Kombinatorika

Permutáció

Ismétlés nélküli permutáció

A egy permutációján A-nak egy önmagára vett bijektív leképzését értjük, azaz az 1,2,...,n elemek valamilyen sorrendben való felsorolását.

n különböző elem lehetséges sorba rendezéseinek a száma

$$P_n = n!$$

Ismétléses permutáció

Ha n elemünk van k különböző fajtából, az 1. fajtából l_1, a 2. fajtából l_2, stb. (azaz $l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n$), akkor az n elem lehetséges sorrendjeinek a száma:

$$P_n^{l_1,\ldots,l_k} = \frac{n!}{l_1!\ldots l_k!}$$

Variáció

Ismétlés nélküli variáció

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli variációi alatt a halmaz elemeiből kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük.

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1)\ldots(n-k+1).$$

Itt szükségképpen $n \geq k$.

Ismétléses variáció

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses variációi alatt a halmaz elemeiből visszatevéssel kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük.

$$V_{n,k}^i = n^k$$

Kiválasztás és sorbarendezés, de mivel egy elemet többször is kiválaszthatunk, ezért itt n < k is lehetséges.

Kombináció

Ismétlés nélküli kombináció

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait a halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük.

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Definíció szerint 0! = 1. Itt szükségképpen $n \geq k$.

Ismétléses kombináció

Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k elemű halmazt, hogy egy elemet többször is választhatunk (azaz visszatevéssel), akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk.

$$C_{n,k}^i = \left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

Kiválasztás, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt n < k is lehetséges.

Teszt feladatok

1. **Egy dobozban 26 játékkocka található, melyből 5 selejtes. 5 darabot kivéve hány esetben lesz pontosan 2 selejtes? Válaszként egy számot adjon meg [13300]**

   Összesen 26 db játékkocka van egy dobozban, ebből 5 db selejtes. 5 db kockát szeretnénk úgy kiválasztani, hogy ebből 2 db legyen selejtes és 3 db legyen jó állapotú. Tehát az 5ből szeretnénk kiválasztani 2-őt, és a (26-5)=21 db kockából szeretnénk kiválasztani 3 db-ot.

   $$\binom{5}{2} * \binom{21}{3} = 13\,300$$

   Matlab: nchoosek(5,2)*nchoosek(21,3)

2. **Egy 12 főt számláló osztályban 3 db különböző könyvet szeretnénk kisorsolni. Hányféleképpen történhet a könyvek szétosztása, ha egy tanuló több könyvet is kaphat. (Válaszként számot adjon meg) [1728]**

   12 fő számára szeretnénk kiosztani 3 db könyvet, úgy hogy 1 tanuló többet is kaphat, tehát ismétlődnek. A sorrend számít, így ez ismétléses variáció.

   $$12^3 = 1728$$

3. Hány 6 számjegyet tartalmazó valódi páros számot (nem kezdődhet nullával) lehet készíteni 3 db nulla és 3 db egyes számkártyából? (Válaszként számot adjon meg) [6]

Hatjegyű páros számokat szeretnénk képezni, 3 db nullából és 3 db egyesből. Ahhoz, hogy páros számokat kapjuk az utolsó számnak 0-nak kell lennie, illetve hogy valós számot kapjunk az első számnak 1-esnek kell lennie. Ebből következik, hogy a maradék 4 helyre 2 egyesből és 2 nullából kell választanunk.

$$\binom{4}{2} = 6$$

4. Egy dobozban 24 játékkocka található, melyből 5 selejtes. 5 darabot kivéve hány esetben lesz pontosan 2 selejtes? Válaszként egy számot adjon meg [9690]

Összesen 24 db játékkocka van egy dobozban, ebből 5 db selejtes. 5 db kockát szeretnénk úgy kiválasztani, hogy ebből 2 db legyen selejtes és 3 db legyen jó állapotú. Tehát az 5ből szeretnénk kiválasztani 2-őt, és a (24-5)=19 db kockából szeretnénk kiválasztani 3 db-ot.

$$\binom{5}{2} * \binom{19}{3} = 9690$$

5. Egy 10 főt számláló osztályban 3 db különböző könyvet szeretnénk kisorsolni. Hányféleképpen történhet a könyvek szétosztása, ha egy tanuló több könyvet is kaphat. (Válaszként számot adjon meg) [1000]

