

2017 年度
修 士 論 文

弹性剛性と幾何剛性を用いた
座屈固有値問題の縮約による
個材座屈荷重の検出法とその最適化

Extraction and Optimization of Individual Element Buckling Loads
Condensation of the Buckling Eigenvalue Problem
Using Elastic stiffness and Geometric stiffness

2018 年 1 月 22 日提出
指導教員 佐藤淳 准教授

東京大学大学院新領域創成科学研究科
社会文化環境学専攻

堤 千春
Tsutsumi, Chiharu

第1章 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 既往研究	2
1.2.1 現行の線形座屈解析とその問題点	2
1.2.2 個材の座屈荷重算出に関する既往研究	5
1.2.3 座屈に対する形態最適化に関する既往研究	6
1.3 目的と構成	7
第2章 弹性剛性と幾何剛性を用いた座屈固有値問題の縮約法	8
2.1 序	8
2.2 座屈固有値問題の縮約	9
2.3 既往の縮約方法とその問題点	10
2.4 幾何剛性を考慮した縮約手法の提案	13
第3章 個材固有値の分析	16
3.1 序	16
3.2 荷重条件の違いによる個材固有値と座屈荷重	17
3.2.1 1層ラーメン構造の数値解析	17
3.2.2 2層ラーメン構造の数値解析	30
3.2.3 片持ち構造の数値解析	42
3.2.4 トラス構造の数値解析	52
3.3 個材固有値と個材座屈荷重の関係	58
3.3.1 柱の座屈荷重	58
3.3.2 梁の固定度と座屈荷重	59
3.4 柱の個材固有値分布	61
3.2.1 分割数と個材固有値	61
3.2.2 境界条件の違いによる個材固有値の差異	64
3.2.3 結	67
第4章 個材固有値を指標とした座屈に対する最適化	68
4.1 序	68
4.2 柱モデルの形状最適化	68
4.2.1 序	68
4.3 断面操作による形状最適化	75
4.3.1 4層ラーメン構造の最適化	75
4.4 ランダムモデルの最適化	83
4.5 形態操作による最適化	89
4.6 結	93

第 5 章 結論

5.1 結論	94
5.2 今後の課題	95

参考文献

謝辞

1 序論

1.1 研究背景

細長い部材や薄肉部材を架構に用いる際(例:図 1.1,2),部材の塑性化に座屈が大きな影響を与える。そのため,架構中の部材の座屈耐力を適切に評価する必要がある。



図 1.1 アストロラムライン新白島駅



図 1.2 Sunny Hills 青山

我が国の鋼構造建築物の現行設計基準・指針^{[1],[2]}では,部材の有効座屈長の概念を用いて個材ごとに座屈耐力が評価されているが,部材の有効座屈長は拘束状態や荷重,剛性分布にも依存することから,複雑化した構造体において一意に定義することは困難である。

そこで,近年では構造全体系の固有値解析より得られた固有値 λ を座屈荷重倍率とし,個材の座屈荷重を算出する方法が用いられている。この方法は,従来の方法に比べてより厳密とされているが,設計上で多くの問題点を残している。^{[4],[7]~[10]}例えば,作用軸圧縮力が小さい部材や,変断面部材では有効座屈長が長く算定され,部材の耐力を実際の耐力よりも過小評価してしまう。

こうした背景から,近年これらの問題を改善する案として様々な手法^{[7]~[14]}が提案されているが,それらは未だ架構形態が限定的である等の課題を残している。そこで,本論文では座屈固有値問題の式に単純な操作を施すことで,複雑な形態にも対応できる手法を確立することを目指す。

1.2 既往研究

1.2.1 現行の線形座屈解析とその問題点

現行の座屈解析手法の一つである固有値問題をもちいた線形座屈解析は、有限要素法を用いて仮想仕事の原理から座屈時の平衡方程式を導き一般化固有値問題をつくることで、全体の座屈荷重を算出する方法を示している。ここで、導き出される一般化固有値問題は式(1.1)であり、これを座屈固有値問題と呼ぶ。

$$[K_E] \{U_e\} = \lambda [K_G] \{U_e\} \quad (1.1)$$

λ : 座屈荷重倍率、固有値

$[K_E]$: 全体弾性剛性マトリクス

$[K_G]$: 全体幾何剛性マトリクス

$\{U_e\}$: 座屈モード、固有ベクトル

この座屈固有値問題を構成するマトリクスは、架構中の各部材について導かれる要素マトリクスを合成したものであり、合成前の要素弾性剛性マトリクス $[k_e]$ 、要素幾何剛性マトリクス $[k_g]$ は以下のように表せる。なお、今 $[k_g]$ を構成する初期応力は与えた荷重に対する部材応力を用いた値である。

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{l^3} & & & & & & & & & & & \\ & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & & & & & & & \\ 0 & & \frac{EA}{l} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \frac{4EI_y}{l} & & & & & & & & \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & & \frac{4EI_x}{l} & & & & & & & \\ \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & & \frac{4EI_x}{l} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{GJ}{l} & & & & & \\ -\frac{12EI_x}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{12EI_x}{l^3} & & & & & \\ 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_x}{l} & & \\ \frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{l} & 0 & -\frac{6EI_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

E : ヤング率

G : ねじり係数

I : 断面2次モーメント

J : ねじりモーメント

l : 部材長さ

A : 断面積

$$[k_g] = \begin{bmatrix} \frac{6N}{5l} & & & & & & & \\ & \frac{6N}{5l} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -\frac{N}{10} & 0 & \frac{2Nl}{15} & & & & \\ & \frac{N}{10} & 0 & 0 & \frac{2Nl}{15} & & & \\ -\frac{M_{xi}}{l} & \frac{M_{yi}}{l} & 0 & \frac{Q_xl}{6} & \frac{Q_yl}{6} & \frac{Nr^2}{l} & & \\ -\frac{6N}{5l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{N}{10} & \frac{M_{xi}}{l} & \frac{6N}{5l} & \\ 0 & -\frac{6N}{5l} & 0 & \frac{N}{10} & 0 & -\frac{M_{yi}}{l} & 0 & \frac{6N}{5l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N}{10} & 0 & -\frac{Nl}{30} & 0 & \frac{Q_xl}{6} & 0 & \frac{N}{10} \\ & \frac{N}{10} & 0 & 0 & -\frac{Nl}{30} & \frac{Q_yl}{6} & -\frac{N}{10} & 0 \\ -\frac{M_{xi}}{l} & \frac{M_{yi}}{l} & 0 & -\frac{Q_xl}{6} & -\frac{Q_yl}{6} & -\frac{Nr^2}{l} & \frac{M_{xj}}{l} & -\frac{M_{yj}}{l} \\ \end{bmatrix} \quad SYM. \quad (1.3)$$

N: 初期応力 (軸力)

M: 初期応力 (曲げモーメント)

Q: 初期応力 (せん断力)

r : 式(1.4)

$$r^2 = (I_x + I_y)/A \quad (1.4)$$

ここで導いた座屈固有値問題(式(1.1))から得られる絶対値が最小となる固有値 λ が,座屈荷重倍率である.架構に加わる荷重が λ 倍のとき座屈するため(図 1.3),部材の座屈耐力は部材の存在軸力を N とすると式(1.5)のように得られる.

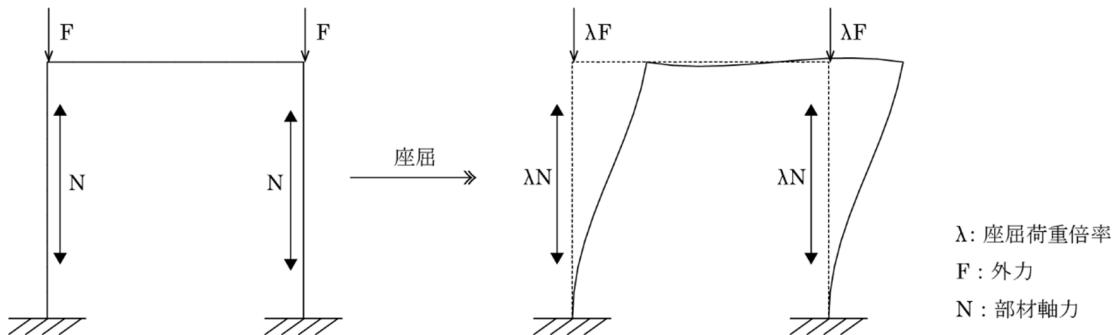


図 1.3 架構の座屈

$$N_{cr} = \lambda N \quad (1.5)$$

この座屈解析では,架構に荷重が作用しても,部材には軸力しか生じないという,理想的な状態を前提としているため,曲げモーメントを考慮するにあたり,ここで得られた座屈耐力 N_{cr} を部材の塑性化を判定する降伏曲面に反映する.(図 1.4) 座屈が考慮された降伏曲面では,一般的に圧縮側がつぶれた形を取ることが知られている.

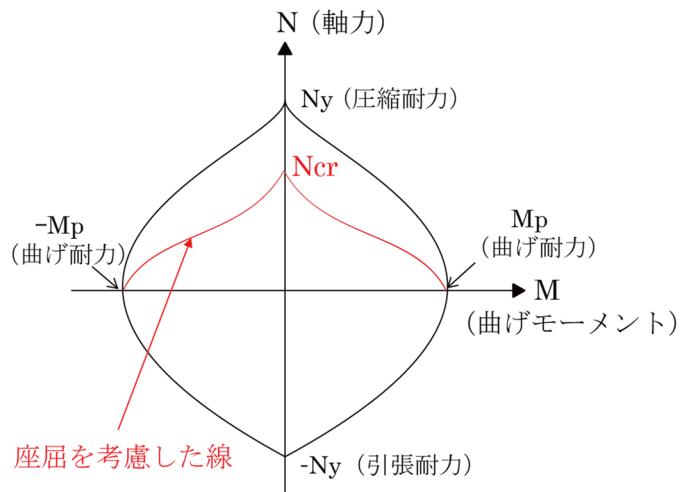


図 1.4 降伏曲面

現行の座屈設計法の問題点は、部材に用いられる座屈荷重倍率 λ を構造全体系の固有値方程式から算出したものを使用しており、この値がすべての部材で一律に設定されることである。固有値解析による架構の座屈は、全ての部材が同時に座屈することを前提としている。そのため、実際には座屈に至っていない部材についても解析上では、座屈したものとみなされ、軸圧縮力が小さい部材などで算出される座屈耐力が不合理に感じることも少なくない。

その例として柱に加わる荷重が均等ではないラーメン架構（図 1.5）を例に座屈耐力を算出する。

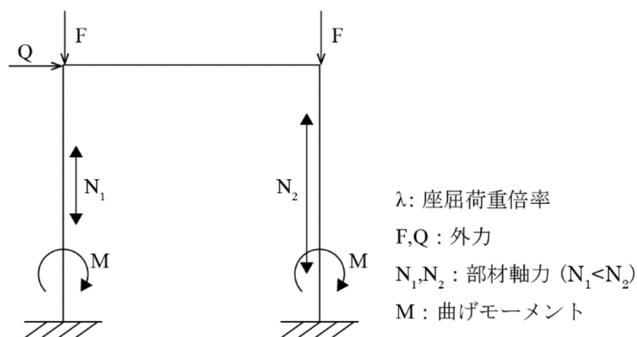


図 1.5 model A

このときの座屈解析の結果として、 λ が得られたとすると、柱はそれぞれ λN_1 , λN_2 という座屈耐力が設定される。この結果を、降伏曲面に反映すると、図 1.6 のようになる。

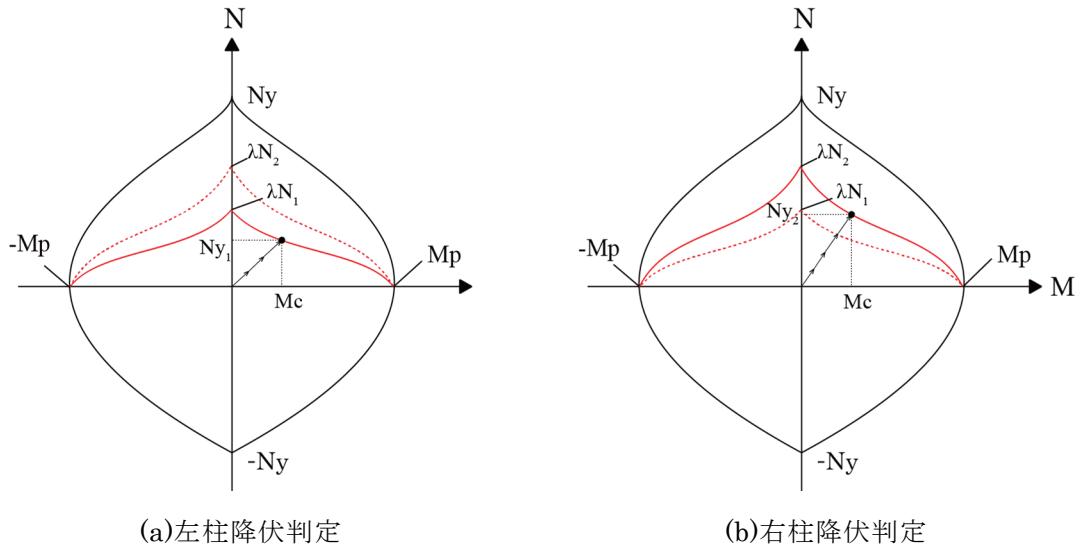


図 1.6 model A の降伏曲面

今,水平荷重を増やしていくとそれぞれの降伏曲面に達したときに部材の塑性化が生じたと判断される.ここで,左右の柱では座屈耐力に差が生じていたために塑性化の判定においても差が生じた.しかし,柱は同じ部材で左右対称の架構であり,発生している曲げモーメントも同じであるにも関わらず,塑性化時の軸圧縮力が異なり,左柱では耐力が過小評価となる.

なお,これらの事象については倉方ら^[4]も述べている.

1.2.2 個材の座屈荷重算出に関する既往研究

現行法では 1.2.1 項で述べた問題点があるため,それを修正する対策としていくつかの手法が提案されている.以下にその研究の概要を示す.

○高次固有値法(文献[7]~[10])

従来の設計法では,構造全体系に対して座屈固有値問題から導いた最小固有値を座屈荷重倍率として採用している.一方で,高次固有値法は構造体を構成する部材ごとの単独座屈に着目し,座屈固有値問題の高次固有値を用いることによって部材ごとの有効座屈長を求める手法である.この手法は,構造全体系の最小固有値から求めた部材の有効座屈長が不合理になる場合,その部材の変形が卓越する高次の固有値を求め,それを部材の座屈荷重倍率として採用する.

しかし,高次固有値法は各座屈モードに対し,どの部材の変形が卓越しているか判断する方法が明確でなく,設計技術者の主観による視覚的判断にゆだねられていること等の問題点を残している.

○付加軸力法 (文献[10],[11])

構造物の座屈耐力は,構造物を構成する部材の中で最も圧縮強度が小さい部材に支配されるため,最適設計された構造体では全ての部材の圧縮強度が等しくなる.そこで,不合理な有効座屈長となる部材が存在する場合,その部材の作用軸圧縮力のみを増加して調整

し,上記の条件を満足するように修正する手法である.

この手法では,複雑な構造の場合に計算上の注意が必要することや,変断面部材から構成される構造系では,適用できない等の問題点が存在する.

○固有値問題式の縮約による個材座屈荷重の検出（文献[5][6]）

本研究の前身である.鈴木・朝原らは,座屈固有値問題式を構成する弾性剛性マトリクス,幾何剛性マトリクスの縮約により個材の固有値を算出し,存在軸力との積を求めて,個材の座屈荷重を求める方法を提案している.鈴木よって,弾性応力解析の式を基にした縮約手法の提案が行われ,朝原によって縮約によって得られた個材の固有値方程式の解析結果考察,ならびに縮約後のマトリクスにおける物理的な意味の考察が行われており,この手法の可能性を示唆している.しかしながら,朝原によって,縮約方法の問題点が指摘されているためその改善が必要である.

1.2.3 座屈に対する形態最適化に関する既往研究

座屈荷重の最大化を目的とした形状最適化は,Keller^[18]らが変分法による解法を確立したことが基礎となり,甘利ら^[17]によって有限要素法と傾斜投影法を用いた骨組構造物における最適化の手法が提案されたり,浜田ら^[16]により逆変分原理を用いた最適化手法の提案が行われていておりしている.

1.3 目的と構成

本研究では,構造全体系の座屈固有値問題を個材に関する式に縮約する方法を提案し,個材に関する固有値方程式から算出される個材固有値について考察するものである.また,算出された個材固有値をもとに架構が座屈に対して,最適化されるための操作について考察を行う.なお,これらの考察をもとに本手法における座屈設計の有効性についても確認されたい.

第 2 章では,本手法の概要について述べた上で,既往の縮約操作の問題点を改善した新たな縮約操作について提案する.第 3 章では,縮約によって算出した個材の固有値について分析を行い,本手法の妥当性について検討を行う.第 4 章では,個材固有値を指標とした形態最適化への応用について考察を行う.

2 弾性剛性と幾何剛性の成分を用いた座屈固有値問題の縮約

2.1 序

本章では,本論文で提案している縮約による個材の座屈荷重を算出する手法について概説する.縮約手法については,これまで朝原らが研究を進めてきているが,そこで用いられていた縮約操作について問題点が指摘されている.そこで,3 節で既往の縮約方法とその問題点について解説し,4 節にて,新たに提案する縮約操作について提案する.

2.2 座屈固有値問題の縮約

座屈固有値問題（式(2.1)）を構成する全体弾性剛性マトリクス $[K_E]$ と全体幾何剛性マトリクス $[K_G]$ を個材について縮約し,縮約結果から得られた個材の弾性剛性マトリクス $[K_E']$,幾何剛性マトリクス $[K_G']$ から固有値問題を再構成することで,個材の座屈荷重を算出する手法を提案・検討する.

$$[K_E] \{U_e\} = \lambda [K_G] \{U_e\} \quad (2.1)$$

λ : 座屈荷重倍率, 固有値

$[K_E]$: 全体弾性剛性マトリクス

$[K_G]$: 全体幾何剛性マトリクス

$\{U_e\}$: 座屈モード, 固有ベクトル

$$[K_E'] \{U'_e\} = \lambda' [K_G'] \{U'_e\} \quad (2.2)$$

剛性マトリクスを個材について縮約するということは,剛性マトリクス内の個材端 2 節点に寄与する行と列のみを残すように,その他の行と列を消していくことである. このとき,消去した行と列の情報を残すマトリクスの要素内に付加させていくことで,架構全体の情報を個材へと落とし込むものとする. (図 2.1)

また,縮約操作は全体架構から個材を取り出し,架構中の拘束状態や剛性をばねや外力に置換した状態として表現することと考えられる. (図 2.2)

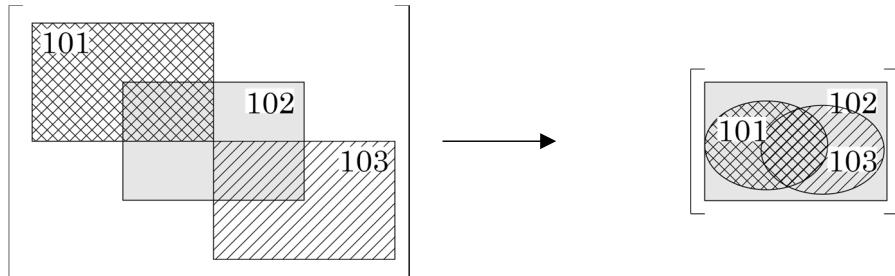


図 2.1 縮約によるマトリクスの変化イメージ

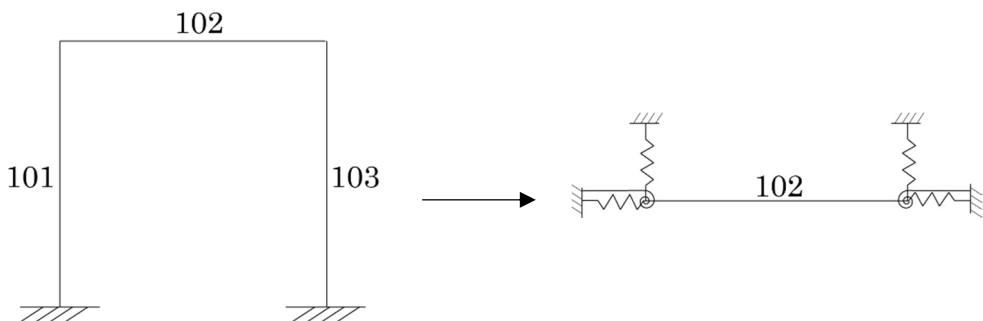


図 2.2 縮約による架構の変化イメージ

2.3 既往の縮約方法とその問題点

既往の縮約操作では,構成方程式(式(2.3))の式変形に着目し,[K_E]について1行1列消去する操作を考える.

$$[K_E]\{U\}=\{F\} \quad (2.3)$$

[K_E]: 全体弾性剛性マトリクス

{ U }:

{ F }:

ここでは,仮に,[K_E]を4行4列のマトリクスとし,以下のようにおく.

$$[K_E]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

また,変位ベクトル・荷重をそれぞれ次のようにおく.

$$\{U\}=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}^T \quad (2.5)$$

$$\{F\}=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}^T \quad (2.6)$$

構成方程式より,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

式(2.7)は連立方程式として以下のように表せる.

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 = f_1 \quad (2.8)$$

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 = f_2 \quad (2.9)$$

$$a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 + a_{34}u_4 = f_3 \quad (2.10)$$

$$a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4 = f_4 \quad (2.11)$$

ここで,消したい行の方程式に着目し,式変形を行う.2行目を消去するとき式(2.9)は以下のように変形する.

$$u_2 = \frac{f_2 - a_{21}u_1 - a_{22}u_2 - a_{23}u_3}{a_{22}} \quad (2.12)$$

これを,式(2.8,10,11)に代入し,マトリクスの形で表示すると,

$$\begin{bmatrix} a_{11} - a_{12}a_{21}/a_{22} & a_{13} - a_{12}a_{23}/a_{22} & a_{14} - a_{12}a_{24}/a_{22} \\ a_{31} - a_{32}a_{21}/a_{22} & a_{33} - a_{32}a_{23}/a_{22} & a_{34} - a_{32}a_{24}/a_{22} \\ a_{41} - a_{42}a_{21}/a_{22} & a_{43} - a_{42}a_{23}/a_{22} & a_{44} - a_{42}a_{24}/a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - f_2/a_{22} \\ f_3 - f_2/a_{22} \\ f_4 - f_2/a_{22} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

したがって,式(2.7)から式(2.13)への過程で,[K_E]は4行4列から3行3列へと縮約された.この操作はガウスの消去法であり,消去する節点に関する情報を残す節点の要素に付加していることから縮約過程で架構の安定性は保たれていると考えられる.

この1行1列を縮約する操作は、 $[K_E^n]$ の*i*行*j*列の成分を a_{ij} とし *k*行 *k*列を消去するとき、以下のように表せる。

$$[K_E^{n-1}] = [C_E^k][K_E^n][D_E^k] \quad (2.14)$$

$$[C_E^k] = \begin{bmatrix} a_{kk} & -a_{1k} & & \\ & \ddots & \vdots & \\ & a_{kk} & -a_{k-1k} & \\ & -a_{k+1k} & a_{kk} & \\ & \vdots & & \ddots \\ & -a_{nk} & & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$[D_E^k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{kk}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{a_{kk}} & \\ & & 0 & \\ & & \frac{1}{a_{kk}} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{a_{kk}} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

座屈固有値問題の等式を保つことを考慮し、この縮約操作を式(2.1)の両辺に行うと、1行1列する縮約操作は以下のようになる。

$$[C_E^k][K_E^n][D_E^k]\{Ue\} = \lambda'[C_E^k][K_G^n][D_E^k]\{Ue\} \quad (2.17)$$

この縮約操作において問題とされたのは、幾何剛性マトリクスの縮約である。縮約に用いられたマトリクス（以後、縮約マトリクス） $[C_E^k] \cdot [D_E^k]$ は、弾性剛性マトリクスの成分のみを用いて構成されている。そのため、幾何剛性マトリクスを縮約する際に、そのまま用いると架構中の一部の軸力が無視されることが朝原によって示された。その過程について $[K_G]$ を4行4列のマトリクス（式(2.18)）として以下に示す。

$$[K_G] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

4行目と4列目を消去する変換行列 $[C_E^4][D_E^4]$ を $[K_G]$ に作用させる。

$$\begin{aligned} & [C_E^4][K_G][D_E^4] \\ &= \begin{bmatrix} a_{44} & 0 & 0 & -a_{14} \\ 0 & a_{44} & 0 & -a_{24} \\ 0 & 0 & a_{44} & -a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{44}b_{11}-a_{14}b_{41} & a_{44}b_{12}-a_{14}b_{42} & a_{44}b_{13}-a_{14}b_{43} & a_{44}b_{14}-a_{14}b_{44} \\ a_{44}b_{21}-a_{24}b_{41} & a_{44}b_{22}-a_{24}b_{42} & a_{44}b_{23}-a_{24}b_{43} & a_{44}b_{24}-a_{24}b_{44} \\ a_{44}b_{31}-a_{34}b_{41} & a_{44}b_{32}-a_{34}b_{42} & a_{44}b_{33}-a_{34}b_{43} & a_{44}b_{34}-a_{34}b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}-a_{14}b_{41}/a_{44} & b_{12}-a_{14}b_{42}/a_{44} & b_{13}-a_{14}b_{43}/a_{44} & 0 \cdot (a_{44}b_{14}-a_{14}b_{44}) \\ b_{21}-a_{24}b_{41}/a_{44} & b_{22}-a_{24}b_{42}/a_{44} & b_{23}-a_{24}b_{43}/a_{44} & 0 \cdot (a_{44}b_{24}-a_{24}b_{44}) \\ b_{31}-a_{34}b_{41}/a_{44} & b_{32}-a_{34}b_{42}/a_{44} & b_{33}-a_{34}b_{43}/a_{44} & 0 \cdot (a_{44}b_{34}-a_{34}b_{44}) \end{bmatrix}$$

式(2.7)より ■ の部分で存在する値を無理やり消去していることがわかる。

のことから縮約マトリクスを考える際に幾何剛性マトリクスについても考慮し,作成する必要が指摘された.

