un sistema di equazioni differenziali. La funzione che sviluppa il metodo viene testata nei prossimi esercizi.

Si riportano nelle figure 48, 49, 50 i grafici delle soluzioni, uniti ai grafici degli errori per i tre casi richiesti. Le soluzioni sono calcolate per $n = 320$ come richiesto, i grafici degli errori corrispondono a più soluzioni con n che varia da $10 \cdot 2^k$ con $k = 2, 3, \dots, 10$.

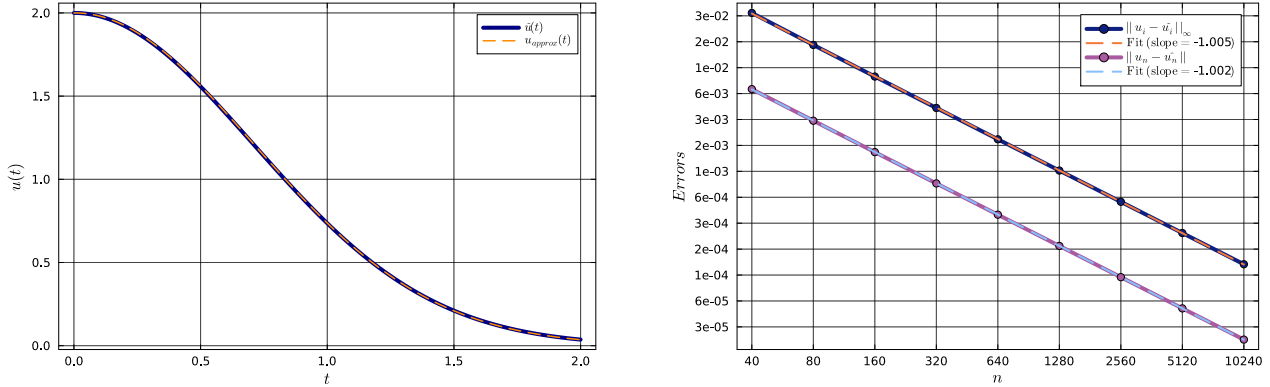


Figure 48: Soluzione e errore per il caso (a).

La prima osservazione che si può fare riguarda la convergenza del metodo di Eulero. Gli errori decrescono come $O(h)$, come atteso. Nei grafici infatti è stato riportato il coefficiente angolare dell'interpolazione degli errori con il metodo dei minimi quadrati. In tutti e tre i casi, per ciascuna tipologia di errore, il coefficiente angolare è prossimo a -1 .

La seconda osservazione riguarda la differenza tra i due tipi di errore. Si osserva che solo nel primo grafico le due rette degli errori sono distinte, mentre negli altri due casi sono sovrapposte. Lo stesso comportamento che si è studiato nella teoria, in cui perturbazioni del valore iniziale influenzano la soluzione. L'esempio riguardava le due equazioni $u' = u$ e $u' = -u$, in cui la soluzione della prima equazione amplifica gli errori, mentre la soluzione della seconda equazione li smorza. Nel nostro caso, la soluzione dell'equazione (a) smorza gli errori avanzando nel tempo, il massimo errore non si raggiunge all'istante finale e quindi le rette sono distinte. Negli altri due casi la soluzione amplifica gli errori, il massimo si raggiunge all'istante finale e le rette risultano sovrapposte.

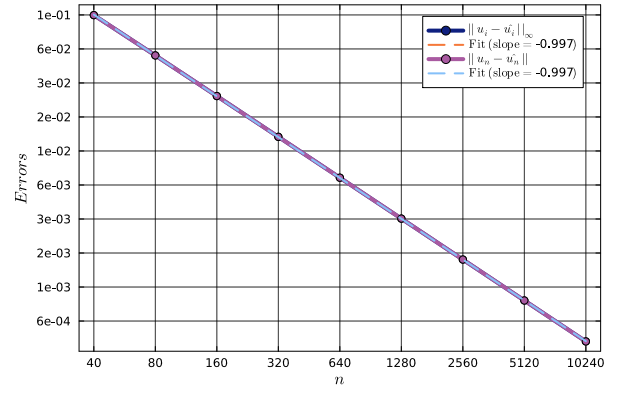
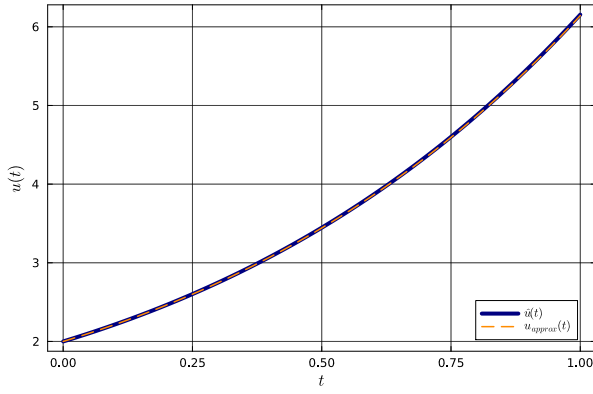


Figure 49: Soluzione e errore per il caso (b).

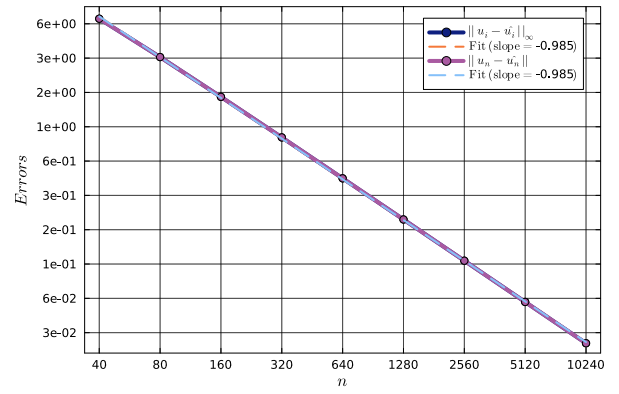
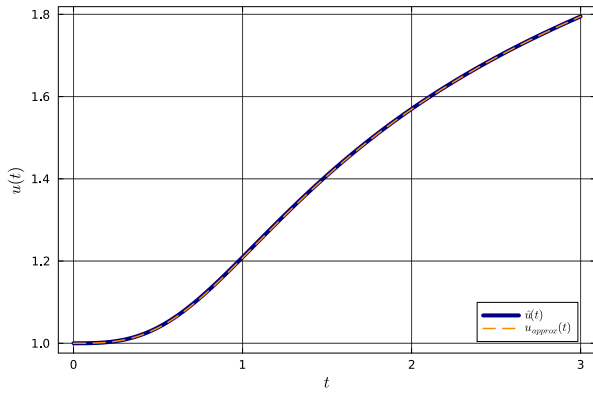


Figure 50: Soluzione e errore per il caso (c).

