Tema II: Teoria de martingales a temps discret

Josep Vives

Primavera 2017

1 Conceptes bàsics de la teoria de processos estocàstics a temps discret

En modelització determinista la dinàmica d'un fenomen es descriu mitjançant una funció

$$f : t \in \mathbb{T} \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}$$

on $\mathbb{T}$ és un conjunt que representa el temps. A temps continu es té habitualment $\mathbb{T} = [0, T]$ o $\mathbb{T} = [0, \infty)$. A temps discret tindrem $\mathbb{T} := \{0, 1, \ldots, N\}$ o $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Quan calgui escriurem $\mathbb{T}^* := \mathbb{T} - \{0\}$.

En modelització estocàstica treballarem amb processos estocàstics.

Definició 1.1 *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espai de probabilitat. Un procés estocàstic* X *és una aplicació:*

$$X : (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{T} \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}$$

mesurable, és a dir, tal que

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T})$$

per a tot $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En aquest sentit, un procés estocàstic és una funció que depèn no només del temps sinó també d'un element ω *d'un espai de probabilitat.*

En aquest curs considerarem només procéssos estocàstics a temps discret, és a dir, suposarem sempre que $\mathbb{T} := \{0, 1, \ldots, N\}$ per a cert $N \in \mathbb{N}$ fixat o $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. La $\sigma-$àlgebra associada a $\mathbb{T}$ serà el conjunt de parts de $\mathbb{T}$ en tots els casos. Escriurem $n \in \mathbb{T}$ i $X_n(\omega)$.

Observació 1.2

- *Si fixem $n \in \mathbb{T}$, X_n és una variable aleatòria de Ω a $\mathbb{R}$. Per tant, un procés estocàstic és en particular una successió de variables aleatòries indexada per $\mathbb{T}$, és a dir, una seqüència d'aplicacions*

$$X_n : \omega \in \Omega \longrightarrow X_n(\omega) \in \mathbb{R}$$

  tals que

$$X_n^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

  per a tot borelià $B \in \mathcal{B}$ i $n \in \mathbb{T}$

- *Si en canvi fixem ω, tenim per a cada ω, una funció mesurable*

$$X(\omega, \cdot) : n \in \mathbb{T} \longrightarrow X(\omega, n) = X_n(\omega) \in \mathbb{R}.$$

  Això ens permet interpretar un procés X com l'elecció a l'atzar segons la llei $\mathbb{P}$ d'una funció en el conjunt de funcions de $\mathbb{T}$ a $\mathbb{R}$, que podem denotar per $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$, o en un subconjunt d'aquest conjunt.

El segon concepte essencial de la teoria de processos estocàstics és el concepte de filtració.

Definició 1.3 *Una filtració associada a un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és una successió de $\sigma-$àlgebres $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{T}\}$ tals que*

- $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$, $\forall n \in \mathbb{T}$,
- $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$, $\forall n \in \mathbb{T}^*$.

Un espai de probabilitat amb una filtració associada $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ s'anomena espai de probabilitat filtrat.

Definició 1.4 *Donat un procés estocàstic X es defineix la seva filtració natural com la successió de σ-àlgebres*

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{X_k, k \leq n\}$$

és a dir, les $\sigma-$àlgebres generades per les propies variables del procés.

Definició 1.5 *Es diu que un procés estocàstic X definit sobre un espai de probabilitat filtrat és adaptat si per a cada $n \in \mathbb{T}$, X_n és $\mathcal{F}_n-$mesurable.*

Observació 1.6 *Notem que tot procés estocàstic està adaptat a la seva filtració natural.*

Definició 1.7 *Un procés X es diu que és previsible si X_0 és $\mathcal{F}_0-$mesurable i X_n és $\mathcal{F}_{n-1}-$ mesurable per a tot $n \in \mathbb{T}^*$.*

Observació 1.8 *Òbviament, tot procés previsible és adaptat.*

Observació 1.9 *Completació.*

1. *Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, es diu que un subconjunt d' Ω és negligible si està inclòs en un subconjunt de $\mathcal{F}$ de probabilitat nul·la.*