2.4 幾何剛性を考慮した縮約手法の提案

弾性剛性・幾何剛性を考慮した縮約方法を以下に提案する。縮約マトリクスは既存のものと同様にガウスの消去法をもとに考え、縮約操作は式(2.8)となる。なお、 $[K_E^n]$ の i 行 j 列の成分は a_{ij} とし、 $[K_G^n]$ の i 行 j 列の成分は b_{ij} とする。

$$[C_E^k][K_E^n][C_G^k]^T[D^k]\{Ue\} = \lambda'[C_E^k][K_E^n][C_G^k]^T[D^k]\{Ue\} \quad (2.20)$$

$$[C_E^k] = \begin{bmatrix} a_{kk} & -a_{1k} & & \\ & \ddots & \vdots & \\ & a_{kk} & -a_{k-1k} & \\ & & -a_{k+1k} & a_{kk} \\ & & \vdots & \ddots \\ & -a_{nk} & & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[C_G^k] = \begin{bmatrix} b_{kk} & -b_{1k} & & \\ & \ddots & \vdots & \\ & b_{kk} & -b_{k-1k} & \\ & & -b_{k+1k} & b_{kk} \\ & & \vdots & \ddots \\ & -b_{nk} & & b_{kk} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[D^k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{kk}b_{kk}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{a_{kk}b_{kk}} & \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

この縮約操作について 4 行 4 列のマトリクスの 4 行 4 列目を消去する操作を例として以下に示す。

$$\begin{aligned} & [C_E^4][K_E^4][C_G^{4'}][D^4] \\ &= \begin{bmatrix} a_{44} & 0 & 0 & -a_{14} \\ 0 & a_{44} & 0 & -a_{24} \\ 0 & 0 & a_{44} & -a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} \\ -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44}b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44}b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44}b_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41} & a_{12}a_{44} - a_{14}a_{42} & a_{13}a_{44} - a_{14}a_{43} & 0 \\ a_{21}a_{44} - a_{24}a_{41} & a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42} & a_{23}a_{44} - a_{24}a_{43} & 0 \\ a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41} & a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42} & a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} \\ -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44}b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44}b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44}b_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{44}(a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}) & b_{44}(a_{12}a_{44} - a_{14}a_{42}) & b_{44}(a_{13}a_{44} - a_{14}a_{43}) & 0 \\ b_{44}(a_{21}a_{44} - a_{24}a_{41}) & b_{44}(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) & b_{44}(a_{23}a_{44} - a_{24}a_{43}) & 0 \\ b_{44}(a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) & b_{44}(a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) & b_{44}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44}b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44}b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44}b_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - a_{14} \cdot a_{41}/a_{44} & a_{12} - a_{14} \cdot a_{42}/a_{44} & a_{13} - a_{14} \cdot a_{43}/a_{44} \\ a_{21} - a_{24} \cdot a_{41}/a_{44} & a_{22} - a_{24} \cdot a_{42}/a_{44} & a_{23} - a_{24} \cdot a_{43}/a_{44} \\ a_{31} - a_{34} \cdot a_{41}/a_{44} & a_{32} - a_{34} \cdot a_{42}/a_{44} & a_{33} - a_{34} \cdot a_{43}/a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [C_E^4][K_G^4][C_G^{4'}][D^4] \\
&= \begin{bmatrix} a_{44} & 0 & 0 & -a_{14} \\ 0 & a_{44} & 0 & -a_{24} \\ 0 & 0 & a_{44} & -a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44}b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44}b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44}b_{44} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{44} & 0 & 0 & -a_{14} \\ 0 & a_{44} & 0 & -a_{24} \\ 0 & 0 & a_{44} & -a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}b_{44} - b_{14}b_{41} & b_{12}b_{44} - b_{14}b_{42} & b_{13}b_{44} - b_{14}b_{43} \\ b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41} & b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42} & b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43} \\ b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41} & b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42} & b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43} \\ b_{41}b_{44} - b_{44}b_{41} & b_{42}b_{44} - b_{44}b_{42} & b_{43}b_{44} - b_{44}b_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44}b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44}b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44}b_{44} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{44}(b_{11}b_{44} - b_{14}b_{41}) & a_{44}(b_{12}b_{44} - b_{14}b_{42}) & a_{44}(b_{13}b_{44} - b_{14}b_{43}) \\ a_{44}(b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41}) & a_{44}(b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42}) & a_{44}(b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43}) \\ a_{44}(b_{31}b_{44} - b_{34}b_{41}) & a_{44}(b_{32}b_{44} - b_{34}b_{42}) & a_{44}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{44}b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{44}b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{44}b_{44} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} - b_{14} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{12} - b_{14} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{13} - b_{14} \cdot b_{43}/b_{44} \\ b_{21} - b_{24} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{22} - b_{24} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{23} - b_{24} \cdot b_{43}/b_{44} \\ b_{31} - b_{34} \cdot b_{41}/b_{44} & b_{32} - b_{34} \cdot b_{42}/b_{44} & b_{33} - b_{34} \cdot b_{43}/b_{44} \end{bmatrix} \tag{2.25}
\end{aligned}$$

このように、弾性剛性マトリクス・幾何剛性マトリクスとともに、一部の要素を無視するという問題を含まずに縮約操作が行える。これらの結果より、k行 k列を消去したマトリクスの i 行 j 列は次のように表せることがわかる。

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} \tag{2.26}$$

これは、式(2.27)のような縮約操作をした場合と同じ結果が得られるため、3章以降の解析で用いたプログラム内では、計算量の少ない式(2.27)を用いている。

$$[C_E^k][K_E^n][D_E^k]\{Ue\} = \lambda'[C_G^k][K_G^n][D_G^k]\{Ue\} \tag{2.27}$$

ここで、式(2.27)の縮約操作が行えない場合について説明する。 $[K_G]$ は対角成分に 0 をもつ行列である。消したい行の対角成分が 0 のとき、縮約行列を求めることができない。しかし、対角成分が 0 のときその行と列の成分も全て 0 である。したがって、 $[K_G]$ の対角要素が 0 の行と列を消去する操作は、式(2.28)から式(2.29)へのようにマトリクスを小さくする操作のみ行うものとする。

$$[K_G^4] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$[K_G^3] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

このとき、弾性剛性マトリクスは、従来どおり式(2.30)の操作を行う。

$$[K_E^{n-1}] = [C_E^k][K_E^n][D_E^k] \tag{2.30}$$

この場合、一見座屈固有値問題の両辺に違う操作を行っているように感じるが、 $[K_G]$ の対角要素が 0 の行と列を消去する操作は式(2.31)と同じ結果が得られる。

$$[K_G^{n-1}] = [C_E^k][K_G^n][D_E^k] \tag{2.31}$$

したがって、この縮約時には式(2.17)が例外的に採用されると考えられるため、等式を保つこと

ができる。

2.5 結

本章では、これまでの縮約方法を改良し、弾性剛性マトリクス・幾何剛性マトリクスの両方を考慮し、縮約を行う方法として以下の式を提案した。

$$[C_E^k][K_E^n][D_E^k]\{Ue\} = \lambda' [C_E^k][K_G^n][D_E^k]\{Ue\}$$

次章以降でこの縮約操作を行ったマトリクスから再構成した個材の座屈固有値問題から得られる固有値 λ' について考察を行う。

3 個材固有値と個材の座屈荷重の関係

3.1 序

本章では,2 章で提案した縮約法をもちいて簡単な骨組モデルの数値解析を行い,得られる個材固有値 λ' と個材座屈荷重 N_{cr} について分析することで,提案手法の有効性について考える.

3.2 節では,非対称荷重が加わる架構などで座屈耐力の過小評価が生じることを受けて,架構の荷重条件が異なる場合に算出される座屈耐力を現行法の結果との比較を踏まえながら考察し,本手法の妥当性や個材固有値の性質を探る.3.3 節では,個材固有値を用いた座屈耐力の評価についてより詳細に検討する.3.4 節では,境界条件ごとに有効座屈長さが定義されている柱を有限要素に分割し,その個材固有値の分布で傾向を考察する.また,座屈モードに部材角が生じない架構では,座屈固有値問題を用いて座屈耐力を求める際,部材の分割数が固有値 λ に大きく影響することが知られているため,分割数と個材固有値の関連性についても考察する.

なお,本章以降での数値解析結果は $1tf=10kN$ とし,重力単位系に換算した場合の数値がより精度の高い数値とする.

3.2 荷重条件の違いによる個材固有値と個材座屈荷重

非対称荷重が加わる1層ラーメン構造では軸力が小さい柱において不合理な座屈荷重が算出されることは、1.2.1項で述べたように明らかである。そこで、本項では様々な架構において荷重条件の異なるモデルについて解析を行い、縮約法を用いたときに得られる個材座屈荷重について考察をする。

3.2.1 荷重条件の異なる1層ラーメン構造の解析

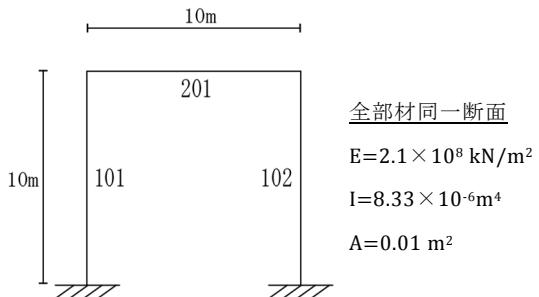


図 3.2.1 frameA

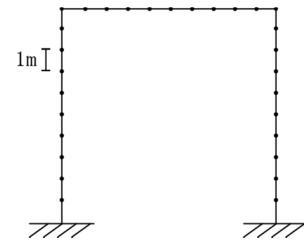


図 3.2.2 frameA'(分割モデル)

図 3.2.1 に示す2次元の架構において荷重条件が異なるモデルの解析結果を図 3.2.3~10、表 3.2.1~10 に示す。(a)図は部材の軸力を表し、圧縮を正とする。(b)図は座屈荷重を表し、(c)図は構造全体系の線形座屈解析を行ったときの座屈モードを表す。

ここで、線形座屈解析時には部材の中間接点を増やすと座屈荷重の精度があがることが知られているため、全体固有値を決定する際には1部材を10分割したモデルと解析結果の比較を行い、全体固有値が大きく異なる場合はコメントの上、分割モデルの固有値を全体固有値として採用する。なお、座屈モードに関して詳細な変形を得るために、全て分割モデルにおけるモードを示す。

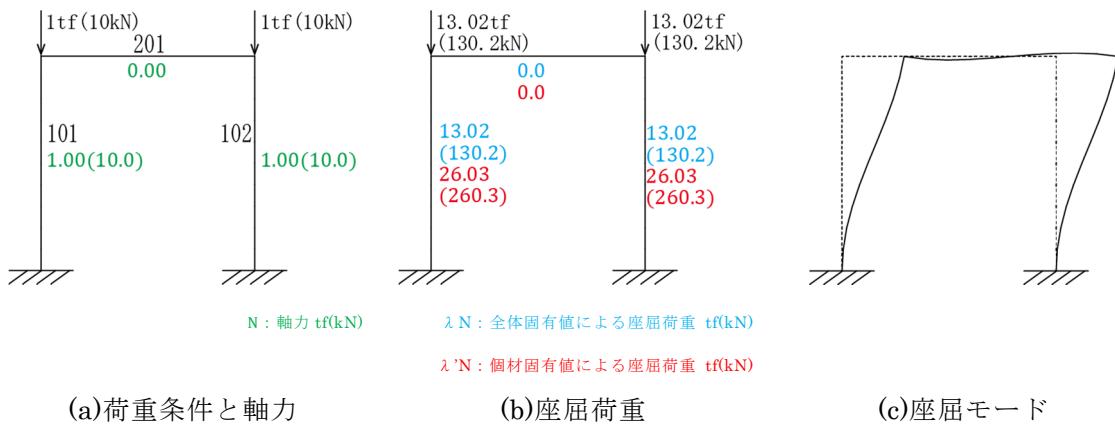


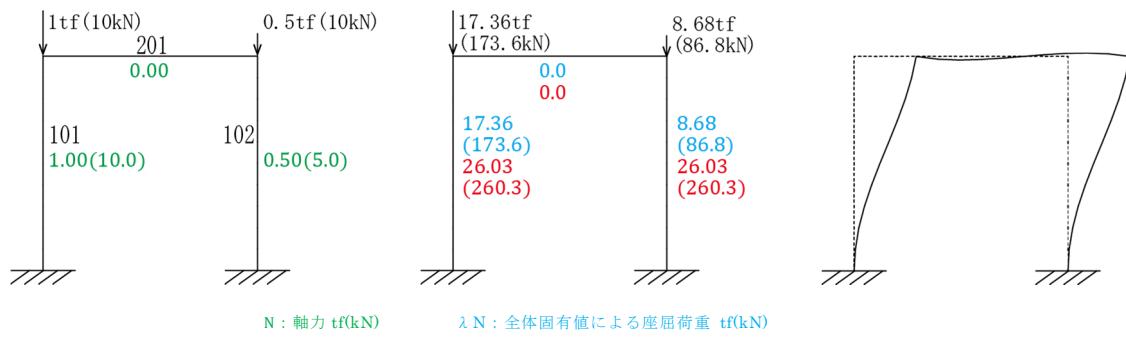
図 3.2.3 frameA1 解析結果

表 3.2.1 frameA1 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	10.0			130.2	26.02	260.2
102	10.0	13.02		130.2	26.02	260.2
201	0.0			0.0	13.02	0.0

全体剛性マトリクス	
$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
$[K_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 1.3333 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス	
101	$[K_E']$
102	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$
201	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
	$[K_G']$
101	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 \end{bmatrix}$
102	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 1.3333 \end{bmatrix}$



(a)荷重条件と軸力

(b)座屈荷重

(c)座屈モード

図 3.2.4 frameA2 解析結果

表 3.2.2 frameA2 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	10.0			173.6	26.02	260.2
102	5.0	17.36		86.8	52.05	260.2
201	0.0			0.0	17.36	0.0

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	$[K'_E]$	$[K'_G]$
101	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.119999 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333324 \end{bmatrix}$
102		$\begin{bmatrix} 0.060001 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.05 & 0 & 0.666676 \end{bmatrix}$
201	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}$

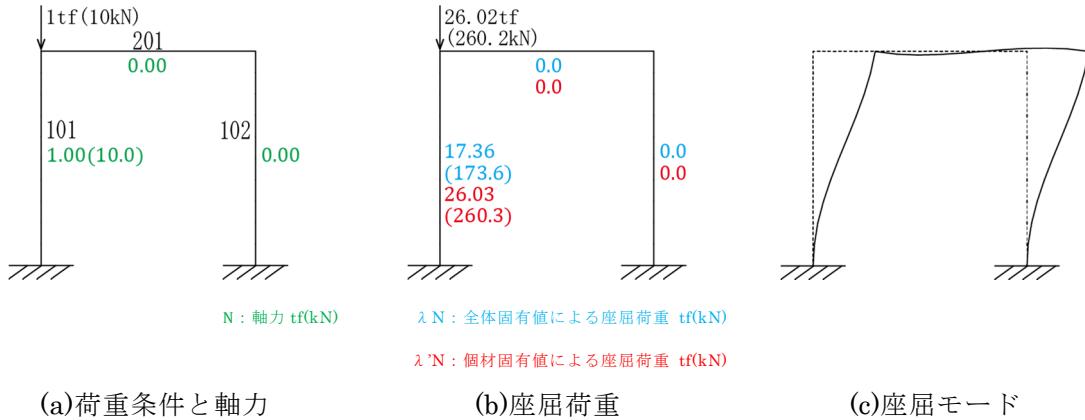


図 3.2.5 frameA3 解析結果

表 3.2.3 frameA1 解析結果

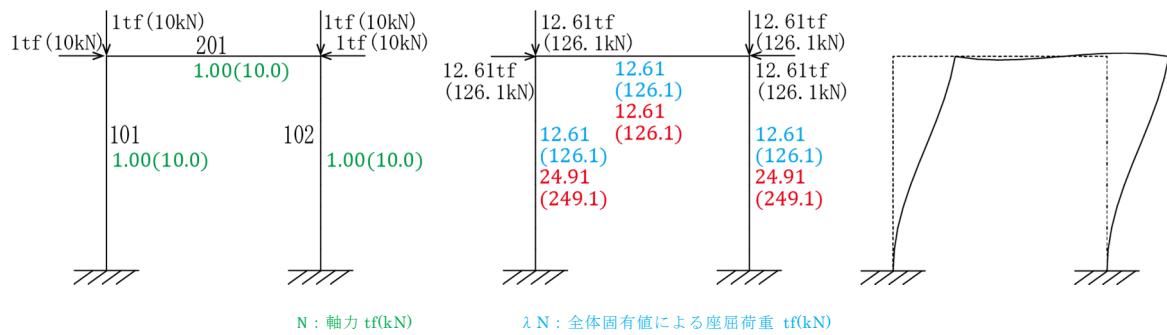
部材番号	軸力	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
	N (kN)	λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda'N$ (tf)
101	10.0		260.2	26.02	260.2
102	0.0	26.02	0.0	1818181.81	0.0
201	0.0		0.0	26.02	0.0

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
$[K_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	$[K_E']$	$[K_G']$
101	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.119998 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333314 \end{bmatrix}$
102		$\begin{bmatrix} 1.71E-06 & 0 & -1.4E-06 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.4E-06 & 0 & 1.9E-05 \end{bmatrix}$
201	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



(a)荷重条件と軸力

 N : 軸力 tf(kN) λN : 全体固有値による座屈荷重 tf(kN) $\lambda' N$: 個材固有値による座屈荷重 tf(kN)

(b)座屈荷重

(c)座屈モード

図 3.2.6 frameA4 解析結果

表 3.2.4 frameA4 解析結果

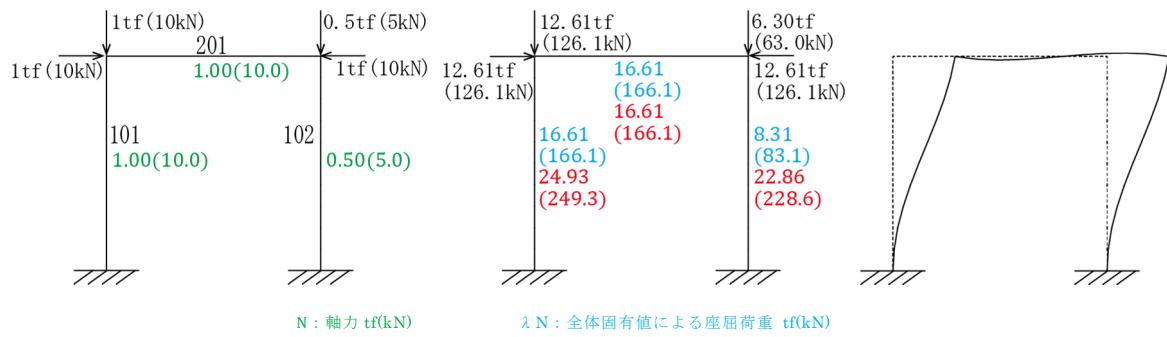
部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	10.0			126.1	24.91	249.1
102	10.0	12.61		126.1	24.91	249.1
201	10.0			126.1	12.61	126.1

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 21002 & 0 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
$[K_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.1 & 0 & -0.12 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2.6666 & 0 & 0.1 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & -0.12 & 0.1 & 0 & 0.12 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.333 & -0.1 & 0.1 & 2.6666 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	$[K'_E]$	$[K'_G]$
101	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 2.51386 \end{bmatrix}$
102		
201	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 & 0 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.1 & 0 & -0.12 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2.6666 & 0 & 0.1 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & -0.12 & 0.1 & 0 & 0.12 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.333 & -0.1 & 0.1 & 2.6666 \end{bmatrix}$



(a)荷重条件と軸力

(b)座屈荷重

(c)座屈モード

図 3.2.7 frameA5 解析結果

表 3.2.5 frameA5 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
		λ	$N_{cr} = \lambda N$ (tf)		
101	10.0		166.1	24.93	249.3
102	5.0	16.61	83.1	45.72	228.6
201	10.0		166.1	16.61	166.1

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 21002 & 0 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.1 & 0 & -0.12 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 1.3333 & 0 & 0.1 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.1 & 0 & 0.12 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.333 & 0 & 0.1 & 1.3333 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	$[K'_E]$	$[K'_G]$
101	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.119999 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 2.490704 \end{bmatrix}$
102		$\begin{bmatrix} 0.060001 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.05 & 0 & 1.847203 \end{bmatrix}$
201	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.1 & 0 & -0.12 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2.6666 & 0 & 0.1 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0 & -0.05 \\ 0 & -0.12 & 0.1 & 0 & 0.12 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.333 & -0.05 & 0.1 & 2 \end{bmatrix}$

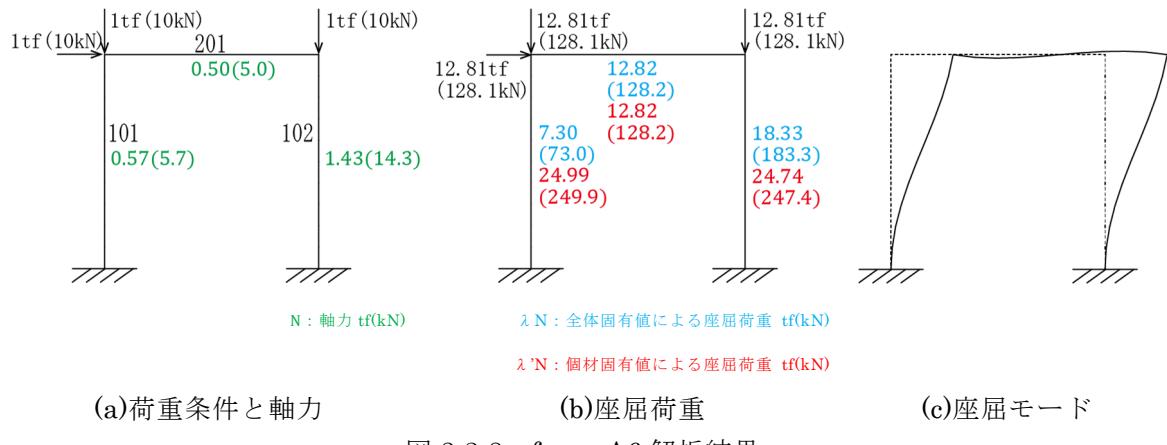
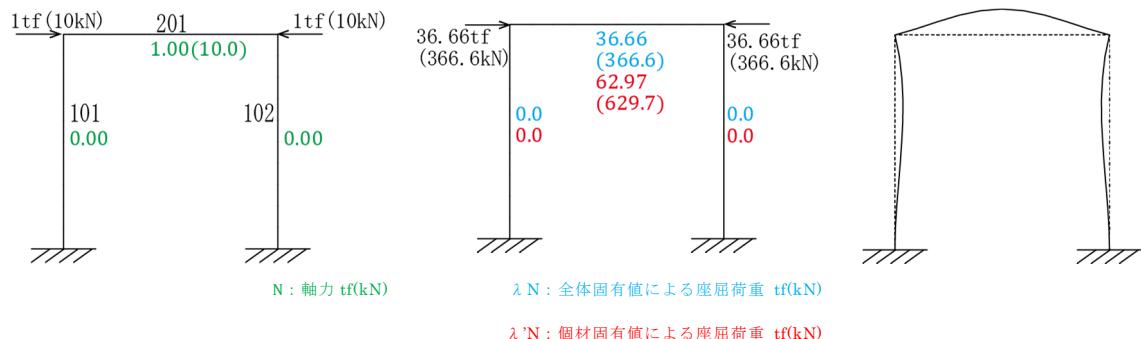


図 3.2.8 frameA6 解析結果

表図 3.2.6 frameA6 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		個材固有値	
		λ	$N_{cr} = \lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
101	5.7		73.0	43.84	249.9
102	14.3	12.82	183.3	18.00	247.4
201	5.0		64.1	12.82	64.1

全体剛性マトリクス	
$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
縮約後マトリクス	
	$[K'_E]$
101	$\begin{bmatrix} 0.0686 & 0 & -0.057 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06 & -0.05 & 0 & -0.06 & -0.05 \\ -0.057 & -0.05 & 1.4286 & 0 & 0.05 & -0.167 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1714 & 0 & -0.143 \\ 0 & -0.06 & 0.05 & 0 & 0.06 & 0.05 \\ 0 & -0.05 & -0.167 & -0.143 & 0.05 & 2.5714 \end{bmatrix}$
102	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$
	$[K'_G]$
101	$\begin{bmatrix} 0.068573 & 0 & -0.05714 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.05714 & 0 & 1.368902 \end{bmatrix}$
102	$\begin{bmatrix} 0.171427 & 0 & -0.14286 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.14286 & 0 & 2.497324 \end{bmatrix}$



(a)荷重条件と軸力

(b)座屈荷重

(c)座屈モード

図 3.2.9 frameA7 解析結果

表 3.2.7 frameA7 解析結果

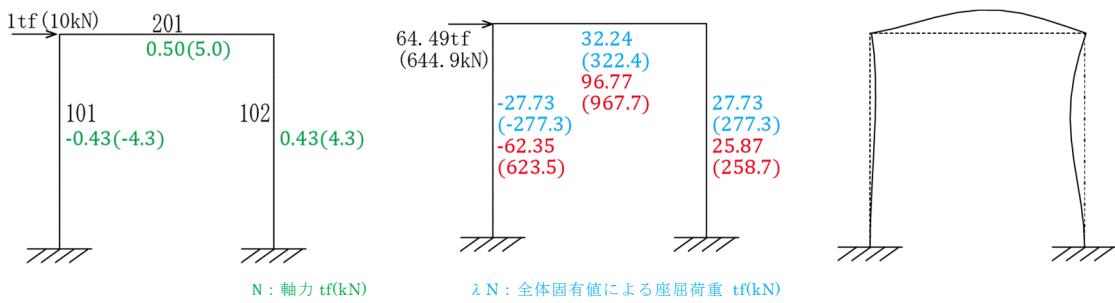
部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
		λ	$N_{cr}=\lambda N$ (tf)	λ'	$N_{cr}'=\lambda'N$ (kN)
101	0.0		0.00	101.72	0.00
102	0.0	36.66	0.00	101.72	0.00
201	10.0		366.6	62.97	620.97

※全体固有値は分割モデルを採用

全体剛性マトリクス	
[K_E]	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
[K_G]	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.1 & 0 & -0.12 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2.6666 & 0 & 0.1 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0 & -0.05 \\ 0 & -0.12 & 0.1 & 0 & 0.12 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.333 & -0.05 & 0.1 & 2 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	[K_E']	[K_G']
101	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.111083 \end{bmatrix}$
102		
201	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.1 & 0 & -0.12 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 1.3333 & 0 & 0.1 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.1 & 0 & 0.12 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.333 & 0 & 0.1 & 1.3333 \end{bmatrix}$



(a)荷重条件と軸力

(b)座屈荷重

(c)座屈モード

図 3.2.10 frameA8 解析結果

表 3.2.8 frameA8 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
		λ	N _{cr} =λN (kN)	λ'	N' _{cr} =λ'N (kN)
101	-4.3		-277.3	-62.35	268.1
102	4.3	64.49	277.3	60.70	258.7
201	5.0		322.4	96.77	483.9

※全体固有値は分割モデルを採用

全体剛性マトリクス	
[K _E]	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 21002 & 0 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$
[K _G]	$\begin{bmatrix} -0.051 & 0 & 0.0429 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06 & -0.05 & 0 & -0.06 & -0.05 \\ 0.0429 & -0.05 & 0.0952 & 0 & 0.05 & -0.167 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0514 & 0 & -0.043 \\ 0 & -0.06 & 0.05 & 0 & 0.06 & 0.05 \\ 0 & -0.05 & -0.167 & -0.043 & 0.05 & 1.2381 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	[K _{E'}]	[K _{G'}]
101	$\begin{bmatrix} 3.411024 & -0.78709 & -7.87231 \\ -0.78709 & 21001.31 & -7.87126 \\ -7.87231 & -7.87126 & 131.1942 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.05143 & 0 & 0.042856 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.042856 & 0 & 0.01618 \end{bmatrix}$
102		$\begin{bmatrix} 0.051427 & 0 & -0.04286 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.04286 & 0 & 0.710308 \end{bmatrix}$
201	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21002 & 0 & -10.5 & -21000 & 0 & 0 \\ 0 & 21002 & -10.5 & 0 & -2.099 & -10.5 \\ -10.5 & -10.5 & 139.94 & 0 & 10.496 & 34.986 \\ -21000 & 0 & 0 & 21002 & 0 & -10.5 \\ 0 & -2.099 & 10.496 & 0 & 21002 & 10.496 \\ 0 & -10.5 & 34.986 & -10.5 & 10.496 & 139.94 \end{bmatrix}$

・柱のみに軸力が発生する場合(frameA1~3)

構造全体系の線形座屈解析の結果から柱の座屈荷重を求めた場合,非対称荷重となるframeA2,3 では 2 本の柱の座屈荷重が異なる値として算出され,荷重の差が大きいほど座屈荷重の差が大きくなる.一方で,縮約法により求めた個材固有値を用いて個材の座屈荷重を算出すると,非対称荷重でも 2 本の柱の座屈荷重が等しく求まる.さらに,frameA1~3 全ての柱で座屈荷重が 260.2kN と算出されていることから,一方の柱の座屈荷重を算出する際,他方の柱の軸力の影響を受けないことがわかる.これは,それぞれの縮約後の幾何剛性マトリクスをみても明らかである.

また,frameA3 では,部材 101 のみに軸力が発生しており,この部材が支配的となり座屈が生じていることは明らかである.このときの全体座屈荷重と個材座屈荷重は 260.2kN で一致しており,この座屈荷重が縮約法を用いたときの他の荷重条件下の柱でも得られている.

表 3.2.9 柱の解析結果(frameA1~3)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
frameA1	101	10.0	13.02	130.2	26.02	260.2
	102	10.0		130.2	26.02	260.2
frameA2	101	10.0	17.36	173.6	26.02	260.2
	102	5.0		86.8	52.05	260.2
frameA3	101	10.0	26.02	260.2	26.02	260.2
	102	0.0		0.0	1818181.81	0.0

次に梁について考察する.今,梁の軸力は 0kN であるが,個材固有値はそれぞれの荷重条件下で異なる値が算出されており frameA3>frameA2>frameA1 となっている.柱との関連を踏まえて考えると,部材 101 は全てのモデルで 10kN の荷重が加わっているため同じ条件化にあるが,部材 102 に加わる荷重は frameA1>frameA2>frameA3 である.部材 201 の縮約後の弾性剛性マトリクスはすべてのモデルで同じなので,軸力が大きいほど座屈しやすいと考えられる.したがって,梁の個材固有値は柱が座屈耐力に対して軸力が大きく,座屈しやすいほど小さく算出される傾向があり,部材の固定度と関連性があると考えられる.

これらのモデルでは,全体固有値は梁の個材固有値と一致する.構造全体系の線形座屈解析で最も座屈に弱い部材に対応して固有値が算出されることを考えると,梁には軸力が生じていないにも関わらず,梁が支配的となって座屈が生じていることになる.この想定は,妥当であるとは言いがたく,全体固有値との関連性を解明していく必要がある.

表 3.2.10 梁の解析結果(frameA1~3)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
			λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
frameA1	201	0.0	13.02	0.0	13.02	0.0
frameA2	201	0.0	17.36	0.0	17.36	0.0
frameA3	201	0.0	26.02	0.0	26.02	0.0

・柱,梁に軸力が発生し,柱が支配的となって座屈する場合(frameA4~6)

frameA4,5 では,座屈モードから柱が支配的となって座屈していると考えられる.

