KAPITOLA 3

ZÁKLADNÍ VĚTA LP A GRAFICKÉ ŘEŠENÍ

Tato kapitola shrnuje klíčový výsledek teorie LP – že pokud optimum existuje, musí ležet v jednom z „rohů“ přípustné oblasti, tedy v některém bázickém přípustném řešení (BFS). Tím se složitá úloha maximalizace na nekonečně mnoha bodech redukuje na konečný počet kandidátů.

V první části dokážeme a geometricky vyložíme Základní větu lineárního programování, která propojuje algebraické a geometrické pojetí úlohy. Ve druhé části pak na příkladech v rovině ukážeme, jak lze tento princip aplikovat pomocí grafické metody, kdy se optimum určuje z průniku poloprostorů a posouvání vrstevnic účelové funkce.

1 Základní věta lineárního programování

Z předchozích kapitol už máme vše potřebné: sjednocený *rovnicový tvar*

$$\max\ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

geometrický slovník (konvexní mnohostěny, vrcholy, viz Def. 2.13) a algebraický nástroj v podobě bázických přípustných řešení (viz Def. 2.16). Nastal čas spojit tyto stavební kameny v důležitý výsledek teorie LP: pokud optimum úlohy existuje, najdeme je „v rohu“ přípustného mnohostěnu, tedy v některém BFS. To je obsahem následující věty.

Věta 3.1: Základní věta lineárního programování

Uvažme úlohu lineárního programování v rovnicovém tvaru

$$\textbf{maximalizovat} \quad \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \quad \textbf{za podmínek} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pak platí:

(i) *Pokud existuje aspoň jedno přípustné řešení, a přitom účelová funkce je na množině všech přípustných řešení shora omezena, potom existuje optimální řešení.*

(ii) *Existuje-li optimální řešení, potom i některé z bázických přípustných řešení je optimální.*

Důkaz věty.

Použijeme některé obraty, které se budou v trochu složitějším provedení opakovat v simplexové metodě, takže tento důkaz je jakási příprava.

Poznamenejme ještě, že část (i) se také dá dokázat z obecného výsledku matematické analýzy (spojitá funkce na kompaktní množině nabývá maxima). Zde se bez něj ale obejdeme.

Dokážeme následující tvrzení:

Je-li účelová funkce úlohy v rovnicovém tvaru shora omezena, potom pro každé přípustné řešení $\mathbf{x}_0$ *existuje bázické přípustné řešení* $\hat{\mathbf{x}}$ *se stejnou nebo větší hodnotou účelové funkce,* $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_0$.

Jak z toho plyne věta? Je-li úloha přípustná a omezená, existuje podle tvrzení pro každé přípustné řešení nějaké bázické přípustné řešení se stejnou nebo větší hodnotou účelové funkce. Protože bázických přípustných řešení je jen konečně mnoho, musí některé z nich dávat největší hodnotu, neboli být optimální. Tak dostáváme naráz části (i) a (ii).

Abychom dokázali tvrzení, uvažme nějaké přípustné řešení $\mathbf{x}_0$. Mezi všemi přípustnými řešeními $\mathbf{x}$ splňujícími $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_0$ zvolíme nějaké takové, jež má co nejvíc nulových složek, a nazveme ho $\hat{\mathbf{x}}$. Definujeme indexovou množinu

$$K \ = \ \{\, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \hat{x}_j > 0\,\}.$$

Má-li matice A_K lineárně nezávislé sloupce, je $\hat{\mathbf{x}}$ bázické přípustné řešení (*viz Lemma 2.19*) a jsme hotovi.

Nechť jsou tedy sloupce A_K lineárně závislé, to znamená, že pro nějaký nenulový $|K|$-složkový vektor $\mathbf{v}$ platí $A_K\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Doplníme $\mathbf{v}$ nulami v pozicích mimo K na n-složkový vektor $\mathbf{w}$ (tedy $\mathbf{w}_K = \mathbf{v}$ a $A\mathbf{w} = A_K\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

Chvíli předpokládejme, že $\mathbf{w}$ splňuje následující dvě podmínky:

(a) $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w} \geq 0$.

