KAPITOLA 5

SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS II: DVOUFÁZOVÁ METODA A M-ÚLOHA

Pro chod simplexového algoritmu je nutné na začátku zajistit znalost výchozího bázického přípustného řešení. Hledání výchozího BFS však obecně může být výpočetně náročné. V této kapitole ukážeme dvě standardní techniky, které poslouží k jeho efektivnímu nalezení: M-úlohu (neboli *metodu velkého M*) a dvoufázovou metodu (neboli *metodu umělé báze*). Obě metody pracují s *rozšířenou úlohou*, jejíž řešení nám dá výchozí BFS původní úlohy, nebo prokáže její nepřípustnost.

1 Výchozí bazické přípustné řešení

Již jsme viděli, jak pracovat se simplexovou metodou v jejím základním tvaru. Nicméně pečlivý čtenář si mohl povšimnout, že aby mohl simplexový algoritmus vůbec začít, tak potřebujeme znát pro danou úlohu na začátku nějakou přípustnou bázi, respektive bázické přípustné řešení.

V příkladech, které jsme zatím uváděli, jsme přípustnou bázi dostali víceméně zadarmo. Tak tomu je u všech úloh v nerovnicovém tvaru

$$\text{maximalizovat } \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq 0$$

s $\mathbf{b} \geq 0$. Je snadné se přesvědčit, že pomocné proměnné, zavedené při převodu na rovnicový tvar, poslouží vždy jako přípustná báze.

Bohužel obecně rozhodnutí o přípustnosti úlohy nebo nalezení výchozího bázického přípustného řešení není nijak jednoduché – v nejhorším má stejný řád složitosti jako samotné řešení úlohy. V této části si proto ukážeme, jak najít výchozí bazický přípustný bod (nebo rozhodnout o nepřípustnosti úlohy) systematicky a pokud možno co nejefektivněji.

V literatuře se nejčastěji setkáme se dvěma metodami pro nalezení výchozího bazického přípustného bodu – metodou velkého M (M-úloha) a metodou umělé báze (dvoufázovou metodou). Obě metody si v této kapitole krátce představíme a ukážeme na jednoduchých příkladech. Obě tyto metody využívají k nalezení výchozího bazického přípustného bodu řešení speciálně upravené úlohy.

Nejdříve dokažme jednoduché tvrzení, které nám poskytne nejenom nutnou, ale dokonce i postačující podmínku, na základě níž budeme moci rozhodovat o přípustnosti optimalitě řešení

Tvrzení 5.1: Nutná a postačující podmínka přípustnosti rozšířené úlohy

Uvažujme úlohu LP v nerovnicovém tvaru. Po standardní úpravě na rovnicový tvar s $\mathbf{b} \geq 0$ uvažujme rozšířený systém

$$A\mathbf{x} + I\,\mathbf{w} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq 0,\ \ \mathbf{w} \geq 0,$$

kde I je jednotková matice. Potom platí, že

$$\min \textstyle\sum_j w_j = 0 \iff \exists\, \mathbf{x} \geq 0 : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Důkaz tvrzení.

Protože $\mathbf{w} \geq 0$, platí nutně $\sum_j w_j \geq 0$. Pokud existuje $\mathbf{x} \geq 0$ s $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dostaneme pro něj z podmínek rovnosti $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ a tedy hodnotu $\sum_j w_j = 0$. Naopak, je-li $\min \sum_j w_j$ rovno 0, existuje přípustné $(\mathbf{x}^\star, \mathbf{w}^\star)$ s $\sum_j w_j^\star = 0$, což při $\mathbf{w}^\star \geq 0$ implikuje $\mathbf{w}^\star = \mathbf{0}$ a tedy $A\mathbf{x}^\star = \mathbf{b}$. ∎

2 Metoda velkého M

Začneme *metodou velkého M*, která místo naší původní úlohy (maximalizační úloha LP v rovnicovém tvaru) řeší pomocný problém ve tvaru

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{m}^\mathsf{T}\mathbf{w}$$

za podmínek

$$A\mathbf{x} + I\mathbf{w} = b, \qquad \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{w} \geq 0,$$

kde I je jednotková matice a $\mathbf{m} = (M, M, \ldots, M)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$ je vektor kladných konstant $M > 0$, kde M je „větší než všechna čísla v úloze“, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$. Vzhledem k tomu, že dopředu nevíme, jaká čísla se v průběhu výpočtu objeví, počítáme s hodnotou M jako s parametrem. Koeficient $-M$ u každé umělé proměnné w_j má zavádět v účelové funkci silnou penalizaci tak, aby v řešitelném případě umělé proměnné v optimu zmizely ($\mathbf{w}^\star = 0$).

