Klasszikus valószínűségi mező

A valószínűség egy olyan függvény, amely minden eseményhez egy számot rendel hozzá, méghozzá a 0-1 zárt intervallumból. Klasszikus valószínűségi mezőről beszélünk, ha az eseménytérben található elemi események száma véges és az elemi események valószínűsége pozitív és egyenlő.

A klasszikus valószínűségi mező feltételrendszerében a valószínűséget a „kedvező per összes” módon számíthatjuk ki:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ esetek\ száma}$$

Az esetek megszámlálásában segít a kombinatorika

Permutáció

Arra a kérdésre ad választ, hogy n objektumot hányféleképpen lehet sorba rakni. Mivel az első helyre n objektum közül választhatunk, a másodikra n-1, stb, az összes lehetséges sorrend:

$$P_n = n! = n * (n-1) *** 2 * 1$$

Variáció

Arra a kérdésre ad választ, hogy n objektumot hányféleképpen lehet k helyre sorba rakni, ha ismétlődhetnek az elemek. Mivel minden helyre minden objektumot helyezhetünk, ezért a lehetséges esetek száma:

$$V_n^k = n^k$$

Kombináció

Arra a kérdésre ad választ, hogy n objektum közül hányféleképpen lehet kiemelni k darabot úgy, hogy a sorrend nem számít

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Órai feladatok

1. **Dobjunk fel egyszerre két szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8? Ábrázolja az eseményteret és a kedvező események halmazát!**

Nézzük, meg milyen lehetséges események lehetnek. Ehhez fel kell írni az eseményteret, amiben az összes lehetséges kombináció szerepel.
Ezután meg kell vizsgálni, melyik események felelnek meg a feltételünknek, hogy a dobott számok összege 8. Jelöljük ezeket rózsaszínnel.
Ahhoz, hogy megtudjuk mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8. Meg kell számolni az összes lehetséges esetet, ez jelen esetben összesen 6*6 azaz 36 esemény. A kedvező esetek száma pedig 5.

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{5}{36}$

2. **Egy szabályos dobókockával kétszer egymás után dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké?**

Nézzük, meg milyen lehetséges események lehetnek. Ehhez fel kell írni az eseményteret, amiben az összes lehetséges kombináció szerepel.
Ezután meg kell vizsgálni, melyik események felelnek meg a feltételünknek, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké. Jelöljük ezeket rózsaszínnel.
Ahhoz, hogy megtudjuk mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké. Meg kell számolni az összes lehetséges esetet, ez jelen esetben összesen 6*6 azaz 36 esemény. A kedvező esetek száma pedig 15.

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{15}{36}$

3. **Egy kör alakú asztalnál tízen vacsoráznak. Mennyi a valószínűsége, hogy két nő nem kerül egymás mellé, ha az asztalnál 5 férfi és 5 nő ül.**

   10 embert egy kör alakú asztal körül 9! féleképpen lehet leültetni, ha az egymásba fordítható ülésrendeket nem vesszük figyelembe. Tehát az összes eset száma: 9!. Ezután meg kell nézni a kedvező esetek számát. Ahhoz, hogy ne üljön két nő egymás mellé a két nemet külön kell kezelni. A nők közül fixáljunk le egy embert, így a nőket 4! féleképpen, míg a férfiakat 5! féleképpen lehet ültetni. A kedvező események száma-e kettő szorzata tehát 4!*5!.

   A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{4!*5!}{9!}$

4. **Egy csomag francia kártyából (négy szín: kőr, káró, pikk, tredd; színenként 13 lap) egyszerre 3 lapot kihúzva mennyi a valószínűsége, hogy nincs köztük pikk?**

   Egy csomagban összesen 13*4, azaz 52 db kártya szerepel. Abban az esetben, ha ki akarunk húzni 3 lapot belőle ismétlés nélkül, sorrendfüggetlenül azt kombinációval megállapítva, azt kapjuk, hogy az összes eset száma: $C_{52}^{3} = \binom{52}{3}$. Azt tudjuk, hogy a pakliban 13 pikk kártya szerepel, ahhoz hogy őket ne válasszuk, az 52-13 azaz 39 lapból kell kihúzni a 3 kártyalapot. Így a kedvező esetek száma: $C_{39}^{3} = \binom{39}{3}$

