

QR dekompozicija

Anja Bukurov

Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

6. juli 2018.

Sadržaj

- 1 Uvod
- 2 Algoritmi
 - Klasičan Šmitov algoritam
 - Modifikacija Šmitovog algoritma
 - Reortogonalizacija
- 3 Dodatak

Uvod

Neka je A matrica dimenzija $m \times n$ ($m > n$) i ranga n .

Matrica A može se razložiti na proizvod

$$A = QR$$

gde je Q ortogonalna matrica dimenzija $m \times n$, a R je gornjetrougaona matrica dimenzija $n \times n$.

Klasičan Šmitov algoritam

- Algoritam se sastoji iz n koraka
- U svakom koraku izračunata je jedna kolona matrice Q
- Posmatrajmo k -ti korak:
 - Do sad su izračunate kolone $cQ_1 \dots cQ_{k-1}$
 - Prvo računamo k -tu kolonu matrice R

$$R_{ik} = cQ_i^T cA_k$$

- Formiramo vektor $b_k = cA_k - \sum_{i=0}^{k-1} R_{ik} cQ_i$ koji je ortogonalan na prethodno izračunate kolone $cQ_1 \dots cQ_{k-1}$
- Ostaje još da se vektor normira i dobili smo k -tu kolonu.

Klasičan Šmitov algoritam

- Matrica Q , koja se dobija ovim postupkom, nije ortogonalna i zbog toga je nestabilan
- Međutim, proizvod matrica Q i R savršeno se poklapa sa polaznom matricom A
-

Modifikacija Šmitovog algoritma

- Modifikacija se oslanja na vezu $A = QR$ u malo drugačijem obliku
- Zapisujemo proizvod kao sumu matrica ranga 1:

$$A = \sum_{i=1}^n cQ_i r_i^T$$

- Pre nego što izračunamo kolonu matrice Q , računamo vrednosti matrice R na glavnoj dijagonali kao normu k -te kolone matrice A

Modifikacija Šmitovog algoritma

- k -tu kolonu matrice Q računamo po formuli

$$cQ_k = cQ_{k-1} - cQ_{k-1}rR_k^T$$

- Konačnu vrednost k -te kolone dobijamo njenim normiranjem odnosno deljenjem elemenata k -te kolone k -tim elementom dijagonale matrice R

Reortogonalizacija

- Problem klasičnog Šmitovog algoritma jeste u računanju vektora b
- Ukoliko je norma vektora b mnogo manja od norme k -te kolone matrice A doći će do poništavanja
- Ideja je da se polazna matrica A ortogonalizuje sve dok norme matrica iz susednih koraka ne postanu dovoljno bliske

Hvala na pažnji!

Pitanja?

Dodatak

Literatura

Repozitorijum

<https://github.com/djinx/QR-Decomposition>