Tema I: Esperança condicionada

Josep Vives

Primavera 2017

1 Introducció

L'objectiu d'aquest tema és recordar alguns conceptes bàsics de Teoria de la Probabilitat i desenvolupar el concepte d'esperança condicionada i les seves propietats. Aquest concepte és el que marca la diferència entre la Teoria elemenal de la Probabilitat i la Teoria avançada de la Probabilitat, però el presentarem de manera simplificada. Per una comprensio profunda del tema es recomana cursar l'optativa de Probabilitats Avançades. Se suposa que l'alumne té coneixements de la Teoria de la Probabilitat tal com s'imparteix al curs obligatori de Probabilitats o com es presenta per exemple a [3].

2 El concepte d'espai de probabilitat

Denotarem per $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat. Recordem que

- Ω és un conjunt. Denotem per ω els seus elements. Representen tots els resultats possibles d'un fenomen aleatòri.

- $\mathcal{F}$ és una família de subconjunts d'Ω amb estructura de $\sigma-$àlgebra. Els seus elements s'anomenen esdeveniments. Recordem que es defineix $\sigma-$àlgebra com una família de conjunts que conté Ω, és estable per pas al complementari i és estable per reunions finites o numerables. La $\sigma-$àgebra recull tots els conjunts dels que podem calcular la probabilitat. En espais de probabilitat finits o numerables l'habitual és considerar $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$, és a dir, el conjunt de parts d'Ω. Si $\Omega = \mathbb{R}$, habitualment es considera $\mathcal{F} := \mathcal{B}$, la $\sigma-$àlgebra de Borel, és a dir, la

$\sigma-$àlgebra generada pels subconjunts oberts, dit d'una altra manera, la menor $\sigma-$àlgebra que inclou tots els subconjunts oberts d'Ω.

- $\mathbb{P}$ és una aplicació

$$\mathbb{P} : A \in \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{P}(A) \in [0,1]$$

tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ i per a tota successió numerable $\{A_n, n \geq 1\}$ de conjunts disjunts dos a dos de $\mathcal{F}$ es té

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Observació 2.1 *Evidentment això inclou el cas de les successions finites de conjunts disjunts; només cal agafar $A_n = \emptyset$ per a $n \geq m$ per a un cert $m \in \mathbb{N}$ fixat.*

3 Condicionament i Independència

Considerem dos esdeveniments A i B. La probabilitat condicionada permet calcular la probabilitat d'un esdeveniment A quan sabem que s'ha produit un altre esdeveniment B. Le definició és la següent:

Definició 3.1 *Suposem $\mathbb{P}(B) > 0$. Es defineix la probabilitat de A condicionada a B com*

$$P(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Notem que equivalentment tenim

$$\mathbb{P}(A \cap B) = P(A|B)\mathbb{P}(B).$$

La proposició següent prova que la probabilitat condicionada és una probabilitat:

Proposició 3.2 *La probabilitat condicionada $P(\cdot|B)$ respecte un esdeveniment B tal que $\mathbb{P}(B) > 0$ és una mesura de probabilitat.*

Prova: Notem que d'una banda és clar que per a tot $A \in \mathcal{F}$

$$0 \leq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1.$$

És obvi també que

$$P(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

Finalment, donada una successió $\{A_n, n \geq 1\}$ d'esdeveniments disjunts dos a dos,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{\mathbb{P}((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B))}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B).$$

■

Una altra definició clau és la d'independència estocàstica:

Definició 3.3 *Dos esdeveniments A i B són estocasticament independents si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Més en general, donada una col·lecció finita o infinita d'esdeveniments $\{A_i, i \in I\}$, es diu que són mutuament independents si per a tot subconjunt finit $J \subseteq I$ es té

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Observació 3.4 *Si una col·lecció d'esdeveniments són mutuament independents, ho són també dos a dos com a conseqüència immediata de la definició. Però no a l'inrevés. Es fàcil trobar contraexemples, veure per exemple [3].*

Observació 3.5 *Si A i B són esdeveniments independents i $\mathbb{P}(B) > 0$, es té $P(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Notem que si A i B són independents, saber que B s'ha produit no influeix sobre les possibilitats de realització d'A i per tant no modifica la probabilitat d'A*

Els dos teoremes seqüents són bàsics en Teoria de la Probabilitat i ens seran útils. Es presenten sense demostració. La demostració es pot trobar per exemple a [3]. Abans d'enunciar-los recordem la noció de partició finita o numerable d'esdeveniments.

