

## 座屈固有値解析

### 1. 座屈固有値解析の基礎方程式

座屈固有値解析の基礎方程式は、以下のとおりである。

$$\left( [k_L] - \lambda ([k_G^v] + [k_G^u]) \right) \{u\} = \{0\} \quad (1)$$

$[k_L]$	: 線形剛性マトリックス	$\lambda$	: 固有値
$[k_G^v]$	: 幾何剛性マトリックス ( $v$ による項)	$N_e$	: 要素軸力 (圧縮正)
$[k_G^u]$	: 幾何剛性マトリックス ( $u$ による項)	$\{u\}$	: 固有ベクトル (正值)

$$[k_L] = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 & 0 & -12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 4EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 2EI/\ell \\ -EA/\ell & 0 & 0 & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 & 0 & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 2EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 4EI/\ell \end{bmatrix}$$

$$[k_G^v] = N_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/(5\ell) & 1/10 & 0 & -5/(5\ell) & 1/10 \\ 0 & 1/10 & 2\ell/15 & 0 & -1/10 & -\ell/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/(5\ell) & -1/10 & 0 & 6/(5\ell) & -1/10 \\ 0 & 1/10 & -\ell/30 & 0 & -1/10 & 2\ell/15 \end{bmatrix}$$

$$[k_G^u] = N_e \cdot \begin{bmatrix} 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\ell & 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 要素軸力  $N_e$  は、固有値解析の前に、あまり大きくない荷重を構造系に作用させた線形弾性解析を行って得る。
- 基本的に線形系なので、固有値は、座屈荷重が事前に作用させた荷重の何倍に相当するか、という係数として算定される。
- 荷重の方向は初期に入力した方向が維持される。
- 作成した固有方程式を解く事により、固有値および変位モードとしての固有ベクトルを求めることができる。
- 固有値解析は一般化ヤコビ法にて行っている。一般化ヤコビ法は、全自由度に対する固有値・固有ベクトルが得られるので、これを小さい順に並べかえる。
- 解析をやっていてわかったのだが、要素数を多くすると負の固有値が算定される場合があるため、解析結果は正值の固有値の小さい順に出力するようにしている。固有方程式自体、圧縮軸力を正值にとって作成しているため、工学的に負の固有値（引張軸力）は座屈荷重を示すとは考えないのが妥当と判断しているため。

(補足)

軸力と曲げを受ける棒要素の要素剛性方程式の荷重ベクトルと変位ベクトルの並びは、線形剛性マトリックスを用いて示せば以下のとおりである。ここに、 $N$ ,  $S$ ,  $M$  はそれぞれ軸力、せん断力、モーメントであり、 $i, j$  は棒要素の 2 つの節点を示す。また、 $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  はそれぞれ棒要素の軸方向変位、軸直角方向変位、回転変位である。

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ S_i \\ M_i \\ N_j \\ S_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 & 0 & -12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 4EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 2EI/\ell \\ -EA/\ell & 0 & 0 & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 & 0 & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 2EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 4EI/\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [k_L]\{u\}$$

曲げ変形を無視した場合、棒がある場所からある場所に軸ひずみを伴って移動したときの長さの変化を考えることにより、棒の軸ひずみ  $\epsilon_x$  は

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2$$

であることが知られている。これに線形の曲げ成分を加えると以下の式となる。ここに  $y$  は中立軸からの距離である。

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$$

上式を用いてひずみエネルギーを計算する。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_A \sigma \cdot \epsilon_x dA dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_A E \left( \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right)^2 dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{N}{EA} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{N}{EA} \int_0^\ell EA \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \end{aligned}$$

上式第 1 項は線形剛性マトリックスの軸力-軸変位関係に対応し、第 2 項は線形剛性マトリックスのせん断力・モーメント関係に対応する。また第 3 項は軸方向変位に伴う非線形項、第 4 項は軸直交変位に伴う非線形項である。ここで、第 1 項と第 3 項を比較することにより、軸方向変位に伴う幾何剛性マトリックスは、線形剛性マトリックスの軸力-軸変位項に  $N/EA$  を乗じたものになることは容易に予想できる。第 4 項から導かれる軸直交変位に伴う幾何剛性マトリックスについては多くの教科書や文献に紹介されているものである。