   A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}$

5. **Egy urnában 3 piros golyó van. Legalább hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy a fehér golyó húzásának valószínűsége nagyobb legyen 0.9-nél?**

   Jelenleg 0 db fehér golyó van az urnába, ha beleteszünk egy fehér golyót akkor a 4 golyóból 1 golyó fehér, azaz az urna ¼-e. És ha növeljük a fehér golyókat, akkor ez a szám nő. A kérdés az, hogy mikor lesz 0.9-nél nagyobb a valószínűség

$$\frac{f}{f+3} > 0.9 - -beszorzunk\ f+3-al$$
$$f > 0.9*(f+3) - -felbontjuk\ a\ zárójelet$$
$$f > 0.9f + 2.7 - -kivonunk\ 0.9f - et$$
$$0.1f > 2.7 - -beszorzunk\ 10 - el$$
$$f > 27$$

   Ezzel a számítással megkaptuk, hogy legalább 28 db fehér golyót kell beletennünk, az urnába, hogy annak valószínűsége, hogy fehéret húzunk nagyobb legyen, mint 0.9

6. **Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. 10 golyót választunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy**
   a. **mind a 10 piros?**
   b. **4 piros, 6 fehér?**
   c. **legalább egy piros?**
   d. **4 piros, 6 fehér, de a golyókat vissza lehet tenni**

   A) Ebben az esetben a 10 golyót egyféle színből kell kiválasztani. A 10 golyót a 20 pirosból választjuk ki így a kedvező esetek száma: $C_{20}^{10} = \binom{20}{10}$. Az összes eset pedig amikor az összes golyóból választunk 10et, ami: $C_{50}^{10} = \binom{50}{10}$.

   A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{50}{10}}$

   B) Itt 4 piros és 6 fehér golyót kell kiválasztani. A 4 piros golyót 20 golyóból tudjuk kiválasztani $C_{20}^{4} = \binom{20}{4}$ féleképpen. A 6 fehéret pedig 30 golyóból $C_{30}^{6} = \binom{30}{6}$ féleképpen. A kedvező esetek száma e kettő szorzata lesz azaz, $\binom{20}{4} * \binom{30}{6}$. Az összes eset pedig $C_{50}^{10} = \binom{50}{10}$.

   A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{\binom{20}{4}*\binom{30}{6}}{\binom{50}{10}}$

   C) Ahhoz, hogy megkapjuk mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább 1 piros golyót húzunk, meg kell nézni azt az esetet hogy mikor nem húzunk egyet sem. Ez abban az esetben történik, ha mind a 10 golyót a 30 fehérből választjuk ki. Ezt $C_{30}^{10} = \binom{30}{10}$ féleképpen tehetjük meg. Ebben az esetben is az összes eset száma: $C_{50}^{10} = \binom{50}{10}$. Tehát 0 piros abban az esetben van, ha $P(A) = \frac{\binom{30}{10}}{\binom{50}{10}}$. Ha ezt a számot kivonjuk 1-ből, akkor megkapjuk a keresett valószínűséget ami, $P(A) = 1 - \frac{\binom{30}{10}}{\binom{50}{10}}$

D) Az összes esetet úgy kapjuk meg, hogy megnézzük, hányadik helyen hány golyót húzhatunk. Az 1. helyen 50, aztán mivel visszarakhatjuk ezért a 2.-on is 50, és így tovább. Ez tehát mivel számít a sorrend variáció. Így az összes eset száma: 50^{10}. A piros golyóknál is a 4 golyót 20 féleképpen húzhatjuk ki, a fehéreknél pedig a 6 golyót 30 féleképpen így azt kapjuk, hogy a kedvező esetek száma: $20^4 * 30^6$. Végül meg kell szorozni, ezt a $\binom{10}{4}$ $vagy$ $\binom{10}{6}$ értékkel.

