2019年度（R1年度）前期

物理学基礎AI
（第14回）
ー慣性モーメントー

2019年7月22日

第14回の要点

- 剛体の z 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I = \int_V \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)dV$$

- 剛体の重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I_G とすると、それに平行で距離 d 離れた軸のまわりの慣性モーメントは

$$I = I_G + Md^2$$

- 薄い平板状の剛体の面に垂直な z 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_z = I_x + I_y$$

慣性モーメントの計算

剛体を微小成分（密度 ρ_k、体積 ΔV_k）に分割したときの
z 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I = \sum_{k=1}^{N} m_k {r_k}^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k ({x_k}^2 + {y_k}^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \rho_k \Delta V_k ({x_k}^2 + {y_k}^2)$$

密度分布を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると

$$I = \int_V \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2) dV$$

棒の慣性モーメント

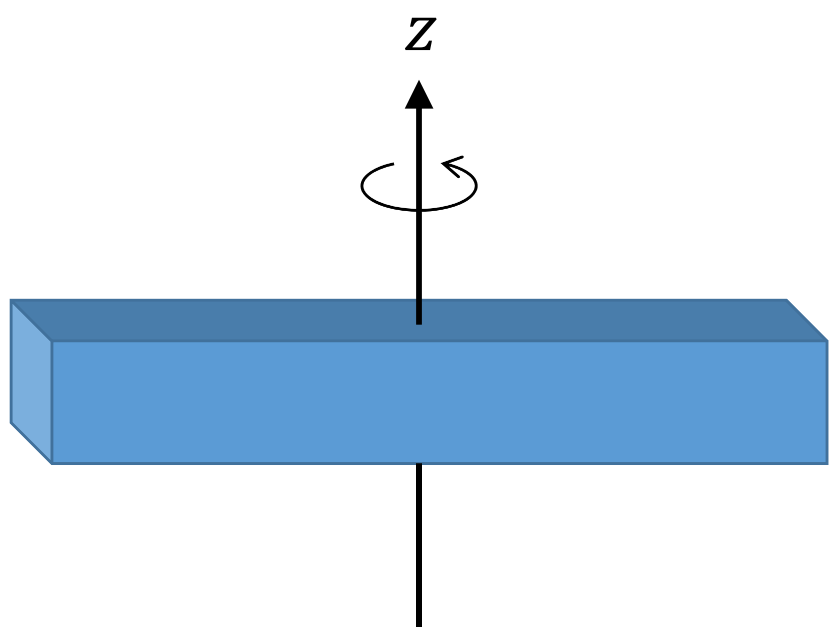
長さ l、質量 M の一様な細い棒の重心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは、$y=0$ として

$$I=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{M}{l\Delta y\Delta z}x^2\Delta y\Delta z dx$$

$$=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{M}{l}x^2dx$$

$$=\frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$=\frac{M}{l}\frac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3=\frac{1}{12}Ml^2$$



棒の慣性モーメント

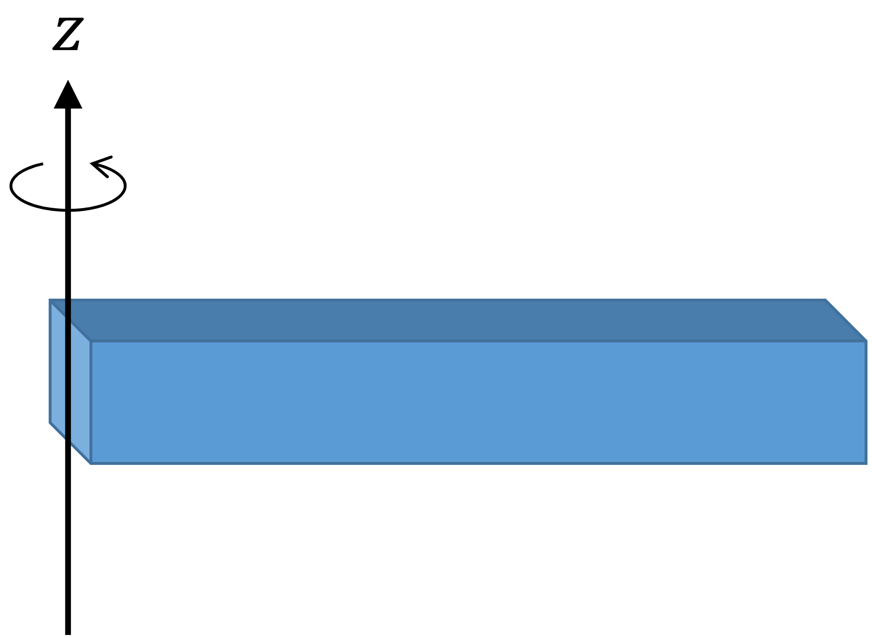
長さ l、質量 M の一様な細い棒の**端点**を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは、$y = 0$ として