(b) Existuje $j \in K$, pro něž $w_j < 0$.

Pro reálné číslo $t \geq 0$ se podívejme na vektor $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{w}$. Ukážeme, že pro vhodné $t_1 > 0$ je $\mathbf{x}(t_1)$ přípustné a má více nulových složek než $\hat{\mathbf{x}}$. Přitom

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}(t_1) \;=\; \mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} + t_1\,\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w} \;\geq\; \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 + t_1\,\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w} \;\geq\; \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0,$$

takže dostaneme spor s tím, že $\hat{\mathbf{x}}$ mělo mít nejvíc nulových složek.

Pro všechna t platí $A\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}$, poněvadž $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ a $A\mathbf{w} = A_K\mathbf{v} = \mathbf{0}$, neboť $\hat{\mathbf{x}}$ je přípustné. Dále pro $t = 0$ má $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}$ všechny složky z K ostře kladné a všechny ostatní složky nulové. Pro j-tou složku $x_j(t)$ máme $x_j(t) = \hat{x}_j + t\,w_j$, a je-li $w_j < 0$ jako v podmínce (b), pro dost velké t platí $x_j(t) < 0$. Jestliže začneme s $t = 0$ a necháme t růst, potom se $x_j(t)$, pro něž $w_j < 0$, budou zmenšovat, a v jistém okamžiku t_1 první z nich dosáhne hodnoty 0. V této chvíli $\mathbf{x}(t_1)$ má pořád ještě všechny složky nezáporné, čili je přípustné, ale má oproti $\hat{\mathbf{x}}$ přinejmenším jednu nulovou složku navíc. Z toho, jak už jsme řekli, plyne spor.

Co když ale vektor $\mathbf{w}$ podmínkám (a) nebo (b) nesplňuje? Pokud $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w} = 0$, (a) platí a (b) pak můžeme vždycky zachránit případnou změnou znaménka $\mathbf{w}$ (poněvadž $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$). Takže předpokládejme $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w} \neq 0$, a zase případnou změnou znaménka docílíme $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w} > 0$. Neplatí-li teď (b), musí být $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$. To ale znamená, že $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ pro všechna $t \geq 0$, a tudíž všechna taková $\mathbf{x}(t)$ jsou přípustná. A hodnota účelové funkce $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w}$ roste nade všechny meze pro $t \to \infty$, takže úloha je neomezená. Tím je důkaz hotov. ■

Následující výrok nám pomůže spojit geometrický a algebraický pohled na řešení úlohy LP. Konkrétně objasníme, že vrcholy polyedru P jsou přesně bázicky přípustné body.

Věta 3.2: Vrchol = BFS (geometricko-algebraická ekvivalence)

Buď P množina všech přípustných řešení úlohy lineárního programování v rovnicovém tvaru (tedy P je konvexní mnohostěn). Pak následující podmínky pro bod $\mathbf{v} \in P$ jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{v}$ je vrchol mnohostěnu P.

(ii) $\mathbf{v}$ je bázické přípustné řešení uvažované úlohy.

Důkaz věty.

Implikace (i)⇒(ii) plyne ihned ze Základní věty (kde za $\mathbf{c}$ zvolíme vektor definující vrchol $\mathbf{v}$), a zbývá dokázat (ii)⇒(i).

Mějme bázické přípustné řešení $\mathbf{v}$ s přípustnou bází B a definujme vektor $\hat{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$ předpisem $\hat{c}_j = 0$ pro $j \in B$ a $\hat{c}_j = -1$ jinak. Máme $\hat{\mathbf{c}}^\mathsf{T}\mathbf{v} = 0$, a přitom $\hat{\mathbf{c}}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq 0$ pro libovolné $\mathbf{x} \geq 0$, tedy $\mathbf{v}$ maximalizuje účelovou funkci $\hat{\mathbf{c}}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Navíc $\hat{\mathbf{c}}^\mathsf{T}\mathbf{x} < 0$ kdykoli má

$\mathbf{x}$ nenulovou složku mimo B. Ale podle Věty 2.20 je v jediné přípustné řešení se všemi složkami mimo B nulovými, takže $\mathbf{v}$ je jediný bod z P maximalizující $\hat{\mathbf{c}}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. ■

