Homework 2

同济大学 2022级 计算机科学与技术学院 软件工程专业 机器智能方向 计算机视觉课程作业

授课教师：张林

授课学期：2024-2025年度 秋季学期

2251730 刘淑仪

无穷远点的齐次坐标

首先，将直线方程转换为射影平面中的齐次方程形式：

$$X - 3Y + 4Z = 0$$

无穷远点满足 $Z = 0$，因此将 $Z = 0$ 代入方程，得到：

$$X - 3Y = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 3Y$$

因此，无穷远点的齐次坐标为：

$$[3Y, Y, 0]^T = [3, 1, 0]^T$$

综上所述，直线 $x - 3y + 4 = 0$ 的无穷远点的齐次坐标是：

$$[3, 1, 0]^T$$

畸变映射的雅可比矩阵

在归一化视网膜平面上，假设 p_n 是一个不考虑畸变的理想投影点。如果考虑畸变，$p_n = (x, y)^T$ 被映射到 $p_d = (x_d, y_d)^T$，其关系由以下方程组表示：

$$\begin{cases} x_d = x(1 + k_r r^2 + k_y r^4) + 2\rho_1 xy + \rho_2(r^2 + 2x^2) + xk_r r^6 \\ y_d = y(1 + k_r r^2 + k_y r^4) + 2\rho_2 xy + \rho_1(r^2 + 2y^2) + yk_r r^6 \end{cases}$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$。

为了在相机标定的流程中进行非线性优化，我们需要计算 p_d 对 p_n 的雅可比矩阵：

$$\frac{dp_d}{dp_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial x} & \frac{\partial x_d}{\partial y} \\ \frac{\partial y_d}{\partial x} & \frac{\partial y_d}{\partial y} \end{bmatrix}$$

经过详细推导，各偏导数如下：

$$\frac{\partial x_d}{\partial x} = 1 + k_r r^2 + k_y r^4 + 2k_r x^2 + 4k_y r^2 x^2 + 2\rho_1 y + 6\rho_2 x + k_r r^6 + 6k_r x^2 r^4$$

$$\frac{\partial x_d}{\partial y} = 2k_r xy + 4k_y r^2 xy + 2\rho_1 x + 2\rho_2 y + 6k_r xyr^4$$

$$\frac{\partial y_d}{\partial x} = 2k_r xy + 4k_y r^2 xy + 2\rho_2 y + 2\rho_1 x + 6k_r xyr^4$$

$$\frac{\partial y_d}{\partial y} = 1 + k_r r^2 + k_y r^4 + 2k_r y^2 + 4k_y r^2 y^2 + 2\rho_2 x + 2\rho_1 y + k_r r^6 + 6k_r y^2 r^4$$

因此，雅可比矩阵为：

$$\frac{dp_d}{dp_n} = \begin{bmatrix} 1 + k_r r^2 + k_y r^4 + 2k_r x^2 + 4k_y r^2 x^2 + 2\rho_1 y + 6\rho_2 x + k_r r^6 + 6k_r x^2 r^4 & 2k_r xy + 4k_y r^2 xy + 2\rho_1 x + 2\rho_2 y + 6k_r xyr^4 \\ 2k_r xy + 4k_y r^2 xy + 2\rho_2 y + 2\rho_1 x + 6k_r xyr^4 & 1 + k_r r^2 + k_y r^4 + 2k_r y^2 + 4k_y r^2 y^2 + 2\rho_2 x + 2\rho_1 y + k_r r^6 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵的雅可比矩阵

1. 旋转矩阵的定义

根据罗德里格斯公式，旋转矩阵 R 可以表示为：

$$R = \beta I + \gamma n n^T + \alpha [n]_\times$$

其中：

- $\beta = \cos\theta$
- $\gamma = 1 - \cos\theta$
- $\alpha = \sin\theta$
- I 是单位矩阵
- $[n]_\times$ 是 n 的反对称矩阵