Az eredmény tehát: $\binom{10}{4} * \frac{20^4 * 30^6}{50^{10}}$

7. **Mennyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel fogadva az ötös lottón legalább 3 találatunk lesz?**

Összesen 90 db szám közül kell választani. Először számoljuk, ki a 3 találatot. Ebben az esetben az 5-ből 3-at kell helyesen eltalálnunk és 2-őt nem. Tehát $\binom{5}{3} * \binom{85}{2}$.

Abban az esetben ha 4-et találunk el akkor, az 5-ből 4-et kell eltalálni és 1-et nem. Tehát $\binom{5}{4} * \binom{85}{1}$.

Ha viszont, mind az 5-öt eltaláljuk, akkor $\binom{5}{5} * \binom{85}{1}$.

Az összes eset száma, pedig mikor 90-ből húzunk 5 számot, tehát $\binom{90}{5}$.

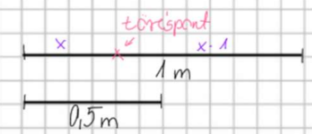
Így az eredmény: $\frac{\binom{5}{3} * \binom{85}{2} + \binom{5}{4} * \binom{85}{1} + \binom{5}{5} * \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}$.

8. **Egy 1 méter oldalhosszúságú, négyzet alakú céltáblára egy fél méter sugarú kört rajzolunk. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen rálőve a táblára (természetesen eltalálva) a találat ezen körön kívül éri azt?**

A feladathoz először is ismernünk kell a kör területét, ami $r^2\pi$. Ezután ki kell számolnunk azt a területet, ami a körön belül van. Igen megint fordítva kell gondolkodni. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy behelyettesítünk a kör területének képletébe: $0.5^2\pi = 0.25\pi$. Annak valószínűsége, hogy a körön belül dobunk az a teljes terület és a kedvező terület hányada, ami $\frac{0.25\pi}{1^2} = 0.25\pi$. Ahhoz, hogy megkapjuk a külső terület valószínűségét, ezt a számot ki kell vonni 1-ből, így az eredmény: $1 - 0.25\pi$

9. **Egy 1 méter hosszú botot egy véletlenszerűen elhelyezett csapással két részre törünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott darabokból, valamint egy fél méter hosszú botból háromszög készíthető.**

Először is emlékezzünk vissza arra a tételre ami a háromszög oldalára vonatkozik, ez pedig az hogy bármely két oldalt kiválasztva oldalhosszuk összege nem lesz nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.



Felírjuk a 3 szabályt az oldalakra

I. $x + (1-x) > 0,5$
II. $x + 0,5 > 1 - x$
III. $(1-x) + 0,5 > x$

I. $x + (1-x) > 0,5$
$1 > 0,5$ ✓

II. $x + 0,5 > 1 - x$
$2x + 0,5 > 1$
$2x > 0,5$
$x > 0,25$

III. $(1-x) + 0,5 > x$
$1,5 > 2x$
$0,75 > x$

$0,75 > x > 0,25$
$\Downarrow$
$x \in]0,25; 0,75[$
↳ az intervallum hossza az alsó és felső határ különbsége azaz 0,5

$P(A) = \frac{\text{kedvezőhossza}}{\text{teljeshossza}} = \frac{0,5}{1} = 0,5$

Teszt feladatok

1. **Egy urnában 11 piros és 14 fehér golyó van. 6 golyót választunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy mind piros? A választ legalább 5 tizedesjegy pontossággal adja meg! [0.002608]**

Ebben az esetben a 6 golyót egyféle színből kell kiválasztani. A 6 golyót a 11 pirosból választjuk ki így a kedvező esetek száma: $C_{11}^6 = \binom{11}{6}$. Az összes eset pedig amikor az összes golyóból választunk 6ot, ami: $C_{25}^6 = \binom{25}{6}$.