6.2 Esercizio 6.2.3

Risolvi i seguenti problemi ai valori iniziali (IVP) con il metodo di Eulero utilizzando $n = 1000$ passi. Traccia in un unico grafico la soluzione e la sua derivata prima, e in un altro grafico rappresenta l'errore in ciascuna componente in funzione del tempo.

(a) $y'' + 9y = \sin(2t), \quad 0 < t < 2\pi, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1;$

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{5} \sin(3t) + 2 \cos(3t) + \frac{1}{5} \sin(2t)$$

(b) $y'' - 4y = 4t, \quad 0 < t < 1.5, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1;$

$$\hat{y}(t) = e^{2t} + e^{-2t} - t$$

(c) $y'' + 4y' + 4y = t, \quad 0 < t < 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{3}{4};$

$$\hat{y}(t) = (3t + \frac{5}{4})e^{-2t} + \frac{t-1}{4}$$

6.2.1 Soluzione

Fissato $n = 1000$ si è risolto il problema ai valori iniziali (IVP) con il metodo di Eulero. Per prima cosa si sono riscritte le equazioni differenziali di secondo ordine come un sistema di

equazioni differenziali di primo ordine, in modo da poter utilizzare il metodo di Eulero:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -9z_1 + \sin(2t) \\ z_1(0) = 2 \\ z_2(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = 4z_1 + 4t \\ z_1(0) = 2 \\ z_2(0) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -4z_1 - 4z_2 + t \\ z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Si riportano in figura 51, 52, 53 i grafici delle soluzioni e delle loro derivate prime, insieme ai grafici degli errori per i tre casi richiesti. Gli errori rappresentano la distanza tra la soluzione calcolata e quella esatta, in ciascuna componente del sistema.

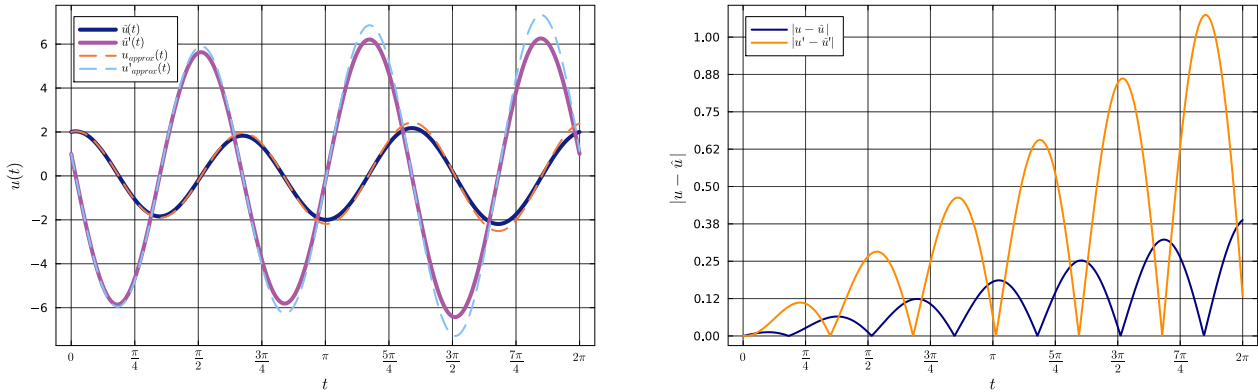


Figure 51: Soluzione e derivata prima per il caso (a). Errori.

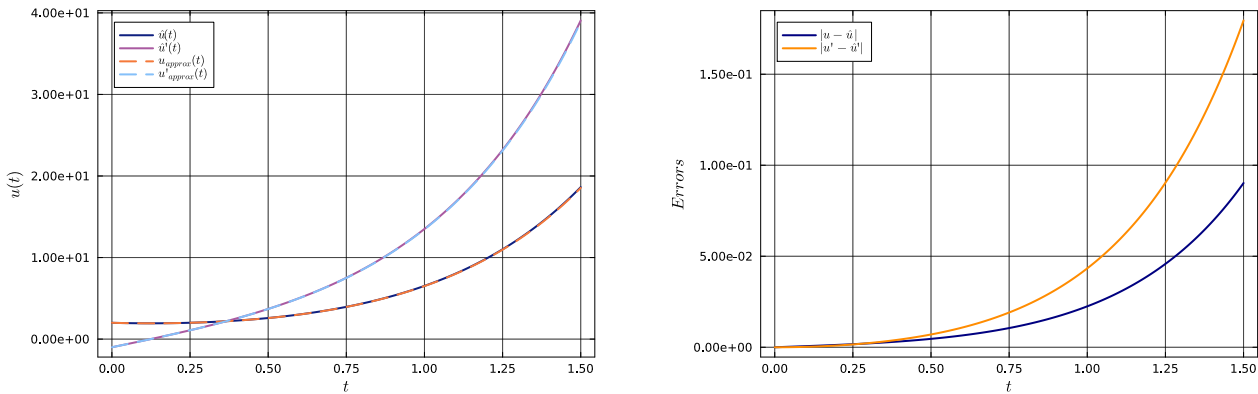


Figure 52: Soluzione e derivata prima per il caso (b). Errori.

Nelle figure 51 e 52 è possibile notare che gli errori aumentano insieme al tempo. Infatti nel caso (a) la soluzione esatta è una combinazione di funzioni trigonometriche, per cui le perturbazioni iniziali si amplificano nel tempo. Nel caso (b) si ha lo stesso comportamento perchè a tempi grandi domina l'esponenziale e^{2t} , amplificando le perturbazioni iniziali. Al contrario in figura 53 si osservano gli errori decrescere nel tempo perchè la soluzione esponenziale decrescente smorza l'errore.