Definició 3.6 *Sigui $I \subseteq \mathbb{N}$ un conjunt finit o numerable d'indexos. Es diu que una familia $\{E_i, i \in I\}$ de subconjunts de Ω és un partició finita o numerable d'esdeveniments si compleix les condicions següents:*

i) *Es té $E_i \in \mathcal{F}$ per a tot $i \in I$.*

ii) *Per a qualsevol $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$.*

iii)

$$\cup_{i \in I} E_i = \Omega$$

Teorema 3.7 *(Teorema de les probabilitats totals) Si $\{E_i, i \in I\}$ és una partició finita o numerable d'esdeveniments d'Ω. Aleshores, per a tot $A \in \mathcal{F}$ es té*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i P(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)$$

Teorema 3.8 *(Teorema de Bayes) Si $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$ i $\{E_i, i \in I\}$ una partició finita o numerable d'esdeveniments d'Ω. Aleshores,*

$$P(E_n|A) = \frac{P(A|E_n)\mathbb{P}(E_n)}{\sum_i P(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)}.$$

4 El concepte d'esperança condicionada

Sigui X una variable aleatòria, és a dir, X és una aplicació de l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ per a tot $B \in \mathcal{B}$.

Denotarem per $\mathbb{E}(X)$ l'esperança d'una variable aleatòria X, sempre que aquesta quantitat estigui ben definida. Recordem que l'esperança està ben definida si X és una variable positiva o una variable integrable, és a dir, una variable que compleix $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Notem que si X és positiva l'esperança pot ser infinita. En canvi la condició d'integrabilitat garanteix que l'esperança és finita. Sobre el concepte d'esperança consulteu [3]. Una definició completament general del concepte d'esperança requereix coneixements de Teoria de la Mesura i s'escapa del nivell del curs. Aquest tema s'estudia a l'optativa de Probabilitats Avançades.

En tot el capítol suposarem que X és una variable integrable, és a dir, que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.

Recordem també que si una variable aleatòria X és discreta, és a dir, pren valors en un conjunt finit o numerable $x_i, i \in I$ podem escriure

$$X := \sum_{i \in I} x_i \mathbb{1}_{A_i}$$

on els esdeveniments $A_i := \{X = x_i\}$ són $\mathcal{F}$-mesurables i formen una partició finita o numerable d'esdeveniments de Ω.

Notem que en aquest cas la condició d'integrabilitat s'escriu

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(A_i) < \infty.$$

Definició 4.1 *(Esperança condicionada respecte un esdeveniment)*
Donat un conjunt $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$, es defineix l'esperança condicionada de X respecte B, que es denota per $E(X|B)$, com

$$E(X|B) := \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposició 4.2 *L'esperança condicionada respecte d'un esdeveniment B tal que $\mathbb{P}(B) > 0$ és l'esperança respecte la probabilitat condicionada $P(\cdot|B)$.*

Prova: Suposem que X és una variable discreta i per tant tenim

$$X := \sum_i x_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

Denotem per $\mathbb{P}_B(\cdot)$ la probabilitat condicionada $P(\cdot|B)$ que ja sabem que és una mesura de probabilitat. Aleshores hem de veure

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_B}(X) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Notem que ambdòs costats de la igualtat estan ben definits ja que d'una banda

$$\mathbb{E}(|X\mathbb{1}_B|) \leq \mathbb{E}(|X|) < \infty$$

i de l'altra,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_B}(X) \leq \sum_i |x_i|\mathbb{P}_B(A_i) \leq \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_i |x_i|\mathbb{P}(A_i) < \infty.$$

Aleshores tenim,

$$E_{\mathbb{P}_B}(X) = \sum_i x_i\mathbb{P}_B(A_i) = \sum_i x_i\frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_i x_i\mathbb{P}(A_i \cap B)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_i x_i\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i\cap B}) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_i x_i\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_B)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{E}(\sum_i x_i\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_B) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

En el cas d'una variable X general, el resultat $E(X|B) = E_{\mathbb{P}_B}(X)$ es demostra aproximant X per variables discretes i passant al límit. La demostració d'un resultat com aquest forma part de l'optativa Probabilitats Avançades. ■

El concepte d'esperança condicionada que acabem d'introduir es pot estendre en el sentit de la definició següent:

Definició 4.3 *(Esperança condicionada respecte una variable discreta) Considerem una variable discreta* $Y := \sum_{i\in I} y_i\mathbb{1}_{B_i}$ *amb* $B_i := \{Y = y_i\}$ *i* I *conjunt finit o numerable. Es defineix l'esperança condicionada de* X *respecte* Y *com*

$$E(X|Y) := \sum_i E(X|B_i)\mathbb{1}_{B_i}.$$

Notem que a diferència de la definició d'esperança o la d'esperança condicionada respecte un esdeveniment, l'esperança condicionada respecte una variable aleatòria és una nova variable aleatòria. Això és important, $E(X|Y)$ és una variable aleatòria, no un nombre.