10 fő számára szeretnénk kiosztani 3 db könyvet, úgy hogy 1 tanuló többet is kaphat, tehát ismétlődnek. A sorrend számít, így ez ismétléses variáció.

$$10^3 = 1000$$

6. Hány 8 számjegyet tartalmazó valódi páros számot (nem kezdődhet nullával) lehet készíteni 4 db nulla és 4 db egyes számkártyából? (Válaszként számot adjon meg) [20]

Nyolcjegyű páros számokat szeretnénk képezni, 4 db nullából és 4 db egyesből. Ahhoz, hogy páros számokat kapjuk az utolsó számnak 0-nak kell lennie, illetve hogy valós számot kapjunk az első számnak 1-esnek kell lennie. Ebből következik, hogy a maradék 6 helyre 3 egyesből és 3 nullából kell választanunk.

$$\binom{6}{3} = 20$$

7. Egy dobozban 28 játékkocka található, melyből 7 selejtes. 5 darabot kivéve hány esetben lesz pontosan 2 selejtes? Válaszként egy számot adjon meg [27930]

Összesen 28 db játékkocka van egy dobozban, ebből 7 db selejtes. 5 db kockát szeretnénk úgy kiválasztani, hogy ebből 2 db legyen selejtes és 3 db legyen jó állapotú. Tehát az 7ből szeretnénk kiválasztani 2-őt, és a (28-7)=19 db kockából szeretnénk kiválasztani 3 db-ot.

$$\binom{7}{2} * \binom{19}{3} = 27930$$

8. Hány 10 számjegyet tartalmazó valódi páros számot (nem kezdődhet nullával) lehet készíteni 5 db nulla és 5 db egyes számkártyából? (Válaszként számot adjon meg) [70]

Tízjegyű páros számokat szeretnénk képezni, 5 db nullából és 5 db egyesből. Ahhoz, hogy páros számokat kapjuk az utolsó számnak 0-nak kell lennie, illetve hogy valós számot kapjunk az első számnak 1-esnek kell lennie. Ebből következik, hogy a maradék 8 helyre 4 egyesből és 4 nullából kell választanunk.

$$\binom{8}{4} = 70$$

9. Egy dobozban 23 játékkocka található, melyből 7 selejtes. 5 darabot kivéve hány esetben lesz pontosan 2 selejtes? Válaszként egy számot adjon meg [11760]

Összesen 23 db játékkocka van egy dobozban, ebből 7 db selejtes. 5 db kockát szeretnénk úgy kiválasztani, hogy ebből 2 db legyen selejtes és 3 db legyen jó állapotú. Tehát az 7ből szeretnénk kiválasztani 2-őt, és a (23-7)=16 db kockából szeretnénk kiválasztani 3 db-ot.

$$\binom{7}{2} * \binom{16}{3} = 11760$$

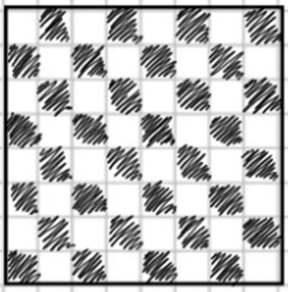
10. Egy 13 főt számláló osztályban 3 db különböző könyvet szeretnénk kisorsolni. Hányféleképpen történhet a könyvek szétosztása, ha egy tanuló több könyvet is kaphat. (Válaszként számot adjon meg) [2197]

13 fő számára szeretnénk kiosztani 3 db könyvet, úgy hogy 1 tanuló többet is kaphat, tehát ismétlődnek. A sorrend számít, így ez ismétléses variáció.

$$13^3 = 2197$$

Órai feladatok

1. **Hányféleképpen lehet a sakktáblán 8 bástyát elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat?**
   a. **Mennyi lesz az eredmény, ha a 8 bástyát meg tudjuk különböztetni egymástól?**



Le szeretnénk rakni 8 bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást
- 1 oszlop 1 bástya
- 1 sor 1 bástya

} → 4 oszlop, 4 sor } 8 db helyre szeretnénk pakolni

Az első részben a sorrend nem számít, mivel nem tudjuk őket megkülönböztetni. Ezért ismétlés nélküli permutációról beszélünk.