6.3 Esercizio 6.3.1

- Scrivi un programma che risolva un sistema di equazioni differenziali utilizzando il metodo IE2 (Eulero implicito esplicito di ordine 2).
- Scrivi un programma che risolva un sistema di equazioni differenziali utilizzando il metodo

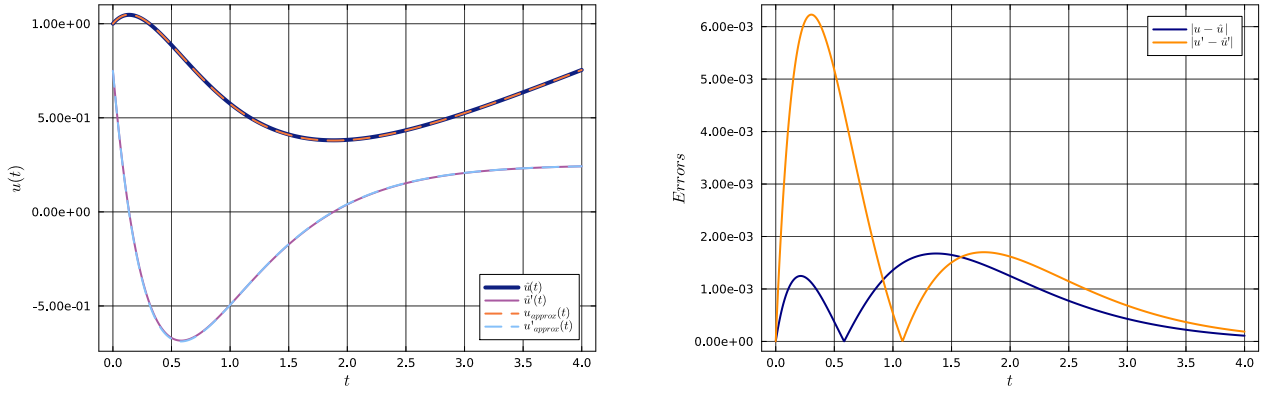


Figure 53: Soluzione e derivata prima per il caso (c). Errori.

RK4 (Runge-Kutta del quarto ordine).

(c) Testa la tua implementazione dei metodi IE2 e RK4 sul problema ai valori iniziali

$$u' = -2tu, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad u(0) = 2; \quad \hat{u}(t) = 2e^{-t^2}$$

Risolvi per $n = 30, 60, 90, \dots, 300$ e rappresenta graficamente l'errore massimo $\|u - \hat{u}\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq n} |u_i - \hat{u}(t_i)|$ in funzione del numero di valutazioni di funzione in un grafico log-log, insieme a una retta che mostri il tasso di convergenza atteso.

6.3.1 Soluzione

Si sono implementati i due metodi richiesti e applicati al problema ai valori iniziali (IVP) presentato. In figura 54 si riportano i grafici degli errori per i due metodi, calcolati per $n = 30, 60, 90, \dots, 300$. Nel grafico sono state tracciate le rette interpolanti degli errori, ottenute con

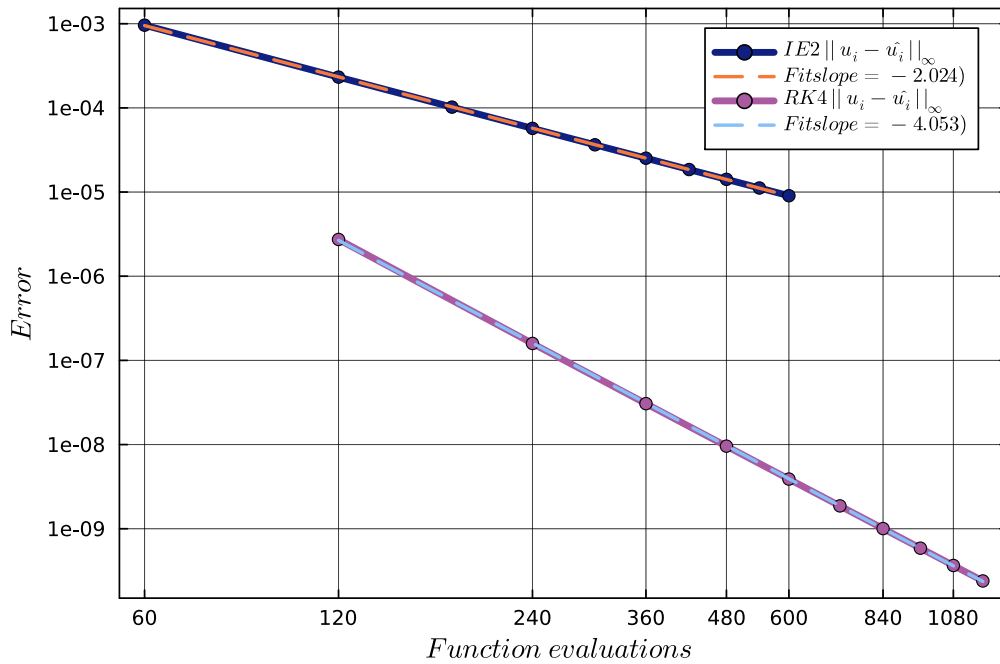


Figure 54: Confronto tra gli errori dei metodi IE2 e RK4.

il metodo dei minimi quadrati. Di tali rette sono riportate sul grafico le pendenze. Il metodo IE2 ha ordine di convergenza pari a 2, il metodo RK4 ha ordine di convergenza pari a 4. Tali

valori teorici sono in accordo con le pendenze trovate.

I grafici sono stati realizzati in funzione del numero di valutazioni della funzione. Sapendo che IE2 richiede 2 valutazioni della funzione per ogni passo, e che RK4 richiede 4 valutazioni della funzione per ogni passo, si può spiegare il fatto che i punti del grafico si trovano incolonnati uno ogni due passi di IE2.

