天体运行轨道计算方法 v0.4

欧长坤

一、计算基础

多颗行星的运动是一个混沌系统，我们所要模拟的宇宙是建立在以下基础上的：

1、天体是规则的球状。

2、一颗行星所具有的参数分别有：

行星 Q：质量 M，半径 R，密度 ρ，质心坐标 (x, y, z)，速度矢量 $\vec{v}$。

3、两颗天体相撞后认为仅求其质量的代数和，密度取其对质量的加权平均数。

(i)对行星 Q_1 的质量 M_1、半径 R_1，则行星的体积：$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$，密度 $\rho_1 = \frac{M_1}{V_1} = \frac{3M_1}{4\pi R_1^3}$，

该密度对质量的权为 $\overline{\rho_1} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\rho_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\frac{3M_1}{4\pi R_1^3} = \frac{3M_1^2}{4\pi R_1^3(M_1 + M_2)}$。

对行星 Q_2 的质量 M_2、半径 R_2，则行星的体积：$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$，密度 $\rho_2 = \frac{M_2}{V_2} = \frac{3M_2}{4\pi R_2^3}$

该密度对质量的权为 $\overline{\rho_2} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}\rho_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}\frac{3M_2}{4\pi R_2^3} = \frac{3M_2^2}{4\pi R_2^3(M_1 + M_2)}$。

碰撞后产生一颗新的行星 Q，质量为 $M = M_1 + M_2$，

密度为 $\rho = \overline{\rho_1} + \overline{\rho_2} = \frac{3M_1^2}{4\pi R_1^3(M_1 + M_2)} + \frac{3M_2^2}{4\pi R_2^3(M_1 + M_2)}$。

体积为：$V = \frac{M}{\rho} = \frac{M_1 + M_2}{\frac{3M_1^2}{4\pi R_1^3(M_1 + M_2)} + \frac{3M_2^2}{4\pi R_2^3(M_1 + M_2)}} = \frac{4\pi R_1^3 R_2^3}{3M_1^2 R_2^3 + 3M_2^2 R_1^3}$

所以新的行星半径为：$R = \frac{R_1 R_2}{\sqrt[3]{3M_1^2 R_2^3 + 3M_2^2 R_1^3}}$ (1.3.1)

(ii)而判断两颗行星是否碰撞的条件：

行星 Q_1 的质量 M_1、半径 R_1、行星 Q_2 的质量 M_2、半径 R_2，它们质心（认为是星球

的中心，也就是程序所记录的行星的坐标）之间的距离为 L。[1]

当 $R_1 + R_2 \le L$ 时，利用式(1.3.1)得到新的星球 Q_3，这时清除当前时间点上的行星 Q_1（质心坐标 (x_1, y_1, z_1)）和行星 Q_2（质心坐标 (x_1, y_1, z_1)），建立新的行星 Q_3，它的质心坐标为：$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$，$Q_1$ 的速度矢量为 $\vec{v_1}$，Q_2 的速度矢量为：$\vec{v_2}$，Q_3 则速度矢量为：$\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{v_1} + \vec{v_2}\right)$

4、物理规律是经典力学下的运动规律，当两颗天体相撞后引力波的变化是瞬间完成的，作用范围即刻更新[2]，但是为了简化计算量我们考虑由于质量引起的空间弯曲，而导致的每颗行星的引力作用范围。

下面推导作用范围。

根据万有引力定律：$F = G\frac{M_1 M_2}{L^2}$，L 是两颗行星质心距。从公式来看，F 无论 L 多大总会存在，但是由于 $F = G\frac{M_1 M_2}{L^2}$ 是关于 L 的二次“衰变”，我们来建立有效作用域的概念，推导有效引力范围 δ。积分 $\int_{[0,x]} G\frac{M_1 M_2}{L^2} dL$ 或 $\int_{[x,+\infty]} G\frac{M_1 M_2}{L^2} dL$ 不是勒贝格可积的，我们需要重新定义标准：

下面考虑 $\int_{[x-\varepsilon,x]} G\frac{M_1 M_2}{L^2} dL$ 与 $\int_{[x,x+\varepsilon]} G\frac{M_1 M_2}{L^2} dL$，$L_0 > x > \varepsilon > 0$，

$$I_1 = \int_{[x-\varepsilon,x]} G\frac{M_1 M_2}{L^2} dL = GM_1M_2\left(\frac{1}{x-\varepsilon} - \frac{1}{x}\right) = GM_1M_2 \frac{\varepsilon}{x(x-\varepsilon)}$$

$$I_2 = \int_{[x,x+\varepsilon]} G\frac{M_1 M_2}{L^2} dL = GM_1M_2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\varepsilon}\right) = GM_1M_2 \frac{\varepsilon}{x(x+\varepsilon)}$$