2. 向量化旋转矩阵

旋转矩阵 R 的向量化形式为：

$$r = (r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33})^T$$

3. 雅可比矩阵的计算

我们需要计算 r 对 d 的雅可比矩阵 $\frac{dr}{dd^T}$，其中 $d = \theta n$，且 n 是单位向量。

首先，计算 r_{ij} 对 θ 和 n 的偏导数，然后利用链式法则求得 r_{ij} 对 d 的偏导数。

3.1 r_{ij} 对 θ 的偏导数

例如：

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial \theta} = -\sin\theta + (1 - \cos\theta) \cdot 2n_1^2$$

3.2 r_{ij} 对 n 的偏导数

例如：

$$\frac{\partial r_{11}}{\partial n_1} = 2(1 - \cos\theta) n_1$$

3.3 θ 和 n 对 d 的偏导数

由于 $d = \theta n$，且 n 是单位向量，因此：

$$\theta = \|d\|, \quad n = \frac{d}{\|d\|}$$

所以：

$$\frac{\partial \theta}{\partial d_k} = \frac{d_k}{\theta}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial d_k} = \frac{\delta_{ik}\theta - n_k d_i}{\theta^2}$$

3.4 组合偏导数

利用链式法则，组合上述偏导数：

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial d_k} = \frac{\partial r_{ij}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial d_k} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial r_{ij}}{\partial n_m}\frac{\partial n_m}{\partial d_k}$$

4. 结论

通过上述步骤，可以计算出每个 r_{ij} 对 d_k 的偏导数，并最终构建出 $\frac{dr}{dd^T}$ 的雅可比矩阵。这个过程需要细致地进行符号计算，确保每一步都准确无误。

鸟瞰图生成

Environment: Windows 11

Platform: PyCharm Professional 2024.1.4

Python version: 3.12.4

Python libraries: numpy opencv-Python

Code location: ../Project1

Results are as follows:

相机标定参数

重投影误差

$ret = 1.3526290383110415$

内参矩阵

$$\text{mtx} = \begin{bmatrix} 1.06408820 \times 10^{3} & 0.00000000 \times 10^{0} & 6.97624043 \times 10^{2} \\ 0.00000000 \times 10^{0} & 1.05884544 \times 10^{3} & 3.67820618 \times 10^{2} \\ 0.00000000 \times 10^{0} & 0.00000000 \times 10^{0} & 1.00000000 \times 10^{0} \end{bmatrix}$$

畸变系数

$$\text{dist} = \begin{bmatrix} 2.19183009 \times 10^{-1} & -9.71999184 \times 10^{-1} & 8.92226849 \times 10^{-4} & -7.72790370 \times 10^{-3} & 9.61389806 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