Infine, a parità di numero di valutazioni della funzione il metodo RK4 ha un errore molto più piccolo rispetto al metodo IE2, evidenziandone l'efficacia.

6.4 Esercizio 6.3.2

In ciascuno dei seguenti casi, utilizza l'integratore RK4 per risolvere il sistema di ODE per $0 \leq t \leq 10$ con le condizioni iniziali indicate. (A tal fine, devi trovare una procedura sensata per scegliere il numero di passi n da utilizzare.) Rappresenta i risultati come curve nel piano delle fasi, cioè con x e y come assi del grafico.

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -4y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = 4x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad [x(0), y(0)] = [0.1, 0], \quad [0, 1.9]$$

$$(b) \quad \begin{cases} x' = -4y - \frac{1}{4}x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ y' = 4x - \frac{1}{4}y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad [x(0), y(0)] = [0.95, 0], [0, 1.05], [-2.5, 0]$$

6.4.1 Soluzione

Si sono risolti i due sistemi di equazioni differenziali con il metodo RK4, per ciascuna delle condizioni iniziali indicate. Al fine di stimare un valore per il passo h , si è scelto di utilizzare il seguente algoritmo:

1. Si sceglie un numero di passi iniziale n .
2. Si calcolano le soluzioni per n e $2n$ passi, ottenendo rispettivamente u e \tilde{u} .
3. Si calcola l'errore come $\|u - \tilde{u}\|_\infty$, scegliendo per \tilde{u} punti alterni.
4. Se l'errore è maggiore di una tolleranza ε , si raddoppia il passo e si torna al punto 2, altrimenti l'algoritmo si interrompe, restituisce n e $h = \frac{b-a}{n}$.

Per tutte le condizioni iniziali si è scelto come tolleranza $\varepsilon = 10^{-6}$, e come numero di punti iniziali $n = 1000$.

Da notare che nell'algoritmo presentato ad ogni passo bisogna calcolare solamente una nuova soluzione perchè si riutilizza quella precedente. Con l'algoritmo proposto si riesce a stimare un valore di h che garantisca un errore inferiore alla tolleranza, ma non è certamente paragonabile al metodo adattivo, che permette di scegliere il passo in maniera più efficiente, a ogni passaggio. Si riportano in figura 55 e 56 i grafici delle soluzioni ottenute, rappresentate come curve nel piano delle fasi. Si sono rappresentate inoltre le soluzioni in tre dimensioni.

Infine si riportano in tabella 9 i valori di h ottenuti tramite il metodo precedentemente descritto.

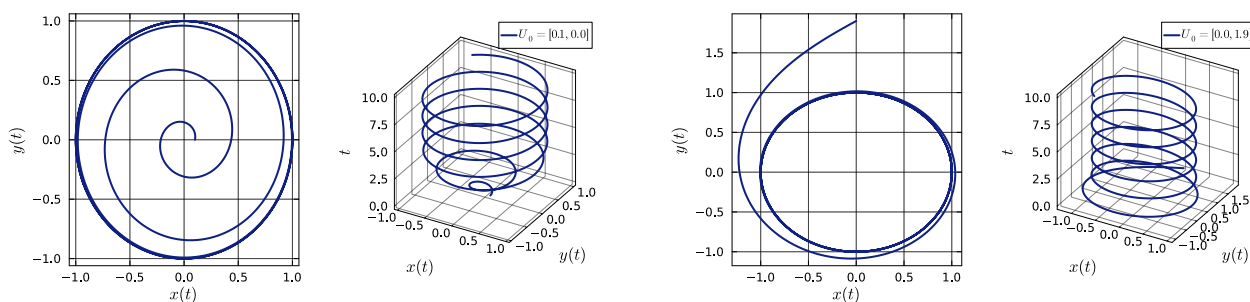


Figure 55: Soluzioni del sistema di ODE (a).

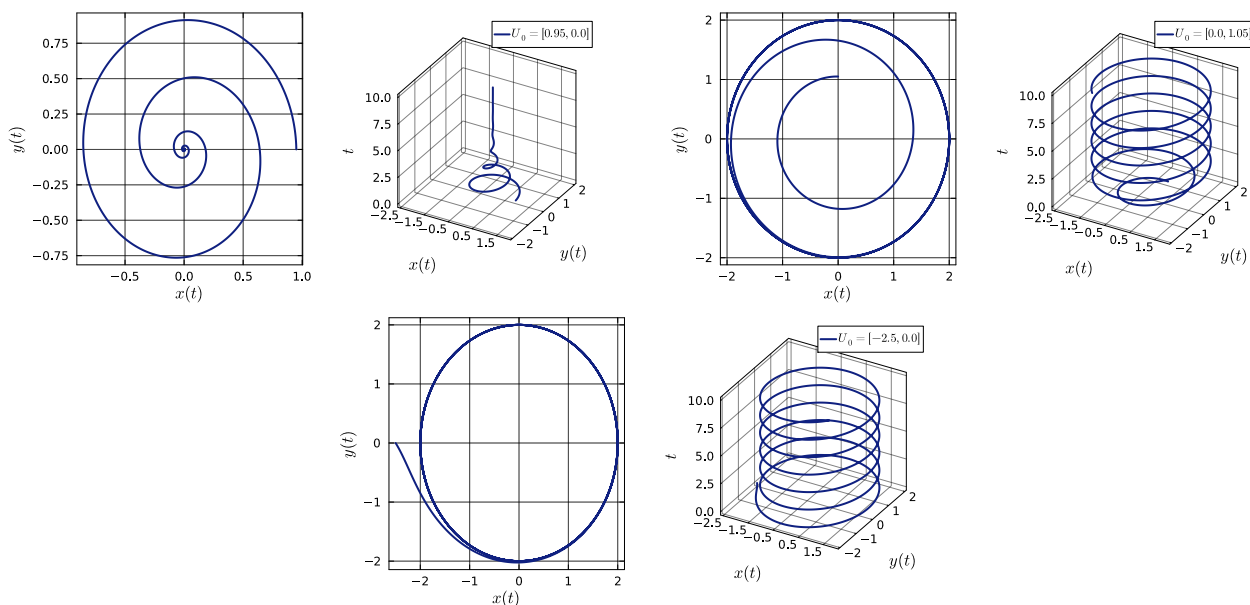


Figure 56: Soluzioni del sistema di ODE (b).