2. *Es diu que $\mathcal{F}$ està completada si conté tots els conjunts negligibles. Evidentment, la probabilitat de qualsevol conjunt negligible és 0. Es diu aleshores que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és un espai de probabilitat complet.*

3. *En un espai de probabilitat complet, es diu que una filtració està completada si $\mathcal{F}_0$ conté tot els conjunts de probabilitat nul·la. Evidentment, aleshores, totes les $\sigma-$àlgebres contenen tots els conjunts de probabilitat nul·la. Intuitivament, això vol dir que ja en $n = 0$ sabem quins són els conjunts de trajectòries de probabilitat nul·la.*

4. *Observem que si Ω és un conjunt finit o numerable, l'únic conjunt de probabilitat nul·la és el buit i per tant $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ja és una $\sigma-$àlgebra completada.*

5. *S'anomena $\sigma-$àlgebra trivial a la $\sigma-$àlgebra formada per Ω i $\emptyset$. La $\sigma-$àlgebra trivial completada és la $\sigma-$àlgebra generada per tots els conjunts de probabilitat nul·la de $\mathcal{F}$ i per tant està formada per tots els conjunts de probabilitat 0 i tots els de probabilitat 1.*

6. *Observem que donat un procés estocàstic X, la variable X_0 és constant quasi-segurament si i només si $\sigma\{X_0\}$ és la $\sigma-$àlgebra trivial completada.*

   En efecte, d'una banda, si $X = c$ quasi-segurament, l'antiimatge de qualsevol borelià B és un conjunt de probabilitat 0 si $c \notin B$ i és un conjunt de probabilitat 1 si $c \in B$. D'altra banda, si X pren dos valors diferents c_1 i c_2 amb probabilitats positives, necessàriament $\sigma\{X_0\}$ ha d'incloure $X_0^{-1}(c_1)$ i $X_0^{-1}(c_2)$ i aquests conjunts tenen probabilitats diferents de 0 i 1. Per tant, $\sigma\{X_0\}$ no pot ser la $\sigma-$àlgebra trivial completada.

2 Martingales

No pretenem aqui desenvolupar una teoria completa de martingales; només veure els conceptes bàsics i necessaris per a la modelització financera. Suposarem en tota la resta del capítol que treballem en un espai de probabilitat filtrat completat.

Definició 2.1 *Es diu que un procés $M := \{M_n, n \in \mathbb{T}\}$ és una martingala respecte una filtració $\mathbb{F}$ si*

i) *M és un procés adaptat a $\mathbb{F}$.*

ii) *$\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$ per a tot $n \in \mathbb{T}$. És a dir, totes les variables del procés són integrables.*

iii) *$E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}, q.s., \forall n \in \mathbb{T}^*$.*

Observació 2.2 *Notem que la tercera propietat es pot re-escriure com*

$$E[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0,\ q.s.,\ \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

Definició 2.3 *Es diu que un procés M és una supermartingala si es compleixen les propietats (i) i (ii) de la definició anterior i*

$$E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] \leq M_{n-1},\ q.s.,\ \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

Definició 2.4 *Es diu que un procés M és una submartingala si es compleixen les propietats (i) i (ii) de la definició anterior i*

$$E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq M_{n-1},\ q.s.,\ \forall n \in \mathbb{T}^*.$$

Observació 2.5 *Notem que tota martingala és en particular una submartingala i una supermartingala.*

Observació 2.6 *M és una martingala si i només si per a tot $j \geq 0$,*

$$E[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = M_n.$$

Això es veu immediatament aplicant recursivament, per a tot $j \geq 2$, la igualtat

$$E[M_{n+j}|\mathcal{F}_n] = E[E[M_{n+j}|\mathcal{F}_{n+j-1}]|\mathcal{F}_n] = E[M_{n+j-1}|\mathcal{F}_n],$$

conseqüència de la propietat de la torre de les esperances condicionades.

Per a supermartingales i submartingales es té un resultat anàleg.