なお、ひずみエネルギー計算においては、変位の微分の 4 次項を無視するとともに、以下の関係を用いて式を整理している。

$$\int_A dA = A \quad \int_A y dA = 0 \quad \int_A y^2 dA = I \quad \frac{du}{dx} = \frac{N}{EA}$$

## 2. 解析事例

### 2.1 軸圧縮を受ける両端単純支持梁

軸圧縮を受ける両端単純支持梁の座屈荷重は、以下の式で表されることが知られている。

$$P_{cr} = (n\pi)^2 \cdot \frac{EI}{\ell^2} \quad (2)$$

ここに、 $P_{cr}$ ：座屈荷重、 $EI$ ：梁の曲げ剛性、 $\ell$ ：梁の長さ、 $n$ ：正の整数である。

また下表に、座屈固有値解析による座屈荷重算定結果の事例を示す。表中 1~6 の数値はモードであり、上記理論式の  $n$  に相当する。解析に用いた諸元は、 $E=2.00\text{E}+05\text{MPa}$ 、 $A=100\text{mm}^2$ 、 $I=833\text{mm}^4$ 、 $\ell=1000\text{mm}$  である。

表より、以下のことがわかる。

- このケースでは、理論値はその導出過程からして、幾何剛性マトリックス  $[k_G^u]$  を考慮しない場合との一致度が良いはずであるが、 $[k_G^u]$  を考慮してもしなくても表示した数値の範囲で両者の座屈荷重は一致している。すなわち、この系では  $[k_G^u]$  の座屈荷重への貢献度は低いといえる。
- いずれのケースも要素分割数を大きくすれば座屈荷重は徐々に小さくなり、理論値に近づく。

表 1 固有値解析結果（値は座屈時の軸力：N）

$[k_G^u]$ 考慮							
要素数	1	2	3	4	5	6	負値数
2	0.1656645E+04	0.7996800E+04	0.2144522E+05	0.3998400E+05	—	—	0
4	0.1645118E+04	0.6626580E+04	0.1529133E+05	0.3198720E+05	0.5135487E+05	0.8578089E+05	0
10	0.1644298E+04	0.6578499E+04	0.1481399E+05	0.2639276E+05	0.4141612E+05	0.6007531E+05	0
20	0.1644277E+04	0.6577193E+04	0.1479949E+05	0.2631400E+05	0.4112795E+05	0.5925597E+05	0
40	0.1644276E+04	0.6577110E+04	0.1479855E+05	0.2630877E+05	0.4110825E+05	0.5919795E+05	0
理論値	1644.3	6577.1	14798.5	26308.4	41106.9	59193.9	—

$[k_G^u]$ 無考慮							
要素数	1	2	3	4	5	6	負値数
2	0.1656645E+04	0.7996800E+04	0.2144522E+05	0.3998400E+05	—	—	0
4	0.1645118E+04	0.6626580E+04	0.1529133E+05	0.3198720E+05	0.5135487E+05	0.8578089E+05	0
10	0.1644298E+04	0.6578499E+04	0.1481399E+05	0.2639276E+05	0.4141612E+05	0.6007531E+05	0
20	0.1644277E+04	0.6577193E+04	0.1479949E+05	0.2631400E+05	0.4112795E+05	0.5925597E+05	0
40	0.1644276E+04	0.6577110E+04	0.1479855E+05	0.2630877E+05	0.4110825E+05	0.5919795E+05	0
理論値	1644.3	6577.1	14798.5	26308.4	41106.9	59193.9	—

## 2.2 均等外圧を受けるリング

均等外圧を受けるリングの座屈を考えるとき、注意すべきなのは荷重の方向である。以下は「構造力学公式集」によるリングの座屈荷重である。

①座屈時も外圧はリングに垂直に作用する	$p_{cr} = 3 \cdot \frac{EI}{R^3}$
②座屈時も外圧の方向は変わらない	$p_{cr} = 4 \cdot \frac{EI}{R^3}$
③外圧の方向は常に座屈前のリングの中心に向かっている	$p_{cr} = 4.5 \cdot \frac{EI}{R^3}$