$P_n = n! \rightarrow P_8 = 8!$

Az (a) feladatban viszont meg tudjuk különböztetni a bástyákat egymástól, így mindegyiket tudjuk 8 helyre rendezni $P_8 \cdot P_8 = 8! \cdot 8!$

2. **Hány négyjegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyből?**

1	0	0	0
2	1	1	1
3	2	2	2
4	3	3	3
5	4	4	4
6	5	5	5
	6	6	6
↓	↓	↓	↓
6 ·	7 ·	7 ·	7

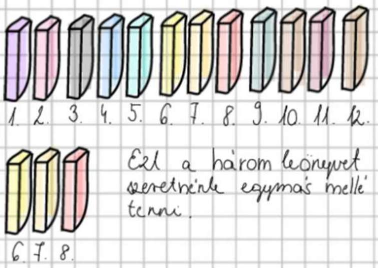
Ahhoz, hogy négyjegyű számot alkossunk, az első számjegy nem lehet 0, tehát oda 6 számjegy közül tudunk választani, a többi viszont lehet bármelyik szám. Mivel 7 számból kell kiválasztanunk 4 számot, úgy hogy számít a sorrend, ezért ismétléses variációról beszélünk

1. hely: 6 elemből 1 → $V_6^1 = 6^1 = 6$

2, 3, 4. hely: 7 elemből 3 → $V_7^3 = 7^3 = 343$

} $6 \cdot 343 = 2058$

3. **Hányféleképpen rakhatunk sorba 12 könyvet, ha 3 bizonyos könyvet egymás mellé akarunk rakni és**
   a. **a három könyv sorrendje nem számít**
   b. **a három könyv sorrendje számít**



a) Ha úgy pakoljuk, hogy a sorrend nem számít, akkor akkor a 3 könyvet kezelhetjük 1 blokként, ebből adódik, hogy 12 - 3 = 9 + 1 blokkot kell sorbarendezni. Ez ismétlés nélküli permutáció

$P_{10} = 10!$

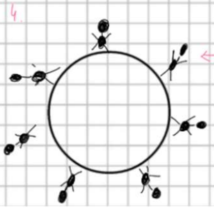
b) Itt számít a 3 könyv sorrendje, ezért meg kell nézni, hogy lehet sorbarendezni őket 3 könyvet

$P_3 = 3!$

Ezt meg kell szoroznunk a többi könyv sorbarendezésével, így kapjuk a

$P_3 \cdot P_{10} = 3! \cdot 10!$

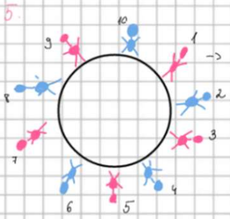
4. **Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 7 embert, ha a forgatással egymásba vihető ülésrendeket azonosnak tekintjük?**



← Meghatározunk egy embert akinek rögzítjük a pozícióját. Így, ha a maradék embert sorbarendezzük, akkor megkapjuk, hogy $P_6 = 6!$

Így nem szerepelnek a forgással egybevihetők !!

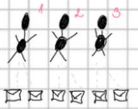
5. **Hányféleképpen ültethetünk egy kerek asztal köré 5 férfit és 5 nőt úgy, hogy se két férfi, se két nő ne kerüljön egymás mellé?**



→ Lefixáljuk az 1-es számú nőt. Azt tudjuk, hogy nő után férfinek kell szerepelni és fordítva is, tehát férfi után nőnek. 1 nőt, már lefixáltunk így 4 maradt, akit 4!-féleképpen rendezhetünk. Az 5 férfit pedig 5!-képpen. A kettő szorzatából pedig megkapjuk, hogy

$P_4 \cdot P_5 = 4! \cdot 5!$

6. **Hat ajánlott levelet kell kézbesíteni, ehhez három postás áll rendelkezésre. Hányféleképpen oszthatjuk szét a leveleket közöttük?**



6 levelünk van, amit 3 postáshoz kell rendelni. Tehát a 3 postás közül 6x kell választani. Ezt ismétléses variációval lehet megtenni.

$$V_3^{6,r} = 3^6$$

7. **Hányféleképpen tölthetünk ki egy ötös lottó szelvényt (90 számból kell kiválasztani ötöt)?**