柱の個材固有値ならびに座屈荷重は全体固有値から算出したときよりも大きい値が得られ,それらは梁に軸力が存在しない場合と同様,部材 101,102 は非対称荷重となる frameA5 においてもおおよそ等しい座屈荷重が得られる.

しかし,梁に軸力が存在する場合,表 3.2.11 の frameA1 と frameA4 の縮約後の幾何剛性マトリクスを比較すると 3 行 3 列目の要素が変化していることがわかる.座屈荷重も frameA1 と frameA4 では 5%ほどではあるが,異なる値となった.またこのとき,部材 102 の軸力のみが異なる frameA4 と frameA5 の縮約後の幾何剛性マトリクスを比較すると,部材 101 の 3 行 3 列目が微小ではあるがことなる.座屈荷重にも差が生じた.したがって,梁に軸力が存在しているときは,柱は梁の軸力だけでなく,梁を介して他方の柱の軸力の影響も受けることがわかる.

表 3.2.11 柱の解析結果(frameA1,4~6)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
			λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
frameA1	101	10.0	13.02	130.2	26.02	260.2
	102	10.0		130.2	26.02	260.2
frameA4	101	10.0	12.61	126.1	24.91	249.1
	102	10.0		126.1	24.91	249.1
frameA5	101	10.0	16.61	166.1	24.93	249.3
	102	5.0		83.1	45.72	228.6
frameA6	101	5.7	12.82	73.0	43.84	249.9
	102	14.3		183.3	18.00	247.4

表 3.2.12 部材 101 の縮約後幾何剛性マトリクス

	frameA1~3	frameA4	frameA5
$[K_G']$	$\begin{bmatrix} 0.119999 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333324 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 2.51386 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.119999 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 2.490704 \end{bmatrix}$

また,このときの梁の座屈荷重は全体固有値と個材固有値のどちらから算出しても同じ値を示しているが,座屈モードから柱が支配的となっているのは明らかであるにも関わらず柱よりも小さい固有値をとる.

ここで梁の個材固有値について分析すると,柱に軸力が存在しない場合のときと同様,frameA4,5 を比較したとき,frameA5 の個材固有値が大きく算出されるため,柱が座屈しやすいほど,梁の固有値は小さく算出されることがわかる.したがって,ここでも梁の個材固有値は梁の固定度に関連をもつと考えられ,個材座屈荷重の妥当性は明らかでない.

表 3.2.13 梁の解析結果(frameA4~6)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
			λ	$N_{cr} = \lambda N$ (kN)		
frameA4	201	10.0	12.61	126.1	12.61	126.1
frameA5	201	10.0	16.61	166.1	16.61	166.1
frameA6	201	5.0	12.82	64.1	12.82	64.1

・梁のみに軸力が発生する場合(frameA7)

梁のみに軸力が発生するとき,座屈モードでは節点移動がなく,部材角が生じない座屈となるため,全体固有値は 1 部材を分割した frameA'7 と分割なしの frameA7 で 2 倍近く異なる値が算出される.したがって,全体固有値は frameA'7 から算出したものを採用している.

このとき,個材固有値を用いた梁の座屈荷重は,分割なしの frameA7 と一致する.したがって,1 部材の分割をせずに計算した縮約法では,部材角が生じない部材の正しい座屈荷重は検出が出来ないと考えられる.一方で,個材固有値は柱に軸力が加わるなどのモデルよりも大きく,固定度を表す数値としては妥当性が見られる.

表 3.2.14 frameA7,A'7 の固有値

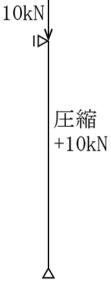
モデル	全体固有値	梁(部材 201)の個材固有値
frameA7	62.97	62.97
frameA'7	36.66	-

・柱,梁に軸力が発生し梁が支配的となって座屈する場合(frameA8)

この場合においても,梁のみに軸力が発生する場合と同様に部材角が生じない座屈であるため frameA8 と frameA'8 では全体固有値の値に大きな差が見られたので,frameA'8 から算出したものを採用する.

この荷重条件下では,部材 101 で個材固有値が負の値として算出された.しかし,線形座屈解析において,表 3.2.8 に示すように 1 本柱に引張軸力となるように荷重条件を与えた場合,全体固有値となる絶対値が最小の固有値は負の値として算出され,その絶対値は圧縮荷重を加えたときと等しくなる.したがってこの場合についても同様に,軸力が引張となっているため座屈荷重としては圧縮の荷重が算出できていると考える.

表 3.2.15 負の固有値の検証

model		
	4.14×10^2 (正)	-4.14×10^2 (負)
固有値	$4.14 \times 10^2 \times 10 = 4140$ kN (正)	$-4.14 \times 10^2 \times -10 = 4140$ kN (正)
座屈荷重		

また,このとき柱は構造全体系の線形座屈解析で求めた全体固有値による個材の座屈荷重と縮約法により求めた個材固有値による座屈荷重を比較すると,個材固有値により求めたほうが小さく算出された.

梁の個材固有値は,梁に軸力発生していない frameA7 よりも小さい値となっており,柱が座屈しやすいため固定度が小さく算出されたと考えられる.

表 3.2.16 柱の解析結果(frameA8)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
			λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
frameA8	101	-4.3	64.49	-277.3	-62.35	268.1
	102	4.3		277.3	60.70	258.7

表 3.2.17 梁の解析結果(frameA7,8)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
			λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
frameA7	201	10.0	62.97	366.6	62.97	620.97
frameA8	201	5.0	64.49	322.4	96.77	483.9

3.2.2 2層ラーメン構造の数値解析

次に1層ラーメン構造のframeAを拡張して、図3.2.11に示す2次元の2層ラーメン構造について分析する。ここでは、1層ラーメン構造においてみられた個材固有値の傾向が2層となつても傾向が一致するのか確認すると共に、直線状に接合される部材が存在する場合の個材固有値とそれによる個材座屈荷重はどのような値を示すのか分析する。

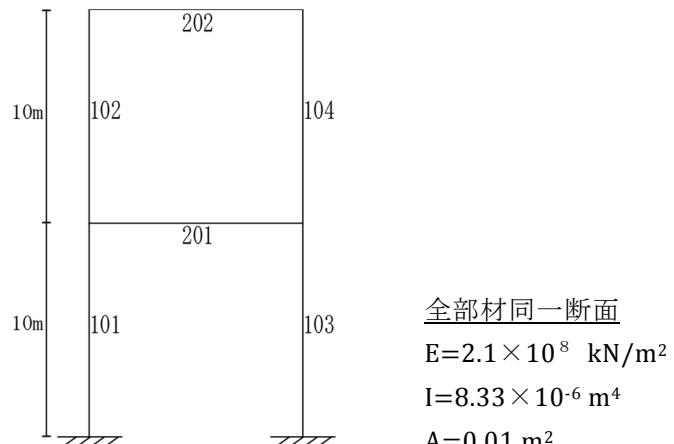


図3.2.11 frame2A

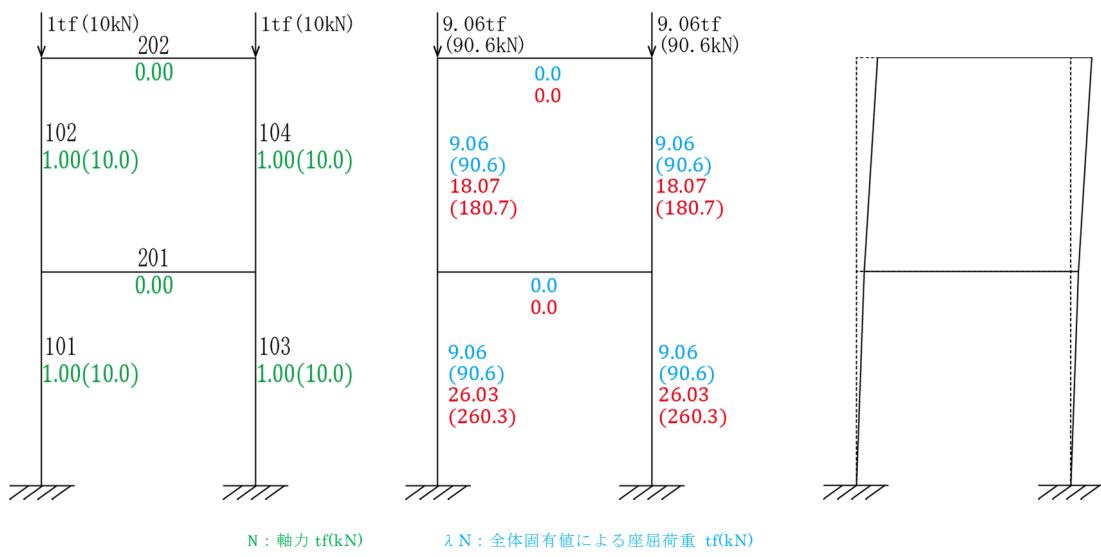
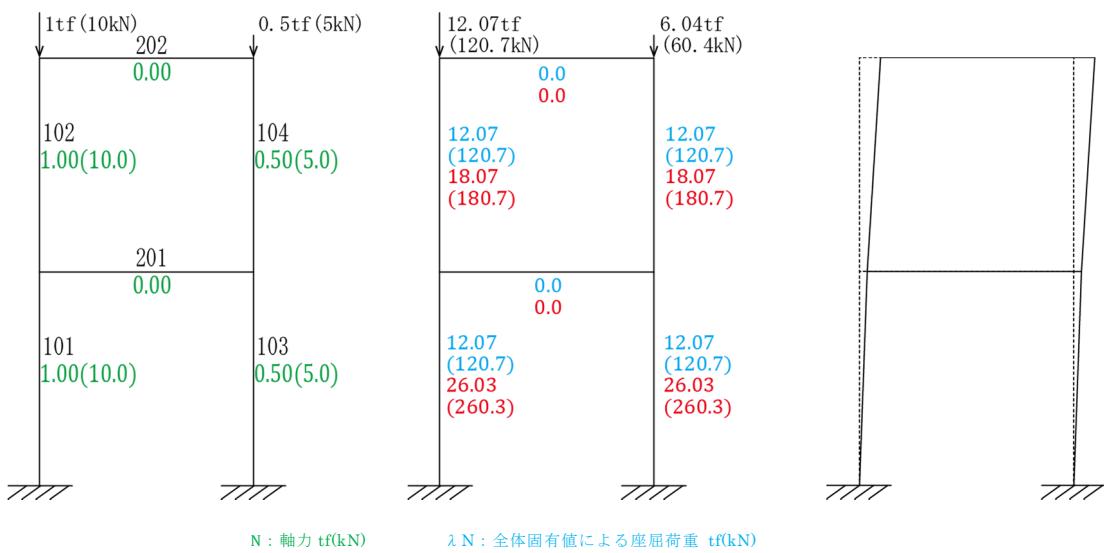


表 3.2.18 frame2A1 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
		λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
101	10.0		90.6	26.03	260.3
102	10.0		90.6	18.07	180.7
103	10.0	9.06	90.6	26.03	260.3
104	10.0		90.6	18.07	180.7
201	0.0		0.0	13.03	0.0
202	0.0		0.0	9.31	0.0



(a)荷重条件と軸力図

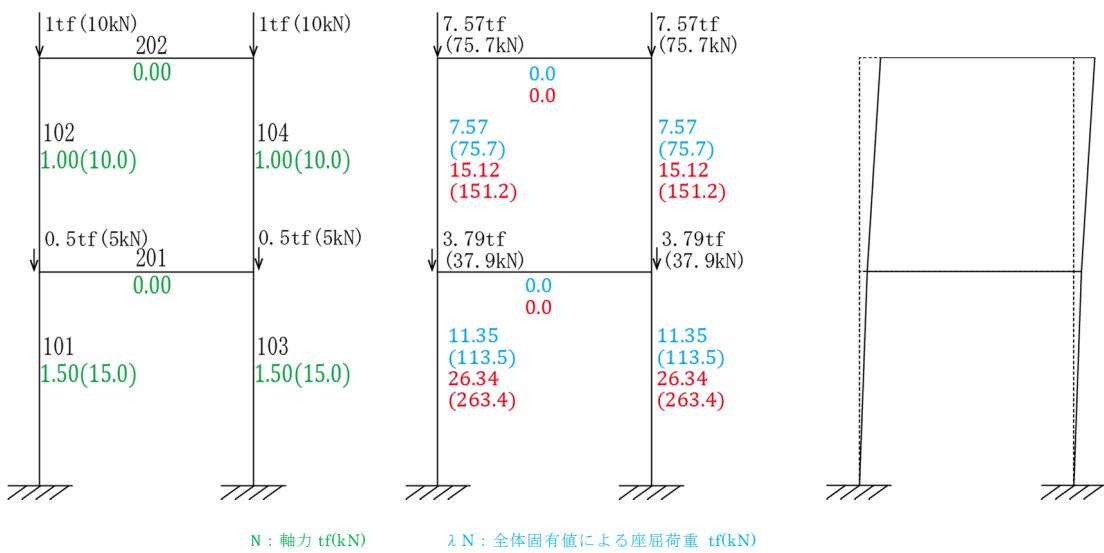
(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.13 frame2A2

表 3.2.19 frame2A2 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
		λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
101	10.0		120.7	26.03	260.3
102	10.0		120.7	18.07	180.7
103	5.0		60.3	52.06	260.3
104	5.0	12.07	60.3	36.15	180.7
201	0.0		0.0	17.38	0.0
202	0.0		0.0	12.41	0.0



(a)荷重条件と軸力図

(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.14 frame2A3

表 3.2.20 frame2A3 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	15.0			113.5	17.56	263.4
102	10.0			75.7	15.12	151.2
103	15.0			113.5	17.56	263.4
104	10.0	7.57		75.7	15.12	151.2
201	0.0			0.0	8.78	0.0
202	0.0			0.0	7.57	0.0

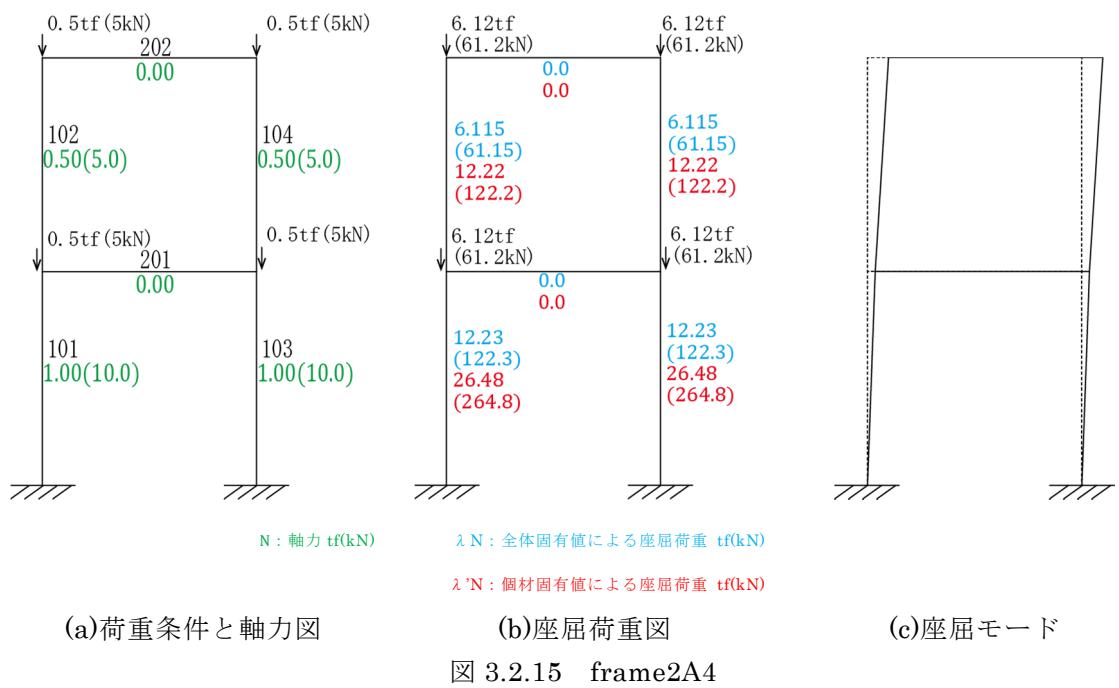
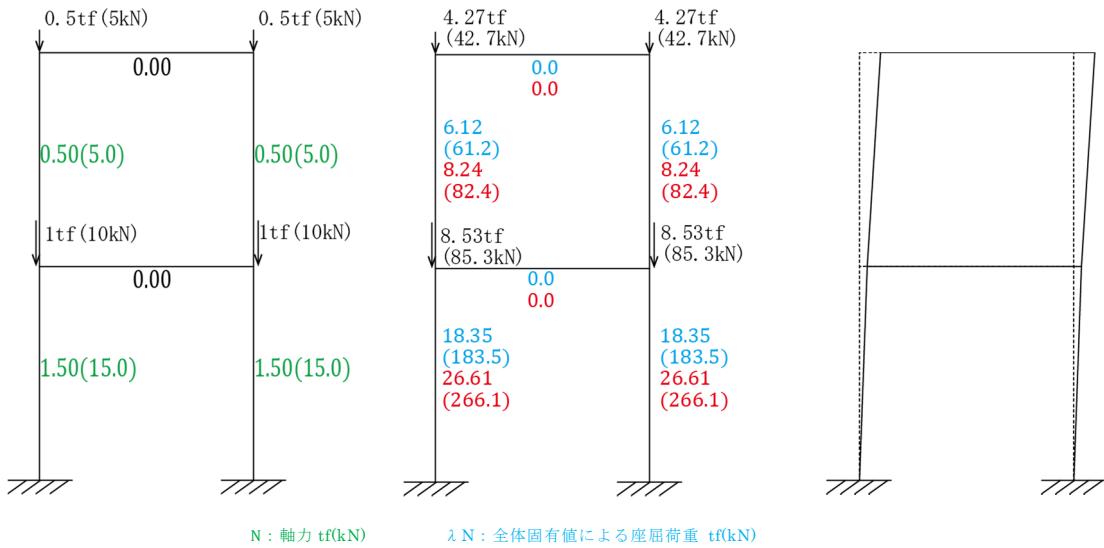


表 3.2.21 frame2A4 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	個材固有値 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)	座屈荷重
		λ	N_{cr}				
101	10.0			122.3	26.48	264.8	
102	5.0			61.15	24.45	122.2	
103	10.0			122.3	26.48	264.8	
104	5.0			61.15	24.45	122.2	
201	0.0			0.0	13.24	0.0	
202	0.0			0.0	13.85	0.0	



(a)荷重条件と軸力図

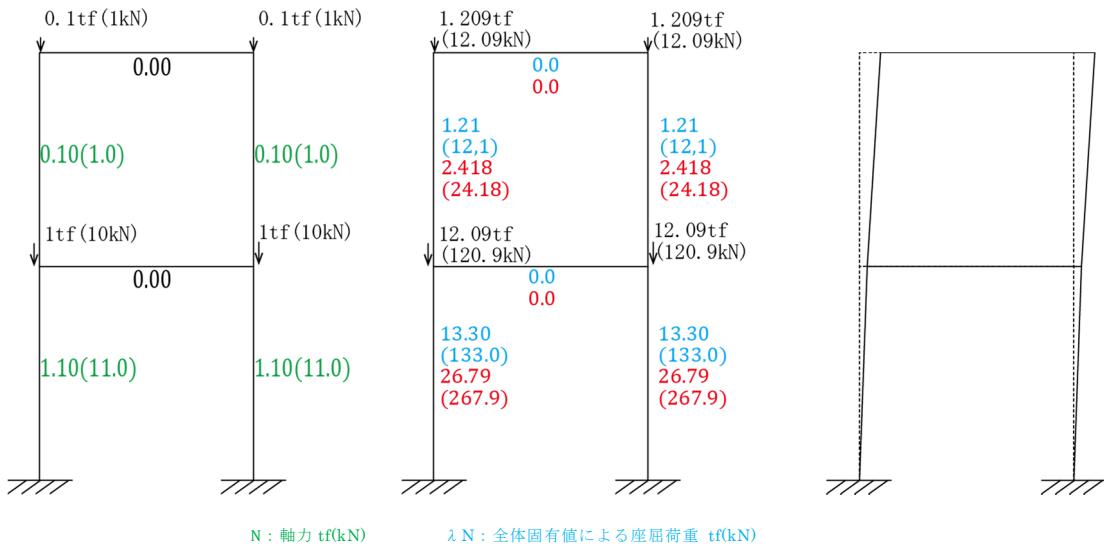
(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.16 frame2A5

表 3.2.22 frame2A5 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
		λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
101	15.0		183.5	17.74	266.1
102	5.0		61.2	17.07	82.4
103	15.0		183.5	17.74	266.1
104	5.0	8.53	61.2	17.07	82.4
201	0.0		0.0	8.87	0.0
202	0.0		0.0	12.19	0.0



(a)荷重条件と軸力図

(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.17 frame2A6

表 3.2.23 frame2A6 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	個材固有値 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	11.0			133.0	24.35	267.9
102	1.0			12.1	24.18	24.18
103	11.0			133.0	24.35	267.9
104	1.0	12.09		12.1	24.18	24.18
201	0.0			0.0	12.18	0.0
202	0.0			0.0	48.31	0.0

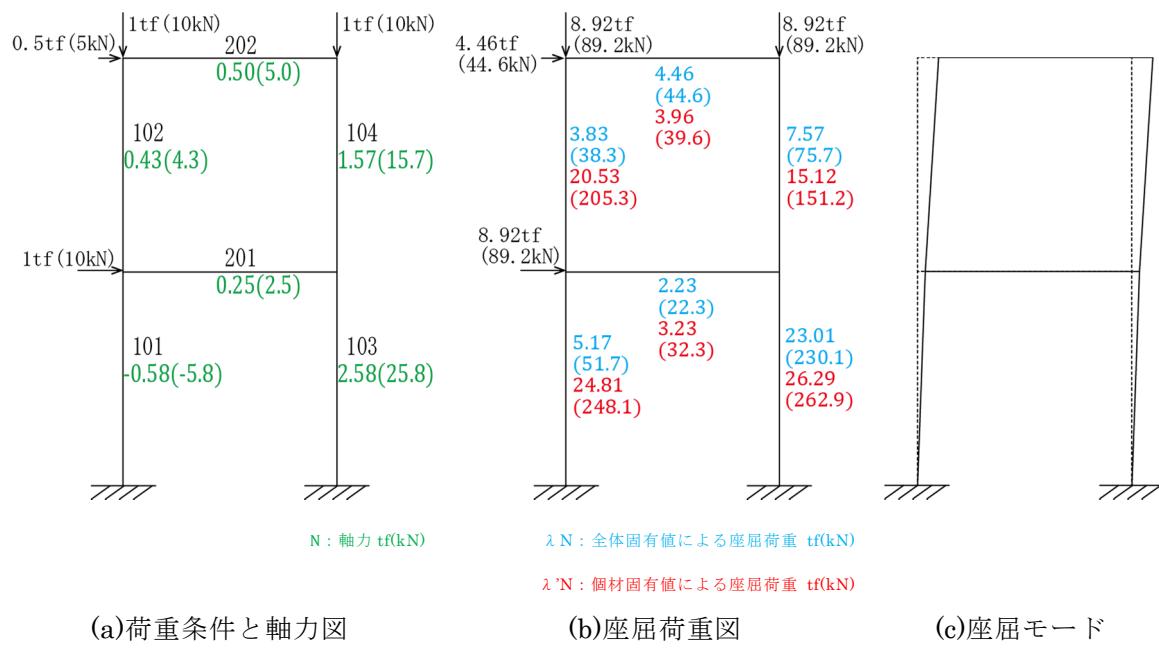


図 3.2.18 frame2A1

表 3.2.24 frame2A7 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	個材固有値 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)	座屈荷重
		λ	N_{cr}				
101	-5.8			51.7	-47.29	248.1	
102	4.3			38.3	47.75	205.3	
103	12.6			230.1	10.19	262.9	
104	15.7	8.92		140.0	9.01	141.4	
201	2.5			22.3	12.92	32.3	
202	5.0			44.6	7.55	39.6	

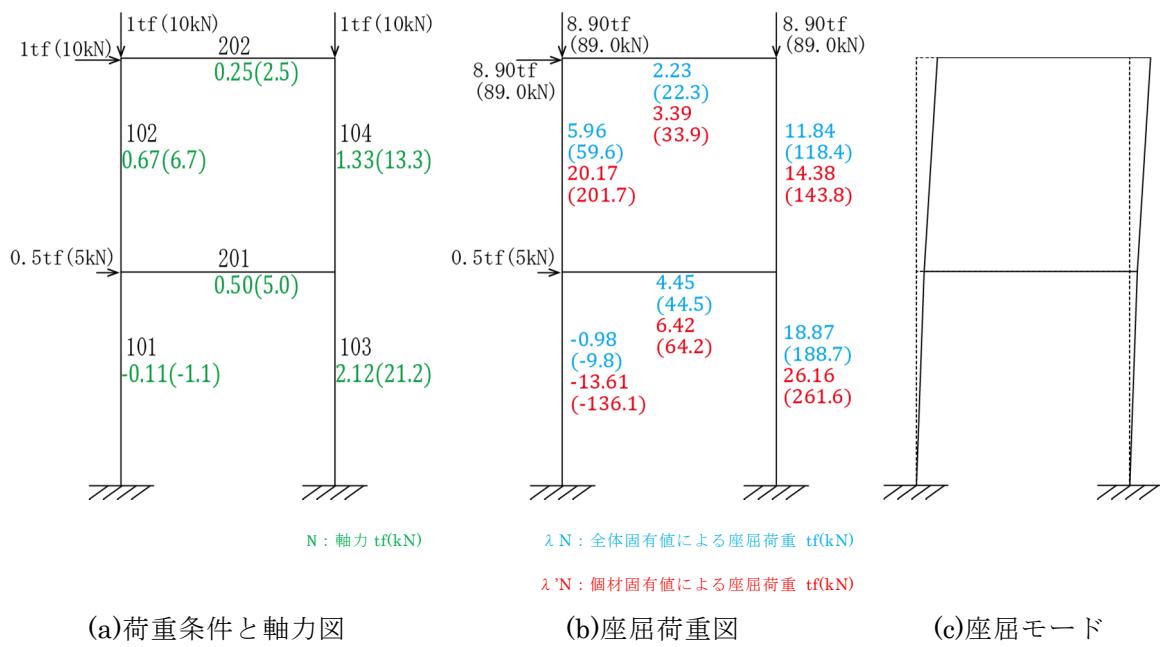


図 3.2.19 frame2A1

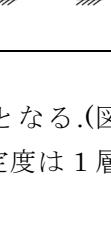
表 3.2.25 frame2A8 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	λ'	個材固有値 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)	座屈荷重
		λ	N_{cr}				
101	-1.1			-9.8	123.70	-136.1	
102	6.7			59.6	30.10	201.7	
103	21.2		8.90	188.7	12.34	261.6	
104	13.3			118.4	10.81	143.8	
201	5.0			44.5	12.84	64.2	
202	2.5			22.3	13.56	33.9	

・梁に軸力がなく,上下層の柱に軸力差がない場合(frame2A1,2)

全体固有値は部材 202 とおおよそ等しい値を示しており,個材固有値ではこの値が最小となる.これは 1 層ラーメン構造のときに梁が最も小さい個材固有値をとったように部材 202 は架構内で最も固定度が小さい部材であるためと考えられる.また,frame2A1,2 の比較をしてそれぞれの部材は同じ座屈荷重が得られるため 1 層ラーメン構造のときと同様に,左右の柱は互いの軸力の影響を受けないことがわかる.したがって,隣接部材に留まらず,軸力が存在しない部材が存在する場合,それはそれぞれの軸力の影響を分断することがわかる.

表 3.2.26 解析結果

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)	モデル図
frame2A1	101,103	10.0	9.06	90.6	26.03	260.3	
	102,104	10.0		90.6	18.07	180.7	
frame2A2	101	10.0	12.07	120.7	26.03	260.3	
	102	10.0		120.7	18.07	180.7	
	103	5.0		60.3	52.06	260.3	
	104	5.0		60.3	36.15	180.7	

また,これらのモデルは 1 層の座屈荷重が frameA1 と極めて近い個材固有値となる.(図 3.2.20)したがって, frame2A1 において 2 層が 1 層に与える影響は極めて小さく,固定度は 1 層のみの frameA1 と同等であると考えられる.