Timoshenko の著書 "Theory of Elastic Stability" で検討されているのは上記①の「座屈時も外圧はリングに垂直に作用するケース」であり、その座屈時外圧は以下のとおりである。

$$p_{cr} = \frac{(n^2 - 1) \cdot EI}{R^3} \quad (3)$$

ここに、 $p_{cr}$ ：座屈が発生する外圧、 $EI$ ：リングの曲げ剛性、 $R$ ：リングの半径、 $n$ ：正の整数である。この式をシェルに拡張したものは露出型水圧鉄管の座屈荷重算定式でおなじみだと思う。

この文書で述べている座屈解析は、上記②の「座屈時も外力の方向は変わらないケース」である。「構造力学公式集」には、最小座屈荷重のみが掲載されているようなので、Timoshenko の考え方から、②の場合の変形モードの違いによる座屈荷重の比を推定すると以下のとおりとなる。

	$n$	2	3	4	5
①	$n^2 - 1$	3	8	15	24
②	$n^2$	4	9	16	25
②/①	$n^2/(n^2 - 1)$	1.333	1.125	1.067	1.042

よってこの文書で述べている座屈解析プログラムでの計算事例は、上記を参考に Timoshenko の著書から推定した②に相当する荷重と比較することにする。

解析結果の事例を下表に示す。これより以下のことがわかる。なお下表：理論値は上記 Timoshenko による座屈荷重に比  $n^2/(n^2 - 1)$  を乗じた値であることを断っておく。

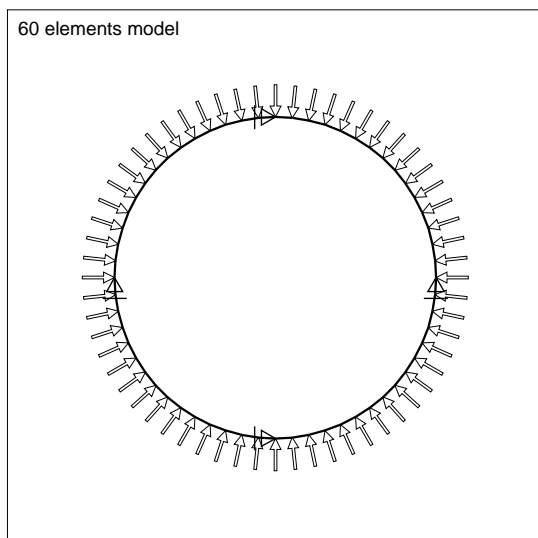
- 幾何剛性マトリックス  $[k_G^u]$  を考慮した場合、要素分割数を大きくするに従い、座屈圧力は小さくなり一定値に近づき、理論値と同等の値が得られる。
- 幾何剛性マトリックス  $[k_G^u]$  を考慮した場合、最小座屈荷重のモードは比較的明確に求まるが、それ以降は、解析上 2 番目と 3 番目、4 番目と 5 番目、・・・のように固有値と変位モードが概ね同じものが 2 回連続して得られている。原因は拘束条件と要素分割に起因するものなのだろうか？変位モード図を見ると変位後の形状は見た目に同じだが、変位拘束している支点の位置が大きく異なっている。
- 幾何剛性マトリックス  $[k_G^u]$  を考慮しない場合、要素数が多くなると座屈圧力・変形モードとも期待とかけ離れた結果となる。
- 幾何剛性マトリックス  $[k_G^u]$  を考慮しない場合、要素分割数がある値以上になると、負の固有値が算定される。これが意味するものは、非常に大きな内圧をかけるとこの構造系は不安定になる???それとも、そもそもこの系において、本来存在する  $[k_G^u]$  を考慮していないことに問題があるのだろうか？

