Burak Özdemir
141044027

CSE 321 - Introduction to
Algorithm Design
= Homework 2 =

1) Film, 2. Dünya Savaşı'nda Almanya ve Britanya krallığı arasında olan savaşın masabaşında kazanılmasını anlatıyor. Matematik dehisi olan Alan Turing Britanya krallığı için, Nazilerin savaşta kullandığı enigma (gizli mesajların şifrelenmesi ve tekrar çözülmesi amacı ile kullanılan bir şifre makinesi) makinesi tasarımını çözmek için orduya girdi. Şifre çözme ekibi ile başlarda iyi değildi; çünkü Turing insan ilişkilerinde pek iyi değildi. Daha sonra ekip birlik olup Turing'in tasarladığı makineyi bitirdiler. Almanlar anlamasın diye direk kullanmadılar. Ve 2 sene içinde Britanya Krallığı savaşı kazandı. Turing karakteri gereği eşcinsel bir insandı ve savaştan sonra kimyasal tedavi gördü. 41 yaşında ise intihar etti. Turing sayesinde tahminlere göre 14 milyon insanın hayatı kurtuldu ve bilgisayar biliminin öncüsü kabul edildi.

Burak Özdemir
14104027

2) x_1 için; $a=0.5$, $b=2$, $d=-1$

$\log_b a = -1 = d \Rightarrow -1$ olduğu için çözülemez.

x_2 için; $a=3$, $b=4$, $f(n)=n\log n$

$n^{\log_b a} \Rightarrow n^{\log_4 3} < f(n)$

$f(n)=O(n^{\log_b a-\epsilon}) \Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

$=\Theta(n^{\log_4 3})$

$$T(n)=\begin{cases} a>=1, b>1, \varepsilon>0, c<1 \\ \Theta(n^{\log_b a}) & , f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon}) \\ \Theta(n^{\log_b a}\log n) & , f(n)=\Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)) & , f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\epsilon}) \text{ ve } af(n/b)<cf(n) \end{cases}$$

x_3 için; $a=3$, $b=3$, $f(n)=\frac{n}{2}$

$n^{\log_b a} \Rightarrow n = f(n)$

$f(n)=\Theta(n) \Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_3 3}\log n)$

$=\Theta(n\log n)$

x_4 için; $a=6$, $b=3$, $f(n)=n^2\log n$

$n^{\log_b a} = n^{\log_3 6} < n^2\log n$

$f(n)=O(n^{\log_3 6-\epsilon}) \Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

$=\Theta(n^{\log_3 6})$

x_5 için; $a=4$, $b=2$, $f(n)=n/\log n$

$n^{\log_b a} = n^2 > n/\log n$

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\epsilon}) \Rightarrow T(n)=\Theta(f(n))$

$=\Theta\left(\frac{n}{\log(n)}\right)$

x_6 için; $a=2^n$, $b=2$, $f(n)=n^n$

$n^{\log_b a} = n^n = f(n)$

$f(n)=\Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$

$=\Theta(n^n.\log n)$

Burak Özdemir
14104027

3 a) $n > 0$ $\quad x(n) = \begin{cases} 1 & , n=1; \\ x(n-1)+2n-1 & , \text{diğer}; \end{cases}$

$x(1)=1$
$x(2)=x(1)+2.2-1=4$
$x(3)=x(2)+2.3-1=9$
$\vdots$

$\underline{x(n)=n^2}$ $\Rightarrow x(n+1)=(n+1)^2$ sağlamalı;
hesaplar $\Rightarrow x(n+1)=x(n)+2(n+1)-1 \Rightarrow n^2+2n+1=(n+1)^2$ ✓

b) $n > 0$ $\quad x(n) = \begin{cases} 0 & , x=1; \\ x(n-1)+1 & , \text{diğer} \end{cases}$

$x(1)=0$
$x(2)=x(1)+1 = 1$
$x(3)=x(2)+1 = 2$
$\vdots$
$= n-1$

$\underline{x(n)=\frac{n.(n-1)}{2}}$ $\Rightarrow x(n+1)=\frac{(n+1).n}{2}$ sağlamalı;
$\Rightarrow x(n+1)=x(n)+1 \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}+1 \Rightarrow \frac{n^2+n}{2}$ ✓

c) $n > 0$, $\quad x(n) = \begin{cases} 0 & x=1; \\ x(n-1)+2 & , \text{diğer}; \end{cases}$

$x(1)=0$
$x(2)=x(1)+2=2$
$x(3)=x(2)+2=4$
$\vdots$

$\underline{x(n)=2n-2}$ $\Rightarrow x(n+1)=2(n+1)-2$ sağlamalı;
$\Rightarrow x(n+1)=x(n)+2 \Rightarrow 2n-2+2=2n$ ✓