Poznámka 5.2: Co znamená „M je větší než všechna čísla v úloze“

„Větší“ zde znamená *dominantní*. Volíme M tak, aby příspěvek $-Mw_j$ vždy převážil jakýkoli dosažitelný přírůstek $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Ekvivalentně lze říci, že uvažujeme M jako formální symbol s „nekonečně velkou vahou“ a při porovnávání koeficientů v účelové funkci jsou členy u M rozhodující. Prakticky:

- **Teoreticky:** pracujeme s M symbolicky a v simplexové tabulce oddělujeme části „u M“ a „bez M“. Prefaktor u M pak hraje největší roli.
- **Numericky:** zvolíme M o několik řádů větší než největší absolutní koeficienty v $\mathbf{c}$, A a $\mathbf{b}$ tak, aby žádná kombinace těchto čísel nemohla vykompenzovat $-M\mathbf{w}$.

V principu chceme původní úlohu rozšířit tak, aby nějaká vybraná matice z matice rozšířené úlohy byla jednotková. Kdekoliv už ve vztazích z úvodní úlohy jednotkový sloupec máme (nebo jej získáme prostým násobením řádku nenulovou konstantou), využijeme jej a zavádíme méně umělých proměnných. Pokud pro výběr úvodní jednotkové matice pro bázi použijeme některé ze sloupců z původní úlohy, tak ve vektoru $\mathbf{w}$ musíme akorát předepsat na příslušných pozicích (tj. pozicích s indexy sloupců původní matice, které používáme) nulu.

V praxi není nutné dopočítat optimum rozšířené úlohy – primárně sledujeme pomocné proměnné rozšířené úlohy ve výpočtu. Pokud během výpočtu všechny rozšířené pomocné proměnné opustí bázi a mají záporné prefaktory v řádku účelové funkce, část s metodou velkého M končí. Sloupce rozšířených pomocných proměnných totiž vypustíme, protože s koeficientem $-M$ by jejich návrat hodnotu účelové funkce vždy zhoršil. Dále pokračujeme běžným postupem simplexové metody už s původní účelovou funkcí $z = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ a simplexovou tabulkou odvozenou vynecháním zmiňovaných sloupců.

Jestliže se výpočet zastaví (v řádku účelové funkce už není proměnná, jejíž zvýšení by hodnotu účelové funkce zlepšilo) a některá pomocná proměnná z rozšíření má kladnou hodnotu, je původní úloha nepřípustná.

Poznámka 5.3: Proč funguje metoda velkého M

Uvažujme rozšířenou úlohu s účelovou funkcí

$$\tilde{z} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{m}^\mathsf{T}\mathbf{w} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} + I\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{w} \geq 0,$$

kde význam $\mathbf{m}$ je popsán výše. Důležité je, že rozšířená část účelové funkce je nyní ta dominantí. Maximalizace $\tilde{z}$ je tedy lexikograficky[a] ekvivalentní dvoukroku:

1. minimalizuj $\sum_j w_j$,
2. mezi řešeními s minimálním $\sum_j w_j$ maximalizuj $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

Z 5.1 víme, že platí, že $\min \sum_j w_j = 0$ právě tehdy, když existuje $\mathbf{x} \geq 0$ s $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pokud v libovolném koncovém bodě výpočtu zůstane některé $w_j > 0$, původní úloha musí být nepřípustná.

[a] *Lexikografické uspořádání*: pro vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{u} <_{\text{lex}} \mathbf{v}$, jestliže existuje nejmenší index i s $u_i \neq v_i$ a $u_i < v_i$. Maximalizace vektorové funkce $(f_1, \ldots, f_k)$ v lexikografickém smyslu znamená: nejprve maximalizovat f_1, pokud je více řešení se stejným f_1, maximalizovat mezi nimi f_2, atd.

2.1 Příklady

Na prvním příkladu ilustrujeme standardní chod metody velkého M. V druhém, byť triviálním, příkladu demonstrujeme mechanismus, jak metoda velkého M odhalí nepřípustnost původní úlohy.