表 2 固有値解析結果（値は座屈時の外圧：MPa）

[ $k_G$ ] 考慮							
要素数	n=2	n=3	(n=3)	n=4	(n=4)	n=5	負値数
12	0.1676533E+00	0.3794575E+00	0.3794575E+00	0.6818579E+00	0.6842208E+00	0.1095595E+01	0
24	0.1603183E+00	0.3608637E+00	0.3608637E+00	0.6375414E+00	0.6422210E+00	0.1005645E+01	0
36	0.1590349E+00	0.3578579E+00	0.3578579E+00	0.6311660E+00	0.6363311E+00	0.9947179E+00	0
48	0.1585911E+00	0.3568394E+00	0.3568394E+00	0.6290851E+00	0.6344256E+00	0.9914351E+00	0
60	0.1583867E+00	0.3563738E+00	0.3563738E+00	0.6281491E+00	0.6335718E+00	0.9900159E+00	0
72	0.1582759E+00	0.3561225E+00	0.3561225E+00	0.6276480E+00	0.6331156E+00	0.9892722E+00	0
84	0.1582091E+00	0.3559716E+00	0.3559716E+00	0.6273483E+00	0.6328431E+00	0.9888331E+00	0
96	0.1581709E+00	0.3558748E+00	0.3558788E+00	0.6271627E+00	0.6326687E+00	0.9885550E+00	0
理論値	0.159	0.356	(0.356)	0.633	(0.633)	0.988	—

[ $k_G$ ] 無考慮							
要素数	n=2	n=3	(n=3)	n=4	(n=4)	n=5	負値数
12	0.1676533E+00	0.3794575E+00	0.3794575E+00	0.6818579E+00	0.6842208E+00	0.1095595E+01	2
24	0.1023886E+01	0.1498032E+01	0.1813274E+01	0.1980053E+01	0.2006777E+01	0.2481041E+01	0
36	0.1503494E+01	0.2058901E+01	0.2224766E+01	0.2266047E+01	0.3042146E+01	0.3747559E+01	1
48	0.1170811E+01	0.1393521E+01	0.1715688E+01	0.2131071E+01	0.2170888E+01	0.2362660E+01	1
60	0.3624743E+02	0.3625018E+02	0.3625856E+02	0.3626171E+02	0.3626438E+02	0.3627641E+02	4
72	0.5201674E+02	0.5201846E+02	0.5202212E+02	0.5202821E+02	0.5205274E+02	0.5205402E+02	6
84	0.7076154E+02	0.7076562E+02	0.7076743E+02	0.7077885E+02	0.7078060E+02	0.7078527E+02	8
96	0.1518473E+02	0.9234894E+02	0.9235461E+02	0.9236246E+02	0.9236388E+02	0.9237132E+02	7
理論値	0.159	0.356	(0.356)	0.633	(0.633)	0.988	—