Burak Özdemir
141044027

(5) b). Algoritmanın base case durumları size'ın 2 veya 3 olma durumudur. Base case'e gelince compare scales fonksiyonu bularak indisi return eder. Base case'e gelene kadar da size'ı 2 ye bölerek fonksiyonu tekrar çağırır.

$$T(n) = T(n/2) + 1$$
$$T(n/2) = T(n/4) + 1$$
$$T(n/4) = T(n/8) + 1$$

$$T(n) = \underbrace{1+1+1 \ldots}_{\log n} + T(1) \Rightarrow T(n) = T(1) + \log n$$
$$\Rightarrow T(n) = O(\log n)$$

worst case: Algoritma ortadaki elemanı değerlendirmediği için base case'e kadar gitmesi gerek. Sıralı veya karışık olması farketmez. O yüzden $O(\log n)$

base case: worst case ile aynı durum var. Algoritma'da size 3 veya 2 olana kadar fonksiyon tekrar çağırılır. O yüzden $\Omega(\log n)$

Burak Özdemir
14046027

6 a) $T_1(n) = 3T_1(n-1)$ for $n>1$, $T_1(1)=4$

$T(n-1) = 3T(n-2)$
$T(n-2) = 3T(n-3)$

$T(n) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3^n \cdot T(n-k) \Rightarrow n-k=1$
$k=n-1$ $\Rightarrow 3^n \cdot \underset{4}{\underline{T(1)}} = T(n)$

$\underline{T(n) = O(3^n)}$

$T_2(n) = T_2(n-1)+n$ for $n>1$, $T_2(0)=0$

$T(n-1) = (n-1)+T(n-2)$
$T(n-2) = (n-2)+T(n-3)$

$T(n) = n+(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots(n-k)+T(n-(k+1)) \Rightarrow n-(k+1)=0$
$k=n-1$

$\Rightarrow n+(n-1)\ldots(n-(n-1))+T(0)$
$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \underline{O(n^2)}$

$T_3(n) = T_3(n/2)+n$

$T(2n) = T(n)+2n$
$T(4n) = T(2n)+4n$

$T(n) = n+2n+4n \ldots\ldots n2^k + \underset{0}{\underline{T(n/2^k)}}$

$\frac{2^{k+1}-1}{2-1} \Rightarrow 2n-2 \Rightarrow T(n) = O(n)$

Burak Özdemir
141044027

⑥ b)

$T_1(n) = 6T_1(n-1) - 9T_1(n-2)$, $T_1(0)=1$, $T_1(1)=6$

$T(n) = 6T(n-1) - 9T(n-2)$ homogeneous

$T(n) - 6T(n-1) + 9T(n-2) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$ (characteristic)

$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow a3^n + \beta x 3^n$ (general solution)

$Q(x) = c$ particular solution $\Rightarrow c - 6c + 9c = 0$

$c = 0$

$Q(x) = a3^x + \beta x 3^x$

$x=0 \Rightarrow a = 1$

$x=1 \Rightarrow 3a + 3\beta = 6$

$3\beta = 3$

$\beta = 1$

$\Rightarrow \underline{Q(x) = 3^x + x3^x}$

$T_2(n) = 5T_2(n-1) - 6T_2(n-2) + 7^n$

$T(n) - 5T(n-1) + 6T(n-2) = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ (characteristic)

$a_n^h \Rightarrow \alpha(2)^n + \beta(3)^n$

$a_n^p \Rightarrow A7^{n+2} - 5A7^{n+1} + 6A7^n$

$49A - 35A + 6A = 7^n$

$20A = 1$

$A = 1/20$

$\underline{\frac{-4}{5}(2)^n + \frac{3}{4}(3)^n} \rightarrow$ particular

$-\frac{4}{5}(2)^n + \frac{3}{4}(3)^n + \frac{1}{20}(7^n) \rightarrow$ real solution

* $(a_n = a_n^h + a_n^p)$

$\alpha(2)^n + \beta(3)^n + 1/20(7^n)$

$n=0 \Rightarrow \alpha + \beta + 1/20 = 0$

$n=1 \Rightarrow 2\alpha + 3\beta + 7/20 = 1$

$-2/\ \alpha + \beta = -1/20$

$2\alpha + 3\beta = 13/20$

$\beta = \frac{2}{20} + \frac{13}{20} = \frac{3}{4}$

$\leftarrow$

$\alpha = \frac{-16}{20} = -\frac{4}{5}$