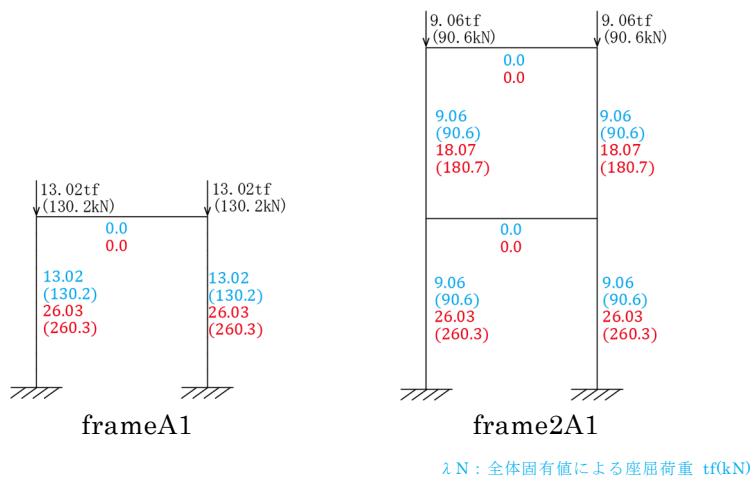


図 3.2.20 1 層ラーメン構造と 2 層ラーメン構造の座屈荷重

- ・梁に軸力がなく,上下層の柱に軸力差がある場合(frame2A3~6)

表 3.2.27 より,1 層の柱部材は frame2A3~6 のどの荷重条件であってもおおよそ等しく,上下層の柱に軸力がない frameA1,2 とも近い値であった.したがって,この場合においても上下層の柱に軸力差がない場合と同様に,2 層があることによる 1 層への影響は極めて小さいと考えられる.

表 3.2.27 1 層の柱の解析結果(frameA1,4~6)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr'}=\lambda' N$ (kN)
frame2A1	101,103	10.0	9.06	90.6	26.03	260.3
frame2A3	101,103	15.0	7.57	113.5	17.56	263.4
frame2A4	101,103	10.0	12.23	122.3	26.48	264.8
frame2A5	101,103	15.0	8.53	183.5	17.74	266.1
frame2A6	101,103	11.0	12.09	133.0	24.35	267.9

一方で, 2 層の柱は frame2A3~6 を比較すると,1 層の柱の軸力の比率が 2 層の柱に対して大きいと,2 層の柱の座屈荷重が低下している.これは 1 層の柱が 2 層の柱に対して座屈しやすくなるために,2 層の柱の固定度が下がることが現れていると考えられる.

表 3.2.28 2 層柱の解析結果(frame2A3~6)

model	軸力の比 2 層 : 1 層	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr'}=\lambda' N$ (kN)
frame2A3	2 : 3	102,104	10.0	7.57	75.7	15.12	151.2
frame2A4	1 : 2	102,104	5.0	12.23	61.15	24.45	122.2
frame2A5	1 : 3	102,104	5.0	8.53	61.2	17.07	82.4
frame2A6	1 : 10	102,104	1.0	12.09	12.1	24.18	24.18

表 3.2.29 より,梁の個材固有値は,frame2A4~6 では 2 層の梁よりも 1 層の梁の個材固有値が小さい値を示している.さらに,1 層の柱の軸力の比率が 2 層に対して大きいほど 1 層と 2 層の差が大きくなる.これは,軸力の比率が大きいほど 1 層の柱は 2 層の柱よりも座屈しやすい状況になるため,梁もその影響を受けて,1 層と 2 層の梁の個材固有値の差が大きくなると考えられる.

表 3.2.29 梁の個材固有値(frame2A3~6)

	frame2A3	frame2A4	frame2A5	frame2A6
軸力の比 2 層 : 1 層	2 : 3	1 : 2	1 : 3	1 : 10
201(1 層)	8.78	13.24	8.87	12.18
202(2 層)	7.57	13.85	12.19	48.31

- ・水平荷重により梁に軸力が存在する場合(frame2A7,8)

frame2A8 は個材固有値から算出した部材 101 の座屈荷重が負の値となり,個材座屈荷重が引張となる.この場合については 3.2.3 項,3.2.4 項で考察する.

水平荷重が加わる場合,上下層で軸力差があったときと同様に 1 層の柱の軸力が大きく,2 層の柱の軸力が小さくなるため,2 層の座屈荷重が小さく検出された.

3.2.3 片もち架構の数値解析

ラーメン構造における解析で,直行している部材でも互いに影響を及ぼすことがわかった.そこで,直行部材の影響をより詳細に考察するために,以下の架構で解析を行う.なお,これらは2次元の架構とする.

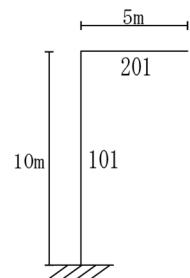


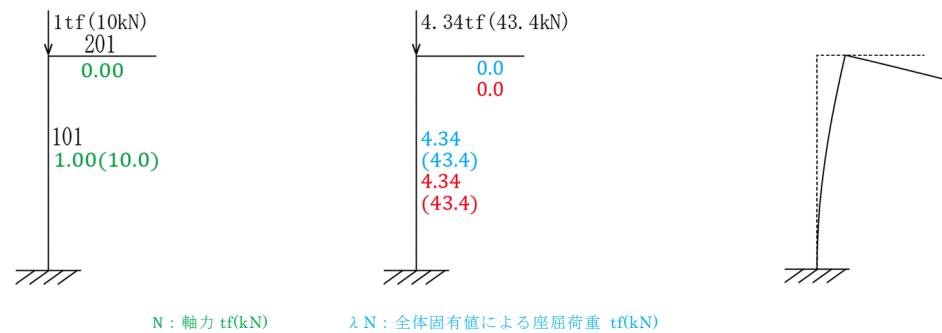
図 3.2.21 cantiA

全部材同一断面
 $E=2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$
 $I=8.33 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
 $A=0.01 \text{ m}^2$



図 3.2.22 cantiA'(分割モデル)

解析結果を図 3.3.2~8 に示す.(a)図は荷重条件と軸力を表し,圧縮を正とする.(b)図は座屈荷重を示し,(c)図では構造全体系の線形座屈解析の結果である座屈モードを表す.なお,座屈モードに関しては部材を 1m ごとに分割した分割モデルを解析した結果を表示している..



N : 軸力 tf(kN)

λN : 全体固有値による座屈荷重 tf(kN)

$\lambda' N$: 個材固有値による座屈荷重 tf(kN)

(a)荷重条件と軸力図

(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.23 cantiA1

表 3.2.30 cantiA1 解析結果

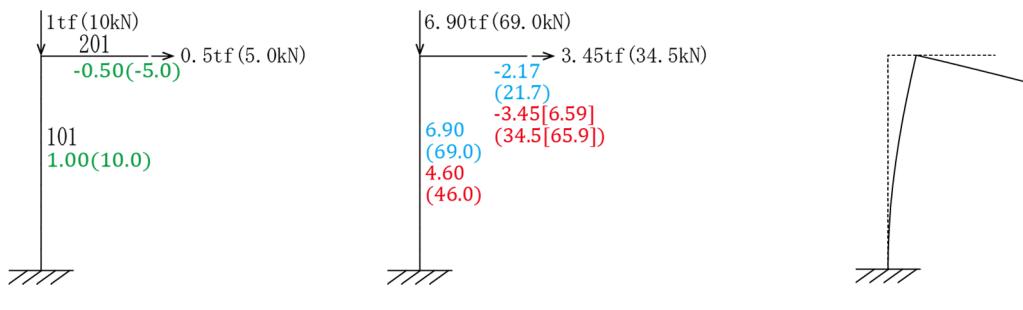
部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値		座屈荷重 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
		λ	λ'		λ'	λ'	
101	10.0			43.4		4.34	43.4
201	0.0			0.0		4.34	0.0

全体剛性マトリクス

[K_E]	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
[K_G]	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	部材 101	部材 201
[K'_E]	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
[K'_G]	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



N : 軸力 tf(kN)

λN : 全体固有値による座屈荷重 tf(kN)

$\lambda' N$: 個材固有値による座屈荷重 tf(kN)

(a)荷重条件と軸力図

(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.24 cantiA2

表 3.2.31 cantiA2 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値		座屈荷重 $N_{cr'} = \lambda' N$ (kN)
		λ	λ'		λ'	λ'	
101	10.0			6.90	69.0	4.60	46.0
201	-5.0				-21.7	6.90[-13.19]	-34.5[65.9]

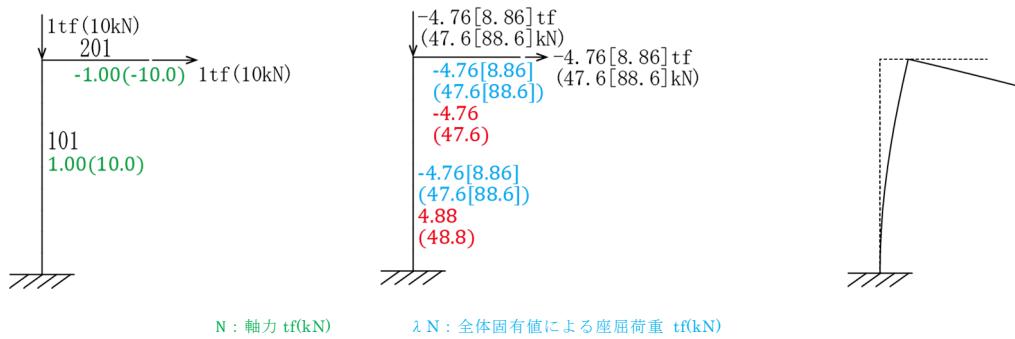
※[]内 : 座屈荷重が正となるときの最小固有値とそのときの座屈荷重

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.05 & 0 & 0.12 & 0.05 \\ -0.1 & 0.05 & 1 & 0 & -0.05 & 0.083333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.05 & 0 & -0.12 & -0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.083333 & 0 & -0.05 & -0.33333 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	部材 101	部材 201
$[K'_E]$	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
$[K'_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.055556 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.05 & 0 & 0.12 & 0.05 \\ -0.1 & 0.05 & 1 & 0 & -0.05 & 0.083333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.05 & 0 & -0.12 & -0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.083333 & 0 & -0.05 & -0.33333 \end{bmatrix}$



(a)荷重条件と軸力図

(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.25 cantiA3

表 3.2.32 cantiA3 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	10.0	-4.76	-47.6 [88.6]		4.88	48.8
201	-10.0	[8.86]	47.6 [-88.6]		-4.76	47.6

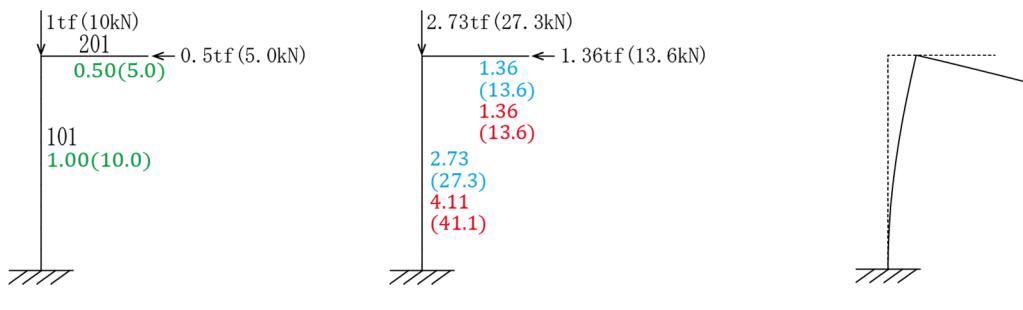
※[]内 : 正の最小固有値とそのときの座屈荷重

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
$[K_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 & 0.1 & 0 & 0.24 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 0.666667 & 0 & -0.1 & 0.166667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & -0.1 & 0 & -0.24 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.166667 & 0 & -0.1 & -0.66667 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	部材 101	部材 201
$[K'_E]$	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
$[K'_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & -0.24 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 0.666667 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.166667 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 & 0.1 & 0 & 0.24 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 0.666667 & 0 & -0.1 & 0.166667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & -0.1 & 0 & -0.24 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.166667 & 0 & -0.1 & -0.66667 \end{bmatrix}$



N : 軸力 tf(kN)

λN : 全体固有値による座屈荷重 tf(kN)

$\lambda' N$: 個材固有値による座屈荷重 tf(kN)

(a)荷重条件と軸力図

(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.26 cantiA4

表 3.2.33 cantiA4 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	10.0			27.3	4.11	41.1
201	5.0			13.6	2.73	13.6

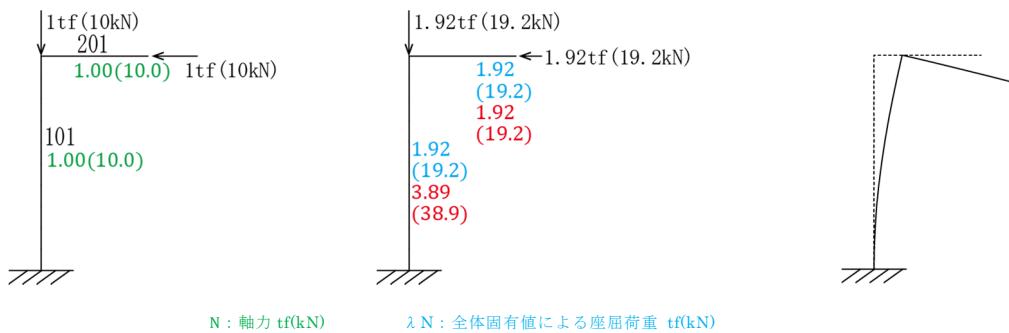
全体剛性マトリクス

[K_E]	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
-----------	--

[K_G]	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.05 & 0 & -0.12 & -0.05 \\ -0.1 & -0.05 & 1.666667 & 0 & 0.05 & -0.08333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.05 & 0 & 0.12 & 0.05 \\ 0 & -0.05 & -0.08333 & 0 & 0.05 & 0.333333 \end{bmatrix}$
-----------	---

縮約後マトリクス

	部材 101	部材 201
[K'_E]	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
[K'_G]	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.611111 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.05 & 0 & -0.12 & -0.05 \\ -0.1 & -0.05 & 1.666667 & 0 & 0.05 & -0.08333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.05 & 0 & 0.12 & 0.05 \\ 0 & -0.05 & -0.08333 & 0 & 0.05 & 0.333333 \end{bmatrix}$



N : 軸力 tf(kN)

λN : 全体固有値による座屈荷重 tf(kN)

$\lambda' N$: 個材固有値による座屈荷重 tf(kN)

(a)荷重条件と軸力図

(b)座屈荷重図

(c)座屈モード

図 3.2.27 cantiA5

表 3.2.34 cantiA5 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}'=\lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}			
101	10.0			19.2	3.89	38.9
201	10.0	1.92		19.2	1.92	19.2

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
$[K_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & -0.1 & 0 & -0.24 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2 & 0 & 0.1 & -0.16667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 & 0.1 & 0 & 0.24 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.16667 & 0 & 0.1 & 0.666667 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	部材 101	部材 201
$[K'_E]$	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
$[K'_G]$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0.24 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.16667 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & -0.1 & 0 & -0.24 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 2 & 0 & 0.1 & -0.16667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 & 0.1 & 0 & 0.24 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.16667 & 0 & 0.1 & 0.666667 \end{bmatrix}$

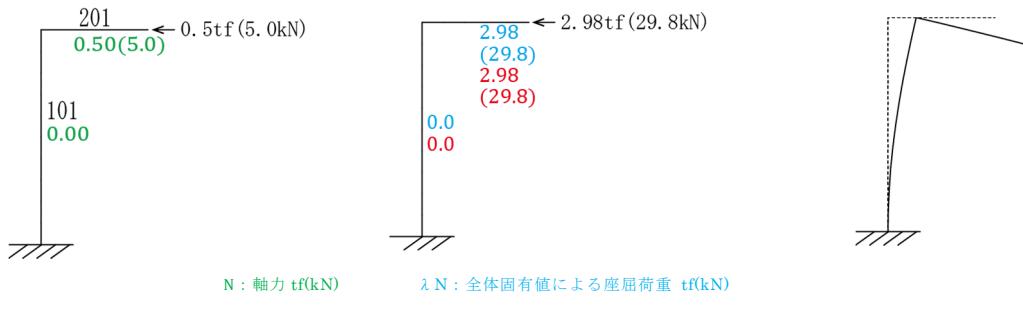


図 3.2.28 cantiA6

表 3.2.35 cantiA6 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値	座屈荷重	個材固有値	座屈荷重
		λ	$N_{cr} = \lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
101	0.0		0.0	62.97	0.00
201	5.0	5.97	29.8	5.97	29.8

全体剛性マトリクス

$[K_E]$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
$[K_G]$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.05 & 0 & -0.12 & -0.05 \\ 0 & -0.05 & 0.333333 & 0 & 0.05 & -0.08333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.05 & 0 & 0.12 & 0.05 \\ 0 & -0.05 & -0.08333 & 0 & 0.05 & 0.333333 \end{bmatrix}$

縮約後マトリクス

	部材 101	部材 201
$[K'_E]$	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 42002.1 & 0 & -10.4958 & -42000 & 0 & 0 \\ 0 & 21016.79 & -41.9832 & 0 & -16.7933 & -41.9832 \\ -10.4958 & -41.9832 & 209.916 & 0 & 41.9832 & 69.972 \\ -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 & 0 \\ 0 & -16.7933 & 41.9832 & 0 & 16.79328 & 41.9832 \\ 0 & -41.9832 & 69.972 & 0 & 41.9832 & 139.944 \end{bmatrix}$
$[K'_G]$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.277778 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & -0.05 & 0 & -0.12 & -0.05 \\ 0 & -0.05 & 0.333333 & 0 & 0.05 & -0.08333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.12 & 0.05 & 0 & 0.12 & 0.05 \\ 0 & -0.05 & -0.08333 & 0 & 0.05 & 0.333333 \end{bmatrix}$

・梁に軸力が存在しない場合(cantiA1)

部材 201 の存在軸力が 0 の状態では,全体固有値から求める部材 101 の座屈荷重と個材固有値から求める座屈荷重が一致する.また,このときの座屈荷重は,同じ柱部材で構成される片ものの柱と同じ値となる.(図 3.2.29)

部材 101 は個材固有値を求めるための縮約後マトリクスも弾性剛性,幾何剛性両方とも片ものの柱と同様のものとなることが表 3.2.36 からわかる.したがって,部材 201 に軸力が存在しないとき,部材 201 の存在の有無は座屈に影響しない.

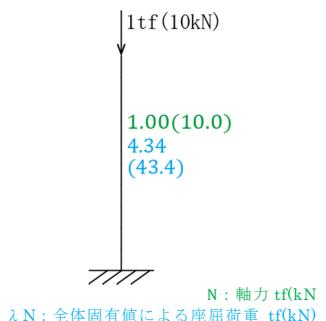


表 3.2.36 柱のマトリクス		
	片もち柱(図 3.2.29)の 全体マトリクス	cantiA1 の柱(部材 101)の 縮約後マトリクス
[K_E]	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.09916 & 0 & -10.4958 \\ 0 & 21000 & 0 \\ -10.4958 & 0 & 69.972 \end{bmatrix}$
[K_G]	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 \end{bmatrix}$

図 3.2.29 片もち柱

・柱,梁に軸力が存在する場合 (cantiA2~5)

梁の軸力の正負による影響

部材 201 に逆向きの荷重が作用している cantiA2 と cantiA4 を比較する(表 3.2.37)と,全体固有値による座屈荷重から部材 201 が引張部材のとき座屈止めとしてはたらき,部材 201 が圧縮部材のとき座屈を増長させることがわかる.しかし,どちらの応力状態でも,全体固有値は梁の個材固有値と一致を示しており,柱の個材固有値から求める個材座屈荷重は cantiA1 と比較しての変化があるものの,その変化は全体固有値と比較すると微小である.

一方で cantiA1 と cantiA2 では,部材 101 の [K'_G] の値に変化が見られることから,部材 201 の軸力の影響を受けていることが縮約後のマトリクスからも確認できる.さらに,[K'_G] の変化はマトリクスの 3 行 3 列目の回転に寄与する項のみであることがわかるので,直行する部材の軸力は接合されている節点の回転に影響を与えていていることが読み取れる.

表 3.2.37 解析結果(cantiA2,4)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr'}=\lambda' N$ (kN)
cantiA2	101	10.0	6.90	69.0	4.60	46.0
	201	-5.0		-21.7	6.90[-13.19]	-34.5[65.9]
cantiA4	101	10.0	2.73	27.3	4.11	41.1
	201	5.0		13.6	2.73	13.6

表 3.2.38 部材 101 の縮約後幾何剛性マトリクス

	cantiA1	cantiA2
$[K_G']$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.333333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.055556 \end{bmatrix}$

- 柱と梁の軸力の比率による影響

柱にかかる軸力と梁にかかる軸力の比率を変化させると固有値も変化することが canti2~5 でわかる。

cantiA4,5 の梁圧縮時には、梁の軸力を増大させると柱の縮約後の幾何剛性 $[K_G']$ の 3 行 3 列目の値が増加し、全体固有値・柱の個材固有値とともに小さくなり座屈に弱くなる。このとき梁は、座屈荷重が大きい部材ほど個材固有値が大きく得られており、これまでの固定度の考え方と一致する。

表 3.2.39 梁軸力が圧縮時の解析結果(cantiA4,5)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr'}=\lambda'N$ (kN)
cantiA4	101	10.0	2.73	27.3	4.11	41.1
	201	5.0		13.6	2.73	13.6
cantiA5	101	10.0	1.92	19.2	3.89	38.9
	201	10.0		19.2	1.92	19.2

表 3.2.40 部材 101 の縮約後幾何剛性マトリクス(cantiA4,5)

	cantiA4	cantiA5
$[K_G']$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.611111 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.888889 \end{bmatrix}$

一方で、梁の軸力が引張の時には梁の軸力が大きくした cantiA3 では絶対値が最小となる固有値として負の値が検出された。これは外力の向きが逆のときに最も座屈しやすいと考えられるため、全体固有値が-4.37 となるのは図 3.2.30 のような逆向きの外力がかかっているときである。このとき、柱は引張、梁は圧縮となるので梁が支配的となる座屈が検出できていると考えられる。

ただ、今梁が引張部材となっているときの座屈を確認したい。そこで、正の最小固有値を採用すると全体固有値は 8.86 と梁の軸力が小さいときよりも大きい値が得られ、座屈に強くなっていることがわかる。このことから今、梁は座屈止めとして働いているといえる。このとき、柱の個材固有値は全体固有値と同様に梁の引張軸力が増加に伴い、大きくなる。

ここで梁の個材座屈荷重は cantiA2 のとき負の値として算出される。一般に引張軸力では座屈は生じないと考えるので、個材固有値を用いた座屈荷重算出においても全体固有値のときの考え方をもとに、座屈荷重が正となる固有値を採用するものと仮定してみる。すると cantiA2 で梁

の個材固有値は-13.69 となり個材座屈荷重は 65.9kN となる。このとき,cantiA2 と cantiA3 の梁の座屈荷重を比較すると,cantiA2 の方が大きい。柱は cantiA2 の方が座屈しやすいため固定度としては cantiA2 の方が小さいが、存在軸力が cantiA2 の方が小さいため総合的に考えると、梁は cantiA2 の方が座屈に強いと考えられる。

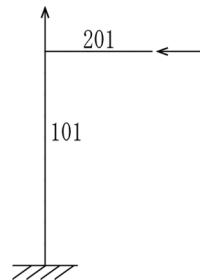


図 3.2.30 canti3 負の固有値で座屈時の外力の向き

表 3.2.41 梁軸力が引張時の解析結果(cantiA2,3)

model	部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値 λ	座屈荷重 $N_{cr}=\lambda N$ (kN)	個材固有値 λ'	座屈荷重 $N_{cr}'=\lambda'N$ (kN)
cantiA2	101	10.0	6.90	69.0	4.60	46.0
	201	-5.0		-21.7	6.90[-13.19]	-34.5[65.9]
cantiA3	101	10.0	-4.76	-47.6[88.6]	4.88	48.8
	201	-10.0	[8.86]	47.6[-88.6]	-4.76	47.6

・柱に軸力が存在しないとき(cantiA6)

梁の個材固有値ならびに個材座屈荷重は柱に軸力が入っている cantiA4,5 よりも大きい。そのため柱が座屈しにくいために、梁の固定度が高いことが検出できていると考えられる。

表 3.2.42 梁の個材固有値(cantiA4~6)

部材番号	cantiA4	cantiA5	cantiA6
201	2.73	1.92	5.97

3.2.4 トラス架構の数値解析

トラス架構は、鉛直荷重のみの場合でも、架構内の軸力が圧縮と引張が混在する架構である。そこで、引張部材が存在するときの解析結果について検証するため、以下の解析を行う。

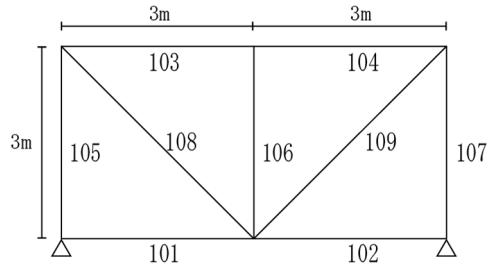


図 3.2.31 trussA

$$\begin{aligned} &\text{全部材同一断面} \\ &E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \\ &I = 3.79 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \\ &A = 7.06 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

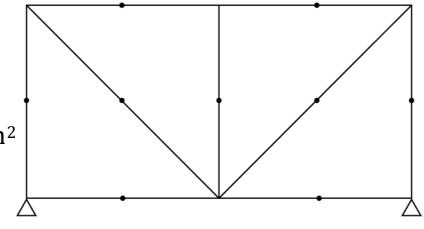


図 3.2.32 trussA'(分割モデル)

図 3.2.31 に示すモデルは 2 次元モデルである。様々な荷重条件における数値解析の結果を図 3.2.33~36、表 3.2.43~46 に示す。(a) 図は荷重条件と軸力図、(b) 図は座屈モードである。ここで(a) 図において赤い部材は圧縮軸力、青い部材は引張軸力が発生していることを示している。また、(b) 図の座屈モードについては、部材に中間接点を設けたときの結果を用いている。なお、トラス構造では部材の水平移動が拘束されており、部材角の生じない座屈となるため、分割モデルの trussA' と分割無しの trussA の全体固有値は大きく異なるため、全体固有値は trussA' モデルのものを採用している。

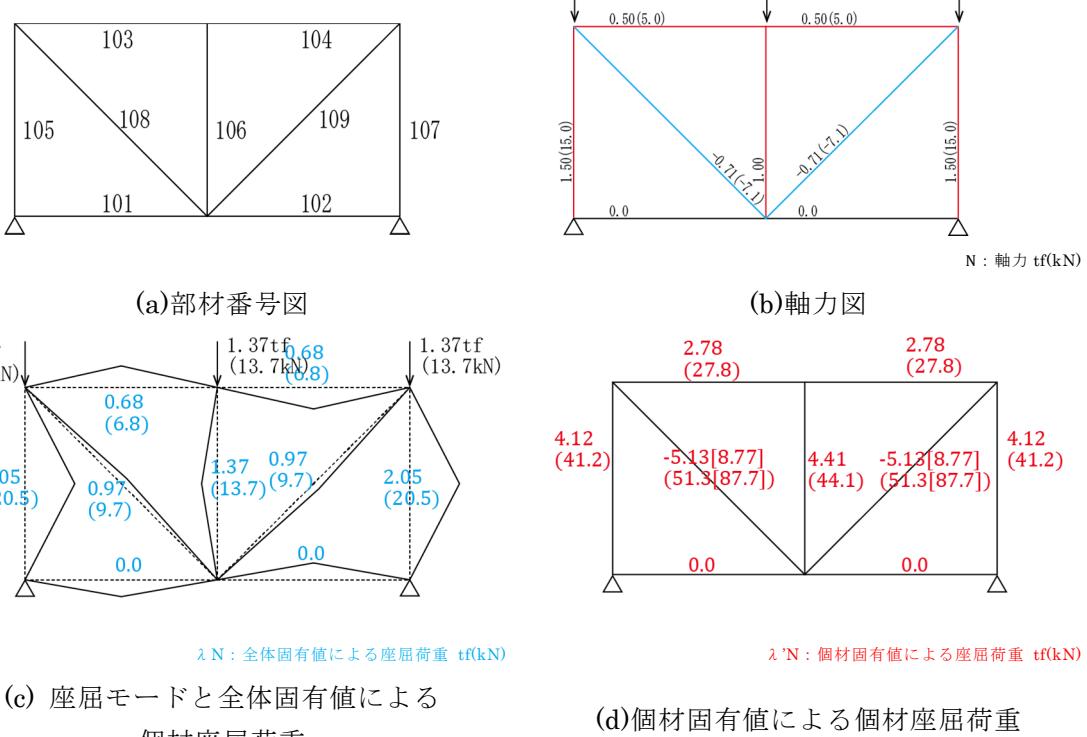
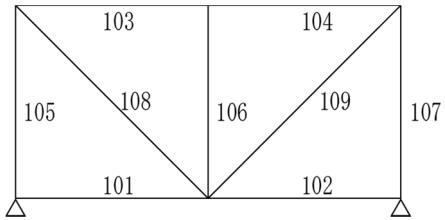


