

# QR dekompozicija

Anja Bukurov

Matematički fakultet,  
Univerzitet u Beogradu

7. juli 2018.

# Sadržaj

- 1 Uvod
- 2 Algoritmi
  - Klasičan Šmitov algoritam
  - Modifikacija Šmitovog algoritma
  - Reortogonalizacija
- 3 Dodatak

# Uvod

Neka je  $A$  matrica dimenzija  $m \times n$  ( $m \geq n$ ).

Matrica  $A$  može se razložiti na proizvod

$$A = QR$$

gde je  $Q$  ortogonalna matrica dimenzija  $m \times n$ , a  $R$  je gornjetrougaona matrica dimenzija  $n \times n$ .

# Klasičan Šmitov algoritam

- Algoritam se sastoji iz  $n$  koraka
- U svakom koraku izračunata je jedna kolona matrice  $Q$
- Posmatrajmo  $k$ -ti korak:
  - Do sad su izračunate kolone  $cQ_1 \dots cQ_{k-1}$
  - Prvo računamo  $k$ -tu kolonu matrice  $R$

$$R_{ik} = cQ_i^T cA_k$$

- Formiramo vektor  $b_k = cA_k \sum_{i=0}^{k-1} R_{ik} cQ_i$  koji je ortogonalan na prethodno izračunate kolone  $cQ_1 \dots cQ_{k-1}$
- Ostaje još da se vektor normira i dobili smo  $k$ -tu kolonu.

# Klasičan Šmitov algoritam

- Proizvod dobijenih matrica,  $Q$  i  $R$ , savršeno se poklapa sa polaznom matricom  $A$
- Matrica  $Q$ , koja se dobija ovim postupkom, nije ortogonalna i zbog toga je nestabilan

# Modifikacija Šmitovog algoritma

- Modifikacija se oslanja na vezu  $A = QR$  u malo drugačijem obliku
- Zapisujemo proizvod kao sumu matrica ranga 1:

$$A = \sum_{i=1}^n cQ_i r_i^T$$

- Pre nego što izračunamo kolonu matrice  $Q$ , računamo vrednosti matrice  $R$  na glavnoj dijagonali kao normu  $k$ -te kolone matrice  $A$

# Modifikacija Šmitovog algoritma

- $k$ -tu kolonu matrice  $Q$  normiramo odnosno delimo je  $k$ -tim elementom glavne dijagonale matrice  $R$
- Konačnu vrednost  $k$ -te kolone matrice  $Q$  računamo po formuli

$$cQ_k = cQ_{k-1} - cQ_{k-1}rR_k^T$$

## Reortogonalizacija

- Problem klasičnog Šmitovog algoritma jeste u računanju vektora  $b$
- Ukoliko je norma vektora  $b$  mnogo manja od norme  $k$ -te kolone matrice  $A$  doći će do poništavanja
- Ideja je da se polazna matrica  $A$  ortogonalizuje sve dok norme matrica iz susednih koraka ne postanu dovoljno bliske



Hvala na pažnji!

Pitanja?

# Dodatak

## Repozitorijum

<https://github.com/djinx/QR-Decomposition>