Příklad 5.4: Metoda velkého M

V úvodním příkladu budeme chtít

$$\textbf{maximalizovat} \quad z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad \textbf{za podmínek} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Po rozšíření o umělé proměnné w_1, w_2 dostaneme rovnicový tvar

$$x_1 - x_2 + x_3 + w_1 = 1, \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 4, \qquad x_{1,2,3}, w_{1,2} \geq 0,$$

a rovnici účelové funkce

$$\tilde{z} = x_1 + 4x_2 + 2x_3 - M(w_1 + w_2), \quad M > 0.$$

Počáteční simplexová tabulka. Bereme pomocné proměnné jako bázické proměnné:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 - x_1 + x_2 - x_3, \\ w_2 &= 4 - x_1 - x_2 - 2x_3, \\ \tilde{z} &= -5M + (2M+1)x_1 + 4x_2 + (3M+2)x_3. \end{aligned}$$

Dále budeme postupně chtít pivotováním přesunout pomocné proměnné mezi nebázické proměnné.

Krok 1. Vstupuje x_3, vystupuje w_1.

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_1 + x_2 - w_1, \\ w_2 &= 2 + x_1 - 3x_2 + 2w_1, \\ \tilde{z} &= 2 - 2M + (-M-1)x_1 + (3M+6)x_2 - (3M+2)w_1. \end{aligned}$$

Krok 2. Vstupuje x_2, vystupuje w_2.

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}w_1 - \tfrac{1}{3}w_2, \\ x_3 &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}w_1 - \tfrac{1}{3}w_2, \\ \tilde{z} &= 6 + x_1 + (2-M)w_1 - (M+2)w_2. \end{aligned}$$

V $\tilde{z}$-řádku mají w_1, w_2 záporné koeficienty, proto nikdy nevstoupí. Položíme $w_1 = w_2 = 0$ a sloupce odstraníme.

Bázický přípustný bod původní úlohy.

$$x = (0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}), \qquad z = 6.$$

Pokračování simplexovým algoritmem. Po odstranění $\mathbf{w}$ máme úvodní simplexovou tabulku ve tvaru:

$$x_2 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_1, \quad x_3 = \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}x_1, \quad z = 6 + x_1.$$

Vstupuje x_1, vystupuje x_3. Po pivotu

$$x_1 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_3, \quad x_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_3, \quad z = \tfrac{17}{2} - \tfrac{3}{2}x_3.$$

Z tvaru účelové funkce jsme nalezli optimum, pokládáme tedy $x_3 = 0$ a dostaneme:

$$\mathbf{x}^\star = (\tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 0), \qquad z^\star = \tfrac{17}{2}.$$

Příklad 5.5: Metoda velkého M – nepřípustná úloha

V tomto příkladu budeme chtít

$$\textbf{maximalizovat} \quad z = x_1 + x_2 \qquad \textbf{za podmínek} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Po rozšíření o w_1, w_2:

$$x_1 + x_2 + w_1 = 1, \qquad x_1 + x_2 + w_2 = 2, \qquad x_{1,2}, w_{1,2} \geq 0,$$

a účelová funkce

$$\tilde{z} = x_1 + x_2 - M(w_1 + w_2), \quad M > 0.$$

Počáteční simplexová tabulka.

$$w_1 = 1 - x_1 - x_2, \qquad w_2 = 2 - x_1 - x_2, \qquad \tilde{z} = -3M + (2M+1)(x_1 + x_2).$$

Krok 1. Vstupuje x_1, vystupuje w_1.

$$x_1 = 1 - x_2 - w_1, \qquad w_2 = 1 + w_1, \qquad \tilde{z} = -M + 1 - (2M+1)w_1 + 0 \cdot x_2.$$

V $\tilde{z}$-řádku nejsou kladné koeficienty, tedy jsme našli optimum pomocné úlohy při $w_1 = 0, x_2 = 0$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad \tilde{z} = -M + 1.$$

Protože v optimu platí $w_2 > 0$, původní úloha je **nepřípustná**.

Rychlá diagnostika.

$$(x_1 + x_2 + w_2) - (x_1 + x_2 + w_1) = 1 \Rightarrow w_2 - w_1 = 1,$$

takže $\min(w_1 + w_2) = 1$ a stavu $w = 0$ nelze dosáhnout.