则 $\frac{I_1}{I_2} = 1 - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon - x}$

5、宇宙切片（时间点）概念。把我们理解中基于时间连续的宇宙想象成离散的，即时间并不是连续的，或者说本不存在时间这个概念，我们所说的过去、现在、未来，都只是我们意识形态中的，实际上对整个宇宙的每一个时刻，不妨认为是一整块面包的某一个竖直切片。每一个宏观物体（天体）的下一个时刻的运动本都是已经确定了的。我们的目的是实时计算下一时刻天体的位置，并把天体的当前位置更新到下一时刻的位置。[3]

6、

[1] 见(2.2.1)
[2] 后期可以考虑优化引力作用范围的变化并不是瞬时的。
[3] 利用这个思想我们在后面建立行星运动的算法，并建立每颗行星的数据库。

二、行星位置更新算法

2.1 位置更新算法

利用前面第 5 点提到的思想，我们的目的是把行星的位置更新到下一个位置，由此而产生算法：

（1）所有行星已经编号，不妨先记为$Q_i(i==1,2,\cdots,n)$；

（2）初始化$i==1$；

（3）是否添加行星？若添加则进入（4），否则进入（5）。

//这部分不是每次都提示用户，通过界面按钮来控制

（4）记录添加行星所具备参数到文件，并$n++$；

//由于新添加行星是人为的改变了整个宇宙的运作，认为是开辟了一个平行宇宙，本已经预先计算好的行星位置从该时刻起全部无效，为了方便读取（用户可以回到添加行星前的状态并观察未添加本该发生的情况），记录行星的文件需要对每个行星新建运行的列表，在添加行星的时间点产生分支（产生平行宇宙），这个时间点可以进入未添加行星的宇宙和添加行星的宇宙。

（5）计算行星Q_i所受引力范围δ内的其他行星的的引力合矢$\vec{F}$，该矢量$\vec{F}$在行星Q_i的速度矢量$\vec{v_i}$方向上有分力$\vec{F_v}$，在垂直速度矢量$\vec{v_i}$方向上有分力$\vec{F}_{v\perp}$，在误差时间间隔范围[4] T_ε下的时间内，行星在速度方向和垂直速度方向分别受到力的作用做匀加速运动，计算在经过时间间隔T_ε后的速度方向运动的位移和垂直速度方向运动的位移，再转化为三维坐标，即得到经过T_ε后的行星位置；

（6）记录该位置到行星Q_i的文件；

（7）$i++$；

（8）若$i!=(n+1)$，返回（5），若$i==(n+1)$，更新所有行星的位置，并返回（2）。

2.2 细化算法计算公式：

（5）中计算Q_i的引力的合矢：

行星Q_i（位置坐标为$\vec{x_i}=(x_i,y_i,z_i)$）与其他行星$Q_j(j\neq i)$（位置坐标为$\vec{x_j}=(x_j,y_j,z_j)$）的质心距：

$$L=\left|\vec{x_j}-\vec{x_i}\right| \qquad (2.2.1)$$

[4] 这个参数在后面会通过计算限定在一个范围之内。

他们之间的引力为：

$$\overrightarrow{F_{ij}}=G\frac{M_iM_j}{L^2}\frac{\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}}{\left|\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}\right|}=GM_iM_j\frac{\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}}{\left|\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}\right|^3} \qquad (2.2.1)$$

则行星 Q_i 所受合力大小为：

$$\vec{F}=\sum_{j\neq i,j=1}^{n}\overrightarrow{F_{ij}}=\sum_{j\neq i,j=1}^{n}GM_iM_j\frac{\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}}{\left|\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}\right|^3}=GM_i\sum_{j\neq i,j=1}^{n}\frac{M_j}{\left|\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}\right|^3}\left(\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}\right) \qquad (2.2.2)$$

（5）中判断行星 Q_i 是否受到其他行星 $Q_j(j\neq i)$ 的影响

在一中第 4 点计算出的引力范围 δ，在（2.2.1）中当 $L=\left|\overrightarrow{x_j}-\overrightarrow{x_i}\right|<\delta$ 时则不考虑行星 $Q_j(j\neq i)$ 对行星 Q_i 的影响。

（5）中计算 Q_i 在受到合力 $\vec{F}$ 与速度矢量 $\vec{v_i}$ 所在平面上的运动情况：

合力 $\vec{F}$ 与速度矢量的夹角余弦为：$\cos<\vec{F},\vec{v_i}>=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{v_i}}{\left|\vec{F}\right|\left|\vec{v_i}\right|}$

夹角正弦为[5]：$\sin<\vec{F},\vec{v_i}>=\sqrt{1-\left(\cos<\vec{F},\vec{v_i}>\right)^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{v_i}}{\left|\vec{F}\right|\left|\vec{v_i}\right|}\right)^2}$