Table 9: Valori di h ottenuti per i due sistemi di ODE

Sistema	Condizioni iniziali	h
(a)	$[0.1, 0]$	0.0025
(a)	$[0, 1.9]$	0.0025
(b)	$[0.95, 0]$	0.0025
(b)	$[0, 1.05]$	0.00125
(b)	$[-2.5, 0]$	0.00125

6.5 Esercizio 6.3.3

Una malattia endemica in una popolazione può essere modellata tracciando la frazione di popolazione suscettibile all'infezione, $v(t)$, e la frazione infetta, $w(t)$. (Il resto della popolazione si considera guarito e immune.) Un modello tipico è il *modello SIR*:

$$\frac{dv}{dt} = 0.2(1 - v) - 3vw, \quad \frac{dw}{dt} = (3v - 1)w. \quad (54)$$

Partendo da $v(0) = 0.95$ e $w(0) = 0.05$, utilizza il metodo RK4 per trovare i valori stazionari a lungo termine di $v(t)$ e $w(t)$. Rappresenta graficamente entrambe le componenti della soluzione in funzione del tempo.

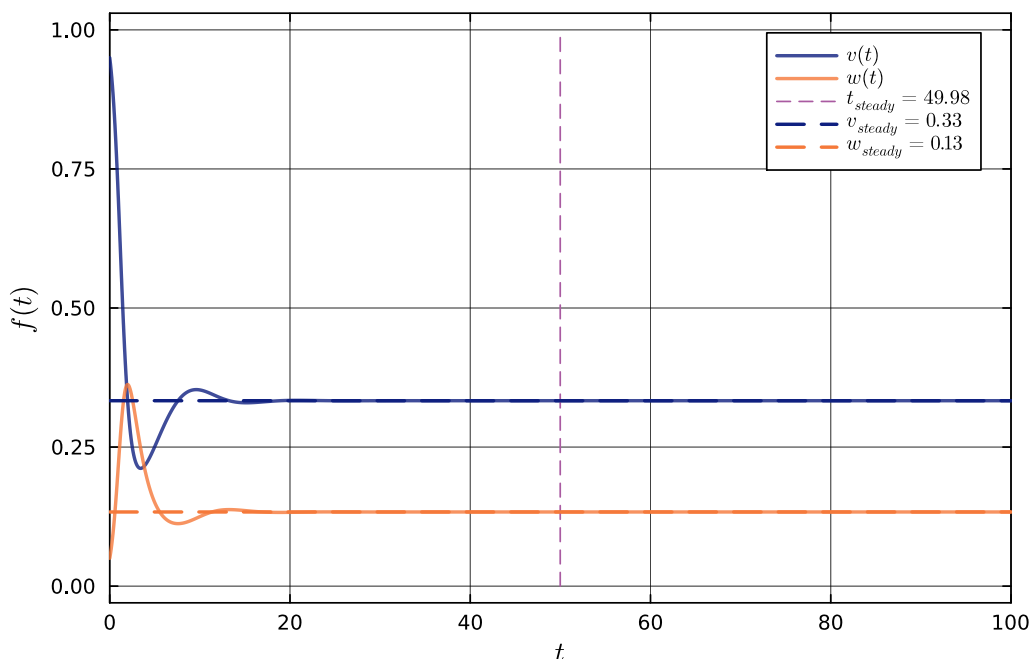


Figure 57: Soluzione del modello SIR.

6.5.1 Soluzione

Si è risolto il sistema di equazioni differenziali con il metodo RK4, partendo dalle condizioni iniziali $v(0) = 0.95$ e $w(0) = 0.05$. Il passo h è stato stimato allo stesso modo dell'esercizio 6.4, in particolare si è ottenuto $h = 0.015625$ con un numero di step iniziali $n = 100$. Si riporta in figura 57 il grafico della soluzione, in cui si osserva che le due componenti convergono a un valore stazionario.

Per valutare i valori stazionari si sono calcolate le differenze tra i valori successivi di v e w , fino a che non si è raggiunta la tolleranza di 10^{-9} . Il loro valore è riportato in grafico.

Si è poi scelto il valore di tempo più grande tra quelli ottenuti per le due soluzioni, detto t_{steady} . È importante notare che il valore di t_{steady} potrebbe essere una sovrastima, infatti la valutazione della distanza tra due valori successivi è un metodo ingenuo perchè non tiene conto del cambiamento globale della soluzione. Per quanto riguarda il caso in esame, poco importa: se anche il metodo adottato portasse a una sovrastima di t_{steady} ciò non influenzerebbe la valutazione degli stati stazionari.

6.6 Esercizio 6.3.5

- Scrivi un programma che risolva un sistema di equazioni differenziali utilizzando il metodo adattivo BS23.
- Testa la tua implementazione risolvendo

$$u' = -2tu, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad u(0) = 2; \quad \hat{u}(t) = 2e^{-t^2}$$

Rappresenta graficamente la soluzione in funzione del tempo per $\delta = 10^{-8}$ in un grafico e il valore del passo in un altro. Determina inoltre il passo minimo e medio, escludendo il primo e l'ultimo passo.

- Considera $\delta = 10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^{-12}$ e studia come l'errore sulla soluzione all'istante finale, $|u_n - \hat{u}(t_n)|$, dipende dalla tolleranza in input δ .

6.6.1 Soluzione

Si è implementato il metodo adattivo BS23 per risolvere un sistema di equazioni differenziali, e si riporta in figura 58 il grafico della soluzione ottenuta, insieme al grafico del passo h in funzione del tempo.