$$I = \int_0^l \frac{M}{l\Delta y\Delta z} x^2 \Delta y\Delta z dx$$

$$= \int_0^l \frac{M}{a^2 l} x^2 a^2 dx$$

$$= \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$= \frac{M}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{1}{3}Ml^2$$



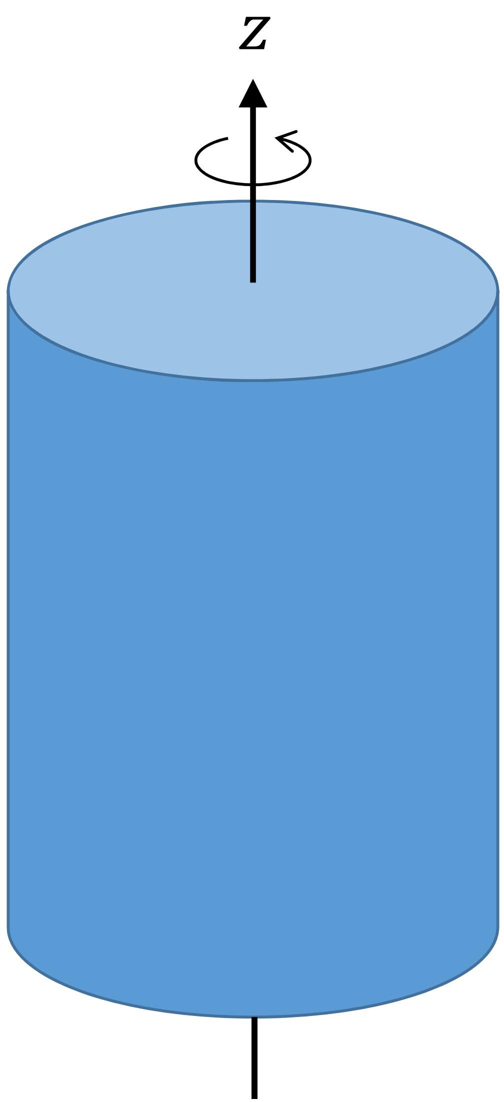
円柱の慣性モーメント

半径 a、長さ l、質量 M の一様な円柱の中心軸のまわりの慣性モーメントは

$$I = \int_0^a \frac{M}{\pi a^2 l} r^2 \cdot 2\pi r l dr$$

$$= \frac{2M}{a^2} \int_0^a r^3 dr$$

$$= \frac{2M}{a^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{1}{2} M a^2$$



平行軸の定理

剛体の重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I_G とすると、それに平行で距離 d 離れた軸のまわりの慣性モーメント I は、重心を原点とする座標を (x'_k, y'_k, z'_k) として

$$I = \sum_{k=1}^{N} m_k ({x_k}^2 + {y_k}^2) = \sum_{k=1}^{N} m_k \left((x'_k + d)^2 + {y'_k}^2 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k \left({x'_k}^2 + {y'_k}^2 \right) + 2d \sum_{k=1}^{N} m_k x'_k + \sum_{k=1}^{N} m_k d^2$$

$$= I_G + Md^2$$

平行軸の定理

長さ l、質量 M の一様な棒の重心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_G = \frac{1}{12} M l^2$$

長さ l、質量 M の一様な棒の端点を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは、平行軸の定理より

$$I = I_G + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2$$

$$= \frac{1}{3} M l^2$$

平板の定理

平板状の剛体について、面内に x 軸と y 軸、面に垂直に z 軸をとり、それぞれの軸のまわりの慣性モーメントを I_x, I_y, I_z とすると

$$I_x + I_y = \sum_{k=1}^{N} m_k({y_k}^2 + {z_k}^2) + \sum_{k=1}^{N} m_k({z_k}^2 + {x_k}^2)$$