3 Dvoufázová metoda (metoda umělé báze)

Druhou metodou pro nalezení výchozí báze je *dvoufázová metoda*, někdy také nazývaná metoda umělé báze. Myšlenka tohoto postupu je stejná jako v předchozí sekci – původní maximalizační úlohu v rovnicovém tvaru rozšíříme tak, abychom snadno dostali výchozí BFS, a z řešení rozšířené úlohy rozhodneme, zda je původní úloha nepřípustná, nebo zda existuje výchozí BFS, s nímž můžeme dále pokračovat.

Jak název tohoto postupu napovídá, rozděluje řešení úlohy LP do dvou fází. První fází budeme mít na mysli řešení zmíněné rozšířené úlohy sloužící k nalezení výchozího BFS, druhá fáze je pak samotný základní simplexová metoda tak, jako jsme ji viděli v předchozí kapitole (samotná simplexová metoda se pak někdy nazývá *jednofázová*).

Poznamenejme, že první fáze dvoufázové metody je postavena na přímém využití tvrzení 5.1.

3.1 První fáze

Nejprve převedeme úlohu do rovnicového tvaru s $\mathbf{b} \geq 0$ a přidáme umělé proměnné $w_1, \ldots, w_m \geq 0$ tak, aby platilo

$$A\mathbf{x} + I\,\mathbf{w} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{w} \geq 0.$$

Pak simplexovým algoritmem (jednofázovou metodou) řešíme *pomocnou maximalizační úlohu*

$$\max\left(-w_1 - \cdots - w_m\right) \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} + I\,\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{w} \geq 0.$$

Výchozí BFS v první fázi získáme snadno – je jím bod $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = \mathbf{b}$.

V závislosti na nalezeném optimálním řešení rozšířené úlohy $\left(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{w}^\star\right)$ mohou nastat tři situace:

1. $\sum_{i=1}^m w_i^\star = 0$ a *všechny* umělé proměnné jsou mimo bázi. Pak je $\mathbf{w}^\star = 0$ a nalezené $\mathbf{x}^{(0)}$ je **výchozí BFS** původní úlohy.

2. $\sum_{i=1}^m w_i^\star = 0$, ale *v bázi* zůstane alespoň jedna umělá proměnná s nulovou hodnotou. Vzniká typicky při nadbytečných omezeních nebo degeneraci. Můžeme:

(a) pokračovat v 1. fázi, dokud nebude možné umělé proměnné z báze odstranit, nebo

(b) přejít do 2. fáze a v počáteční tabulce odstranit sloupce všech nebázických umělých proměnných; pokud je některá umělá proměnná v bázi s nulou a její řádek je lineární kombinací ostatních, jde o nadbytečné omezení – řádek i sloupec odstraníme.

3. Je-li $\sum_{i=1}^{m} w_i^\star > 0$, původní úloha je **nepřípustná**.

3.2 Druhá fáze

Nastane-li první nebo druhá situace, odstraníme z tabulky všechny sloupce umělých proměnných, nahradíme účelovou funkci hodnotou původní $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ a přepočítáme z-ovou řádku pro danou bázi. Tím získáme výchozí simplexovou tabulku pro původní úlohu a dopočítáme optimum obvyklým způsobem.

3.3 Příklady

Na následujících třech příkladech ilustrujeme všechny tři výše zmíněné scénáře, které mohou v první fázi na základě tvaru výpočtů nastat.´

Příklad 5.6: Dvoufázová metoda

Ukažme si postup metody umělé báze na jednoduchém příkladu, kdy chceme

$$\textbf{maximalizovat} \quad z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad \textbf{za podmínek} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. fáze. Přidáme umělé proměnné w_1, w_2 a řešíme

$$\max(-w_1 - w_2) \quad \text{při} \quad x_1 - x_2 + x_3 + w_1 = 1, \;\; x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 4, \;\; \mathbf{x}, \mathbf{w} \geq 0.$$

Označme $\tilde{z} = -w_1 - w_2$.

Počáteční tabulka.

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 - x_1 + x_2 - x_3, \\ w_2 &= 4 - x_1 - x_2 - 2x_3, \\ \tilde{z} &= -5 + 2x_1 + 3x_3. \end{aligned}$$

Krok 1. Vstupuje x_3, vystupuje w_1.