Si è scelto di togliere il primo e l'ultimo passo perchè il primo è scelto dall'utente e l'ultimo

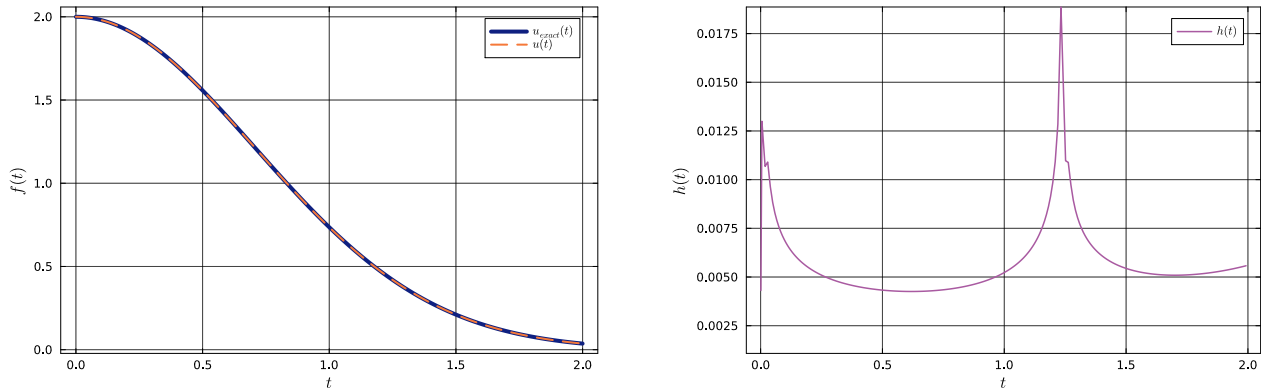


Figure 58: Soluzione e passo del metodo BS23.

è forzato in modo da raggiungere l'estremo b . Così facendo si ottiene un passo minimo di $h_{\min} = 0.0043$ e un passo medio di $h_{\text{med}} = 0.0054$. Lo studio del passo è interessante perchè permette di capire di quanto si è guadagnato rispetto a un metodo non adattivo. Se si fosse scelto passo fisso pari a h_{med} si sarebbe persa risoluzione perchè nel metodo adattivo si può raggiungere un passo minore. Nel caso in esame il guadagno non è molto significativo, in generale però si possono ottenere integrazioni migliori se la differenza fra il passo minimo e il passo medio è molto grande.

In figura 59 si riporta il grafico dell'errore all'istante finale, $|u_n - \hat{u}(t_n)|$, in funzione della tolleranza δ scelta. Si osserva che l'errore cresce all'aumentare della tolleranza. Infatti la media dei passi h cresce all'aumentare della tolleranza, e la soluzione viene integrata da un numero minore di punti.

6.7 Esercizio 6.3.6

Utilizzando il metodo BS23 con tolleranza sull'errore $\delta = 10^{-8}$, risolvi il problema $y'' + (1 + y')^3 y = 0$ nell'intervallo $0 \leq t \leq 4\pi$ per le seguenti condizioni iniziali. Rappresenta graficamente $y(t)$ e $y'(t)$ in funzione di t e, separatamente, il passo h in funzione di t . Determina inoltre il passo minimo e medio, escludendo il primo e l'ultimo valore.

- $y(0) = 0.1, \quad y'(0) = 0$
- $y(0) = 0.5, \quad y'(0) = 0$
- $y(0) = 0.75, \quad y'(0) = 0$
- $y(0) = 0.95, \quad y'(0) = 0$

6.7.1 Soluzione

Il sistema associato all'equazione differenziale in esame è

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -(1 + z_2)^3 z_1 \end{cases} \quad \text{con } z_1 = y, \quad z_2 = y'$$

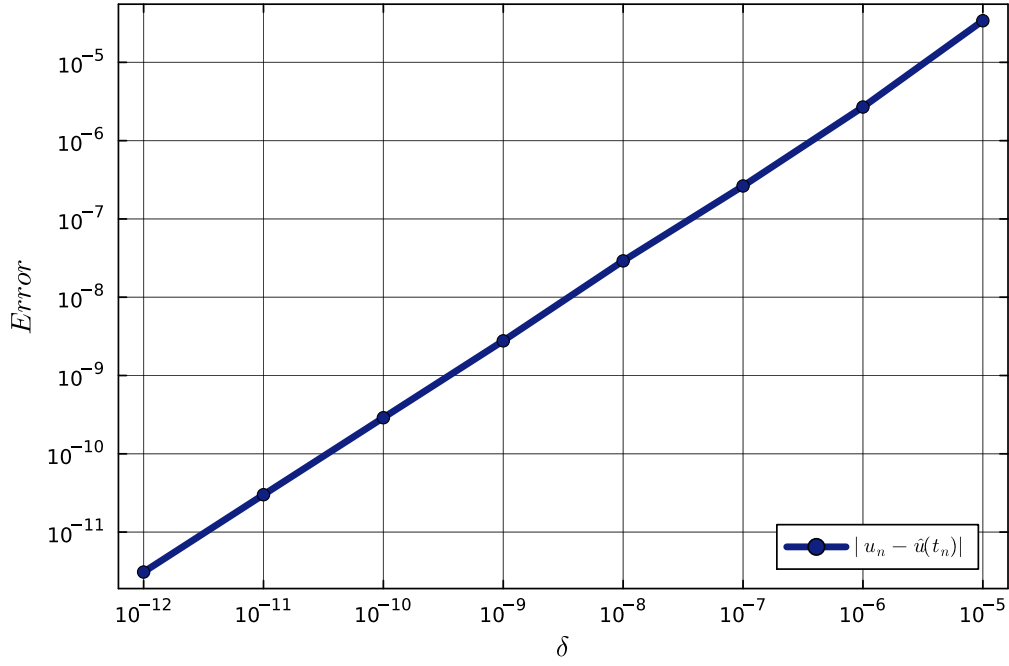


Figure 59: Errore all'istante finale in funzione della tolleranza δ .