厚さが無視できるとき、$z_k = 0$ だから

$$I_x + I_y = \sum_{k=1}^{N} m_k({x_k}^2 + {y_k}^2) = I_z$$

円板の慣性モーメント

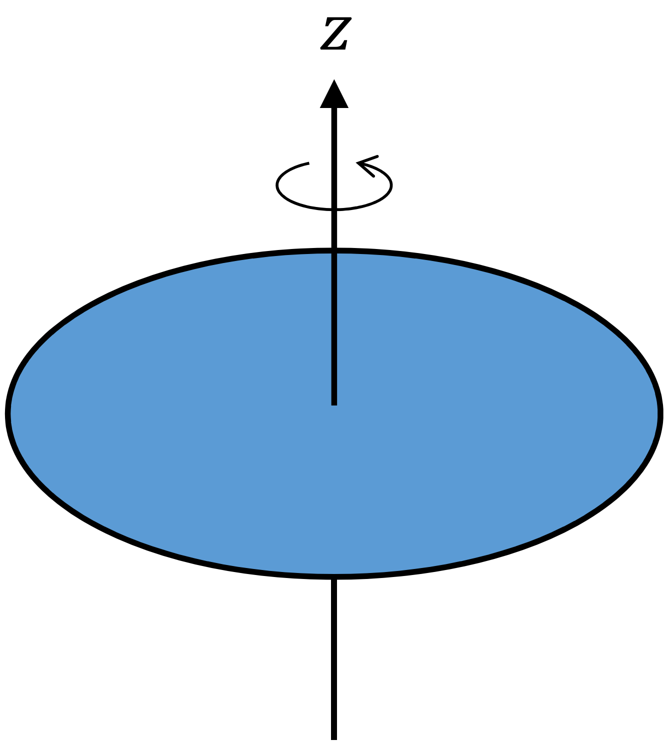
半径 a、質量 M の一様な薄い円板の中心軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_z = \int_0^a \frac{M}{\pi a^2 \Delta z} r^2 \cdot 2\pi r \Delta z dr$$

$$= \int_0^a \frac{M}{\pi a^2} r^2 \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{2M}{a^2} \int_0^a r^3 dr$$

$$= \frac{2M}{a^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{1}{2} M a^2$$



円板の慣性モーメント

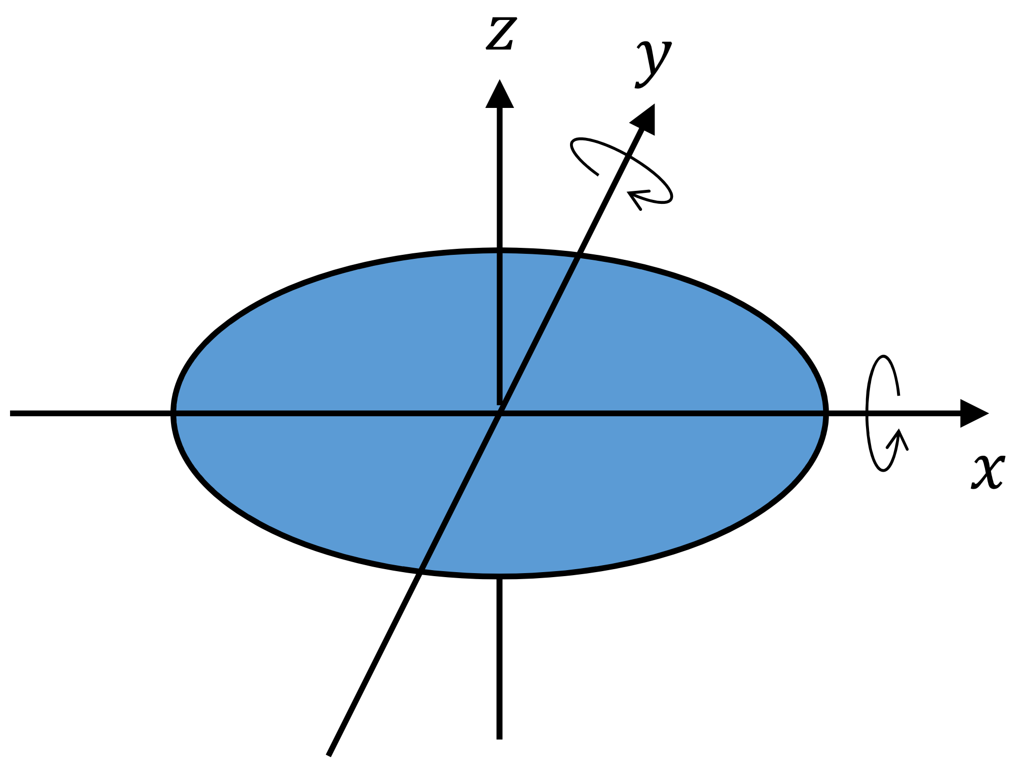
半径 a、質量 M の一様な薄い円板の直径のまわりの慣性モーメント I_x, I_y は、対称性より