Proposició 4.4 *Denotem per $\sigma(Y)$ la $\sigma-$algebra generada per la variable Y, és a dir, la $\sigma-$àgebra generada pels conjunts $B_i = \{Y = y_i\}$.*

La variable $E(X|Y)$ té les propietats següents:

1. *És mesurable respecte $\sigma(Y)$.*
2. *Per a tot $B \in \sigma(Y)$, $\mathbb{E}(E(X|Y)\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_B)$.*
3. *$\mathbb{E}(E(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$.*
4. *Si X i Y són independents, $E(X|Y) = \mathbb{E}(X)$.*

Prova: La definició de $E(X|Y)$ ens diu que és una variable aleatòria discreta constant sobre els mateixos conjunts B_i que la variable Y. La diferència està en que Y pren els valors y_i i $E(X|Y)$ els valors $c_i := E(X|B_i)$. És a dir, Y i $E(X|Y)$ són dues variables aleatòries discretes, constants sobre els mateixos conjunts B_i, que formen una partició d'Ω.

1. Donat $C \in \mathcal{B}$ tenim

$$E(X|Y)^{-1}(C) = \{\omega : E(X|Y)(\omega) \in C\} = \bigcup_{i:c_i \in C} B_i$$

   i per tant $E(X|Y)$ és una variable aleatòria $\sigma(Y)-$mesurable, ja que els B_i ho són i la seva reunió també.

2. Sigui $B \in \sigma(Y)$. Notem que això vol dir que B és una reunió de conjunts B_j, que evidentment pot ser d'un únic B_j o pot ser el $\emptyset$. Podem escriure $B = \cup_{j\in J} B_j$ on $J \subseteq I$.

   Tenim

$$\mathbb{E}(\sum_i E(X|B_i)\mathbb{1}_{B_i}\mathbb{1}_B) = \sum_i E(X|B_i)\mathbb{P}(B_i \cap B)$$

$$= \sum_{j:B_j\subseteq B} E(X|B_j)\mathbb{P}(B_j) = \sum_{j:B_j\subseteq B} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{B_j})$$

$$= \mathbb{E}(X \cdot \sum_{j:B_j\subseteq B} \mathbb{1}_{B_j}) = E(X\mathbb{1}_B).$$

3.
$$\mathbb{E}[E(X|Y)] = \sum_i E(X|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \sum_i \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{B_i})}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbb{P}(B_i)$$
$$= \sum_i \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{B_i}) = \mathbb{E}(X\sum_i \mathbb{1}_{B_i}) = \mathbb{E}(X).$$

4. Si les variables aleatòries X i Y són independents,

$$E(X|Y) = \sum_i E(X|B_i)\mathbb{1}_{B_i} = \sum_i \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{B_i})}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbb{1}_{B_i} = \sum_i \frac{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_i})}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbb{1}_{B_i}$$
$$= \mathbb{E}(X)\sum_i \mathbb{1}_{B_i} = \mathbb{E}(X).$$

■

Hem vist que en la definició d'esperança condicionada respecte d'una variable discreta Y, l'important no són els valors que pren la variable, sinó els conjunts on la variable pren valors constants, és a dir, els conjunts $B_i := \{Y = y_i\}$. Notem que aquests conjunts formen una partició d'Ω i generen una $\sigma-$àlgebra $\sigma(Y)$.

Les propietats anteriors suggereixen la possibilitat de definir una esperança condicionada respecte una $\sigma-$àlgebra qualsevol $\mathcal{G}$. Això és el que fa el Teorema següent que presentem sense prova. Podeu trobar la prova a [1] o [2]. Es basa en el Teorema de Radon-Nykodim que es veu a l'assignatura de Probabilitats Avançades.

Teorema 4.5 *Donada una σ-àlgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ i una variable aleatòria integrable X, existeix una única variable aleatòria que denotem per $E(X|\mathcal{G})$ tal que*

i) és mesurable respecte $\mathcal{G}$.

ii) compleix que per a qualsevol conjunt $G \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}(E(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G).$$

Definició 4.6 *(Definició general d'esperança condicionada)*
La variable aleatòria $E(X|\mathcal{G})$ introduida en el teorema anterior s'anomena esperança condicionada de X respecte la $\sigma-$àlgebra $\mathcal{G}$.