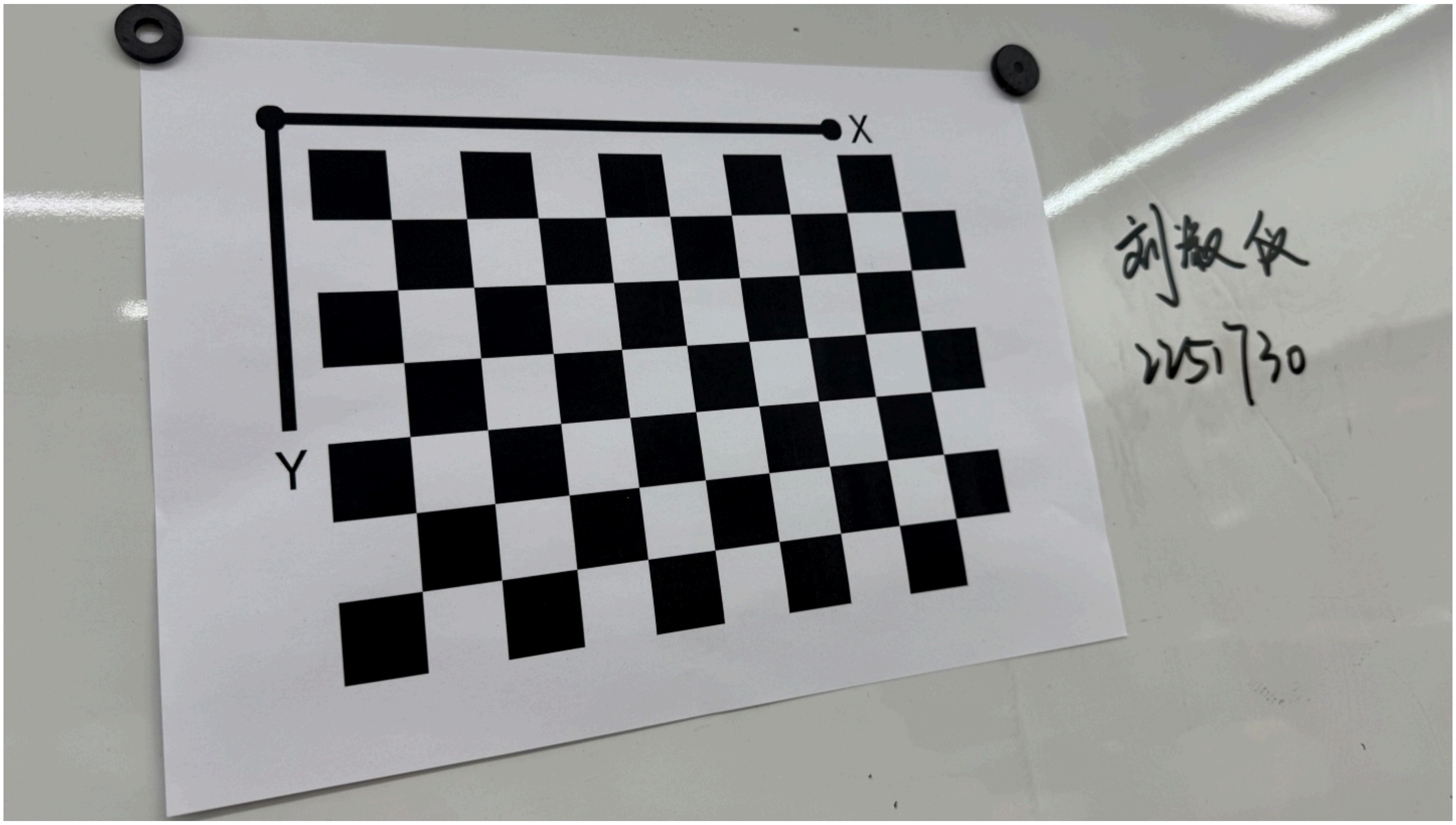
旋转向量

$$\text{rvecs} = \left(\begin{bmatrix} -0.15060814 \\ 0.68259582 \\ -1.42548071 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.62169292 \\ 0.02379807 \\ -1.54327886 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.48797313 \\ 0.57757602 \\ -1.47210871 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.00730448 \\ 0.19318482 \\ -1.58085337 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.42666152 \\ 0.16677968 \\ -1.6343885 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.42971655 \\ -0.20436555 \\ -1.63009947 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.12150479 \\ -0.42919655 \\ -1.65266561 \end{bmatrix} \right.$$