Poznámka 3.3: Geometrická interpretace

- Přípustná množina $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ je konvexní mnohostěn. Každý vektor $\mathbf{c}$ definuje *podpůrnou nadrovinu* $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \alpha\}$; posouváme-li ji ve směru $\mathbf{c}$, hodnota $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ roste a poslední dotyk s P určuje maximum.
- Je-li optimum konečné, poslední dotyk nastane na nějaké *stěně* P; v typickém (nedegenerovaném) případě je to *jediný bod* — vrchol (roh). V degeneraci může být optimální celá hrana/ploška, ale podle Věty 3.2 má stejnou hodnotu i alespoň jeden vrchol.

  Platí, že optimálních řešení je nekonečně mnoho, právě tehdy když existují alespoň dva různé optimální vrcholy/BFS.

  Důvod: P je konvexní. Pokud dvě různá BFS $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ dosahují stejného optima $z^\star$, pak každá konvexní kombinace $\lambda\mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}$ je přípustná a má hodnotu $z^\star$. Tím dostaneš celou úsečku optim. Naopak, nekonečná optimální množina musí obsahovat alespoň dva vrcholy.
- Algebraické čtení rohu: vybereme m lineárně nezávislých sloupců A_B a položíme nebázické složky na nulu; řešení $A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ dává BFS, tj. *vrchol* P. Základní věta 3.1 proto redukuje hledání optima na „prohledávání rohů“.

Praktický (neefektivní) důsledek: „vyjmenuj všechna BFS“. Základní věta poskytuje korektní, ale výpočetně nevhodný algoritmus:

1. Projděte všechny m-prvkové podmnožiny $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
2. Je-li A_B regulární, spočítejte kandidáta $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ a položte $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ ($N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$).
3. Je-li $\mathbf{x}_B \geq 0$, máte BFS, tak vyhodnoťte $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ a uložte zatím nejlepší.

Pokud dvě různé BFS dosahují téže maximální hodnoty, pak je optimálních řešení nekonečně mnoho.

Podle Věty 2.20 je pro každou přípustnou bázi nejvýše jedno BFS, takže algoritmus *nemine* žádné kandidátní optimum — je-li optimum konečné, *některé* BFS je optimální. Nevýhoda je zřejmá: počet zkoušených bází je $\binom{n}{m}$ (např. pro $n = 2m$ zhruba $4^m/\sqrt{\pi m}$), takže jde o exponenciální čas. Navíc takto formulovaný postup neodhalí (rozmyslete si).

Na závěr této sekce shrneme všechny zmíněné poznatky do jednoho velkého tvrzení.

Věta 3.4: Základní věta LP – „vše v jednom“

Uvažme úlohu v rovnicovém tvaru

$$\max\ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{při} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

a její přípustnou množinu $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$. Pak nastane právě jedna z možností:

(a) **Nepřípustná:** $P = \varnothing$.

(b) **Neomezená:** $P \neq \varnothing$ a existuje $\mathbf{w} \geq 0$ s $A\mathbf{w} = 0$ a $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{w} > 0$.

(c) **Konečné optimum:** $P \neq \varnothing$ a maximum je dosaženo.

Navíc platí:

(i) Je-li (c), potom existuje optimální *bázické přípustné řešení* (BFS).

(ii) Body typu BFS jsou právě *vrcholy* polyedru P.

(iii) Označme $z^\star = \max_{\mathbf{x}\in P} \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (a) Optimálních řešení je nekonečně mnoho.
- (b) Existují alespoň dva různé optimální vrcholy/BFS.
- (c) Průnik $P \cap \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = z^\star\}$ je stěna kladné dimenze.

2 Grafické řešení úloh

Následující část ilustruje, jak v $\mathbb{R}^2$ řešit LP *graficky*: narýsujeme průnik poloprostorů (přípustnou oblast) a posouváme *vrstevnice* účelové funkce ve směru zlepšení, dokud se ještě dotýkají přípustné oblasti. Tato metoda je výhodná pro budování intuice a pro malé rozměry, nicméně ve vyšších dimenzích přirozeně mekde p praktickou výpočetní metodou.