La interpretació del concepte d'esperança condicionada en general és complexa. Però en el cas particular d'una $\sigma-$àlgebra $\mathcal{G}$ generada per una partició $\{A_i\}_{i\in I}$ finita o numerable d' Ω, formada per conjunts $\mathcal{F}-$mesurables, es té

$$E(X|\mathcal{G}) = \sum_{i\in I} E(X|A_i)\mathbb{1}_{A_i}.$$

En efecte, és evident que $\sum_{i\in I} E(X|A_i)\mathbb{1}_{A_i}$ és mesurable respecte $\mathcal{G}$, ja que els conjunts A_i ho són. Donada la definició, falta només comprovar que, per a qualsevol $G \in \mathcal{G}$, es compleix

$$\mathbb{E}(\sum_{i\in I} E(X|A_i)\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G).$$

Observem que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{i\in I} E(X|A_i)\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_G) &= \mathbb{E}(\sum_{i\in I} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_G) \\ = \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_G) &= \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i\cap G}) \\ &= \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbb{P}(A_i\cap G).\end{aligned}$$

Com que G és $\mathcal{G}$-mesurable, $A_i \cap G$ és el buit o A_i. En efecte, sense pèrdua de la generalitat podem escriure $G = \cup_{j\in J} A_j$ i aleshores tenim

$$\sum_{i\in I} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbb{P}(A_i\cap G) = \sum_{j\in J}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_j}) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G).$$

Observem que hem demostrat que el concepte d'esperança condicionada respecte una $\sigma-$àlgebra generalitza el concepte d'esperança condicionada respecte una variable discreta. De fet, notem que tota variable aleatòria discreta es pot identificar amb una partició de l'espai de probabilitat, i a la vegada, aquesta partició es pot identificar amb la partició que genera la $\sigma-$àlgebra generada per la variable aleatòria. La definició general que hem donat abans estén doncs el concepte d'esperança condicionada respecte $\sigma-$àlgebres generades per particions finites o numerables de l'espai de probabilitat a $\sigma-$àlgebres en general.

La proposició següent presenta les propietats de $E(X|\mathcal{G})$:

Proposició 4.7 *Siguin X i Y variables aleatòries integrables. Es té*

1. *Si a i b són nombres reals, $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$.*
2. *Si $X \leq Y$, $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$.*
3. $\mathbb{E}(E(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.
4. *Si X és independent de $\mathcal{G}$, és a dir, si qualsevol conjunt $X^{-1}(B)$, on B és un borelià, és independent de qualsevol element de $\mathcal{G}$, aleshores*
$$E(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X).$$
5. *Si Y és $\mathcal{G}-$mesurable i $X \cdot Y$ és integrable, aleshores*
$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}).$$
En particular es té que $E(Y|\mathcal{G}) = Y$.
6. *Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$, tenim*
$$E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1).$$
7. *Si X és independent de $\mathcal{G}$, Y és $\mathcal{G}-$mesurable i h és una funció mesurable determinista tal que $\mathbb{E}(|h(X,Y)|) < \infty$, aleshores*
$$E(h(X,Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(h(X,z))|_{z=Y}.$$
8. *Si φ és una funció convexa i $\varphi(X)$ és una variable aleatòria integrable, es té*
$$\varphi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\varphi(X)|\mathcal{G}].$$

Prova: Farem la prova de les propietats en el cas que $\mathcal{G}$ està generada per una partició $\{G_i\}_i$ de l'espai de probabilitat, finita o numerable. Però totes les propietats enunciades valen en general. En alguns casos la prova que farem és de fet completament general, en altres no. En tots els apartats de la prova G denotarà un conjunt qualsevol de $\mathcal{G}$.

1. Només cal veure que

   $$\mathbb{E}((aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G}))\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}((aX + bY)\mathbb{1}_G))$$

   i això és immediat usant la linealitat de l'esperança i les definicions de $E(X|\mathcal{G})$ i $E(Y|\mathcal{G})$.

2. Suposem que $\mathcal{G}$ està generada per una partició $\{G_i, i \in I\}$ finita o numerable d'esdeveniments de Ω. Si $X \leq Y$, és clar que $E(X|G_i) \leq E(Y|G_i)$ per a tot G_i i per tant, $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$. És a dir, l'esperança condicionada és un operador creixent, com ho és l'esperança.

3. Sabem que $\mathbb{E}(E(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G)$ per a qualsevol $G \in \mathcal{G}$. En particular és cert per a $G = \Omega$ i per tant $\mathbb{E}(E(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.

4. Hem de demostrar que si X és independent de $\mathcal{G}$ tenim

   $$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G).$$

   En efecte, observem que utilitzant la linealitat tenim que

   $$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{1}_G),$$

   i d'altra banda, utilitzant la independència entre X i $\mathcal{G}$ tenim

   $$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{1}_G).$$

   Per tant, els dos termes de la igualtat són el mateix.