A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{\binom{11}{6}}{\binom{25}{6}}$

2. **Egy urnában 13 piros és 15 fehér golyó van. 9 golyót választunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek közül 2 piros és 7 fehér? A választ legalább 5 tizedesjegy pontossággal adja meg! [0.07267080]**

Ebben az esetben a 9 golyót egyféle színből kell kiválasztani. A 2 golyót a 13 pirosból és 7-et pedig a 15 fehérből választjuk ki így a kedvező esetek száma: $\binom{13}{2} * \binom{15}{7}$. Az összes eset pedig amikor az összes golyóból választunk 9et, ami: $C_{28}^9 = \binom{28}{9}$.

A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{\binom{13}{2} * \binom{15}{7}}{\binom{28}{9}}$

3. **Egy kör alakú asztalnál 4-en vacsoráznak. Mennyi a valószínűsége, hogy két nő nem ül egymás mellé, ha az asztalnál 2 férfi és 2 nő ül? ? A választ legalább 5 tizedesjegy pontossággal adja meg! [0.333333]**

   4 embert egy kör alakú asztal körül 3! féleképpen lehet leültetni, ha az egymásba fordítható ülésrendeket nem vesszük figyelembe. Tehát az összes eset száma: 3!. Ezután meg kell nézni a kedvező esetek számát. Ahhoz, hogy ne üljön két nő egymás mellé a két nemet külön kell kezelni. A nők közül fixáljunk le egy embert, így a nőket 1! féleképpen, míg a férfiakat 2! féleképpen lehet ültetni. A kedvező események száma-e kettő szorzata tehát 1!*2!.

   A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{1!*2!}{4!}$

4. **Készítsen egy MATLAB függvényt, amely szimulációk segítségével közelíti az alábbi kísérletben kérdéses valószínűséget!**
   Dobjunk fel egyszerre két szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8?
   A szimulációk száma legyen N = 10^3. A valószínűség közelítése, azaz a relatív gyakoriság legyen a p változó.
   A változók definiálásánál használjon pontosvesszőt.
   Az Ellenőrzés gomb segítségével a kód szabadon kipróbálható.

```
[function p = sim()
   % Megoldás tömbökkel:
   N  = 10^3;
   d  = randi(6,2,N);
   s  = sum(d);
   k  = sum(s==8);
   p  = k / N;
end]
```

5. **Egy urnában 19 piros és 19 fehér golyó van. 3 golyót választunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy mind piros? A választ legalább 5 tizedesjegy pontossággal adja meg! [0.114864]**

   Ebben az esetben a 3 golyót egyféle színből kell kiválasztani. A 3 golyót a 19 pirosból választjuk ki így a kedvező esetek száma: $C_{19}^{3} = \binom{19}{3}$. Az összes eset pedig amikor az összes golyóból választunk 3at, ami: $C_{38}^{3} = \binom{38}{3}$.

   A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{\binom{19}{3}}{\binom{38}{3}}$

6. **Egy urnában 18 piros és 14 fehér golyó van. 6 golyót választunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek közül 2 piros és 4 fehér? A választ legalább 5 tizedesjegy pontossággal adja meg! [0.169007]**

   Ebben az esetben a 6 golyót egyféle színből kell kiválasztani. A 2 golyót a 18 pirosból és 4-et pedig a 14 fehérből választjuk ki így a kedvező esetek száma: $\binom{18}{2} * \binom{14}{4}$. Az összes eset pedig amikor az összes golyóból választunk 6-ot, ami: $C_{32}^{6} = \binom{32}{6}$.

   A képletbe behelyettesítve pedig megkapjuk a valószínűségét, ami $P(A) = \frac{\binom{18}{2}*\binom{14}{4}}{\binom{32}{6}}$

7. **Készítsen egy MATLAB függvényt, amely szimulációk segítségével közelíti az alábbi kísérletben kérdéses valószínűséget!**
   Dobjunk fel egyszerre két szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8?
   A szimulációk száma legyen N = 10^3. A valószínűség közelítése, azaz a relatív gyakoriság legyen a p változó.
   A változók definiálásánál használjon pontosvesszőt.
   Az Ellenőrzés gomb segítségével a kód szabadon kipróbálható.