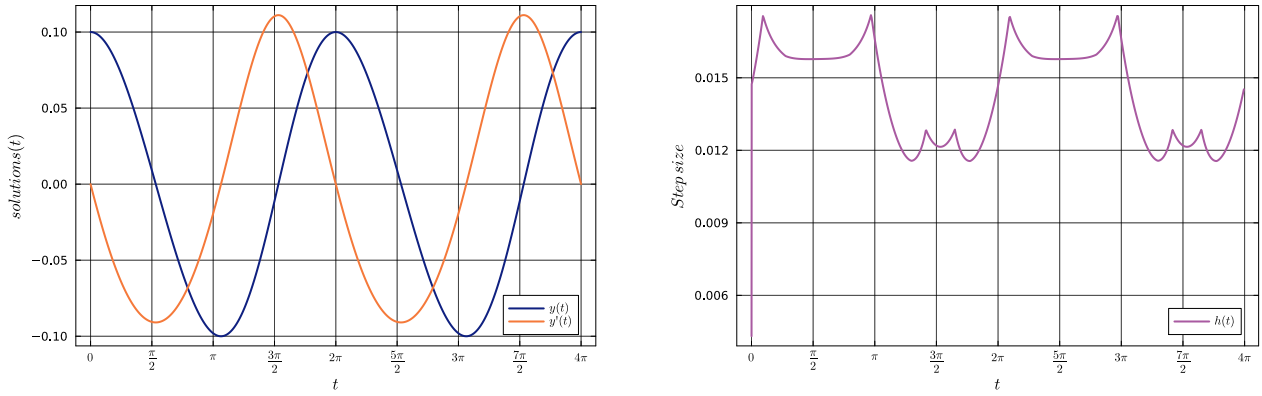


Figure 60: Soluzione e derivata prima per il caso $y(0) = 0.1$, $y'(0) = 0$. Passo del metodo BS23.

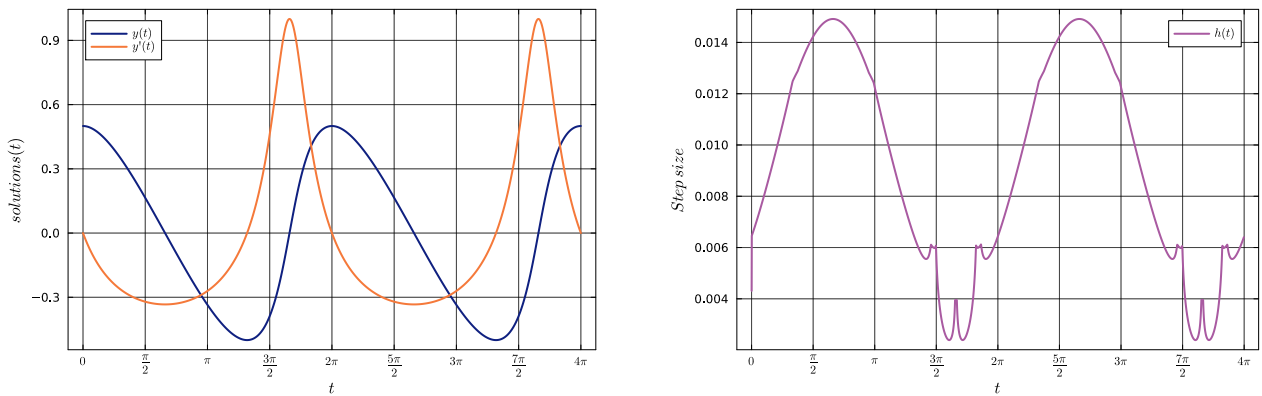


Figure 61: Soluzione e derivata prima per il caso $y(0) = 0.5$, $y'(0) = 0$. Passo del metodo BS23.

Nelle figure 60, 61, 62, 63 sono riportati $y(t)$, $y'(t)$ e $h(t)$.

Nei vari casi si osserva che, tanto più la soluzione presenta picchi accentuati, tanto più il metodo BS23 sceglie un passo piccolo. In tabella 10 sono riportati i valori di passo minimo e

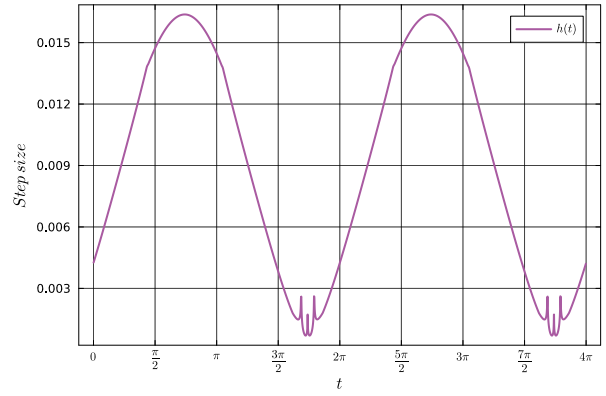
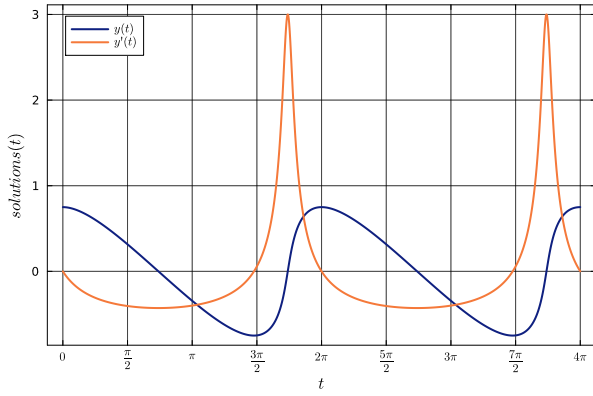


Figure 62: Soluzione e derivata prima per il caso $y(0) = 0.75$, $y'(0) = 0$. Passo del metodo BS23.