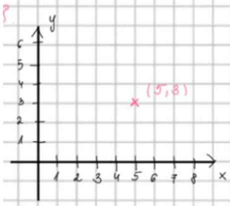
a b c d e

1 - 90

Ebben az esetben, mindegy hogy milyen sorrendben választjuk ki a számokat. De 1 számot csak egyszer választhatunk ezért ismétlés nélküli kombinációról beszélünk.

$$C_{90}^{5} = \frac{90!}{5! \cdot (90-5)!}$$

8. **Csak egész koordinátájú pontokon lépkedve hányféleképpen juthatunk el az origóból az (5,3) pontba, ha csak jobbra és felfelé lépkedhetünk?**



Ha csak jobbra és felfelé léphetünk, akkor meg kell nézni, hogy hány jobbra és hány felfelé lépés után jutunk el az origóból az (5,3) pontba.

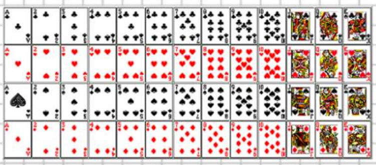
Felfelé: 3

Jobbra: 5 → Tehát a 8 lépést úgy kell kiválasztani, hogy 3 fel és 5 jobb

Összesen: 8

$$P_8^{3,5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

9. **Egy csomag francia kártyából kihúzunk 10 lapot**
   a. **Hány esetben lesz ezek között ász?**
   b. **Pontosan egy ász?**
   c. **Legfeljebb egy ász?**
   d. **Pontosan két ász?**
   e. **Legalább két ász?**



Összesen 52 lapunk van, ebből szeretnénk kiválasztani 10 db-ot, ezt kombinációval lehet megtenni

$$C_{52,10} = \binom{52}{10} \rightarrow \text{összes eset}$$

a) Nézzük meg azt az esetet, hogy nincs ász a kihúzottak között. 52 lapból 4 lap ász, tehát ha a maradék 52 - 4 = 48 lapból húzunk, akkor megkapjuk hogy

$$\underbrace{\binom{52}{10}}_{\text{összes}} - \underbrace{\binom{48}{10}}_{\text{kedvezőtlen}} =$$

b) Pontosan 1 ászunk akkor lesz, ha a 48 nem ász lapból kihúzunk 9-et és az ászok közül 1-et

$$\binom{48}{9} \cdot \binom{4}{1}$$

c) Legfeljebb 1 ász esetén vagy 0 vagy 1 ászunk van

$$\underbrace{\binom{48}{9} \cdot \binom{4}{1}}_{1\ \text{ász}} + \underbrace{\binom{48}{10} \cdot \binom{4}{0}}_{0\ \text{ász}}$$

d) $\binom{48}{8} \cdot \binom{4}{2}$

e) $\underbrace{\binom{48}{8} \cdot \binom{4}{2}}_{2\ \text{ász}} + \underbrace{\binom{48}{9} \cdot \binom{4}{1}}_{1\ \text{ász}} + \underbrace{\binom{48}{10} \cdot \binom{4}{0}}_{0\ \text{ász}}$

10. **Hány olyan valódi hatjegyű szám van, amelynek három jegye páros, három pedig páratlan?**

páros páratlan páros páratlan páros páratlan

Páratlan számok: 1, 3, 5, 7, 9

Páros számok: 0, 2, 4, 6, 8

Páros számok: $\binom{6}{3} \cdot 5^6$ → 6x kell választani

6 hely közül szeretnénk kiválasztani 3-at

5 db páros szám

Ahhoz, hogy a 0-val kezdődő számok ne legyenek benne ki kell vonni azon esetek számát, így az eredmény:

$$\binom{6}{3} \cdot 5^6 - \binom{5}{3} \cdot 5^5$$

11. **Hányféleképpen oszthatunk szét 4 gyerek között 7 almát és 9 körtét (nem feltétlenül kap mindegyik gyerek)?**

Ezt ismétléses kombinációval tehetjük meg, hiszen 1 gyermeket többször is kiválaszthatunk, úgy hogy a sorrend nem számít

$$C_n^{k,r} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Alma: $C_4^{7,r} = \frac{(4+7-1)!}{7! \cdot (4-1)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!}$

Körte: $C_4^{9,r} = \frac{(4+9-1)!}{9! \cdot (4-1)!} = \frac{12!}{9! \cdot 3!}$

$$\frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot \frac{12!}{9! \cdot 3!}$$