Proposició 2.7 *Si M és una martingala, $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0), \forall n \in \mathbb{T}$. En el cas de supermartingales es té $\mathbb{E}(M_n) \leq \mathbb{E}(M_{n-1})$ i en el cas de submartingales, $\mathbb{E}(M_n) \geq \mathbb{E}(M_{n-1})$. És a dir, una martingala és un procés amb esperança constant, una supermartingala és un procés amb esperança decreixent i una submartingala, un procés amb esperança creixent.*

Prova: Notem que en el cas d'una martingala,

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \mathbb{E}(M_{n+1}).$$

La primera igualtat és deguda a la definició de martingala i la segona a una propietat bàsica del concepte d'esperança condicionada.

La prova en el cas de supermartingales i submartingales és anàloga. ■

3 Exemples

1. Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ uns successió de variables aleatòries independents i identicament distribuïdes, còpies de X. Suposem que X és integrable i té esperança $\mu \in \mathbb{R}$. Definim $M_0 = c$, constant, i per a cada n,

$$M_n = c + X_1 + \cdots + X_n.$$

Considerem com a filtració, la filtració generada per les variables X_n, és a dir, $\mathcal{F}_0 = \sigma\{c\}$ i

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{X_j,\, j \leq n\}.$$

El procés M satisfà les dues primeres propietats de martingala ja que

$$\sigma\{X_j,\, j \leq n\} = \sigma\{M_j,\, j \leq n\},\, \forall n \in \mathbb{T}$$

i la suma finita de variables integrables és integrable. Finalment,

$$E[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}(X) = \mu.$$

Per tant, si $\mu > 0$ es tracta d'una submartingala, si $\mu = 0$ d'una martingala i si $\mu < 0$ d'una supermartingala.

Notem que aquest exemple descriu l'evolució del capital d'un jugador que en cada jugada independent juga a un joc amb esperança de guany μ. La variable M_n representa el capital després de la jugada $n-$èssima. Per exemple en el cas de la ruleta francesa, si juguem a vermell o negre, tenim $\mu = \frac{18}{37} - \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}$, és a dir, una esperança lleugerament negativa.

2. Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ uns successió de variables aleatòries independents i identicament distribuïdes, còpies de X. Suposem que X és positiva i té esperança μ. Definim $M_0 = c \geq 0$, constant, i per a cada n,

$$M_n = cX_1 \cdots X_n.$$

Considerem com a filtració, la filtració generada per les variables X_n, és a dir, $\mathcal{F}_0 = \sigma\{c\}$ i

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{X_j,\, j \leq n\}.$$

El procés M satisfà les dues primeres propietats de martingala ja que

$$\sigma\{X_j,\, j \leq n\} = \sigma\{M_j,\, j \leq n\},\, \forall n \in \mathbb{T}$$

i utlitzant la independència i la distribució idèntica,

$$\mathbb{E}(cX_1 \cdots X_n) = cE(X)^n = c\mu^n.$$

Finalment,

$$E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[M_{n-1}X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}\mathbb{E}(X) = \mu M_{n-1}.$$

Per tant, si $\mu > 1$ es tracta d'una submartingala, si $\mu = 1$ d'una martingala i si $\mu < 1$ d'una supermartingala.

3. Sigui $\mathbb{F}$ una filtració i X una variable aleatòria integrable. Aleshores

$$M_n := E[X|\mathcal{F}_n]$$

és una martingala.

Evidentment, M_n és $\mathcal{F}_n-$mesurable i

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(|E[X|\mathcal{F}_n]|) \leq \mathbb{E}(E[|X||\mathcal{F}_n]) = \mathbb{E}(|X|) < \infty.$$

Finalment,

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E[E[X|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n-1}] = E[X|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}.$$

4. Si M és una martingala i $Y_n := |M_n|$, Y és una submartingala. En efecte, la mesurabilitat i la integrabilitat de les Y_n són evidents ja que M és una martingala. Pel que fa a la tercera propietat, tenim

$$E[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[|M_n||\mathcal{F}_{n-1}] \geq |E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}]| = |M_{n-1}| = Y_{n-1}.$$