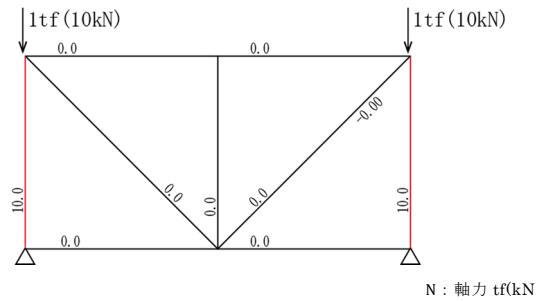
図 3.2.33 trussA1 解析結果

表 3.2.43 trussA1 解析結果 ※[]内：座屈荷重が正となるときの最小固有値とそのときの座屈荷重

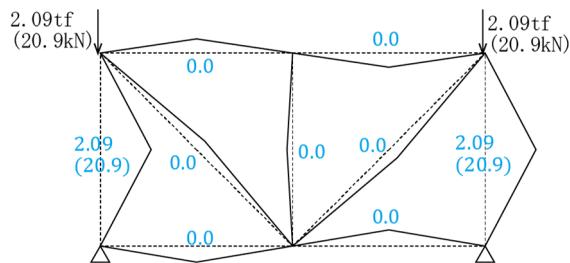
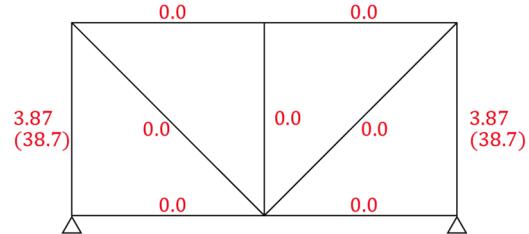
部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		個材固有値	
		λ	$N_{cr} = \lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
下弦材	101	0.0	1.37	0.0	4.66 0.00
	102	0.0		0.0	4.66 0.00
上弦材	103	5.0	1.37	6.8	5.56 27.8
	104	5.0		6.8	5.56 27.8
鉛直材	105	15.0	1.37	20.5	2.75 41.2
	106	10.0		13.7	4.41 44.1
	107	15.0		20.5	2.75 27.8
斜材	108	-7.1		-9.7	7.22[-12.36] -51.3[87.7]
	109	-7.1		-9.7	7.22[-12.36] -51.3[87.7]



(a)部材番号図



(b)軸力図

(c) 座屈モードと全体固有値による
個材座屈荷重

(d)個材固有値による個材座屈荷重

図 3.2.34 trussA2 解析結果

表 3.2.44 trussA2 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		個材固有値	
		λ	$N_{cr}=\lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}'=\lambda'N$ (kN)
下弦材	101	0.00		0.00	6.20
	102	0.00		0.00	6.20
上弦材	103	0.00		0.00	7.39
	104	0.00		0.00	7.39
鉛直材	105	1.00	2.09	2.09	3.87
	106	0.00		0.00	37820.61
	107	1.00		2.09	3.87
斜材	108	0.00		0.00	7.39
	109	0.00		0.00	7.39

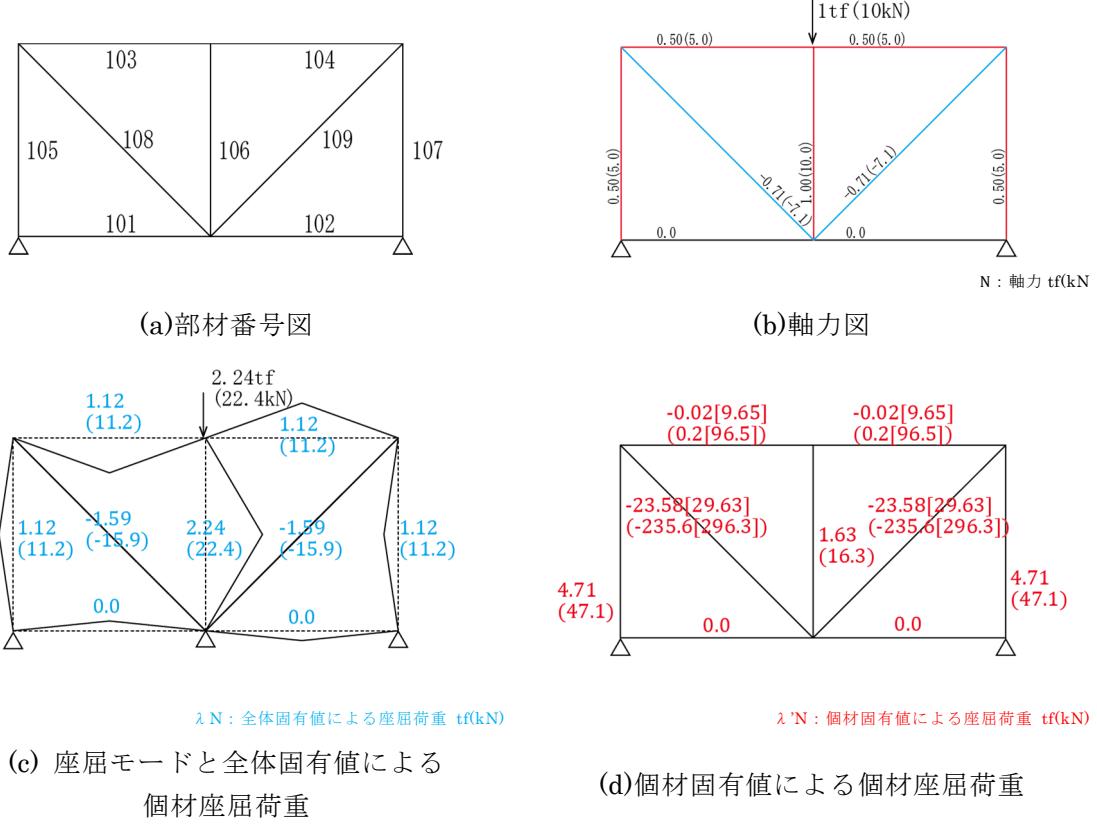
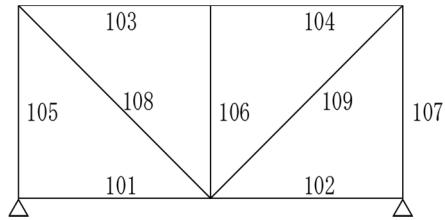


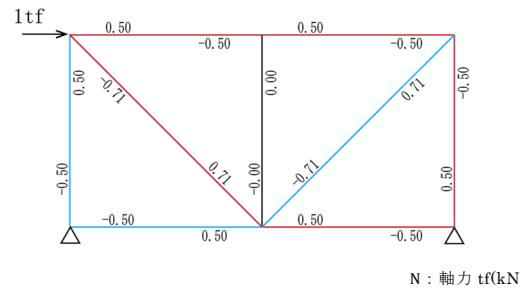
図 3.2.35 trussA3 解析結果

表 3.2.45 trussA3 解析結果 ※[]内: 座屈荷重が正となるときの最小固有値とそのときの座屈荷重

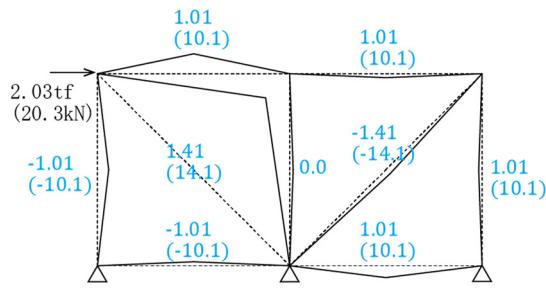
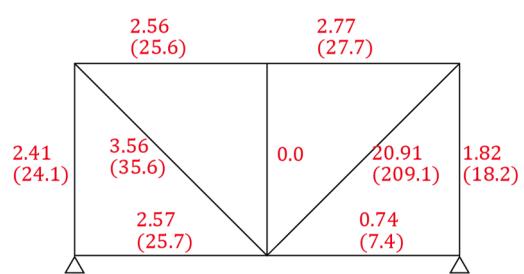
部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		座屈荷重 $N_{cr} = \lambda N$ (kN)	個材固有値		座屈荷重 $N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
		λ	N_{cr}		λ'	N_{cr}'	
下弦材	101	0.0		0.0		0.89	0.00
	102	0.0		0.0		0.89	0.00
上弦材	103	5.0		11.2	-0.03[19.30]	-0.2[96.5]	
	104	5.0	2.24	11.2	-0.03[19.30]	-0.2[96.5]	
鉛直材	105	5.0		11.2	9.41	47.1	
	106	10.0		22.4	1.63	16.3	
	107	5.0		11.2	9.41	47.1	
斜材	108	-7.1		-15.9	33.21	235.8	
	109	-7.1		-15.9	33.21	235.8	



(a)部材番号図



(b)軸力図

(c) 座屈モードと全体固有値による
個材座屈荷重

(d)個材固有値による個材座屈荷重

図 3.2.36 trussA4 解析結果

表 3.2.46 trussA4 解析結果

部材番号	軸力 N (kN)	全体固有値		個材固有値	
		λ	$N_{cr} = \lambda N$ (kN)	λ'	$N_{cr}' = \lambda' N$ (kN)
下弦材	101	-5.0	2.03	-10.1	-5.15 25.7
	102	5.0		10.1	1.47 7.4
上弦材	103	5.0		10.1	5.11 25.6
	104	5.0		10.1	5.54 27.7
鉛直材	105	-5.0	2.03	-10.1	-4.81 24.1
	106	0.0		0.0	1.87 0.0
	107	5.0		10.1	3.64 18.2
斜材	108	7.1		14.4	5.01 35.6
	109	-7.1		-14.4	-29.45 209.1

・座屈荷重が引張となる部材について

本架構では,荷重条件によっては個材の座屈荷重が引張軸力となる部材が存在した.座屈荷重が負の値として算出される際,引張部材に正の固有値となる場合と,圧縮部材に負の固有値となる場合の 2 通りある.引張部材の座屈荷重が負の値である場合には,その部材は座屈しないものとして考えられる.しかし,trussA3 の上弦材のように圧縮部材にも関わらず,個材固有値が負となり,座屈荷重が引張と算出されることは望ましくない.そこで,cantiA モデルで行ったときと同様に,絶対値が最小とならずとも座屈荷重が正となる固有値の中で最も小さい値を個材固有値として採用する場合について考えてみる.

今,座屈荷重が引張となるのは,trussA1,3 の斜材と trussA3 の上弦材である.引張材は,trussA4 から確認できるように,鉛直材では部材 107 よりも部材 105, 斜材では部材 108 より部材 109 と軸力を考慮しない場合の架構の同一条件の部材と比較しても座屈荷重が大きく算出される傾向にある.したがって,引張材である trussA1,3 の斜材でも座屈荷重が大きく算出されると考えられる.一方で,trussA3 の上弦材は,それを拘束する部材 105,107 は他のモデルの同部材と比較して座屈しにくいが,部材 106 は他のモデルと比較して個材固有値が小さく座屈しやすいと考えられるため,固定度を考えると他のモデルに対して不合理的な値にも思える.

・部材の座屈荷重について

比較対象として,trussA を構成する部材の境界条件ごとの座屈荷重を表 3.2.47 に示す.他の部材の軸力の影響を受けない trussA2 の部材 105,107 は全体固有値を用いた際には,下端固定 – 上端ピン支持と両端固定の間,個材固有値を用いた際には,固定端よりも固定度が高いとみなされる.

表 3.2.47 1 本柱の境界条件と座屈長さ

境界条件	座屈長さ	座屈荷重(kN)
両端固定	$0.5l$	34.9
下端固定 – 上端支持	$0.7l$	17.8
下端固定 – 上端ローラー	$1.0l$	8.7
両端支持	$2.0l$	2.1

3.3 個材固有値と個材座屈荷重の関係

3.3.1 柱の座屈荷重

これまでの検討により、個材固有値は部材の固定度と大きな関連が見られることがわかつた。3.2.1 項の解析結果では、全体固有値は全て梁の個材固有値と同じ値を示しており、frameA1 のような均等荷重においても柱の個材座屈荷重は全体固有値よりも大きな値で算出されている。そこで、架構中の柱の座屈荷重の妥当性を検証するため、以下のモデルについて解析を行った。

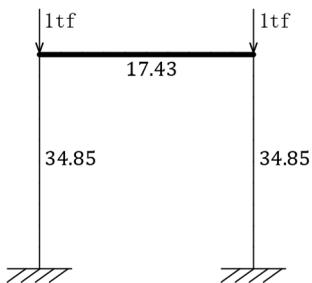


図 3.3.1 frameB モデル個材固有値

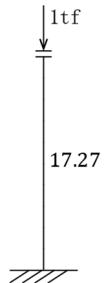


図 3.3.2 上端ローラー下端固定柱の固有値

frameB は、図 3.2.1 で示した架構で、梁を十分に剛 ($A=0.100\text{m}^2, I=8.33 \times 10^6\text{m}^4$) としたモデルである。この架構で梁を十分に剛とすることで、架構中の柱は柱頭の回転が拘束され、水平移動のみ可能となる。このとき、柱の拘束条件は図 3.3.2 に示す下端固定上端ローラーの柱と同じだと考えられる。

この 2 つのモデルにおける柱の個材座屈荷重を比較する。frameB では、2 つの柱が同時に座屈するため、互いに座屈の影響を受けないと考えると、frameB の柱は同等の拘束条件を持つ固定・ローラーの柱に比べ、個材座屈荷重が過度に大きく算出されているように感じる。したがって、同時に座屈するとしても、左右の柱は互いの水平移動の拘束度に影響をあたえていると考えられる。

しかし、この段階では縮約法による座屈荷重 348.5kN が妥当な数値であるかは確認がとれないといため、今後実験等の検証が必要である。

3.3.2 梁の固定度と座屈荷重

frameA モデルで梁のみに軸力が作用する場合においても、縮約法では妥当な座屈荷重が得られず、座屈荷重は構造全体系の線形座屈解析を用いたときよりも大きく算出された。そこで、個材固有値が表すと考える固定度と座屈荷重の関係について考える。

図 3.3.3において l を変化させたとき、柱の個材固有値の変化と線形座屈解析による座屈荷重の変化を考察する。なお、線形座屈解析において座屈荷重を求めるモデルでは正確な値を算出するために、梁部材を 10 分割したモデルで解析を行う。解析結果を図 3.3.4 と表 3.3.1 に示す。今柱の長さ 0 とは両端固定における全体固有値を示している。

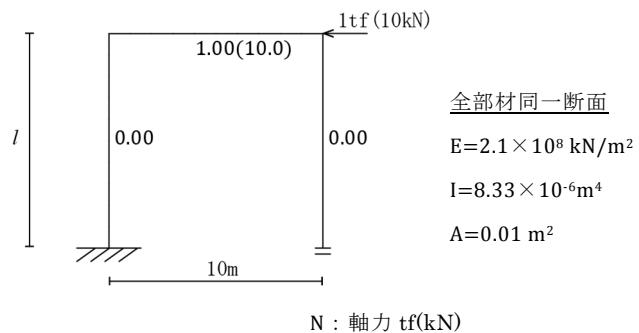


図 3.3.3 frameC

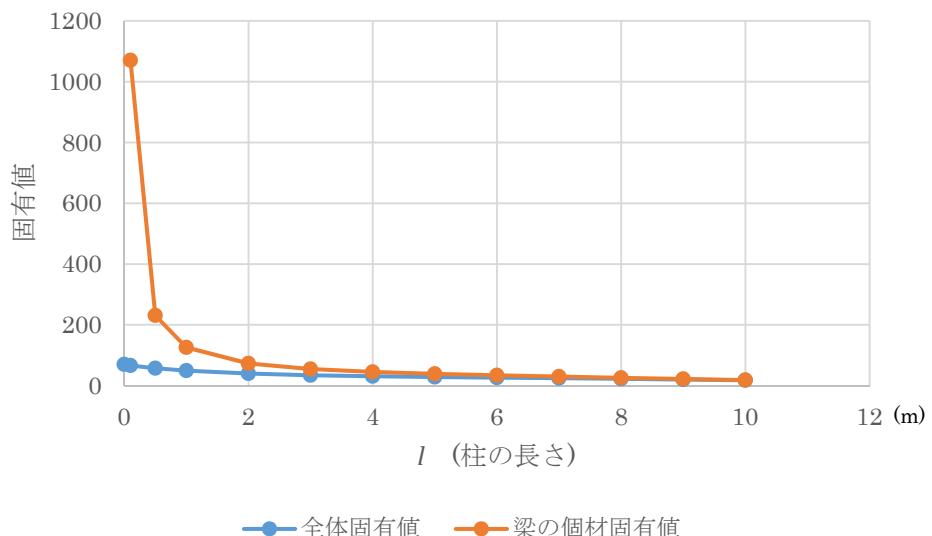


図 3.3.4 柱の長さと固有値の関係

表 3.3.1 全体固有値と梁の個材固有値の関係

柱の長さ(m)	全体固有値	梁の個材固有値
0	69.97	-
0.1	66.39	1070.57
0.5	57.35	230.87
1	49.28	125.8
2	39.65	72.95
3	34.32	54.88
4	30.94	45.32
5	28.48	38.95
6	26.44	33.99
7	24.49	29.66
8	22.39	25.64
9	20.06	21.85
10	17.53	18.39

解析結果より,全体固有値は柱の長さが短くなるにつれて,両端固定の部材の全体固有値に収束していく.これに対して,個材固有値は柱の長さが長いときは,全体固有値と近い値を示しているが,柱が短くなるにつれて全体固有値との差は増加していく.

ここで柱が長いということは梁の固定度が小さいことを意味するため,固定度と個材固有値の関連性がここでも確認できた.

また,梁の個材固有値は 0 に近づくにつれてグラフの傾きが急になっていくためこ,部材端が剛に近づくにつれて急激に個材固有値が大きくなることを示していると考えられる.

3.4 1本柱の固有値分布

本節で扱う柱は,全て同一断面で構成されており,E=2.1×10⁸ kN/m²,I=8.33×10⁻⁶ m⁴,A=0.01 m²とする.また,全て2次元のモデルである.

3.4.1 分割数と個材固有値

構造全体系の線形座屈解析では,分割数によって固有値に誤差が生まれ,分割数が多いほどオイラーの座屈荷重に収束していくことが知られている.この固有値の誤差は部材角が生じない座屈モードになるものほど大きい.そこで,縮約法では1部材を有限要素に分割した場合,分割数によってどのような結果の違いが見られるのか検証を行う.

本節で扱う柱は,全て同一断面で構成されており,

部材角を生じない座屈の例として図3.4.1に示すピン柱をいくつかの要素に分割したモデルの個材固有値分布と全体座屈荷重について分析する.

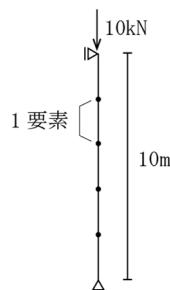


図3.4.1 分割されたピン柱のモデル（5分割のとき）

図3.4.1の柱はE=2.1×10⁸ kN/m,I=8.33×10⁻⁶ m⁴とする.このときオイラー式による座屈荷重は式(3.1)より,172kNである.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = 172 \text{ kN} \quad (3.1)$$

表3.4.1に線形座屈解析による全体固有値,座屈荷重と縮約法による個材固有値の算出結果を示す.なお,今柱の軸力は10kNであるので,全体固有値と座屈荷重は等しい値をとる.

全体固有値は要素数が2以上となるとおおよそオイラー式から求めた座屈荷重と等しい値を算出する.これは,ピン柱の座屈モードが図3.4.2のようになるのに対して,要素数が1のとき図3.4.3のように節点が存在しないところは拘束されていると考えられるため正しい座屈が検出できないためである.この結果を踏まえつつ個材固有値について考察する.全ての要素で軸力は均一であるため,最小固有値をとる要素が支配的となって座屈が生じていると考えると,要素数が2のときが最も全体固有値と近い値を示している.



図 3.4.2 ピン柱の座屈モード



図 3.4.3 要素数 1 の柱

表 3.4.1 分割数と固有値の関係(ピン柱の場合)

要素数	1	2	5	10
個材固有値	20.99	17.98 17.98	29.60 19.99 18.10 19.99 29.60	52.51 31.00 23.75 20.55 19.25 19.25 20.55 23.75 31.00 52.05
全体固有値	20.99	17.39	17.27	17.27

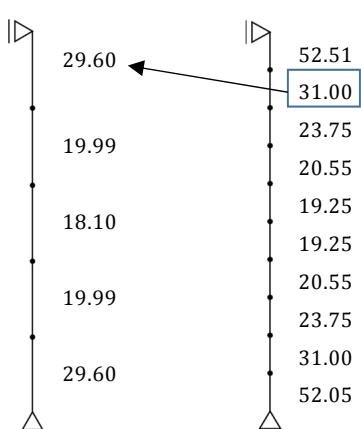


図 3.4.4 より柱モデルでは,分割数を減らすと,分割数が多いときの個材固有値の平均値ではなく,最小固有値よりも小さい固有値が算出されることがわかる(要素数が 1 のときを除く)

図 3.4.4 分割数と個材固有値

次に部材角を生じる座屈の例として、図 3.2.5 に示すような下端固定両端フリーの片もち柱について分析を行う。

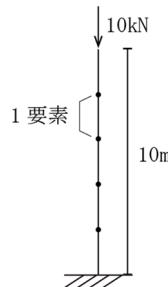


図 3.4.5 分割された片もち柱のモデル（5分割のとき）

片もち柱では座屈長さは $2.0l$ となるので、オイラー式による座屈荷重は 43.1kN である。表 3.4.2 に解析結果を示す。

表 3.4.2 分割数と固有値の関係(片もち柱の場合)

要素数	1	2	5	10
個材固有値	4.34	4.31 14.08	4.81 6.93 11.67 24.07 86.96	5.03 6.01 7.52 9.70 12.98 18.28 27.64 46.69 96.29 347.84
全体固有値	4.34	4.31	4.31	4.31

全体固有値は、要素数が大きいほどオイラー式の座屈荷重に収束していくことはピン柱のときと変わらないが、要素数が 1 のときでもそれほど大きな誤差はみられない。また、個材固有値の最小値はピン柱のときと同様に要素数が 2 のときに最もオイラー式による座屈荷重と近い値が得られる。

今後、架構においても分割数の違いにより縮約法の結果にどのような影響を与えるのか検証する必要がある。

3.4.2 境界条件の違いによる個材固有値分布

境界条件は、部材の固定度に大きな影響を及ぼす。そこで、個材固有値の分布が境界条件ごとにどのような違いが見られるのか考察する。ここでは、表 3.4.3 に示す 10m の柱を 10 個の要素に分割したモデルで検討する。ここで、部材断面は $E=2.1 \times 10^6 \text{ kN/m}^2, I=8.33 \times 10^{-5} \text{ m}^4, A=0.100 \text{ m}^2$ とし、圧縮荷重 10kN 加えたときの解析結果を図 3.4.6、表 3.4.4 に示す。ここで、表 3.4.4 の最小個材固有値とは 10 個の要素のうち最も小さい値となった個材固有値をさす。

表 3.4.3 モデル概要

要素番号図	columnA	columnB	columnC	columnD	columnE

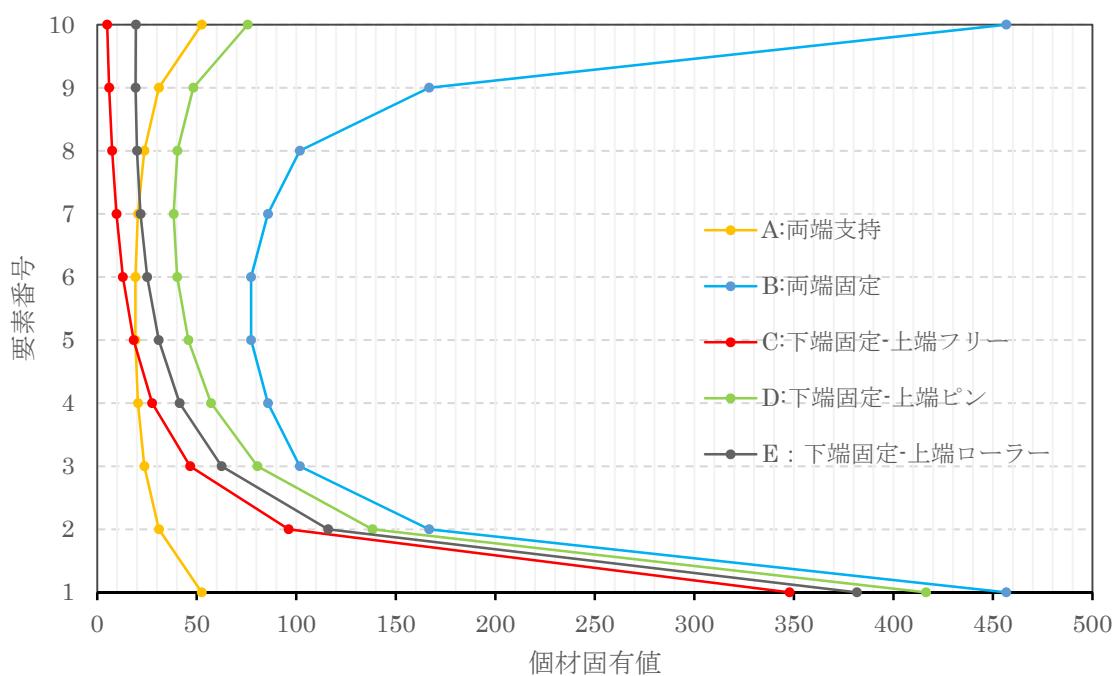
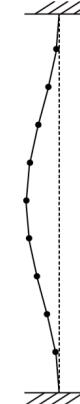
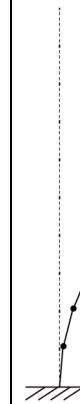


図 3.4.6 境界条件と固有値分布の関連

表 3.4.4 解析結果

モデル名	columnA	columnB	columnC	columnD	columnE	
座屈モード						
全体固有値	17.2	69.9	4.3	35.3	17.2	
座屈長さ	10m	5m	20m	7m	10m	
個材固有値	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	52.5 31 23.7 20.5 19.2 19.2 20.5 23.7 31 52.5	456.7 166.8 101.8 85.8 77.3 77.3 85.8 101.8 166.8 456.7	5 6 7.5 9.7 12.9 18.3 27.6 46.7 96.2 347.8	75.6 48.3 40.3 38.4 40.2 45.8 57.2 80.5 138.3 416.4	19.4 19.3 20 21.8 25.1 30.9 41.4 62.5 116 381.6
最小個材固有値	19.2	77.3	5.0	38.4	19.3	
最小となる要素	5,6	5,6	10	7	9	

両端固定,両端ピンなど対称系の座屈モードを示す境界条件では,個材固有値の分布も対称に算出できている.また,各柱の最小個材固有値はおおよそ全体固有値と一致する.両端ピンの柱 A では,他の柱と比較して個材固有値の最大値と最小値の差が小さい.一方固定端をもつ部材は最大値と最小値の差が極めて大きい.

また,最小個材固有値をもつ要素は座屈モードにおいて最も変形量が大きい要素である.なお,A~D は水平移動量が大きい部材であり,E では水平移動量は要素 10 が最も大きいものの,変形角も考慮されて要素 9 が最小となると考えられる.このように,座屈モードと個材固有値には関連性がみられる.