$$I_x = I_y$$

であるから、平板の定理より

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x$$

$$\therefore I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} M a^2$$



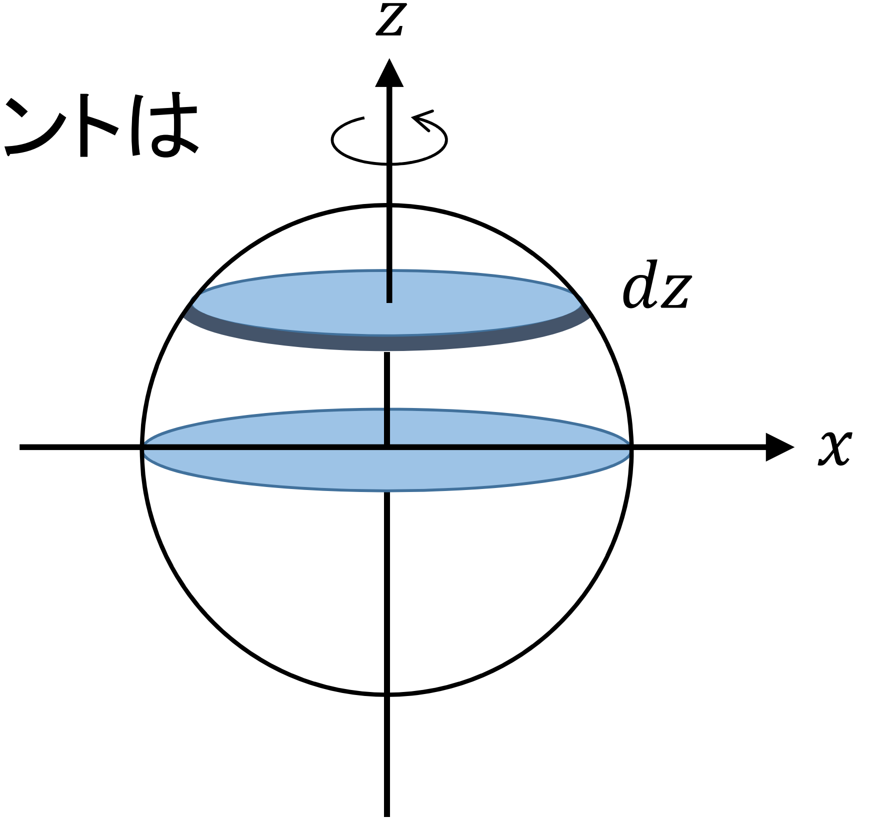
球の慣性モーメント

半径 a 、質量 M の一様な球の慣性モーメントを求める。
球を z 軸に垂直な厚さ dz の円板に分割すると、その半径は $\sqrt{a^2 - z^2}$ である。円板の質量を m とすると、

$$m = \rho\pi(a^2 - z^2)dz$$

だから z 軸のまわりの慣性モーメントは

$$\frac{1}{2}m(a^2 - z^2)$$
$$= \frac{1}{2}\rho\pi(a^2 - z^2)dz(a^2 - z^2)$$
$$= \frac{1}{2}\rho\pi(a^4 - 2a^2z^2 + z^4)dz$$



球の慣性モーメント

球の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは

$$I=\frac{\rho\pi}{2}\int_{-a}^{a}(a^4-2a^2z^2+z^4)dz$$

$$=\frac{\rho\pi}{2}\left[a^4z-\frac{2a^2}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5\right]_{-a}^{a}$$