5. Sigui $Z := \{Z_n, n \in \mathbb{T}\}$ una successió de variables aleatòries adaptades a una filtració $\mathbb{F}$ i integrables. Suposem $\mathbb{T} := \{0, 1, \ldots, N\}$. Definim $X_N := Z_N$ i per a tot $n \leq N - 1$,

$$X_n := \max\{Z_n, E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}.$$

La mesurabilitat és evident. Pel que fa a la integrabilitat notem que

$$|X_n| \leq |Z_n| + E[|X_{n+1}||\mathcal{F}_n]$$

i per tant

$$\mathbb{E}|X_n| \leq \mathbb{E}(|Z_n|) + \mathbb{E}(|X_{n+1}|).$$

Tenint en compte que $\mathbb{E}(|X_N|) = \mathbb{E}(|Z_N|) < \infty$, la integrabilitat es dedueix per inducció inversa de $n = N$ fins a $n = 0$. En efecte,

$$\mathbb{E}|X_{N-1}| \leq \mathbb{E}(|Z_{N-1}|) + \mathbb{E}(|X_N|) = \mathbb{E}(|Z_{N-1}|) + \mathbb{E}(|Z_N|) < \infty,$$

i aplicant aquesta idea recursivament tenim

$$\mathbb{E}(|X_n|) \leq \sum_{j=n}^{N} \mathbb{E}(|Z_j|).$$

Finalment, per construcció, és clar que

$$X_n \geq E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

i per tant es tracta d'una supermartingala.

Aquesta supermartingala s'anomena *envoltant de Snell* del procés Z i juga un paper important en la valoració d'opcions financeres de tipus americà.

4 Transformacions d'una martingala

Definició 4.1 *Donada una martingala M, un procés previsible i afitat H i una constant x_0, respecte una filtració donada $\mathbb{F}$, es defineix la transformació de la martingala M pel procés previsible H com el procés $X := \{X_n, n \in \mathbb{T}\}$ tal que*

$$X_n := x_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}),\ n \in \mathbb{T}.$$

Proposició 4.2 *La transformació d'una martingala és una martingala.*

Prova: Està clar que X és adaptat. L'afitació del procés H en garanteix la integrabilitat. Finalment, com que H és previsible,

$$E[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = E[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n] = H_{n+1}E[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] = 0.$$

■

I passa el mateix amb les submartingales i les supermartingales si a més a més suposem que el procés H és positiu.

Proposició 4.3 *Si H és un procés previsible, afitat i positiu, i M és una supermartingala o una submartingala, la transformació de M per H, conserva el caràcter de submartingala o supermartingala.*

Prova: Sigui Y la transformació de M. Es té

$$E[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n] = H_{n+1}E[M_{n+1} - M_n]|\mathcal{F}_n],$$

i si H és positiu, l'atre terme del producte de la dreta manté el caràcter de submartingala o supermartingala. ■

Notem que H és pot interpretar com el model d'estratègia d'inversió d'un jugador en un casino on M representa l'evolució dels resultats del joc i X l'evolució del capital del jugador. Deprés de $i-1$ jugades el jugador decideix apostar H_i (una quantitat $\mathcal{F}_{i-1}-$mesurable), i després de la jugada $i-$èssima el seu guany és $H_i(M_i - M_{i-1})$. El fet que el caràcter de M es mantingui a X mostra que cap estratègia que no prevegi el futur (previsible) i que tingui un límit d'aposta màxima pot garantir guanys en el cas d'una supermartingala.

De fet, la transformació d'una martingala permet caracteritzar-la, com mostra el resultat següent:

Proposició 4.4 *Sigui $M := \{M_n, n \geq 0\}$ un procés adaptat i integrable. Aleshores M és una martingala si i només si per a tot procés previsible i afitat H i per a tot $n \geq 1$, tenim*

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1})) = 0.$$

Prova:

1. Suposem primer que M és una martingala. Sigui H un procés previsible i afitat qualsevol. Podem definir $X_0 := 0$ i

$$X_n := \sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1}).$$

Això és una transformació d'una martingala i per tant és també una martingala, com acabem de veure. En particular, la seva esperança és constant i per tant $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = 0$ per a qualsevol $n \geq 0$.