#### 解析モデル概要

半径	1,500 mm
板厚	20 mm
奥行き	単位長さ (1mm)
弾性係数	200,000 MPa
初期外水圧	1 MPa
要素数	60
節点数	60

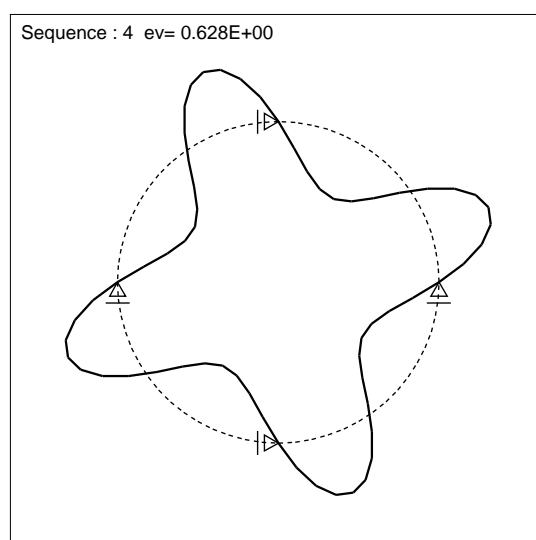
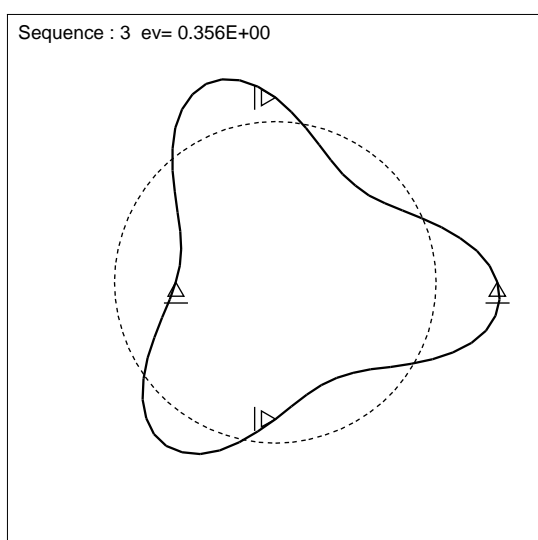
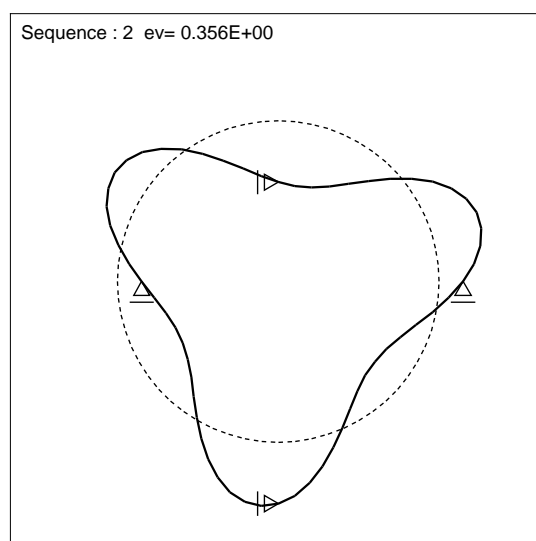
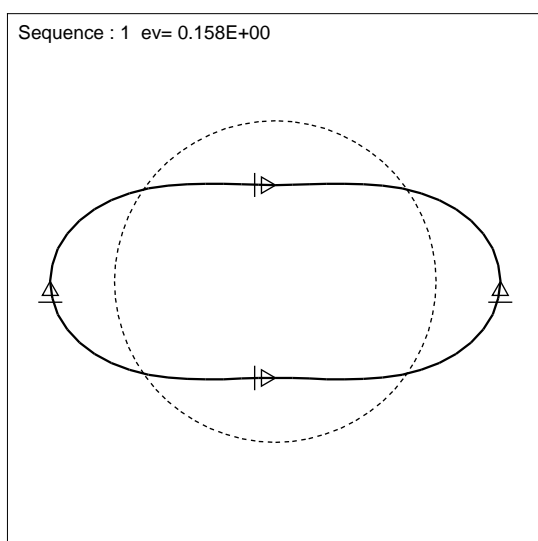


図 1 外水圧を受けるリングの座屈変形モード ( $[k_G^u]$  考慮. 60 要素)