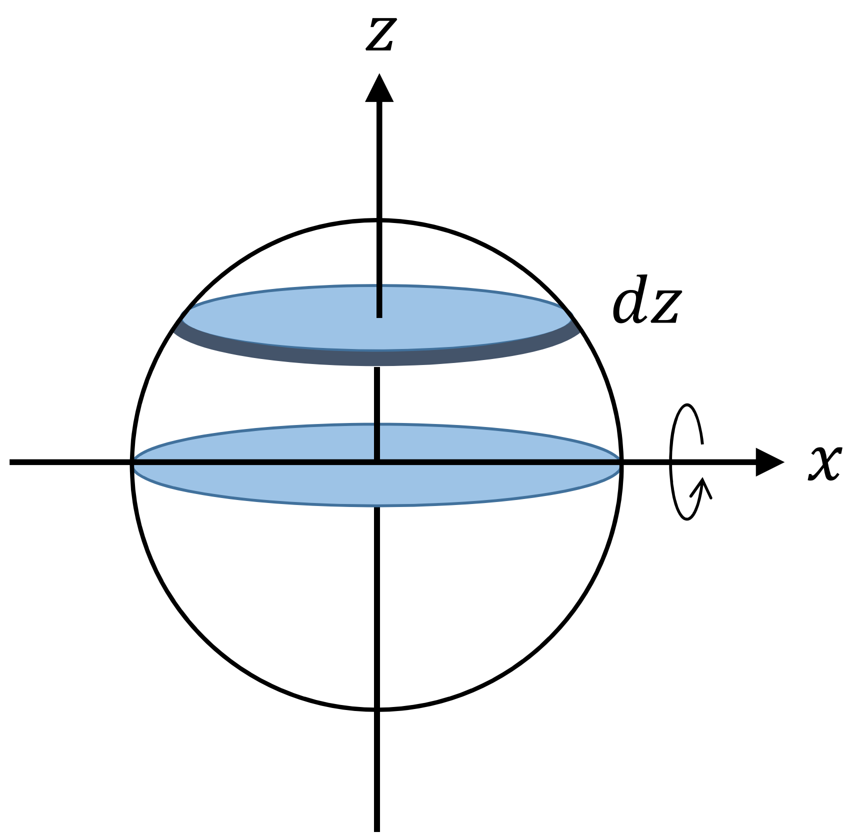
$$=\frac{\rho\pi}{2}2\left(a^5-\frac{2}{3}a^5+\frac{1}{5}a^5\right)=\rho\pi\frac{8}{15}a^5$$

$$=\frac{3M}{4\pi a^3}\pi\frac{8}{15}a^5=\frac{2}{5}Ma^2$$

球の慣性モーメント：別解①

球を z 軸に垂直な厚さ dz の円板に分割すると、その半径は $\sqrt{a^2 - z^2}$ である。円板の質量を m とすると、x 軸のまわりの慣性モーメントは、平行軸の定理より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}m(a^2 - z^2) + mz^2 \\
&= \frac{1}{4}m(a^2 + 3z^2) \\
&= \frac{1}{4}\rho\pi(a^2 - z^2)dz(a^2 + 3z^2) \\
&= \frac{1}{4}\rho\pi(a^4 + 2a^2z^2 - 3z^4)dz
\end{aligned}
$$



球の慣性モーメント:別解①

球の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントは

$$I = \frac{\rho\pi}{4}\int_{-a}^{a}(a^4 + 2a^2z^2 - 3z^4)dz$$

$$= \frac{\rho\pi}{4}\left[a^4z + \frac{2a^2}{3}z^3 - \frac{3}{5}z^5\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{\rho\pi}{4}2\left(a^5 + \frac{2}{3}a^5 - \frac{3}{5}a^5\right) = \frac{\rho\pi}{2}\frac{16}{15}a^5 = \frac{8\pi}{15}\rho a^5$$

$$= \frac{8\pi}{15}\frac{3M}{4\pi a^3}a^5 = \frac{2}{5}Ma^2$$

球の慣性モーメント：別解②

球の x, y, z 軸のまわりの慣性モーメントは等しいから

$$3I = I_x + I_y + I_z$$

$$= \int_V \rho(y^2 + z^2)dV + \int_V \rho(z^2 + x^2)dV + \int_V \rho(x^2 + y^2)dV$$

$$= 2\int_V \rho(x^2 + y^2 + z^2)dV = \int_V \rho r^2 dV$$

$$= 2\int_0^a \rho r^2 4\pi r^2 dr = 8\pi\rho\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{8\pi}{5}\rho a^5$$

$$\therefore I = \frac{8\pi}{15}\rho a^5 = \frac{8\pi}{15}\frac{3M}{4\pi a^3}a^5 = \frac{2}{5}Ma^2$$

第14回のまとめ

- 剛体の z 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I = \int_V \rho(\boldsymbol{r})(x^2 + y^2)dV$$

- 剛体の重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I_G とすると、それに平行で距離 d 離れた軸のまわりの慣性モーメントは

$$I = I_G + Md^2$$

- 薄い平板状の剛体の面に垂直な z 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_z = I_x + I_y$$