本論文中では,縮約後の個材固有ベクトルについては考察できなかったが,今後これについて

検証を行うことでさらなる分析が可能になると考える。

columnB~E では、下端の境界条件が全て固定であるため、これらを比較して境界条件と固有値について分析する。図 3.4.7 に要素別の個材固有値についてグラフにまとめる。x 軸は、全体の座屈荷重が小さい順に並べている。

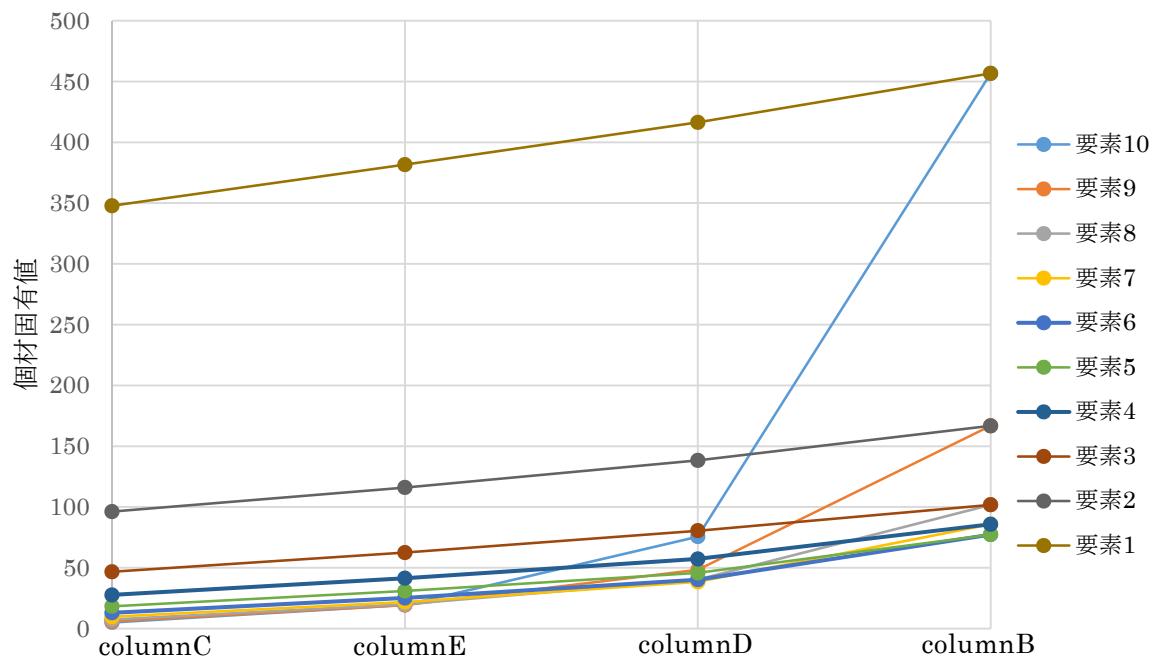


図 3.4.7 要素別の固定度

上記のグラフから、要素 1 ではおおよそ比例関係にあった個材固有値が、要素 10 では固定度が上がるにつれて増加率が大きくなる様子が見て取れる。したがって、上端の境界条件を変えた場合、それぞれの要素の個材固有値は上端に近い要素ほど大きく影響を受けると考えられる。

3.5 結

本章では,座屈固有値問題を縮約し算出した個材固有値と個材固有値から求まる座屈荷重について,線形座屈解析から得られる全体固有値と比較しながら考察した.

3.2 節では様々な架構について荷重条件を変えながら結果の比較をし,以下の知見を得た.

- 1) 隣接部材に軸力が存在しないとき,隣接していない部材の軸力の影響は受けずに個材固有値が算出される
- 2) 隣接部材に軸力が存在する場合,隣接しない部材の軸力もそれらを介して影響を受ける
- 3) 個材固有値は部材の固定度と存在軸力の影響を受けて決まる
- 4) 部材の固定度は架構形状だけでなく,架構中の部材の座屈しやすさから決まる
- 5) 個材固有値は負の値で算出される場合も存在し,その結果座屈荷重が引張になることがある
- 6) 架構形状と荷重条件によっては部材の座屈荷重が線形座屈解析の結果よりも座屈荷重が小さく算出されることがある

3.3 節では個材固有値から求めた座屈荷重の妥当性について検証を行い,以下の知見が得られた.

- 7) 縮約法では,1 層ラーメン構造の柱が同時に座屈する均等荷重の場合でも,他方の柱の剛性による水平移動への拘束があるとみなされる値が検出される
- 8) 個材固有値は,剛に近くなるほど急激に増加する.

3.4 節では柱部材を対象に,一部材とみなせる部材を有限要素に分割した場合の個材固有値について分割数の影響と部材内での個材固有値分布について考察し,以下の知見を得た.

- 9) 全体固有値と部材内の最小固有値を比較すると,2 分割時が最も近い値を示し,分割数が増えるほど差は大きくなる.
- 10) 分割数を増やすと,個材固有値は平均値ではなく分割前の最小固有値よりも小さい値を算出する
- 11) 部材端が固定,支持,フリーの順番で個材固有値は大きく算出される
- 12) 両端支持や両端支持など座屈モードが対称となる条件化では個材固有値も対称に算出される
- 13) 個材固有値の大きさは部材の変形量の大きさと関連がみられる

第4章 個材固有値を指標とした座屈に対する最適化

4.1 序

本章では,個材固有値の分布を指標とした形態の最適化手法について探る.個材の座屈荷重を個材固有値と軸力の積であるとするとその部材の座屈に対する危険度 SF は,式(4.1)のように考えられるため個材固有値の逆数となる.そこで,この個材固有値の逆数を座屈安全率とし,次節以降では座屈安全率を色分布で表す.

$$SF = \frac{N}{\lambda' N} = \frac{1}{\lambda'} \quad (4.1)$$

また,最適化は構造全体系の線形座屈解析をしたときに全体固有値の値を元に判断する.

4.2 柱モデルの形状最適化

4.2.1 序

基本的なモデルとして,1 本の柱を有限要素に分割したモデルについて解析を行う.各要素,断面が一定の場合と浜田ら^[16]が逆変分離法で求めた最適形状との比較を行い,座屈安全率による形状の最適化の可能性を探る.

本節の柱の最適化では,平面モデルで体積を一定に保ちつつ,要素ごとに見つけ寸法 t が変化する.また,座屈安全率の結果を表示する際,最大となる座屈安全率が 1.00 になるように基準化を行っている.

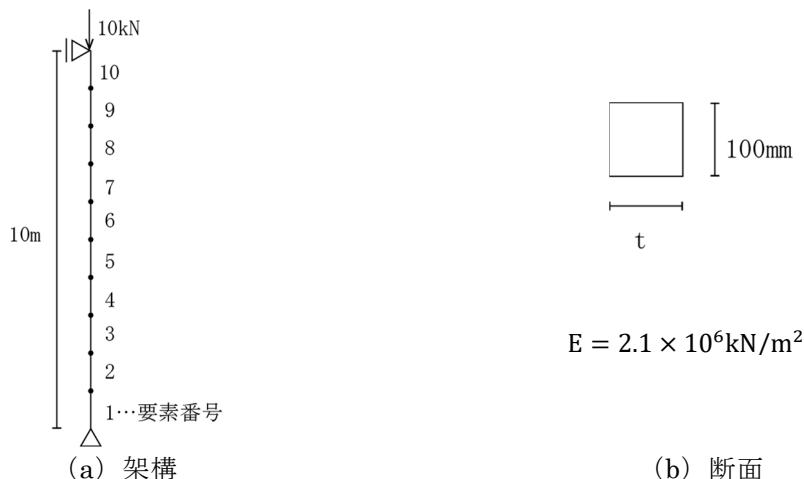


図 4.2.1 両端ピン柱の基本モデル

4.2.2 両端ピン柱の解析結果

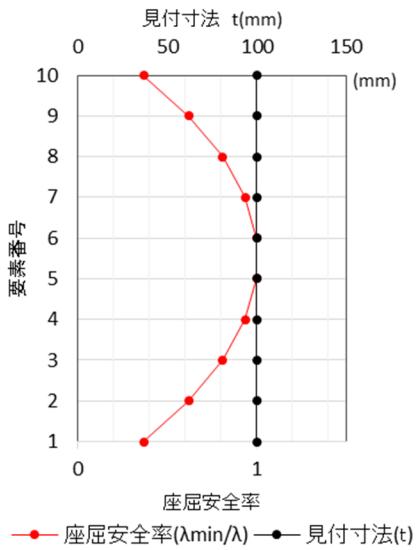


図 4.2.2 columnA1

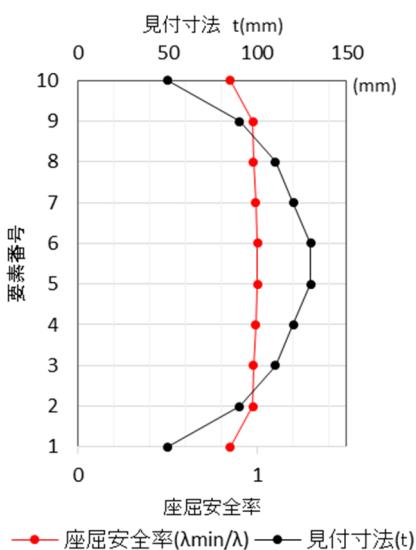


図 4.2.3 columnA2

表 4.2.1 columnA1 結果

要素番号	個材固有値	個材固有値分布
10	52.5	0.366
9	31.0	0.619
8	23.7	0.801
7	20.5	0.937
6	19.2	1.000
5	19.2	1.000
4	20.5	0.937
3	23.7	0.801
2	31.0	0.619
1	52.5	0.366

全体固有値 $\lambda = 17.3$

表 4.2.2 columnA2 結果

要素番号	個材固有値	個材固有値分布
10	34.1	0.850
9	29.7	0.976
8	29.6	0.979
7	29.2	0.993
6	29.0	1.000
5	29.0	1.000
4	29.2	0.993
3	29.6	0.979
2	29.7	0.976
1	34.1	0.850

全体固有値 $\lambda = 21.7$

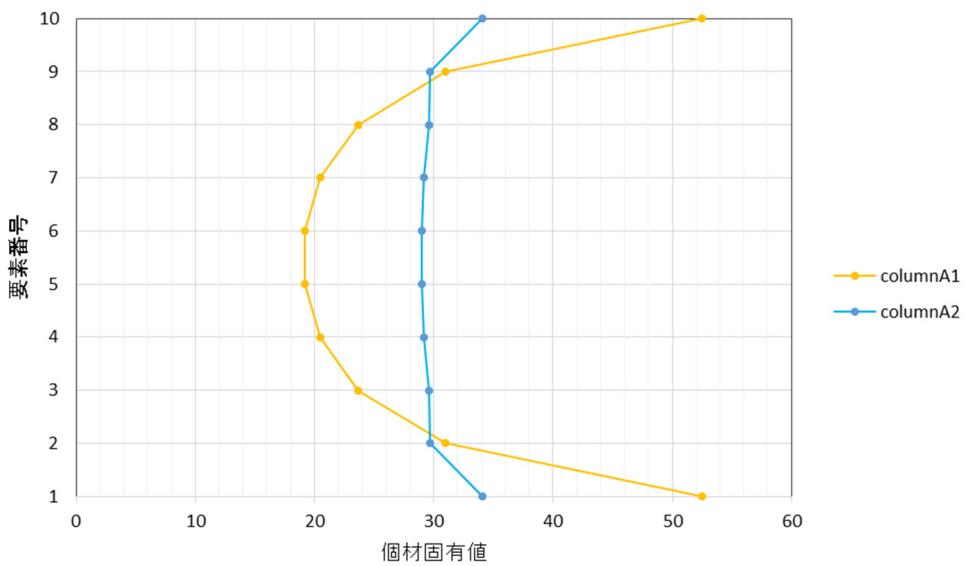


図 4.2.4 柱の個材固有値

部材断面が一定である columnA1において固有値分布にばらつきが生じていたのに対して、最適形状とされる columnA2では、おおよそ一律といえる座屈安全率となった。また、全体の固有値においても 25%上昇した。このことから、ピン柱のモデルでは、形状の最適化を行う際に個材固有値を指標とできると考えられる。

また分割数による影響を考え、倍の分割数の 20 要素からなる最適形状の柱について解析を行った。その結果、20 分割のモデルにおいても最適形状ではおおよそ個材固有値が均一となったことを下記に示す。

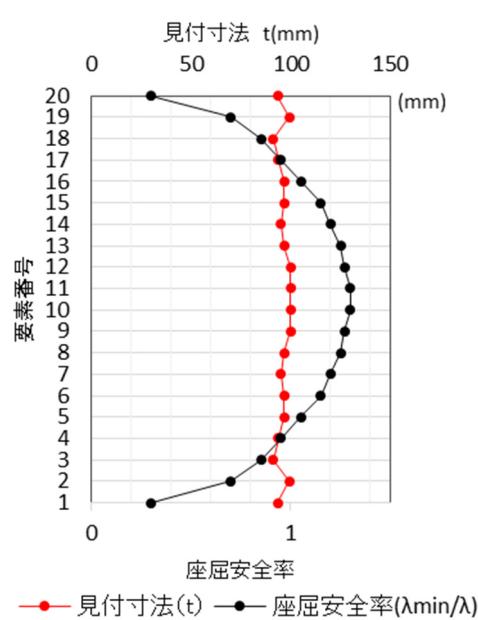


表 4.2.3 columnA'2 結果

要素番号	個材固有値	個材固有値分布
20	33.2	0.97
19	31.2	0.92
18	34	1
17	33	0.97
16	32	0.97
15	32	0.95
14	32.6	0.95
13	32	0.94
12	31	0.91
11	31	0.91
10	31	0.91
9	31	0.91
8	32	0.94
7	32.6	0.95
6	32	0.95
5	32	0.97
4	33	0.97
3	34	1
2	31.2	0.92
1	33.2	0.97

全体固有値 $\lambda = 21.7$

4.2.3 両端固定柱

次に両端固定の柱についての解析結果を示す。

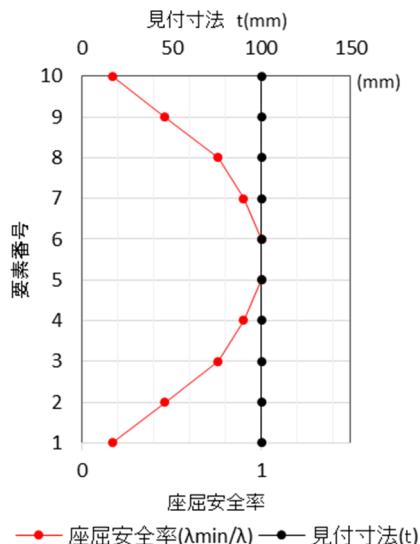


図 4.2.6 columnB1

表 4.2.4 columnB1 結果

要素番号	個材固有値	個材固有値分布
10	456.7	0.169
9	166.8	0.463
8	101.8	0.759
7	85.8	0.901
6	77.3	1.000
5	77.3	1.000
4	85.8	0.901
3	101.8	0.759
2	166.8	0.463
1	456.7	0.169

全体固有値 $\lambda = 69.1$

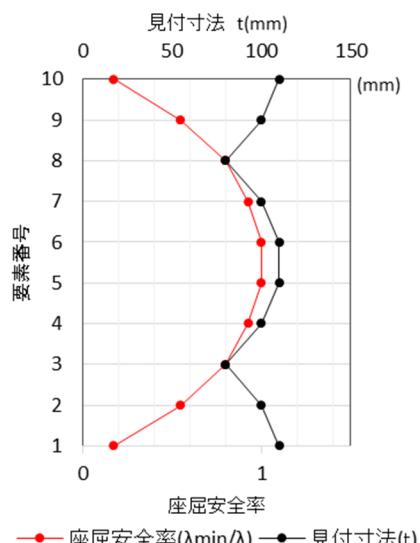


図 4.2.7 columnB2

表 4.2.5 columnB2 結果

要素番号	個材固有値	個材固有値分布
10	540.7	0.175
9	172.5	0.548
8	118.2	0.799
7	102.1	0.925
6	94.5	1.000
5	94.5	1.000
4	102.1	0.925
3	118.2	0.799
2	172.5	0.548
1	540.7	0.175

全体固有値 $\lambda = 82.8$

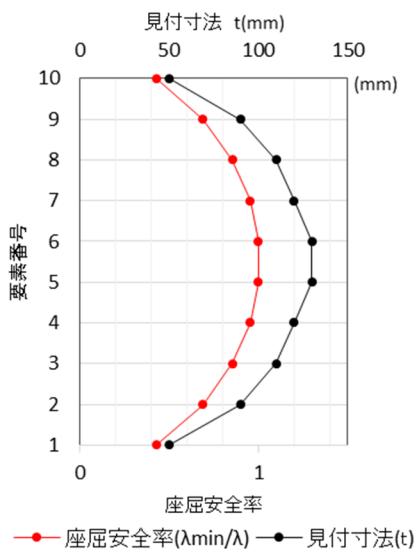


図 4.2.8 columnB3

表 4.2.6 columnB3 結果

要素番号	個材固有値	個材固有値分布
10	540.7	0.175
9	172.5	0.548
8	118.2	0.799
7	102.1	0.925
6	94.5	1.000
5	94.5	1.000
4	102.1	0.925
3	118.2	0.799
2	172.5	0.548
1	540.7	0.175

全体固有値 $\lambda = 48.4$

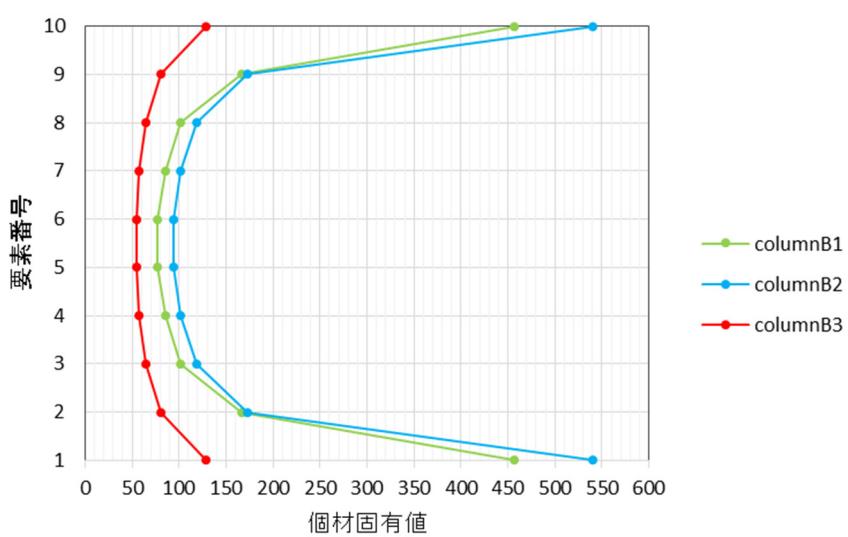


図 4.2.9 柱の個材固有値

両端固定の柱では,最適形状とされる columnB2 において,固有値分布が均一になるという結果は得られなかった.しかし全体固有値は約 20%上昇しているので形態の最適化されていることは確かである.

そこで,固有値分布を均一化するために,断面操作を施したモデルについて以下に示す.

columnB3 で,固有値分布が完全に一律とはなっていないが,断面が一定の columnB1 より個材固有値のばらつきが小さい.この 2 つのモデルの全体固有値を比較すると,columnB1 の方が大きい値を示しており,座屈に対して強い.また,columnB3 の形状はピン柱の最適化形状に近い.columnB3 において座屈荷重が減少したのは固定端を持つ要素の断面が小さくなることで,柱の性能としては両端支持の柱に近いものとなったためと考えられる.したがって,両端固定の柱では固有値の一律化による最適化は適さないことがわかる.

4.2.4 柱モデルのまとめ

本節の検証で以下のことが得られた.

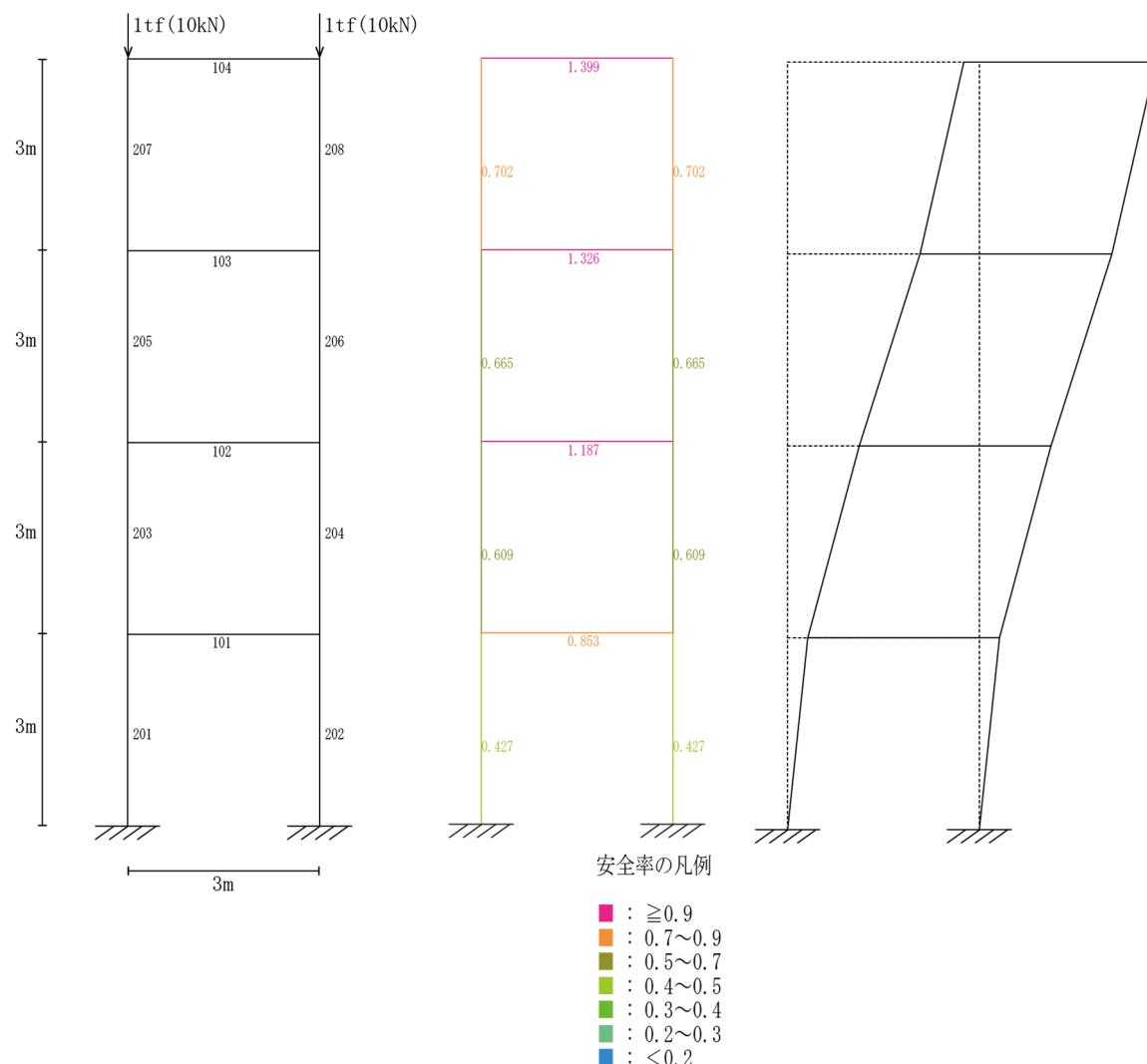
- ・ピン柱では固有値を均一化することで最適化を行える
- ・最適化時には分割数は形状決定に影響が少ない.しかし,分割数があまりにも少ないと最適化操作自体が行えないので 10 分割程度がよいと思われる.
- ・固定端をもつ柱では,座屈安全率の均一化で,最適化形状を探ることは困難である

4.3 部材断面操作による形状最適化

4.3.1 4層ラーメン構造の最適化

座屈に対する架構の最適化と座屈安全率分布の関連性について探る。ここでは、図 3.4.11(a)に示す架構を対称とし、特定の部材のみ強化する場合、どの部材の断面を強化するのが一番効率のよい操作といえるのか検討を行う。基本のモデルは全ての部材で $E=2.1 \times 10^8 \text{ KN/m}^2$, $I=6.75 \times 10^{-8} \text{ m}^4$, $A=9.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ の断面をもち、断面強化後のモデルでは、どのモデルにおいても同体積分増加するものとする。