Grafická metoda v $\mathbb{R}^2$: stručný postup

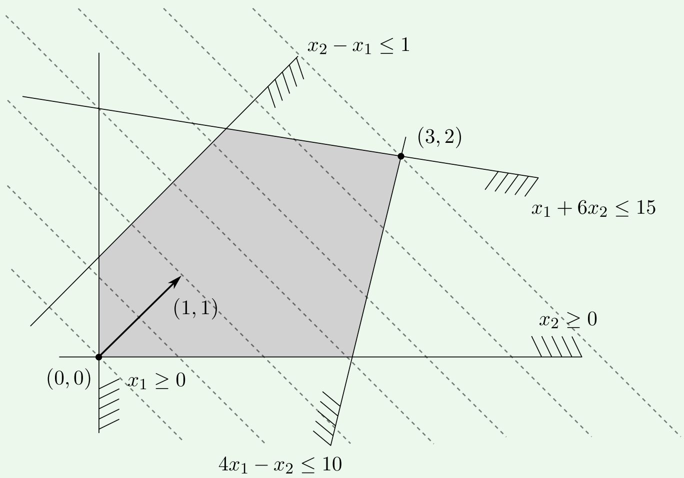
1. **Znázorni přípustnou oblast:** pro každé omezení narýsuj hranici a vyznač odpovídající poloprostor; průnik všech poloprostorů je množina P.
2. **Vrstevnice účelové funkce:** nakresli izočáry $c^\mathsf{T}x$ = konst a šipkou označ směr zlepšování (pro max. směrem rovnoběžným s c).
3. **Posouvej a najdi dotyk:** posouvej vrstevnice ve směru zlepšení a určete první/poslední dotyk s P. V typickém případě jde o vrchol P, v degeneraci o celou hranu. Kandidáty lze ověřit výpočtem průsečíků a porovnáním $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

Příklad 3.5: Úvodní příklad lineárního programování

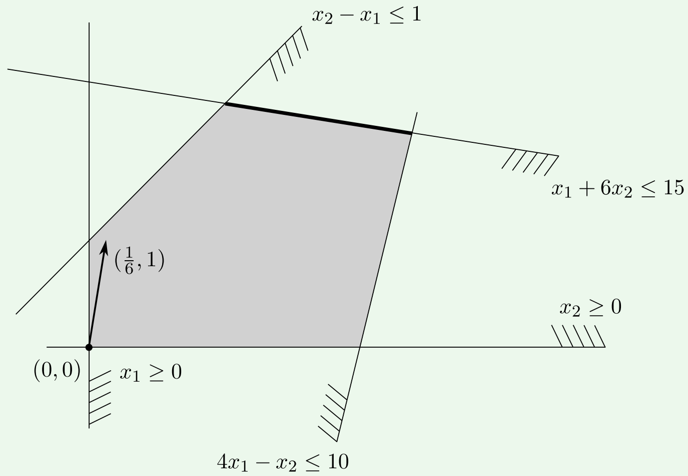
Demonstrujeme grafické řešení na velmi jednoduchém příkladu úlohy lineárního programování.
Chceme **m¨aximalizovat hodnotu** $x_1 + x_2$ **mezi všemi vektory** $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ **splňujícími podmínky:**

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 10 \end{aligned}$$

K této úloze snadno nakreslíme obrázek – průnik všech pěti nerovnic tvoří konvexní mnohoúhelník. Cílem je najít bod v tomto mnohouhelníku, ve kterém nabývá funkce $x_1 + x_2$ největší hodnoty. Takovým bodem je v tomto případě bod $(3, 2)$. Tento bod jsme určili tak, že jsme si představili přímku $x_1 + x_2 =$ konst., která je kolmá na vektor $\mathbf{c} = (1, 1)$, a posouvali jsme ji rovnoběžně ve směru tohoto vektoru, dokud se ještě dotýkala množiny přípustných řešení. Nejvzdálenějším takovým bodem byl právě bod $(3, 2)$, a tam tedy nastává maximum. Geometricky tedy hledáme nejvzdálenější přípustný bod ve směru růstu účelové funkce, a ten odpovídá dotyku s hranicí oblasti definovanou omezujícími podmínkami.