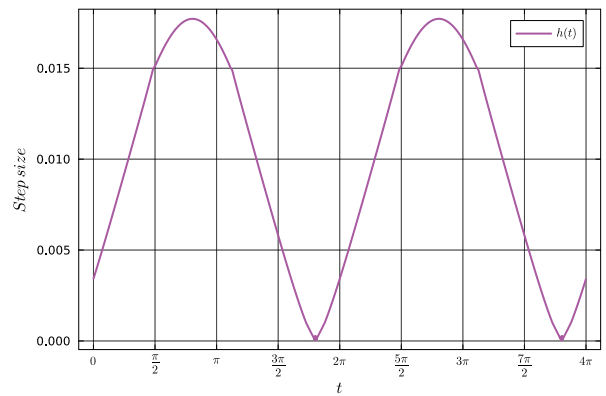
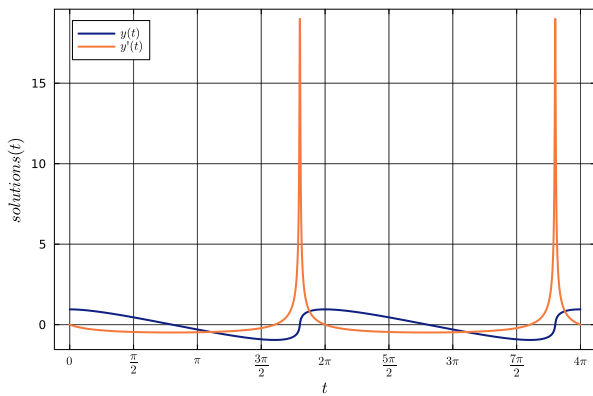


Figure 63: Soluzione e derivata prima per il caso $y(0) = 0.95$, $y'(0) = 0$. Passo del metodo BS23.

medio. Si rimanda alla sezione 6.6 la discussione sull'importanza dello studio del passo.

Table 10: Valori di passo minimo e medio per i quattro casi

Caso	h_{min}	h_{med}
a	4.3×10^{-3}	1.41×10^{-2}
b	2.4×10^{-3}	6.9×10^{-3}
c	6.97×10^{-4}	4.48×10^{-3}
d	5.56×10^{-5}	2.49×10^{-3}

La tabella 10 mostra che il guadagno in risoluzione rispetto a un metodo non adattivo è molto significativo negli ultimi due casi, dove le soluzioni presentano picchi molto accentuati, perchè il metodo BS23, nonostante abbia passo medio dell'ordine di 10^{-3} , raggiunge passi minimi dell'ordine di 10^{-4} e 10^{-5} .

6.8 Esercizio 6.3.7

Risolvi il problema $u' = 100u^2 - u^3$, $u(0) = 0.0002$, $0 \leq t \leq 100$ utilizzando il metodo BS23 e realizza grafici che mostrino sia la soluzione sia i passi temporali scelti per $\delta = 10^{-8}$. La soluzione effettua una rapida transizione tra due stati quasi costanti. Il passo scelto dall'algoritmo si comporta allo stesso modo in entrambi gli stati?

6.8.1 Soluzione

Si è risolto il problema ai valori iniziali (IVP) con il metodo BS23. Si riporta in figura 64 il grafico della soluzione ottenuta, insieme al grafico del passo h in funzione del tempo.

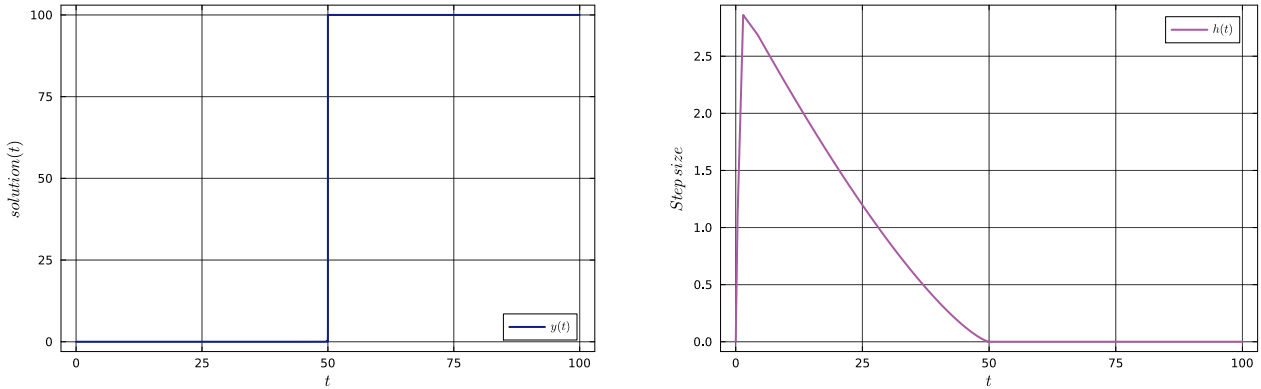


Figure 64: Soluzione e passo del metodo BS23.

L'integrazione avviene con successo, ma il grafico del passo mostra un comportamento peculiare. Ci si potrebbe aspettare che, data la presenza di due zone analoghe per la soluzione, il passo scelto dall'algoritmo sia simile in entrambe le zone, con una fase transiente in cui il passo diminuisce rapidamente. Questo non è il caso della figura 64 a destra.

Per studiare meglio il comportamento del passo, si è scelto di calcolarne il minimo e il medio, dividendo le due regioni della soluzione. La prima regione comincia da $t = 0$ e termina a $t = 51$, dove il valore finale si è scelto in modo da includere la fase transiente, e la seconda regione comincia da $t = 51$ e termina a $t = 100$. In tabella 11 sono riportati i valori di passo minimo e medio per le due regioni.

Giustamente si osserva il minimo nella prima regione, perchè il minimo valore di h viene

Table 11: Valori di passo minimo e medio per il problema stiff

Regione	h_{min}	h_{med}
Prima regione	1.6×10^{-6}	0.00845
Seconda regione	0.00025	0.00025

assunto in corrispondenza del salto della soluzione, in cui il metodo adattivo cerca passi molto piccoli per ottenere una soluzione accurata. Ciò che è particolare è che nella seconda regione il passo si stabilizzi, rimanendo costante e molto piccolo. Tale comportamento rende l'equazione presa in esame appartenente alla categoria dei cosiddetti *stiff problems*.

7 Appendice

7.1 Dati

Table 12: Distanza dal Sole e periodo orbitale dei pianeti del Sistema Solare

Pianeta	Distanza dal Sole [Mkm]	Periodo orbitale [giorni]
Mercurio	57.59	87.99
Venere	108.11	224.7
Terra	149.57	365.26
Marte	227.84	686.98
Giove	778.14	4332.4
Saturno	1427	10759
Urano	2870.3	30684
Nettuno	4499.9	60188