図 3.4.11 に基本するモデルの架構と解析結果を示す。(b)図は座屈安全率を色表示で表したものであり、(c)図は線形座屈解析により求めた座屈モードである。



(a)架構形状と部材番号

(b)座屈安全率 $1/\lambda i$

(c)座屈モード

図 4.3.1 frame4A

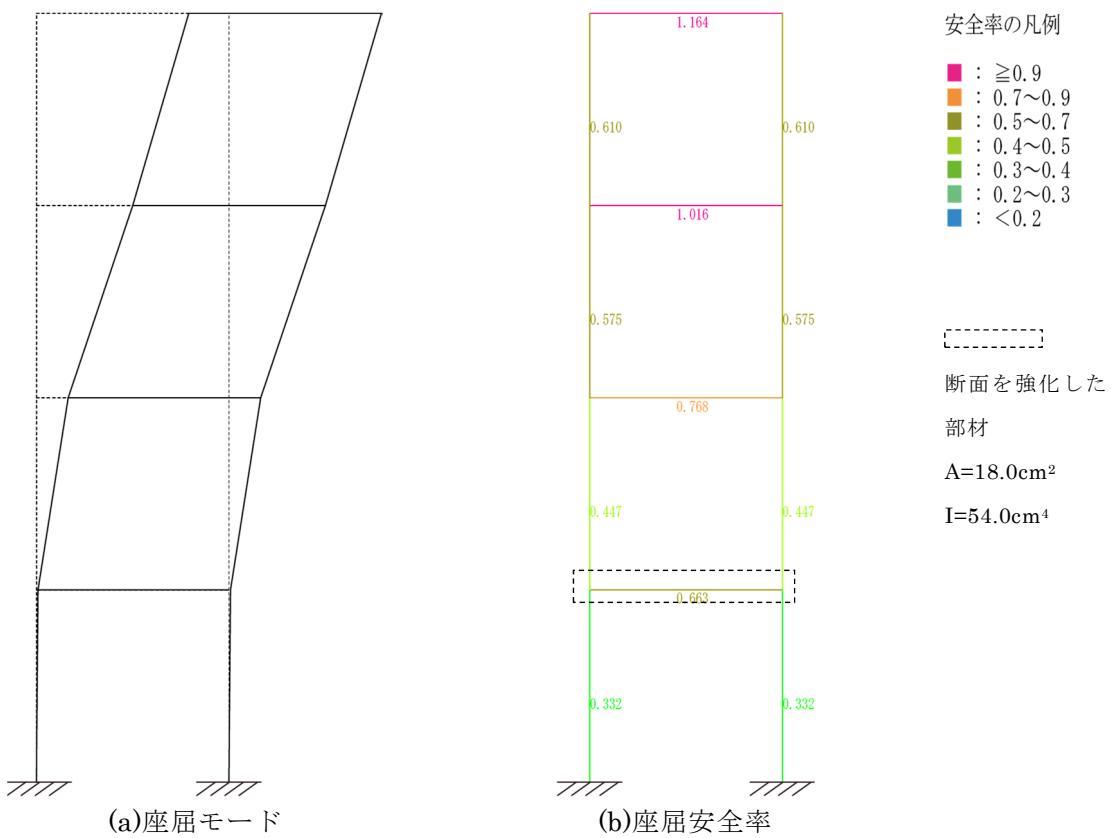


図 4.3.2 frame4A1

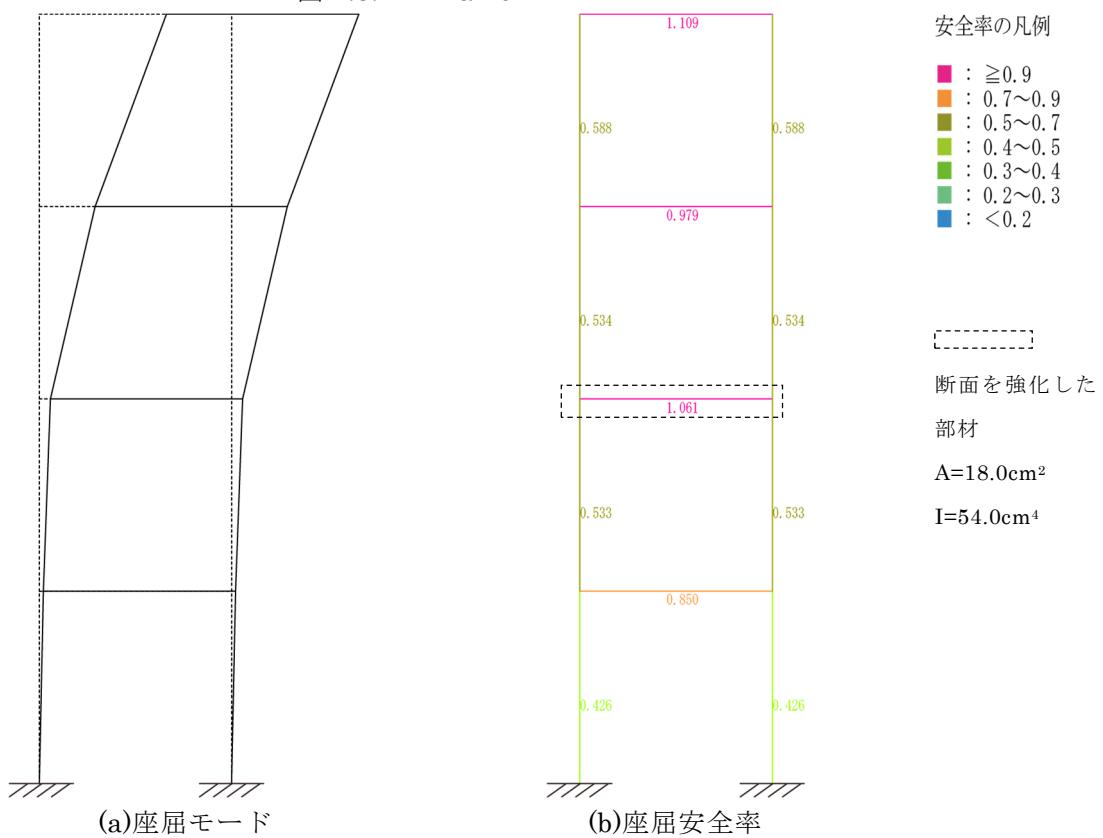


図 4.3.3 frame4A2

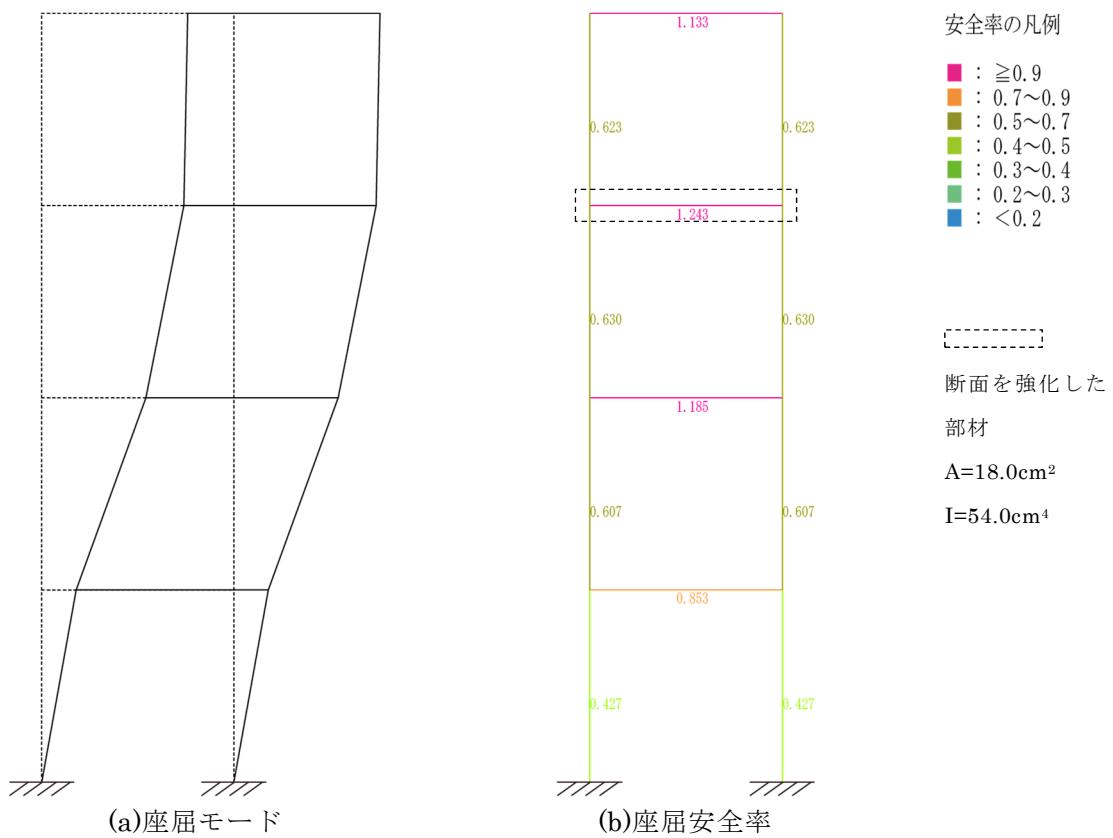


図 4.3.4 frame4A3

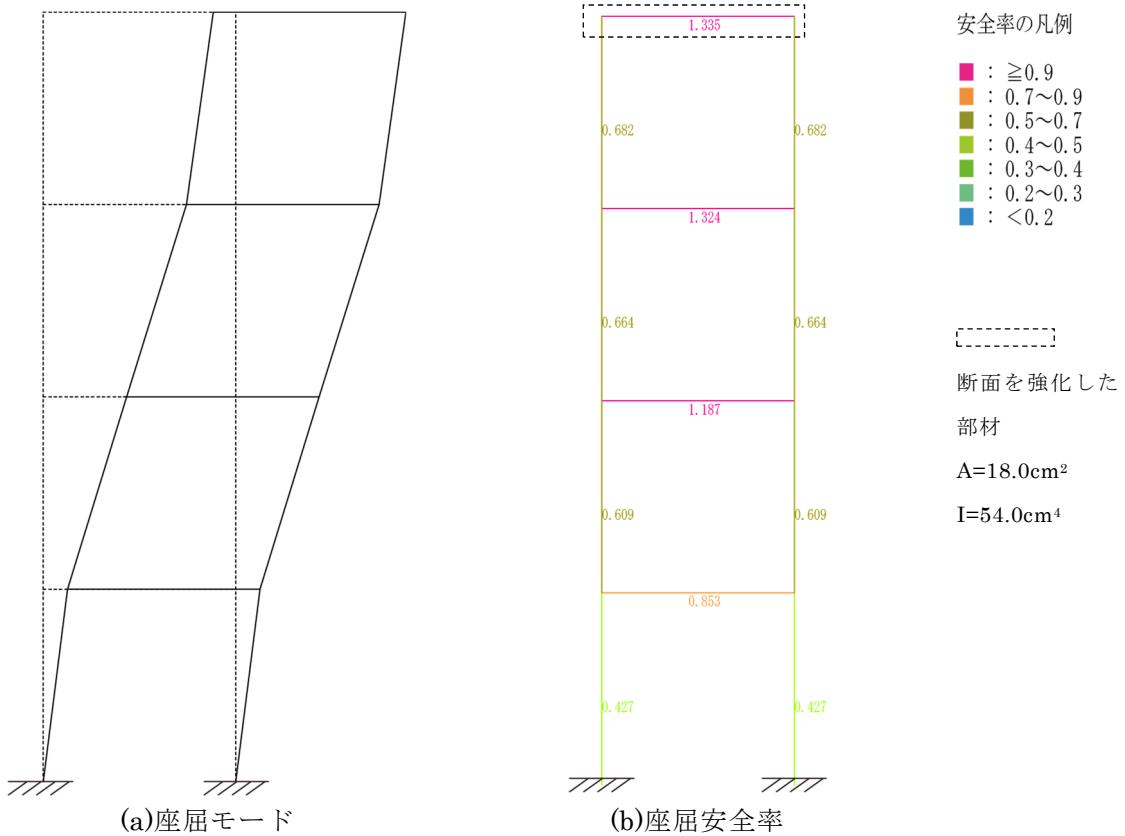


図 4.3.5 frame4A4

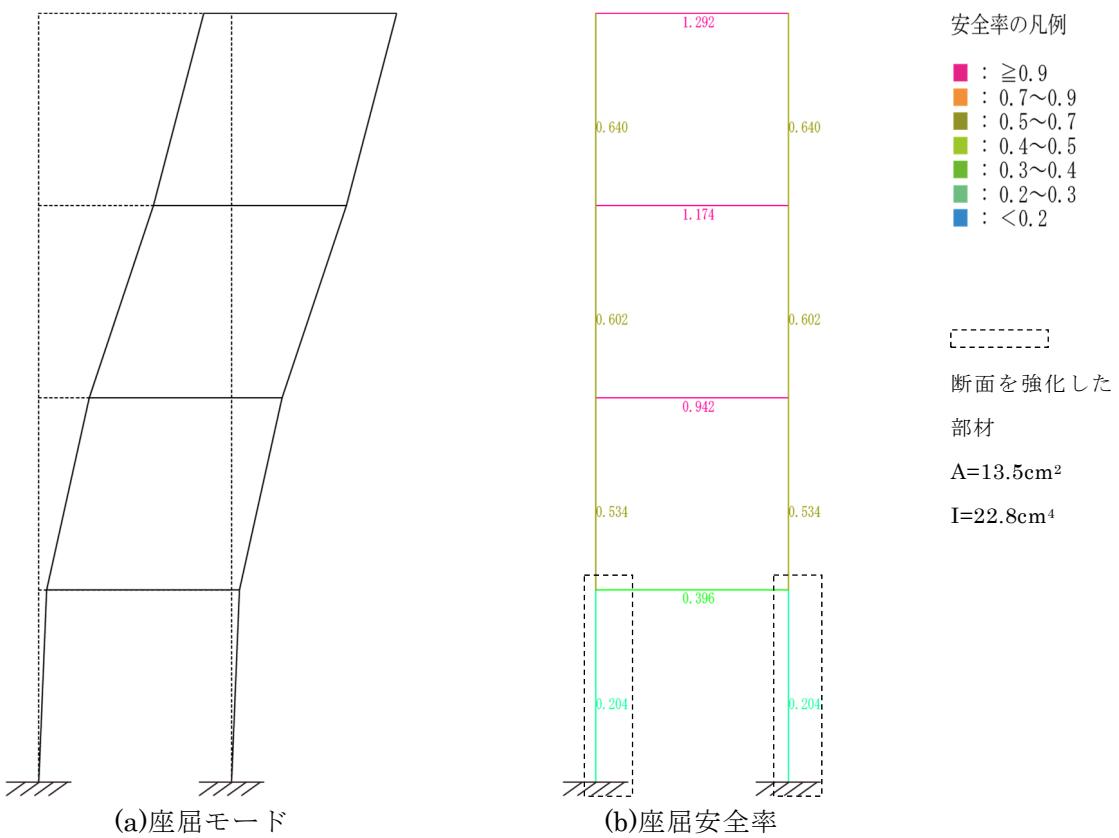


図 4.3.6 frame4A5

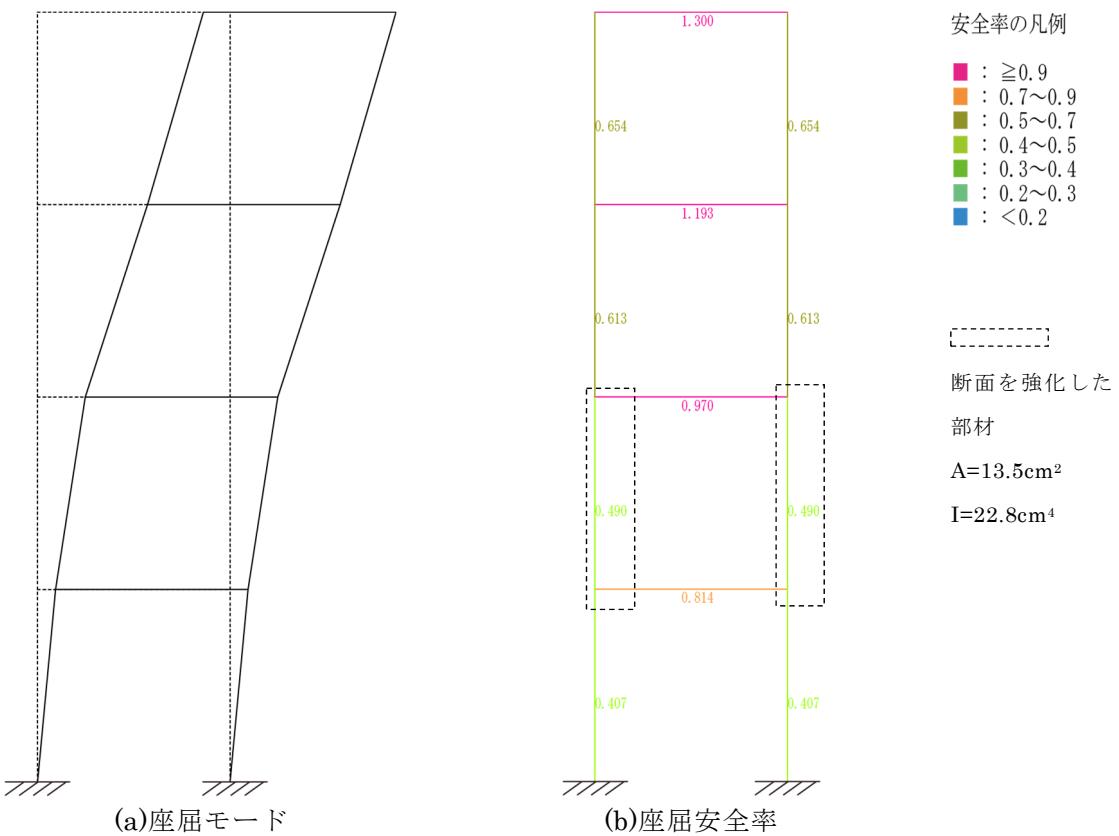


図 4.3.7 frame4A6

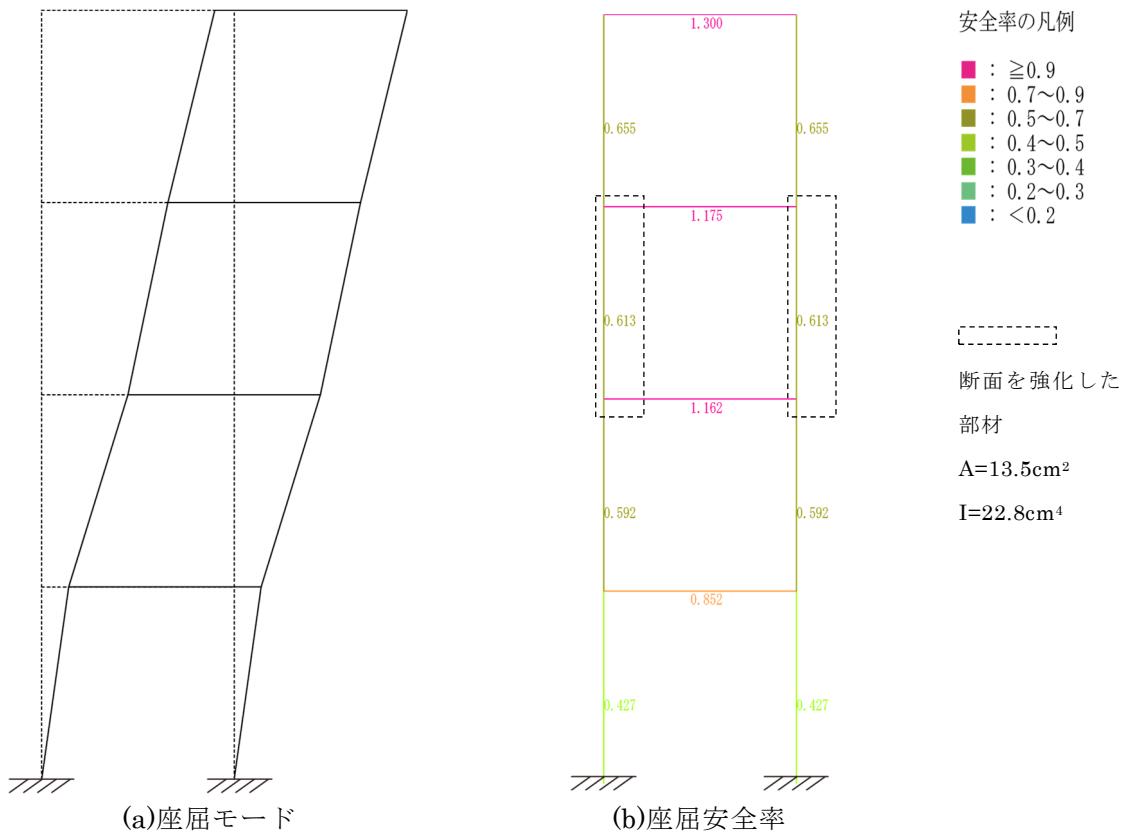


図 4.3.8 frame4A7

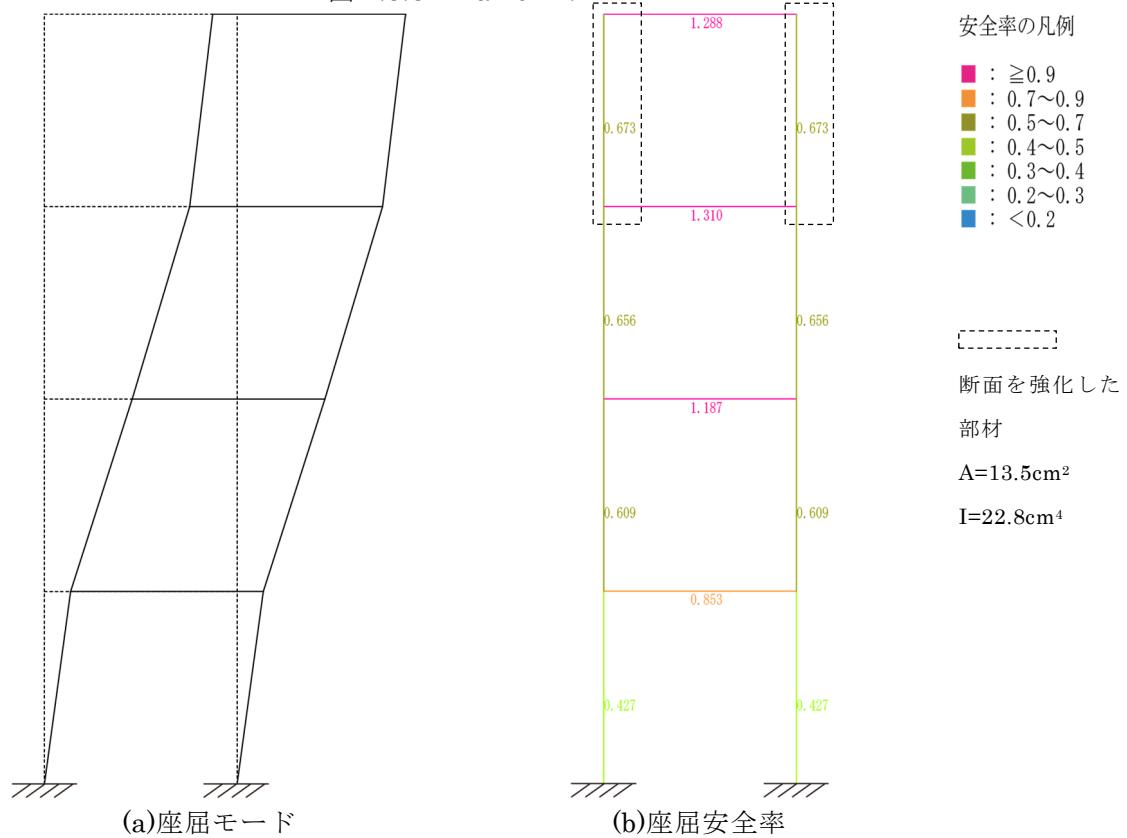


図 4.3.9 frame4A8

表 4.3.1 最適化結果

モデル	最適操作	全体固有値	増加率	順位
frame4A0	基本モデル	0.679	-	-
frame4A1	梁断面強化	101(1層)	0.716	1.05
frame4A2		102(2層)	0.806	1.18
frame4A3		103(3層)	0.764	1.13
frame4A4		104(4層)	0.700	1.03
frame4A5	柱断面強化	201,202(1層)	0.697	1.03
frame4A6		203,204(2層)	0.721	1.06
frame4A7		205,206(3層)	0.739	1.09
frame4A8		207,208(4層)	0.711	1.05

基本モデルである frame4A0において座屈安全率が大きく座屈に弱いと判断できる部材は、部材 104 である。そこで、部材 104 の断面を強化した frame4A4 を見てみると、部材 104 の座屈安全率は frame4A0 よりも下がっているものの、その変化は他のモデルと比べると小さい。また、全体固有値も 3%しか上がっておらず、順位は 7 である。これは、部材 104 は部材が変形する一般的な座屈ではなく、固定度が小さく極めてゆるいばねが取り付いているために座屈と検出される部材であるために断面の変化があまり影響なかったと考えられる。

ここで、部材 104 の座屈安全率が最も小さくなるのは frame4A2 である。このとき全体固有値の増加率は最も高く、解析を行ったモデルにおいては最も効率の良い最適化であるといえる。したがって架構においても柱のときに得られた見解と同様に、最も座屈に弱いと検出される部材の個材固有値が増加するように最適操作をするとよいと考えられる。

しかし、今 frame4A7 は 3 番目に効率が良い最適化であったにも関わらず、部材 104 の個材固有値はこのモデルよりも順位が低いものより大きく算出されている。したがって、最小個材固有値の変化率は必ずしも効率化の順位とは一致しない。

ここで、断面による個材固有値の変化を表 4.3.2 に示す。増加率は基本モデル時の個材固有値に対して各モデルどれくらい個材固有値が増加したのか比率で示す。例えば、部材 101 の frame4A1 での増加率は

$$\text{増加率} = \frac{\text{frame4A1 の部材 101 の個材固有値}}{\text{frame4A0 の部材 101 の個材固有値}}$$

となる。

表 4.3.2 個材固有値解析結果と増加率

	個材固有値							
	101	102	103	104	201	203	205	207
					202	204	206	208
frame4A0	1.172	0.842	0.754	0.715	2.340	1.643	1.504	1.424
frame4A1	1.509	1.302	0.984	0.859	3.011	2.238	1.739	1.641
frame4A2	1.177	0.942	1.021	0.902	2.350	1.877	1.874	1.700
frame4A3	1.172	0.844	0.804	0.883	2.340	1.647	1.588	1.606
frame4A4	1.172	0.842	0.755	0.749	2.340	1.643	1.506	1.466
frame4A5	2.524	1.061	0.852	0.774	4.905	1.874	1.660	1.562
frame4A6	1.228	1.031	0.838	0.769	2.455	2.040	1.632	1.528
frame4A7	1.173	0.861	0.851	0.769	2.342	1.690	1.633	1.527
frame4A8	1.172	0.843	0.763	0.777	2.340	1.643	1.524	1.486
個材固有値の増加率								
frame4A0	-	-	-	-	-	-	-	-
frame4A1	1.287	1.546	1.305	1.202	1.287	1.362	1.156	1.152
frame4A2	1.004	1.119	1.354	1.262	1.004	1.143	1.246	1.194
frame4A3	1.000	1.002	1.067	1.235	1.000	1.003	1.055	1.127
frame4A4	1.000	1.000	1.001	1.048	1.000	1.000	1.001	1.030
frame4A5	2.153	1.260	1.129	1.083	2.096	1.141	1.104	1.097
frame4A6	1.047	1.224	1.112	1.076	1.049	1.242	1.085	1.073
frame4A7	1.001	1.022	1.128	1.076	1.001	1.029	1.085	1.072
frame4A8	1.000	1.000	1.012	1.087	1.000	1.000	1.013	1.043

表 4.3.2 より部材間の個材固有値の関係性を考察する。部材 101 は自身の断面を増加させるよりも部材 201,202 の断面を強化したときに最も個材固有値が増加する。これは、部材 201,202 が座屈に強くなったことで部材 101 の固定度が強化されたからであると考えられ、この部材の個材固有値は曲げ剛性よりも他の部材による固定度に依存度が大きいといえる。一方で、部材 102~104,203~208 の断面を強化した場合にはほとんど変化がない。3.2.2 節でも 1 層の柱は上層の柱の影響を受けなかったように、4 層においても 1 層の柱は上層の部材の影響が固定度にほとんど関連しないと考えられる。

部材 102 では、部材 101 の断面を強化した場合に最も個材固有値が増加し、次いで部材 201,202 の場合に増加率が大きい。したがってこの部材においては下層を強化し、固定度を上げることが、個材固有値の増加につながると考えられる。また、この部材においても自身より上層の部材の断面を強化した場合には、個材固有値にあまり変化は見られない。

部材 103 でも、部材 102 と同様の傾向が見られるが、最下層の部材 101 よりも自身に近い部材 102 の断面を強化するほうが増加率は高い。一方で、柱の断面を強化する場合、1 层の部材 201,202 の断面を強化する場合一番増加率が高く、次いで 3 層の柱である部材 205,206 の断面を強化する場合となり、これらはほぼ同等の増加率であった。

部材 104においては,下層梁の断面を強化することが個材固有値の増加率が大きいことは,他の部材と変わらないが,部材 102 が最も増加率がよく,次いで 103,101 となる.柱を強化する場合はどの柱を強化してもおおよそ同等の増加率となる.

これらの結果より,梁の個材固有値を増加させるには,その梁よりも下層の部材強化することが良い。また,その部材は梁のほうが柱よりよいことがわかる.また,上層に行くほど,個材固有値を上げたい部材の自身の部材の断面を強化した場合の効果が低い

次に柱を考察すると,部材 201,202 は自身を上げた場合に最も増加率が高く,次いで部材 101 となる.その他の部材はほとんど影響を受けない.

部材 203,204 では,下端に接続される部材 101 の断面を強化した場合に最も増加率が高く,次いで自身,上端に接合される部材 102,下端に接続される部材 201,202 となり,自身と隣接部材による影響が大きい.

3 層の柱である部材 205,206 は下層の梁の断面を強化した場合,1 層の部材 201,202 と下層の断面を強化したときに個材固有値の増加率が大きい.4 層の部材 207,208 でもこのときと同様の傾向が見られる.

また,柱でも梁と同様に上層に行くほど自身の部材を強化した場合の効果が低くなることがわかる.