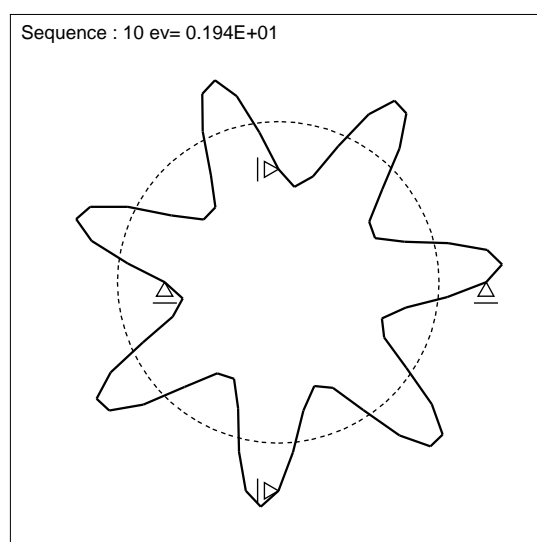
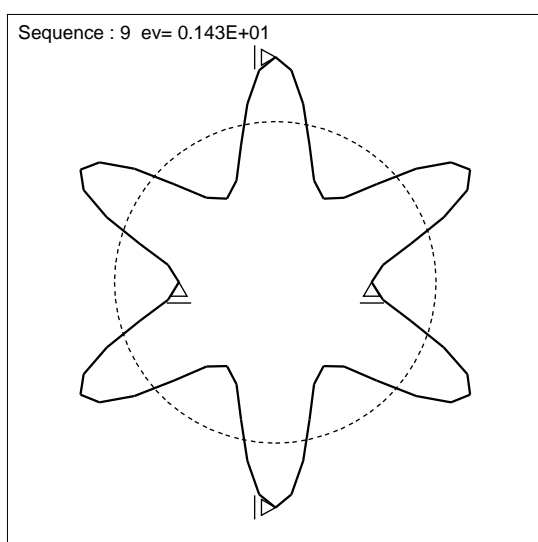
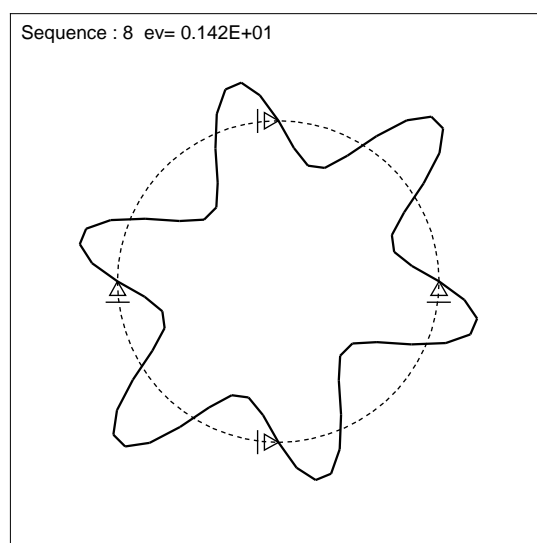
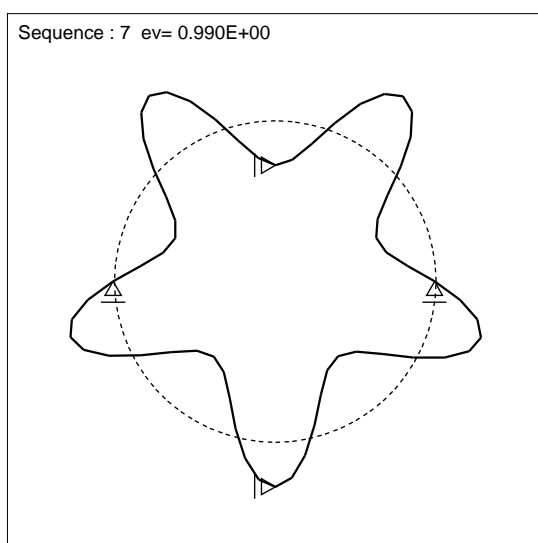
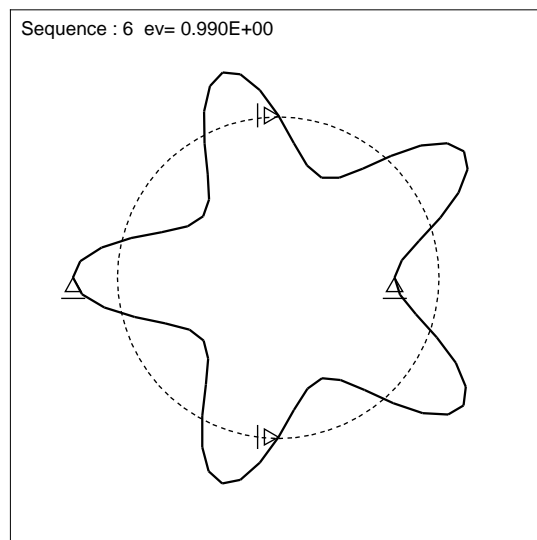
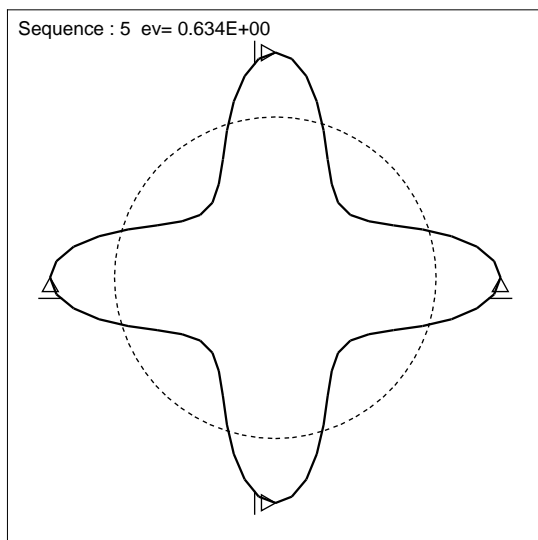