2. Fixem un $m \geq 1$ qualsevol. Sigui $A \in \mathcal{F}_{m-1}$. Podem definir el procés previsible H tal que $H_n = 0$ per a tot $n \neq m$ i $H_m := \mathbb{1}_A$. Aleshores, si $n \geq m$, d'acord amb la hipòtesi,

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} H_i(M_i - M_{i-1})) = \mathbb{E}(H_m(M_m - M_{m-1})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(M_m - M_{m-1}) = 0.$$

Per tant, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(M_m - M_{m-1})) = 0$ per a tot $A \in \mathcal{F}_{m-1}$. I això implica

$$E[M_m - M_{m-1} | \mathcal{F}_{m-1}] = 0,$$

i per tant M és una martingala.

■

5 Instants d'aturada

Definició 5.1 *Donada una filtració $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, es defineix instant d'aturada com una variable aleatòria*

$$\tau : \omega \in \Omega \longrightarrow \tau(\omega) \in \mathbb{T} \cup \{\infty\}$$

tal que per a tot $n \in \mathbb{T}$,

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Observació 5.2 *Notem que* $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ *per a tot* $n \in \mathbb{T}$ *si i només si* $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ *per a tot* $n \in \mathbb{T}$. *Això és una conseqüència immediata de les igualtats*

$$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} - \{\tau \leq n-1\}$$

i

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{\tau = j\}.$$

Exemple 5.3 *Donat un procés* X *adaptat a una filtració* $\mathbb{F}$ *i un borelià* $B \in \mathcal{B}$, *es defineix* τ^B *com l'instant d'entrada del procés en* B, *és a dir,*

$$\tau^B(\omega) := \min\{n : X_n(\omega) \in B\}.$$

Aquest instant és un instant d'aturada ja que

$$\{\tau^B = n\} = \{X_0 \notin B, \dots X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} = \cap_{k=0}^{n-1} X_k^{-1}(B^c) \cap X_n^{-1}(B) \in \mathcal{F}_n.$$

La proposició següent recull algunes propietats elementals dels instants d'aturada.

Proposició 5.4 *Siguin* S *i* T *dos instants d'aturada. Es té*

1. $S \vee T$ *i* $S \wedge T$ *són instants d'aturada.*
2. *La classe de subconjunts*

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{T}\}$$

   és una $\sigma-$*àlgebra.*

3. *Si* $S \leq T$ *es té* $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.
4. *Si* X *és un procés adaptat, la variable* X_T *és* $\mathcal{F}_T$*-mesurable.*

Prova:

1. $S \vee T$ i $S \wedge T$ són instants d'aturada com a conseqüència de les igualtats següents:

$$\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\},$$

$$\{S \wedge T \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\}.$$

2. Comprovem que $\mathcal{F}_T$ és una $\sigma-$àlgebra:

   - $\Omega \in \mathcal{F}_T$ ja que $\Omega \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
   - Si $A \in \mathcal{F}_T$, A^c també ja que

   $$A^c \cap \{T \leq n\} = ((A \cap \{T \leq n\}) \cup \{T > n\})^c \in \mathcal{F}_n.$$

   - Si $\{A_k, k \geq 1\}$ és una successió d'esdeveniments de $\mathcal{F}_T$ la seva reunió també ja que

   $$(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap \{T \leq n\}).$$

3. Si $A \in \mathcal{F}_S$, com que $S \leq T$ q.s. tenim

   $$A \cap \{T \leq n\} = A \cap \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

   ja que $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ perque $A \in \mathcal{F}_S$ i $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ perquè T és un instant d'aturada.

4. Si B és un borelià de $\mathbb{R}$ podem escriure

   $$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{j=0}^{n}\{X_j \in B, T = j\} \in \mathcal{F}_n$$

   ja que $\{X_j \in B, T = j\} \in \mathcal{F}_j$, per a tot $j \leq n$.