合力 $\vec{F}$ 在速度矢量方向上的分量为：$\vec{F_v}=\left|\vec{F}\right|\cos<\vec{F},\vec{v_i}>\dfrac{\vec{v_i}}{\left|\vec{v_i}\right|}=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{v_i}}{\left|\vec{v_i}\right|^2}\vec{v_i}$

大小为：$\left|\vec{F_v}\right|=\left|\vec{F}\right|\cos<\vec{F},\vec{v_i}>=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{v_i}}{\left|\vec{v_i}\right|}$

在速度 $\vec{v_i}$ 方向上的加速度大小为：$\left|\vec{a_v}\right|=\dfrac{\left|\vec{F_v}\right|}{M_i}=\dfrac{\left|\vec{F}\right|\cos<\vec{F},\vec{v_i}>}{M_i}=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{v_i}}{M_i\left|\vec{v_i}\right|}$

同理，在垂直速度方向上的加速度大小为：

[5] 不需要考虑锐角或钝角或直角的情况。

$$\left|\overrightarrow{a_{v\perp}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{F_v}\right|}{M_i} = \frac{\left|\overrightarrow{F}\right| \sin < \overrightarrow{F}, \overrightarrow{v_i} >}{M_i} = \frac{\left|\overrightarrow{F}\right|}{M_i}\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right)^2}$$

在速度 $\overrightarrow{v_i}$ 方向上经过 T_ε 的时间后，速度 $\overrightarrow{v_i}$ 大小变为：

$$\left|v_{iT_\varepsilon}\right| = \left|\overrightarrow{v_i}\right| + \left|\overrightarrow{a_v}\right| T_\varepsilon = \left|\overrightarrow{v_i}\right| + \frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{M_i\left|\overrightarrow{v_i}\right|} T_\varepsilon$$

速度矢量：

$$\overrightarrow{v_{iT_\varepsilon}} = \left(\left|\overrightarrow{v_i}\right| + \frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{M_i\left|\overrightarrow{v_i}\right|} T_\varepsilon\right)\frac{\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{v_i}\right|}$$

产生的位移为：

$$S_v = \left|\overrightarrow{v_i}\right| T_\varepsilon + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a_v}\right| T_\varepsilon^2 = \left|\overrightarrow{v_i}\right| T_\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{M_i\left|\overrightarrow{v_i}\right|} T_\varepsilon^2$$

在垂直速度 $\overrightarrow{v_i}$ 方向上经过 T_ε 时间后，产生在垂直方向上的速度为：

$$\left|\overrightarrow{v_{iT_\varepsilon\perp}}\right| = \left|\overrightarrow{a_{v\perp}}\right| T_\varepsilon = \frac{\left|\overrightarrow{F}\right| T_\varepsilon}{M_i}\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right)^2}$$

速度矢量[6]：

$$\overrightarrow{v_{iT_\varepsilon\perp}} = \left(\frac{\left|\overrightarrow{F}\right| T_\varepsilon}{M_i}\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right)^2}\right)\left(\overrightarrow{F} - \frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\frac{\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right)$$

产生的位移为：

$$S_{v\perp} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a_{v\perp}}\right| T_\varepsilon^2 = \frac{\left|\overrightarrow{F}\right|}{2M_i}\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right)^2} T_\varepsilon^2$$

故产生的总位移：

$$S = \sqrt{S_v^2 + S_{v\perp}^2} = \sqrt{\left(\left|\overrightarrow{v_i}\right| T_\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{M_i\left|\overrightarrow{v_i}\right|} T_\varepsilon^2\right)^2 + \frac{\left|\overrightarrow{F}\right|^2}{4M_i^2}\left(1-\left(\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right)^2\right) T_\varepsilon^4} \qquad (2.2.3)$$

[6] 这里的法向单位量的找法可以在后期改进

新的速度矢量：

$$\overrightarrow{V_i}=\overrightarrow{v_{iT_\varepsilon}}+\overrightarrow{v_{iT_\varepsilon\perp}}=\left(\left|\overrightarrow{v_i}\right|+\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{M_i\left|\overrightarrow{v_i}\right|}T_\varepsilon\right)\frac{\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{v_i}\right|}+\left(\frac{\left|\overrightarrow{F}\right|T_\varepsilon}{M_i}\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{F}\right|\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right)^2}\right)\left(\overrightarrow{F}-\frac{\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\frac{\overrightarrow{v_i}}{\left|\overrightarrow{v_i}\right|}\right) \quad (2.2.4)$$

（5）中将速度矢量与合矢所在平面的位移转化为三维坐标：

三、产生误差的修正及T_ε限定范围推导