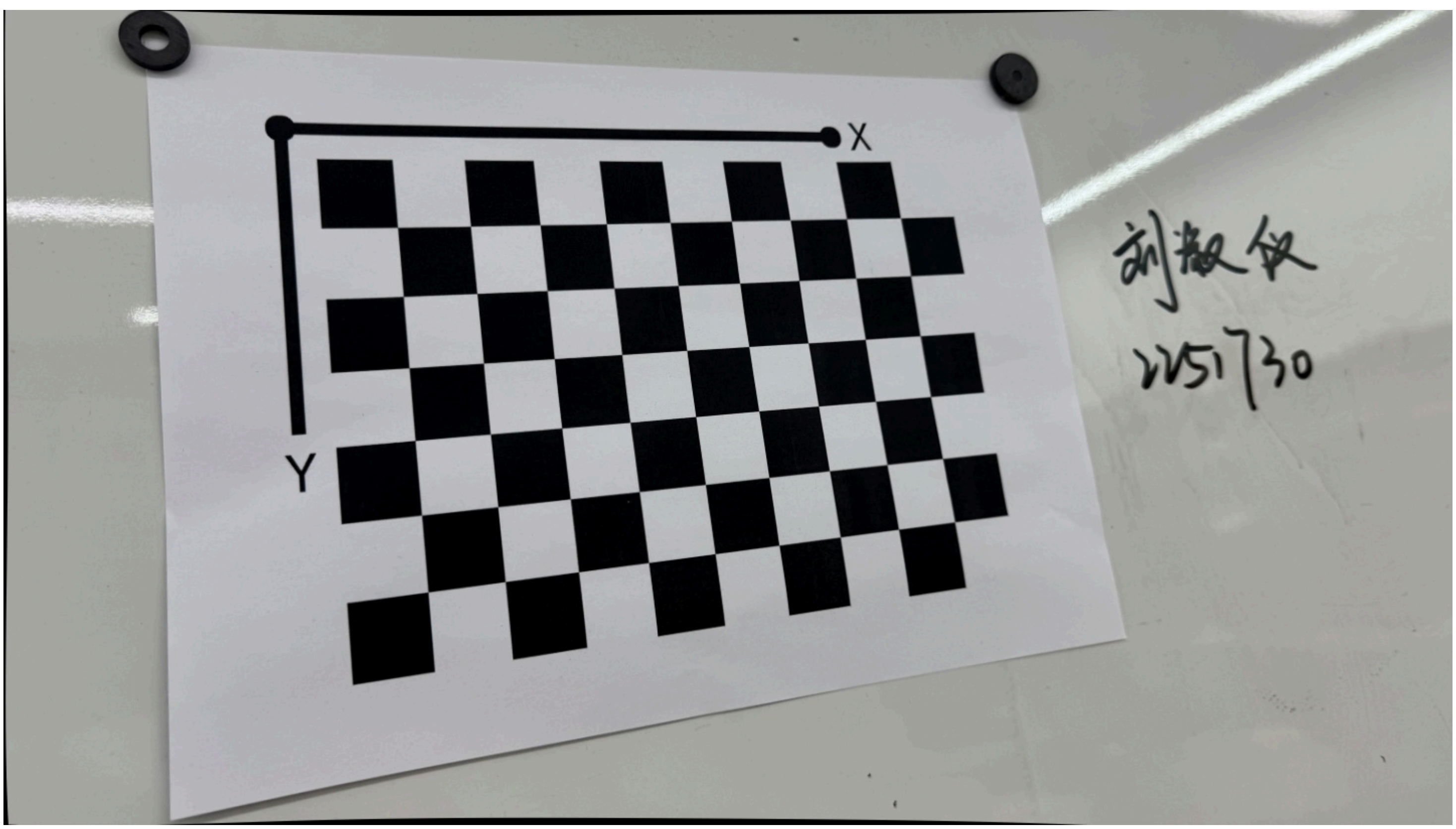
平移向量

$$\text{tvecs} = \left(\begin{bmatrix} -0.16131816 \\ 0.04315679 \\ 0.4099573 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1625625 \\ 0.07084516 \\ 0.35582155 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.17356461 \\ 0.05434441 \\ 0.38696302 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.13625178 \\ 0.07758926 \\ 0.37540559 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.08562375 \\ 0.08729008 \\ 0.34406331 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.05401651 \\ 0.05972098 \\ 0.28404526 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.07216266 \\ 0.05521112 \\ 0.27942144 \end{bmatrix} \right.$$

原始图片



无畸变图像



鸟瞰图