5. Aplicant la definició general cal comprovar que

   $$\mathbb{E}(YE(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(XY\mathbb{1}_G).$$

Comprovarem el resultat més general que diu que si Z és $\mathcal{G}$-mesurable i integrable es té

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(ZE(X|\mathcal{G}))$$

sempre que XZ sigui integrable.

En efecte, utilitzant que $\mathcal{G}$ està generada per una partició, i que per tant $Z = \sum_i z_i \mathbb{1}_{G_i}$ cal veure

$$\sum_i z_i \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{G_i}) = \sum_i z_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{G_i} E(X|\mathcal{G}))$$

i per tant és suficient veure

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{G_i}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{G_i} E(X|\mathcal{G}))$$

i això es immediat usant la definició de $E(X|\mathcal{G})$ i el fet que $G_i \in \mathcal{G}$ per a tot $i \in I$.

Vist això, si prenem $Z := Y\mathbb{1}_G$, deduim la igualtat que volem demostrar.

Recordem que XY és integrable si per exemple una de les dues és afitada, o si les dues són de quadrat integrable.

Per a demostrar que si Y és integrable, $E(Y|\mathcal{G}) = Y$, només cal prendre $X = 1$. Notem que $E(1|\mathcal{G}) = 1$. Heuristicament això vol dir que les variables $\mathcal{G}$-mesurables surten de l'esperança condicionada.

6. La igualtat $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_1)$ és immediata usant el fet que $E(X|\mathcal{G}_1)$ és $\mathcal{G}_2$-mesurable i la darrera part de l'apartat (5).

   Per a comprovar l'altra igualtat hem de veure que per a qualsevol $G \in \mathcal{G}_1$,

$$\mathbb{E}(E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G)$$

   Utilitzant que $G \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ i dues vegades les propietats (5) i (3), es té

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)\mathbb{1}_G) &= \mathbb{E}(E(E(X|\mathcal{G}_2)\mathbb{1}_G|\mathcal{G}_1)) \\
&= \mathbb{E}(E(X|\mathcal{G}_2)\mathbb{1}_G) \\
&= \mathbb{E}(E(X\mathbb{1}_G|\mathcal{G}_2)) \\
&= \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G)
\end{aligned}
$$

com voliem veure.

7. Considerem $\mathcal{G}$ generada per una partició finita o numerable. Hem de comprovar

$$\sum_i E(h(X,Y)|G_i)\mathbb{1}_{G_i} = \mathbb{E}(h(X,z))|_{z=Y}$$

Per a qualsevol ω tenim $\omega \in G_j$ per a un cert j i $Y(\omega) = y_j$. Aleshores simplement hem de comprovar que fixant j i $\omega \in G_j$ tenim

$$\sum_i E(h(X,Y)|G_i)\mathbb{1}_{G_i}(\omega) = \mathbb{E}(h(X,z))|_{z=Y(\omega)},$$

és a dir

$$E(h(X,y_j)|G_j)(\omega) = \mathbb{E}(h(X,y_j))$$

i això és evident per la propietat (4).

Notem que si $h(X,Y) = f(X)g(Y)$ es pot fer la demostración en el cas general de manera immediata, sense suposar que $\mathcal{G}$ està generada per una partició finita o numerable. Només cal aplicar els (4) i (5).

8. Es conegut que si φ és convexa, existeix una successió de funcions lineals $\varphi_n(x) = a_n x + b_n$, amb a_n i b_n nombres reals, tals que $\sup_n \varphi_n(x) = \varphi(x)$. Aleshores

$$\varphi_n(E[X|\mathcal{G}]) = a_n E[X|\mathcal{G}] + b_n = E[a_n X + b_n|\mathcal{G}] = E[\varphi_n(X)|\mathcal{G}].$$

Usant la propietat (2) tenim

$$\varphi_n(E[X|\mathcal{G}]) = E[\varphi_n(X)|\mathcal{G}] \leq E[\varphi(X)|\mathcal{G}].$$

I finalment, prenent suprems a les dues bandes,

$$\varphi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\varphi(X)|\mathcal{G}].$$

Notem que de fet hem redemostrat la desigualtat de Jensen en el context d'esperances condicionades.

■

References

[1] N. Bouleau (2002): *Probabilités de l'ingénieur*. Hermann.

[2] J. Jacod and P. Protter (2003): Probability Essentials. Springer.

[3] M. Sanz-Solé (1999): *Teoria de la Probabilitat*. UB.