■

Definició 5.5 *Sigui X un procés adaptat i τ un instant d'aturada. Es defineix el procés aturat*

$$X_n^\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)\wedge n}(\omega).$$

És a dir, donada una trajectòria ω, el procés s'atura en $\tau(\omega) = m$ de manera que a partir de m es té $X_n(\omega) = X_m(\omega)$ per a tot $n \geq m$.

Proposició 5.6 *Si X és un procés adaptat i τ un instant d'aturada, X^τ també és adaptat. A més a més, si X és una martingala, una supermartingala o una submartingala, X^τ, també.*

Prova: X^τ és adaptat ja que

$$\{\omega : X_{n\wedge\tau(\omega)}(\omega) \in B\}$$

$$= \bigcup_{j=0}^{n-1} \{\omega : X_j(\omega) \in B, \tau(\omega) = j\} \cup \{\omega : X_n(\omega) \in B, \tau(\omega) \geq n\}$$

i aquests conjunts pertànyen a $\mathcal{F}_n$.

D'altra banda, podem escriure

$$X_n^\tau = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j\leq\tau\}}(X_j - X_{j-1}).$$

Notem que

$$\{j \leq \tau\} = \{\tau < j\}^c = \{\tau \leq j-1\}^c,$$

que evidentment és $\mathcal{F}_{j-1}-$mesurable. Per tant, com que $\mathbb{1}_{\{j\leq\tau\}}$ és un procés previsible, afitat i positiu, X^τ és la transformació d'una martingala si X is a martingala. I anàlogament si X és una supermartingala o una submartingala. Per exemple, en el cas d'una supermartingala tenim

$$\begin{aligned} E[X_n^\tau|\mathcal{F}_{n-1}] &= X_{n-1}^\tau + E[\mathbb{1}_{\{n\leq\tau\}}(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= X_{n-1}^\tau + \mathbb{1}_{\{n\leq\tau\}}E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq X_{n-1}^\tau \end{aligned}$$

ja que

$$E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0.$$

■

Finalment el teorema següent demostra que la propietat de martingala es manté per instants d'aturada afitats:

Teorema 5.7 (Teorema de Doob) *Si X és una martingala respecte una filtració $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ i S i T són instants d'aturada tals que $S \leq T \leq c$ q.s., on $c \in \mathbb{N}$ és una constant, aleshores $E(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$ q.s. Si X és una submartingala, es té $E(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_S$ i si X és una supermartingala, es té $E(X_T|\mathcal{F}_S) \leq X_S$.*

Prova: Observem primer de tot que com que T està afitat, $|X_T| \leq \sum_{n=0}^{c} |X_n|$ i per tant X_T té esperança finita. El mateix passa amb X_S.

Cal veure que per a tot $A \in \mathcal{F}_S$ es té

$$\mathbb{E}(X_S \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A),$$

o equivalentment

$$\mathbb{E}[(X_T - X_S)\mathbb{1}_A] = 0.$$

Definim $H_n := \mathbb{1}_{\{S<n\leq T\}\cap A}$. Es tracta d'un procés afitat, positiu i previsible ja que

$$\begin{aligned} \{S < n \leq T\} \cap A &= \{S < n\} \cap \{T \geq n\} \cap A \\ &= \{S \leq n-1\} \cap (\{T \leq n-1\})^c \cap A \end{aligned}$$

i aquest conjunt pertany a $\mathcal{F}_{n-1}$ ja que tant $\{S \leq n-1\} \cap A$ com $(\{T \leq n-1\})^c$ hi pertànyen.

Aleshores,

$$W_n := X_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\{S<i\leq T\}\cap A\}}(X_i - X_{i-1})$$

és martingala, submartingala o supermatingala en funcio del que sigui X

Finalment, podem reescriure l'expressió anterior com

$$X_0 + \sum_{i=S\wedge n+1}^{T\wedge n} \mathbb{1}_A(X_i - X_{i-1}) = X_0 + \mathbb{1}_A(X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n}).$$

Si el procés X és una martingala, $X_0 + \mathbb{1}_A(X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n})$ també ho és i aleshores

$$\mathbb{E}(X_0 + \mathbb{1}_A(X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n})) = \mathbb{E}(X_0)$$

i per tant,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n})) = 0$$

per a tot $n \geq 0$.