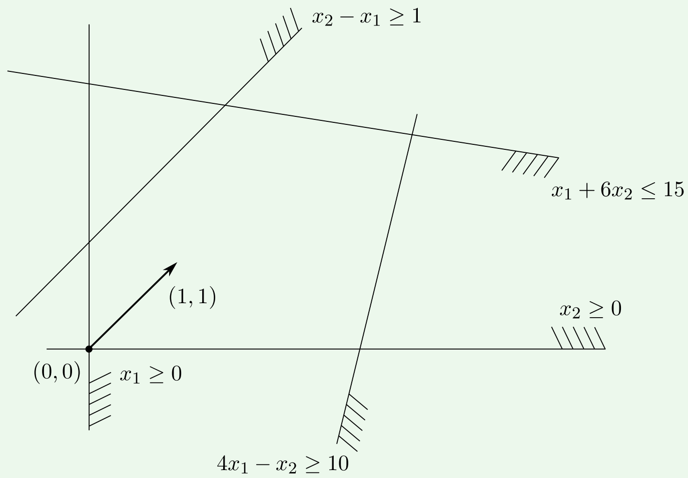
Pokud bychom změnili směr vektoru účelové funkce, například na $(\frac{1}{6}, 1)$, zjistíme, že všechny body na tučně vytažené hraně pětiúhelníka na následujícím obrázku jsou optimálními řešeními, a tedy máme nekonečně mnoho optimálních řešení.



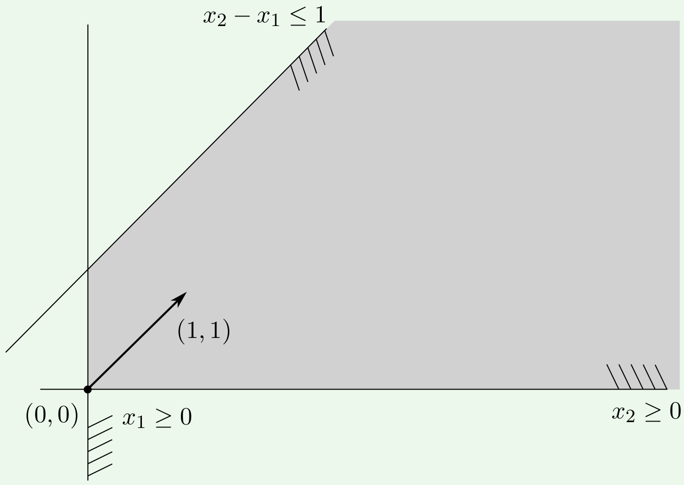
Změníme-li některé nerovnosti, může úloha ztratit přípustná řešení. Například po změně nerovností na

$$x_2 - x_1 \geq 1, \quad 4x_1 - x_2 \geq 10,$$

již neexistuje žádný bod, který by vyhovoval všem podmínkám – úloha nemá řešení. V praxi pak hovoříme o tom, že *přípustná množina* je prázdná. Situaci opět znázorníme na následujícím obrázku.



Na závěr, odstraníme-li nyní některé podmínky (např. $x_1+6x_2 \leq 15$ a $4x_1-x_2 \leq 10$), může se stát, že hodnota účelové funkce může růst neomezeně. Taková úloha se nazývá *neomezená*.



Rekapitulace toho, jaké situace mohou v $\mathbb{R}^2$ nastat:

a) **Nepřípustná úloha:** průnik poloprostorů je prázdný.

b) **Neomezená úloha:** $P \neq \varnothing$, ale $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ je na P neomezené.

c) **Jedno optimum:** pro omezený konvexní mnohostěn P leží v některém vrcholu (typicky jedinečné).

d) **Nekonečně mnoho optim:** hrana (úsečka), popř. polopřímka či celá přímka.

Poznámka 3.6: Propojení se Základní větou LP

Jestliže P je neprázdný *omezený konvexní mnohostěn*, pak podle základní věty LP existuje optimum a je dosaženo ve vrcholu (BFS). Grafická metoda je přesně jeho „vizuální“ realizací přes posouvání podpůrných přímek/vrstevnic.