図 2 外水圧を受けるリングの座屈変形モード ( $[k_G^u]$  考慮, 60 要素)

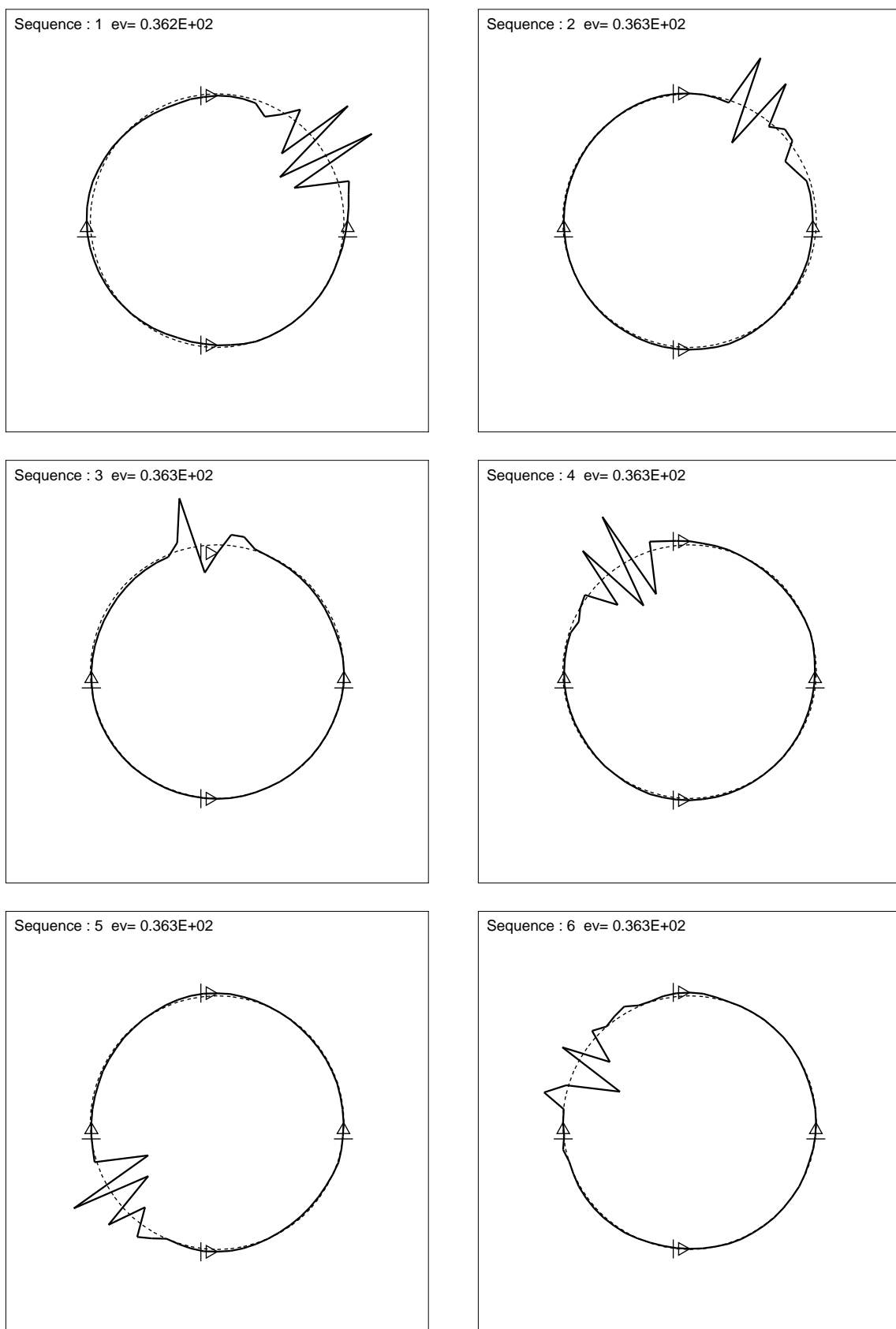


図 3 外水圧を受けるリングの座屈変形モード ( $[k_G^u]$  考慮せず. 60 要素)