Escollint $n > c$ tenim $T \wedge n = T$ i $S \wedge n = S$, i per tant

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X_T - X_S)) = 0.$$

Si el procés X és una submartingala, analogament, tenim, per a tot n,

$$\mathbb{E}(X_0 + \mathbb{1}_A(X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n})) \geq \mathbb{E}(X_0)$$

i per tant

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X_T - X_S)) \geq 0. \tag{1}$$

Aquesta darrera desigualtat implica

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] \geq X_S.$$

En efecte, a partir de (1) tenim $\mathbb{E}(X_T\mathbb{1}_A) \geq \mathbb{E}(X_S\mathbb{1}_A)$ i per la definició d'esperança condicionada el terme de l'esquerra és igual a $\mathbb{E}(E(X_T|\mathcal{F}_S)\mathbb{1}_A)$. Per tant tenim que

$$\mathbb{E}(E(X_T|\mathcal{F}_S)\mathbb{1}_A) \geq \mathbb{E}(X_S\mathbb{1}_A).$$

Notem que $E(X_T|\mathcal{F}_S)$ i X_S són variables $\mathcal{F}_S-$mesurables. Per tant el problema es redueix a provar que donada una variable aleatòria Z, mesurable respecte una $\sigma-$algebra $\mathcal{F}$, i tal que $E(Z\mathbb{1}_A) \geq 0$ per a tot $A \in \mathcal{F}$, es té necessàriament que $Z \geq 0$, q.s.

Sigui $A := \{Z < 0\}$, conjunt que evidentment pertany a $\mathcal{F}$. Tenim doncs $E(Z\mathbb{1}_{\{Z<0\}}) \geq 0$. Però d'altra banda, $Z\mathbb{1}_{\{Z<0\}} \leq 0$ per a tot ω i per tant la seva esperança és necessàriament negativa o nul·la. Per tant tenim

$$E(Z\mathbb{1}_{\{Z<0\}}) = 0$$

Això implica que necessàriament $Z\mathbb{1}_{\{Z<0\}} = 0$ q.s. Ho demostrem en el Lemma de sota. Si això és cert tenim $\mathbb{P}(Z < 0) = 0$ i per tant necessàriament $Z \geq 0$ q.s.

Si el procés X és una supermartingala tenim que per a tot n,

$$\mathbb{E}(X_0 + \mathbb{1}_A(X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n})) \leq \mathbb{E}(X_0)$$

i per tant,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X_T - X_S)) \leq 0$$

i la resta del raonament es fa de manera anàloga i simètrica a l'anterior. ■

Falta veure el lema següent:

Lema 5.8 *Si X és una variable integrable i positiva quasi-segurament i la seva esperança és nul·la, X és nul·la quasi segurament. El mateix passa si X és integrable i negativa quasi-segurament i la seva esperança és nul·la.*

Prova: Observem primer que l'esperança d'una variable aleatòria X és una mitjana ponderada dels seus valors possibles. Per tant, si X és una variable positiva o nul·la, la seva esperança també. I si és negativa o nul·la, la seva esperança també.

Ara, el que volem demostrar és que si $X \leq 0$ o $X \geq 0$, q.s., i $\mathbb{E}(X) = 0$, necessàriament $X = 0$, q.s.

En efecte, suposem que $X \geq 0$ i que $\mathbb{E}(X) = 0$. Fixem $\epsilon > 0$. Tenim

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X\leq\epsilon\}}) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X>\epsilon\}}) = 0,$$

i com que tots els termes són positius, necessàriament,

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X>\epsilon\}}) = 0.$$

D'altra banda,

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X>\epsilon\}}) \geq \epsilon\mathbb{P}(X > \epsilon).$$

Per tant,

$$\mathbb{P}(X > \epsilon) = 0$$

per a tot $\epsilon > 0$. I això implica necessàriament que $X = 0$, q.s.

El cas en que $X \leq 0$ es demostra anàlogament. ■