4.3.2 ランダムモデル

図 4.3.10 に示す恣意的に決めた架構における最適化を考える。この架構の部材断面が全て一律のときのモデルを基本とし、ある一部材の断面を大きくしたときの全体固有値を比較し、最も効率的な座屈に対する最適化の手法を探る。`randomA0` のモデルについて、ある 1 部材の断面を大きくした場合の固有値の変化について考察する。図 4.3.11～にその結果を示す。(a) 図において太線で示す部材は断面を強化した部材である。

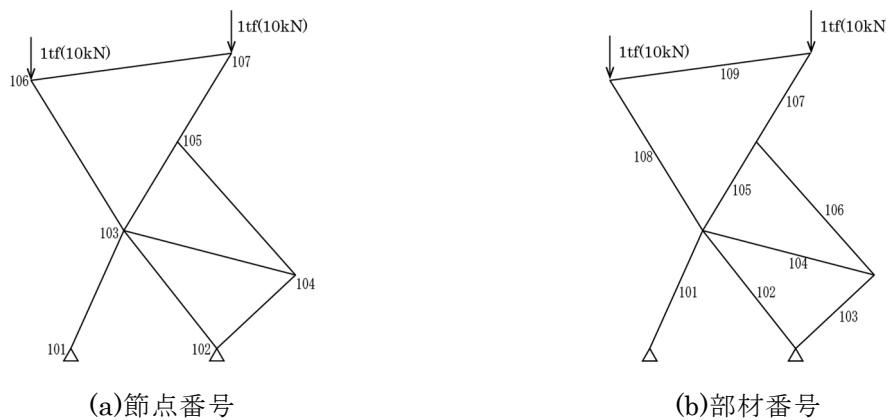


図 4.3.10 randomA0 モデル図

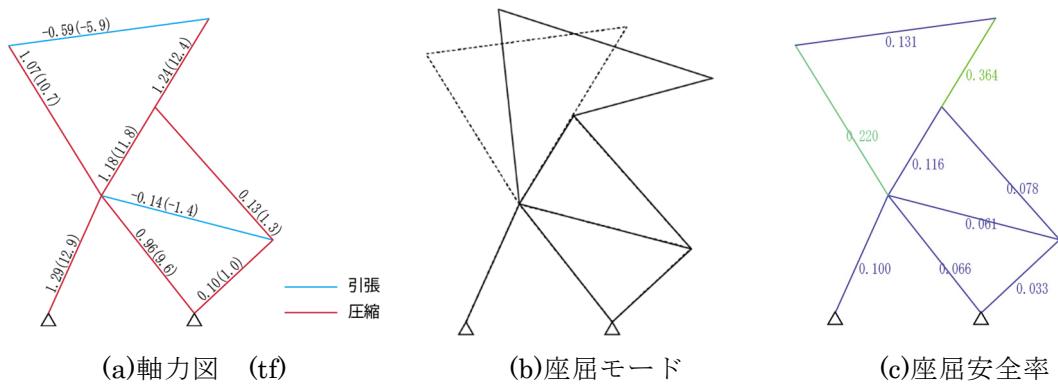
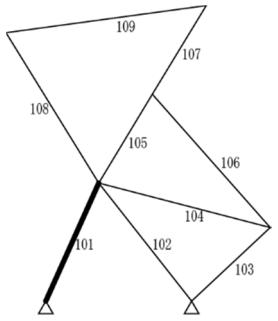
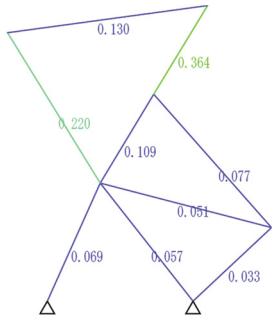


図 4.3.11 randomA0 解析結果



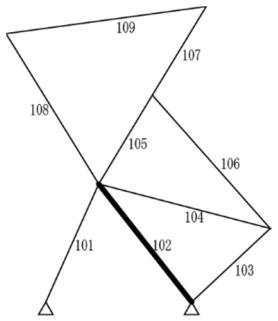
(a)架構



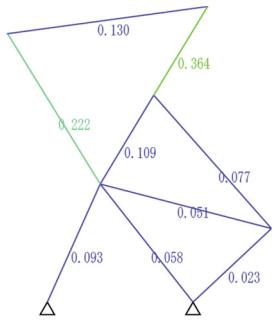
(b)座屈安全率

図 4.3.12 randomA1 解析結果

全体固有値	2.09423
個材固有値	101 14.426
	102 17.605
	103 30.544
	104 19.681
	105 9.206
	106 12.919
	107 2.750
	108 -4.550
	109 7.678



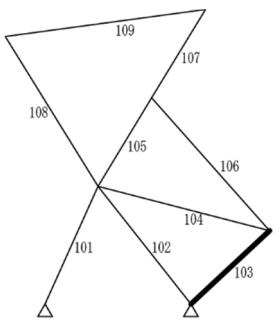
(a)架構



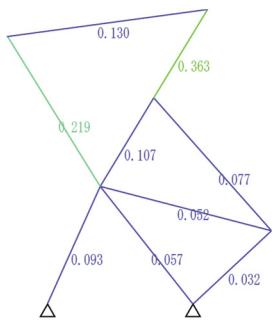
(b)座屈安全率

図 4.3.13 randomA2 解析結果

全体固有値	2.09403
個材固有値	101 10.760
	102 17.380
	103 42.874
	104 19.473
	105 9.143
	106 12.925
	107 2.750
	108 -4.509
	109 7.673



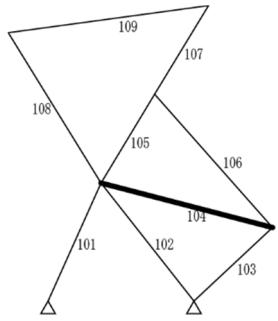
(a)架構



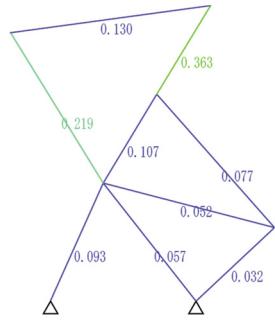
(b)座屈安全率

図 4.3.14 randomA3 解析結果

全体固有値	2.09850
個材固有値	101 10.760
	102 17.380
	103 42.874
	104 19.473
	105 9.143
	106 12.925
	107 2.750
	108 -4.509
	109 7.677



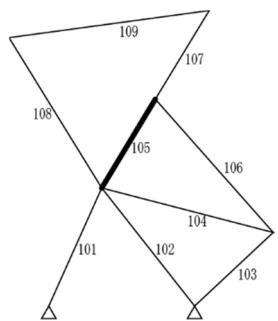
(a)架構



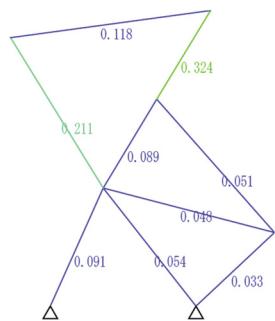
(b)座屈安全率

図 4.3.15 randomA4 解析結果

全体固有値	2.09792
個材固有値	101 10.711
	102 17.521
	103 31.139
	104 19.266
	105 9.308
	106 13.036
	107 2.753
	108 -4.560
	109 7.679



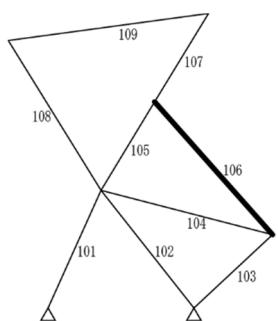
(a)架構



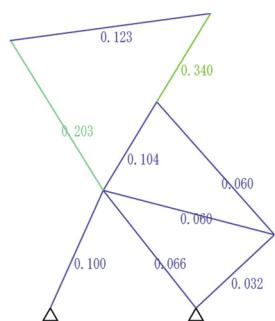
(b)座屈安全率

図 4.3.16 randomA5 解析結果

全体固有値	2.32672
個材固有値	101 11.003
	102 18.410
	103 30.529
	104 20.728
	105 11.244
	106 19.437
	107 3.082
	108 -4.743
	109 8.447



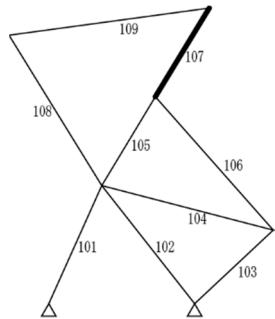
(a)架構



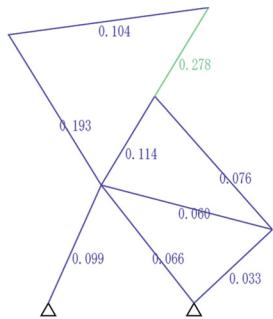
(b)座屈安全率

図 4.3.17 randomA6 解析結果

全体固有値	2.23673
個材固有値	101 10.046
	102 15.079
	103 30.833
	104 16.571
	105 9.639
	106 16.700
	107 2.938
	108 -4.915
	109 8.151



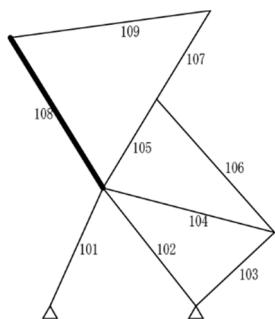
(a)架構



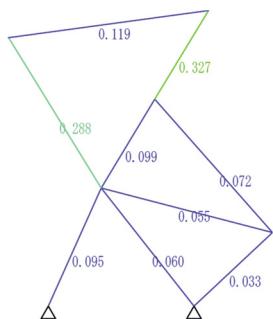
(b)座屈安全率

図 4.3.18 randomA7 解析結果

全体固有値	2.68879
個材固有値	101 10.089
	102 15.256
	103 30.442
	104 16.731
	105 8.801
	106 13.110
	107 3.591
	108 -5.169
	109 9.588



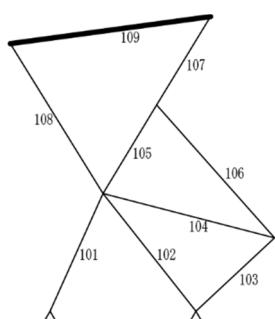
(a)架構



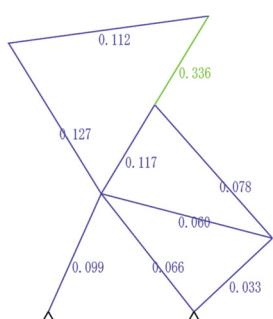
(b)座屈安全率

図 4.3.19 randomA8 解析結果

全体固有値	2.34412
個材固有値	101 10.492
	102 16.552
	103 30.570
	104 18.296
	105 10.076
	106 13.897
	107 3.054
	108 -3.471
	109 8.431



(a)架構



(b)座屈安全率

図 4.3.20 randomA9 解析結果

全体固有値	2.32879
個材固有値	101 10.066
	102 15.183
	103 30.452
	104 16.643
	105 8.550
	106 12.779
	107 2.979
	108 7.864
	109 8.890

表 4.3.3 最適化結果

モデル	最適操作	全体固有値	増加率	順位
randamA0	基本モデル	2.09337	-	-
randamA1	101	2.09423	1.00	8
randamA2	102	2.09403	1.00	9
randamA3	103	2.0985	1.00	6
randamA4	104	2.09792	1.00	7
randamA5	105	2.32672	1.11	4
randamA6	106	2.23673	1.07	5
randamA7	107	2.68879	1.28	1
randamA8	108	2.34412	1.12	2
randamA9	109	2.32879	1.11	3

全体固有値を比較すると,部材 107 の断面を大きくした randomA7 が最も座屈に強くなっていることがわかる.これは,全ての部材で同断面の randomA0 のときに個材固有値が最も小さく,座屈に弱いと検出されていた部材と一致している.座屈モードをみても,部材 107 がクリティカルとなり,座屈していることは明らかであり,最も座屈に弱い部材が検出できていると考えられる.

また,本架構では部材 101~104 の断面を強化した場合にあまり全体固有値が上がらず,座屈強化に効果的ではなかった.これは,下層ではトラスが成立しているために,初期形状の randomA0 において,すでに下層の剛性が高いため断面を強化しても影響が低かったと考えられる.randomA0 の個材固有値をみても部材 101~104 があまり高くないため,固定度が高いことが検出できていた.

表 4.3.4 randomA0 の個材固有値

	101	102	103	104	105	106	107	108	109
個材固有値	10.03	15.08	30.45	16.53	8.62	12.89	2.75	-4.55	7.65

それぞれの部材の個材固有値を大きくするためには,どの部材断面を上げればいいのかというのは,判断しづらい.表 4.3.4 に各部材の断面をあげた場合の個材固有値の変化についてまとめた.randomA0 モデルにおいての個材固有値の寄与率について考察する.

表 4.3.5 個材固有値解析結果

	個材固有値								
	101	102	103	104	105	106	107	108	109
randamA0	10.03	15.083	30.453	16.527	8.625	12.887	2.747	-4.554	7.65
randamA1	14.426	17.605	30.544	19.681	9.206	12.919	2.75	-4.55	7.678
randamA2	10.76	17.38	42.874	19.473	9.143	12.925	2.75	-4.509	7.673
randamA3	10.078	15.926	45.655	16.696	8.516	12.989	2.754	-4.561	7.677
randamA4	10.711	17.521	31.139	19.266	9.308	13.036	2.753	-4.56	7.679
randamA5	11.003	18.41	30.529	20.728	11.244	19.437	3.082	-4.743	8.447
randamA6	10.046	15.079	30.833	16.571	9.639	16.7	2.938	-4.915	8.151
randamA7	10.089	15.256	30.442	16.731	8.801	13.11	3.591	-5.169	9.588
randamA8	10.492	16.552	30.57	18.296	10.076	13.897	3.054	-3.471	8.431
randamA9	10.066	15.183	30.452	16.643	8.55	12.779	2.979	7.864	8.89
	個材固有値の増加率								
	101	102	103	104	105	106	107	108	109
randamA0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
randamA1	1.44	1.17	1.00	1.19	1.07	1.00	1.00	1.00	1.00
randamA2	1.07	1.15	1.41	1.18	1.06	1.00	1.00	0.99	1.00
randamA3	1.00	1.06	1.50	1.01	0.99	1.01	1.00	1.00	1.00
randamA4	1.07	1.16	1.02	1.17	1.08	1.01	1.00	1.00	1.00
randamA5	1.10	1.22	1.00	1.25	1.30	1.51	1.12	1.04	1.10
randamA6	1.00	1.00	1.01	1.00	1.12	1.30	1.07	1.08	1.07
randamA7	1.01	1.01	1.00	1.01	1.02	1.02	1.31	1.14	1.25
randamA8	1.05	1.10	1.00	1.11	1.17	1.08	1.11	0.76	1.10
randamA9	1.00	1.01	1.00	1.01	0.99	0.99	1.08	-1.73	1.16

4.4 形態操作による最適化

ここまで,最適化操作として部材断面を変化させることのみを扱ってきた.しかし,座屈を決めるのは断面剛性だけでなく部材の長さや拘束度に伴う座屈長さが関連する.そこで,部材断面は変化させず,架構形状を変化させることで最適化を図る手段について考察する.今,そのためのモデルとして図 3.7.1 に示すあみだ状の骨組みモデルの横架材を上下に移動することで,架構中の柱の座屈長さをコントロールし,最適化を図る.なお,本モデルは 2 次元モデルである.

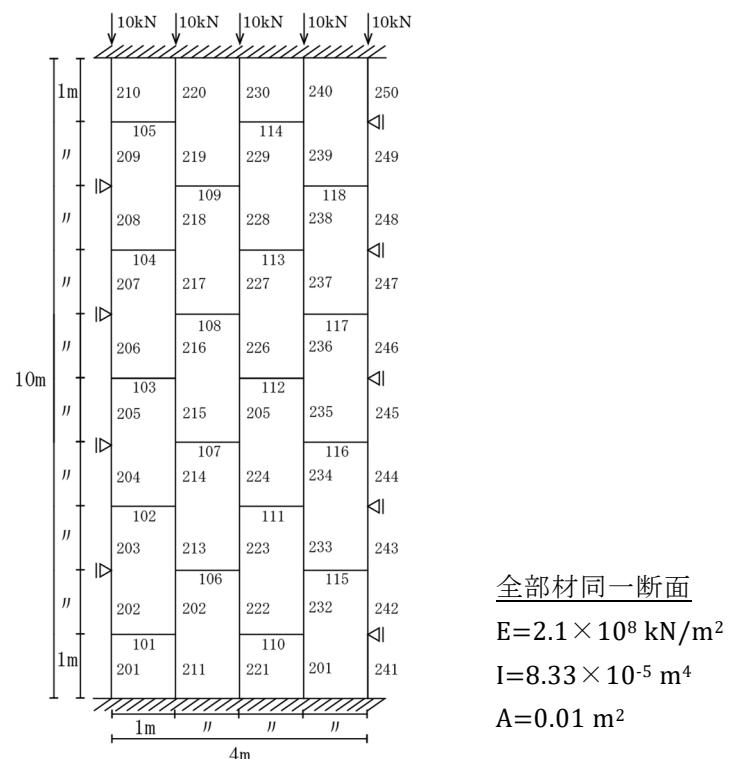
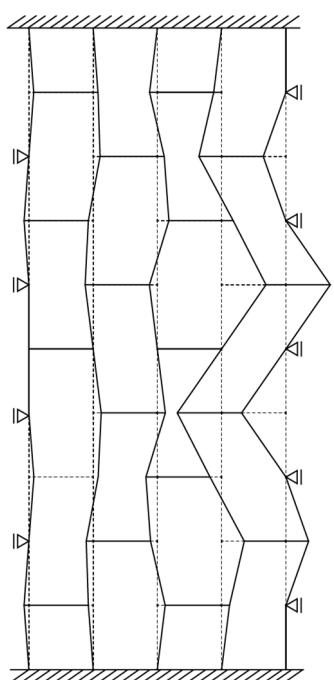
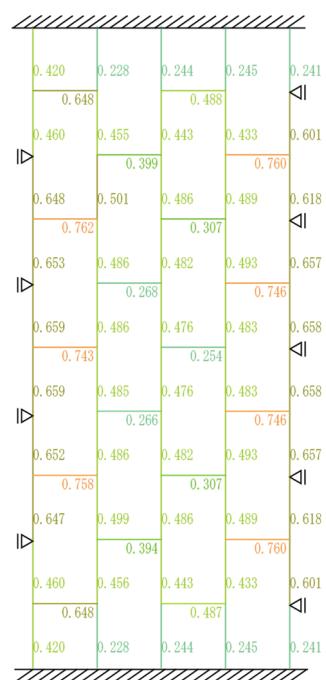


図 4.4.1 amidaA0(初期形状)の架構形状と部材番号

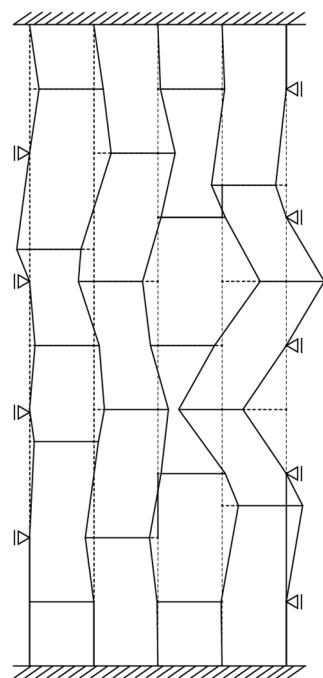


(a)架構

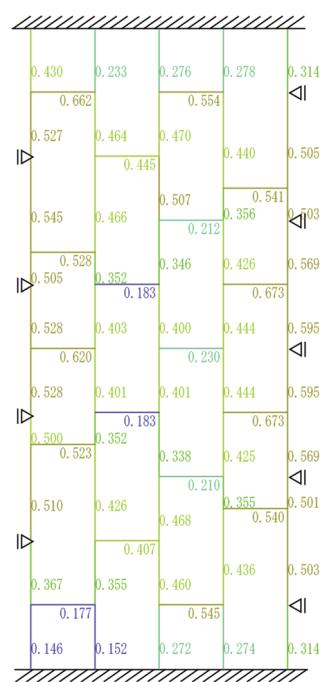


(b)座屈安全率

図 4.4.2 amidaA0 解析結果



(a)架構

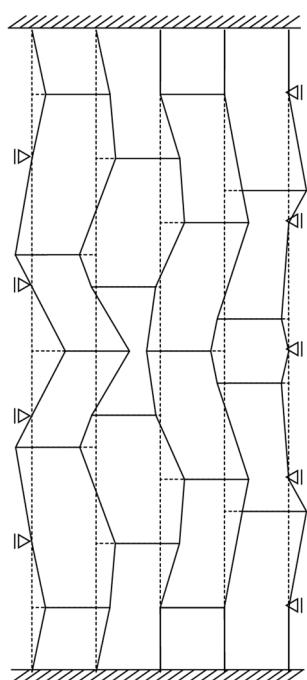


(b)座屈安全率

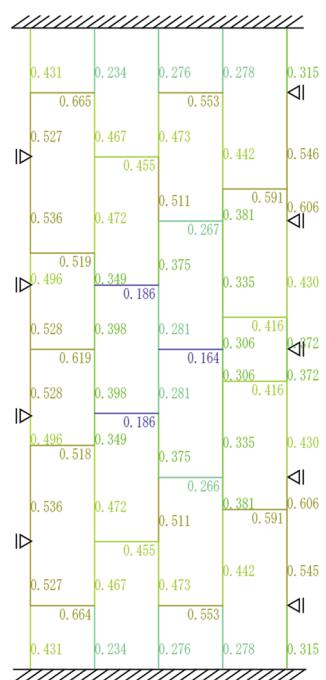
図 4.4.3 amidaA1 解析結果

安全率の凡例

- : ≥ 0.9
- : $0.7 \sim 0.9$
- : $0.5 \sim 0.7$
- : $0.4 \sim 0.5$
- : $0.3 \sim 0.4$
- : $0.2 \sim 0.3$
- : < 0.2

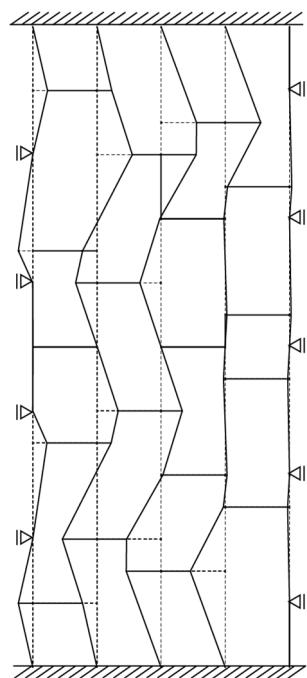


(a)架構

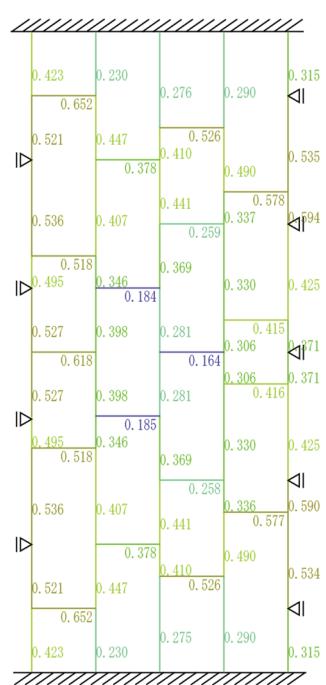


(b)座屈安全率

図 4.4.4 amidaA2 解析結果



(a)架構



(b)座屈安全率

図 4.4.5 amidaA3 解析結果

表 4.5.1 最適化結果

モデル	全体固有値	増加率
amidaA0	0.657	-
amidaA1	0.724	1.10
amidaA2	0.786	1.20
amidaA3	0.785	1.19

amidaA0 から色分布を見ながら,座屈安全率が大きく算出される部材の固定度が大きくなるように,形態操作を行っていった.

amidaA0 では,両側の梁の座屈安全率が大きく算出されている.さらにその梁に接合されている柱部材の座屈安全率をみると中央部材のほうが値は大きい.そこで amidaA1 では,座屈安全率が大きい柱部材の長さが短くなり,梁の固定度が上がるよう梁を中央に寄せる操作を行った.その結果,一部座屈安全率が上がった部材があるものの,最大値は小さくなり,全体的に安全な色分布となつた.

さらに,amidaA1 では,座屈安全率が最大となっている部材は右端中央の梁の部材 116,117 である.この梁の固定度を上げるためにさらに中央に寄せたモデルが amidaA2 である.amidaA2においても amidaA1 よりも全体固有値が上昇し,最適化を行えたといえる.そして座屈モードをみても,初期形状の amidaA0 では右側の変形が大きく出ていたのにたいして,amidaA2 では,比較的全体に散らばって座屈が見られる.したがって,ここまで過程では,色分布を指標として最適化が行えていると考えられる.

しかし,amidaA2 モデルで座屈安全率が最大となった部材 105 固定度を上げるために,amidaA3 では部材 110,114 を中央に移動させると,部材 105 の座屈安全率は下がったが,全体固有値は上がらなかった.amidaA3 で最大の安全率となっているのは部材 105 なので,amidaA2 と amidaA3 で最小固有値は amidaA2 の方が大きいが全体固有値はあまり変わらない値となつた.

また,座屈モードの観点から考察をすると,amidaA0 では右側の柱の変形が突出していたのに対しても最も全体固有値が最大となった amidaA2 では,比較的すべての柱で均等に変形が見られるようになっている.

4.6 結

本章では,個材固有値を指標とした形態の最適化手法について検証した.その結果,個材固有値の分布から断面強化や架構形状の変更により座屈に対して形態最適化を行える可能性を示唆することができた.

4 層ラーメン構造の形状最適化の分析からわかるように,座屈荷重や個材固有値が小さいと判別された部材を強化することだけが座屈に対する性能をあげる方法とは限らず,座屈荷重が t 小さい部材の拘束度を上げることを考えることで最適化を可能とする場合がある.

また,特定の部材の個材固有値を上げることを考えたとき,4 層ラーメン構造や本章で恣意的に作成した randomA のモデルなど,境界条件が下端にしか存在しない場合,自身より上層にある部材の断面の変化はあまり個材固有値の変化に影響しないことがわかった.このように部材間ではそれぞれ依存度が異なり,どの部材を変化させた場合に特定の部材の個材固有値の増加率が大きいのか判断することは現段階では困難であり,今度さらなる検討をする.

断面操作を行わず形状を変化させることで座屈に対する性能の向上を図ったあみだ状の骨組み架構では,初期操作では順調に座屈荷重を増加させることができた.しかし,形状変化が進むにつれて,さらに性能を向上することが困難となっていました.

5 結論と今後の課題

5.1 結論

本論文では,架構中の個材の座屈荷重を算出することを目的とし,座屈固有値問題の縮約という手法の提案と提案手法による解析結果の考察を行った.以下に本論文の結論を示す.

○縮約手法について

- ・弾性剛性マトリクス,幾何剛性マトリクスの両者を考慮した縮約マトリクスを作成することで幾何剛性マトリクスを縮約する際に生じていた一部の数値を無視するという問題を含むことなく縮約ができる手法を提案した.
- ・縮約操作は次式に簡略化できる.

○提案縮約法から得られる個材固有値について

- ・個材固有値は部材の固定度が弱いと小さく算出される
- ・隣接部材に軸力が発生していないとき,その部材は他の部材の軸力の影響を受けないが,隣接部材に軸力が発生している場合には隣接部材だけでなくその他の部材の軸力も

○座屈に対する形態の最適化について

- ・ピン柱については個材固有値を均一化することで形態の最適化が可能である.
- ・固定度が極端に小さい部材では,断面強化をしても最適化に効率的な操作とはいえない.
- ・1部材で構成される柱やアーチでは,座屈時の変形角が大きい部材ほど断面を小さくできる.

参考文献

- [1]日本建築学会, 鋼構造設計基準－許容応力度設計法－, 2005
- [2]日本建築学会, 鋼構造座屈設計指針, 2009
- [3]川井忠彦・藤谷義信, 有限要素法の基礎と応用シリーズ 11 座屈問題解析, 培風館, 1991.
- [4]倉方慶夫・西野文雄・長谷川彰夫,骨組構造物における現行の座屈設計法の問題点（上,下）, 橋梁と基礎,pp.19~27,1992.2,pp41~46,1992.11
- [5]鈴木宏之 他,骨組モデルを用いた座屈固有値問題の縮約,日本建築学会大会学術講演梗概集,2013.8
- [6]朝原真知子 他,座屈固有値問題の縮約を用いた個材座屈荷重の検出法, 日本建築学会大会学術講演梗概集,2017.8
- [7]高次固有値法を用いた有効座屈長の決定法の提案
- [8]野上邦栄,鋼ラーメン柱の実用的座屈設計法に関する一提案,土木学会論文集 N0.459/I2,pp.159-162,1993.1
- [9]尾下里治・吉田昭仁,高次の座屈固有値を用いた有効座屈長の決定方法の提案,
- [10]野上邦栄・山本一之,構造全体系の固有値解析による骨組み部材の合理的な有効座屈長の評価,土木学会論文集,No.489,I-27,pp157-166,1994
- [11]野上邦栄・高瀬弘・山本一之,微小軸圧縮力を受ける骨組部材の有効座屈長に関する一考察, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集,第 16 卷,pp.385~390,1992.1
- [12]荒木慶一・高木次郎・上谷宏二,線形座屈解析を用いた鋼構造平面骨の座屈設計 その 2 地震荷重に対する定式化とプレース骨組みへの適用, 日本建築学会構造系論文集,第 590 号,pp129-136,2005.4
- [13]藤本利明,骨組の座屈と柱の座屈長さに関する研究,
- [14]高田昭伸,水平荷重による柱軸力を受ける鋼構造ラーメン骨組中の柱における弾性座屈性状の考察と座屈軸力算定手法の提案,
- [15]畔上秀幸・須貝康弘・下田昌利,座屈に対する形状最適化,日本機械学会論文集 A 編,66 卷 647 号,pp1262-1267,2000
- [16]浜田実・瀬口靖幸・多田幸生,逆変分原理による構造物の形状決定問題(第 2 報,座屈問題と振動問題),日本機械学会
- [17]甘利昌彦・山川宏・奥村敦史,弾性座屈を考慮した骨組構造物の最適設計, 日本機械学会論文集,44 卷 383 号,pp2253-2262,1978
- [18]I. Tadibakhsh and J. B. Keller. Strongest column and isoperimetric inequalities for eigenvalues. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., Vol.29,pp 159-164, 1962

謝辞

本研究を遂行するにあたり本当に多くの方にご協力いただき、このようにまとめることができます。ここに感謝の意を表します。

指導教員である東京大学准教授 佐藤淳先生にはお忙しい時間をぬって相談や質問に応じてくださり終始、熱心にご指導いただいたこと心より感謝いたします。また、研究室在籍期間において研究内容に留まらず実験やワークショップ、設計業務など多くの貴重な機会を与えていただいたこと大変感謝しております。大変有意義に過ごすことができ、先生の下で修士課程を過ごすことができ心よりうれしく思います。

また、副指導である東京大学 准教授の佐久間哲哉先生には、私の稚拙な説明に耳を傾けてください親身に相談にのってくださったこと大変感謝しております。

東京大学准教授 清家剛先生 同准教授 藤田香織先生 同准教授 権藤智之先生には、構法研究会議において、研究の内容や構成など多岐にわたり、ご意見、ご指導いただきよりよい論文を作成することができました。深く感謝いたします。

佐藤研究室の荒木さん、古市さん、都筑さん、インさんには研究の内容だけに留まらず解析ソフトの使い方や研究内容の表現方法、文章の構成など細かいところまでご指導いただくとともに、日々の研究室活動においても様々な局面で大変お世話になりました。こうして研究を遂行しながら、様々な経験ができたのもみなさまのおかげであると感じております。心より感謝申し上げます。

本研究テーマと共に遂行してくれた佐藤研究室の朝原さん、高岡くんの存在は研究を進めていく上で大きな励みでありました。大変感謝いたします。

佐藤淳構造設計事務所のスタッフさん、RGBstructure の高田雅之さんには、建築構造設計の実務等ご指導いただき、実務を行う上での研究の必要性、構造設計の基本的な考え方などを学ばせていただくことができました。深く感謝申し上げます。

そして佐藤研究室の院生、学部生には多大な協力と励ましをいただきました。活動が多い佐藤研究室で、さまざまなミッションに皆様と励み、時に心折れそうになることもありましたが、皆様がいたため乗り越えられたこともあります。楽しい研究室生活を送れたこと大変感謝いたします。有難うございます。

最後に、協力いただいた皆様への心よりの感謝の気持ちと御礼を申し上げ、謝辞にかえさせていただきます。

2018年1月22日 堤千春