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_1 + x_2 - w_1, \\ w_2 &= 2 + x_1 - 3x_2 + 2w_1, \\ \tilde{z} &= -2 - x_1 + 3x_2 - 3w_1. \end{aligned}$$

Krok 2. Vstupuje x_2, vystupuje w_2.

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}w_1 - \tfrac{1}{3}w_2, \\ x_3 &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}w_1 - \tfrac{1}{3}w_2, \\ \tilde{z} &= -w_1 - w_2. \end{aligned}$$

Optimum 1. fáze je $\tilde{z}^\star = 0$ při $w_1 = w_2 = 0$. Získáme BFS

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}).$$

2. fáze. Odstraníme sloupce $\mathbf{w}$ a řešíme původní úlohu

$$z = x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 + x_1 \quad \text{při} \quad \begin{aligned} x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x_1, \\ x_3 &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}x_1. \end{aligned}$$

Vstupuje x_1, vystupuje x_3. Po pivotu a dosazení $x_3 = 0$:

$$\mathbf{x}^\star = (\tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 0), \qquad z^\star = \tfrac{17}{2}.$$

Příklad 5.7: Dvoufázová metoda a odhalení nepřípustnosti

Abychom si připomněli obecný postup, uvažujme úlohu nejprve v nerovnicovém tvaru, v níž je cílem

$$\textbf{maximalizovat} \quad z = 3x_1 + 5x_2 \qquad \textbf{za podmínek} \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 6, \\ 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 &\le 7, \\ x_1 + x_2 &\ge 16, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Převod na rovnosti a Fáze 1.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_4 &= 7, \\ x_1 + x_2 - x_5 + w &= 16, \\ x_{1,2,3,4,5},\ w &\ge 0. \end{aligned} \qquad \max \tilde{z} = \max(-w).$$

Počáteční bázické proměnné jsou x_3, x_4, w:

$$x_3 = 6 - x_1 + 2x_2, \quad x_4 = 7 - 2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2, \quad w = 16 - x_1 - x_2 + x_5.$$

Nejmenší možné w dostaneme volbou $x_5 = 0$. Z druhé rovnice platí

$$2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le 7 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \le 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le 7 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 \le 14.$$

Proto

$$w \ge 16 - (x_1 + x_2) \ge 2, \quad \Rightarrow \quad \max \tilde{z} = -w = -2 < 0.$$

Optimální hodnota 1. fáze je záporná, tedy $\sum w_i^\star > 0$. Původní úloha je **nepřípustná**.

Příklad 5.8: Dvoufázová metoda – nadbytečné omezení

Budeme se zabývat úlohou

$$\textbf{maximalizovat} \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \textbf{za podmínek} \quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 15, \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 &= 50, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. fáze. Přidáme w_1, w_2, w_3 a řešíme $\max -(w_1 + w_2 + w_3)$:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + w_1 &= 15, \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 + w_2 &= 50, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + w_3 &= 20. \end{aligned}$$

Máme:

$$\tilde{z} = -w_1 - w_2 - w_3 = -85 + 13x_1 + 7x_2 - x_3.$$

Vstupuje x_1 , vystupuje w_1. Po eliminaci má $\tilde{z}$-řádek kladný koeficient u x_2 a vstoupí x_2 a opustí w_2. Po těchto krocích platí $\tilde{z}^\star = 0$, přičemž w_3 zůstane v bázi s nulovou hodnotou a jeho řádek má ve sloupcích x samé nuly. Jde o **nadbytečné omezení**. Řádek i sloupec w_3 odstraníme a přejdeme do 2. fáze se dvěma rovnicemi. Podrobnosti výpočtů přenecháváme čtenáři.

Kontrola nadbytečnosti přímo. Třetí rovnice je lineární kombinací prvních dvou:

$$(2) \; - \; 2 \cdot (1) : \quad \begin{aligned} (8x_1 + 4x_2 - x_3) - 2(3x_1 + x_2 - x_3) &= 2x_1 + 2x_2 + x_3, \\ 50 - 2 \cdot 15 &= 20. \end{aligned}$$

Omezení je tedy skutečně nadbytečné.

2. fáze. Po odstranění nadbytečného řádku řešíme z výchozí báze simplexovou metodou a dostaneme

$$\mathbf{x}^\star = \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{15}{2}, 0\right), \qquad z^\star = \tfrac{35}{2}.$$