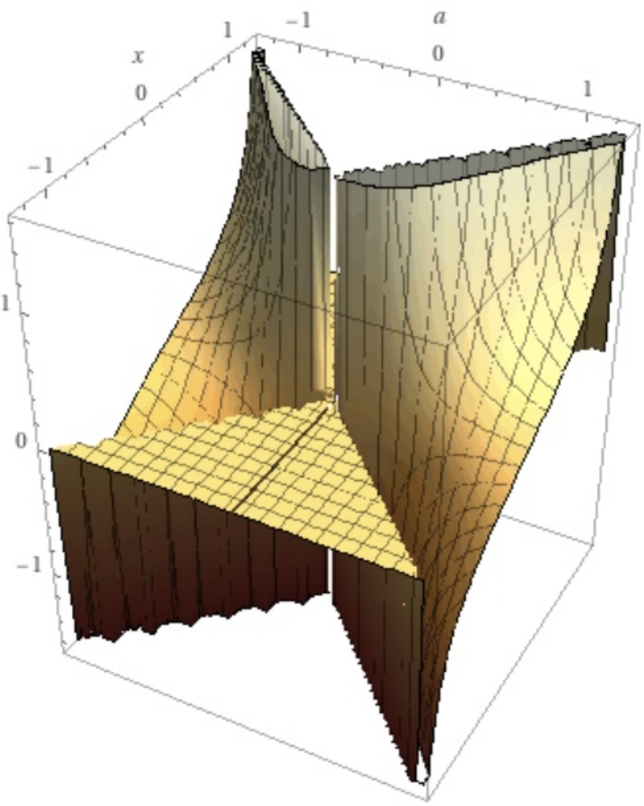
Бурмашев Григорий. 208. Матан – 4

Макс 23:32

когда вбил ласт пункт

в вольфрам



Гриша 1:54

?

$$) \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

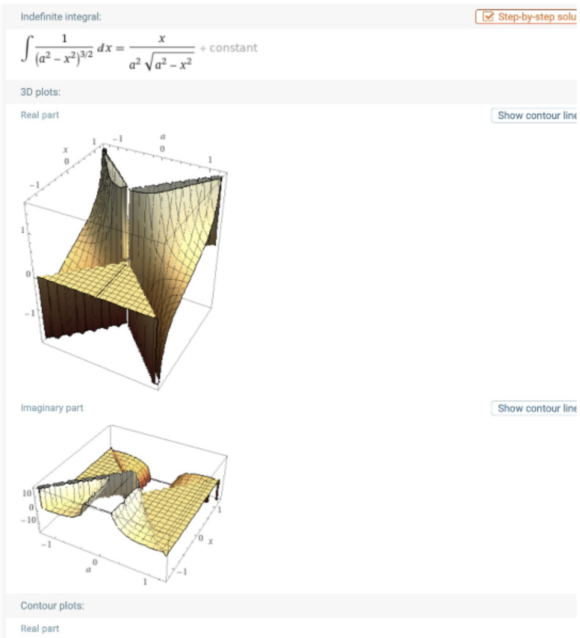
зис?

Екатерина 1:54

Зис

Там хуе мое

Гриша 1:55



Мне вольфрам гамаки рисует

Ниче не знаю

Екатерина 1:56

Какой-то нахуй

В пизду

Пусть C – constant

Номер 6

a)

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2}\,dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}\,dx = \int x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}+3x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

Ответ: $\frac{x^2}{2}+3x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+C$

b)

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{a}{x-1)}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x^2+1}\,dx$$

$$\begin{cases}(x+1)(x^2+1)\cdot a+(x-1)(x^2+1)\cdot b+(x^2-1)\cdot c=1\\ (a+b)x^3+(a+b)x+(a-b+c)x^2+a-b-c=1\end{cases}$$

если x = -1, тогда 0a - 4b + 0c = 1

если x = 1, тогда 4a + 0b +0c = 1

если x = 0, тогда из второго условия $c=-\dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=-\frac{1}{4}\\ c=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\int \frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|-2\arctan x\right]+C$$

Ответ: $\frac{1}{4}\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|-2\arctan x\right]+C$

c)

$$\int \frac{2^{2x-1}-3^{2x+2}}{6^{2x}}\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\cdot 9^{-x}-9\cdot 4^{-x}\right]\,dx = -\frac{9^{-x}}{2\ln 9}+\frac{9\cdot 4^{-x}}{\ln 4}+C$$

Ответ: $-\frac{9^{-x}}{2\ln 9}+\frac{9\cdot 4^{-x}}{\ln 4}+C$

d)

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}\,dx = \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x-1}\,dx = \int \left[e^{2x}+e^x+1\right]\,dx = \frac{e^{2x}}{2}+e^x+x+C$$

Ответ: $\frac{e^{2x}}{2}+e^x+x+C$

e)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot cos^2 x}\,dx = \int \frac{4}{\sin^2(2x)}\,dx = -2\operatorname{ctg}(2x)+C$$

Ответ: $-2\operatorname{ctg}(2x)+C$

f)

$$\int \frac{1}{\cos x+\sin x}\,dx$$

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой (хз было ли это у нас но мне зашарили XD):

Пусть:

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{2}{2}}$$

Тогда:

$$t = tg\frac{x}{2}, dx = \left[\frac{2}{1+t^2}\right]dt$$

Возвращаемся:

$$\int \left[\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\right]\left[\frac{2}{1+t^2}\right]dt = \int \left[\frac{2}{-t^2+2t+1}\right]dt = 2\cdot\int \frac{1}{(-t^2+2t+1)}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{(2-(t-1)^2)}dt$$

Пусть $s=t-1$, $ds=dt$:

$$2\int \frac{1}{2-s^2}ds = 2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-\frac{s^2}{2}}ds$$

Пусть $u = \frac{s}{\sqrt{2}}$, $du = \frac{ds}{\sqrt{2}}$:

$$\sqrt{2}\int \frac{1}{1-u^2}du = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}(\ln(u+1)-\ln(u-1))+C = \frac{\ln(t+\sqrt{2}-1)-\ln(-t+\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}+C =$$

$$= \frac{\ln(tg\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1)-\ln(-tg\frac{x}{2}+\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}} + C = \frac{\ln\left(\frac{\ln(tg\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1)}{\ln(-tg\frac{x}{2}+\sqrt{2}+1)}\right)}{\sqrt{2}} + C$$

Ответ: $\frac{\ln\left(\frac{tg\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}{tg\frac{x}{2}+\sqrt{2}+1}\right)}{\sqrt{2}} + C$

Номер 7

a)

$$\int x \cdot \sin(x^2)\, dx$$

Пусть $x = t^2$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\int \sqrt{t}\cdot\sin(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int \frac{\sin t}{2}dt = -\frac{\cos(t)}{2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C$$

Ответ: $-\frac{\cos(x^2)}{2} + C$

b)

$$\int \frac{e^x + e^{2x}}{1-e^x}\, dx$$

Пусть $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \left[\frac{t+t^2}{1-t}\cdot\frac{1}{t}\right] dt = \int \frac{t(t+1)}{(1-t)t}dt = \int \frac{t+1}{1-t}dt = \int (\frac{t}{1-t} + \frac{1}{1-t})dt =$$

$$= -\ln|t-1| - \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = -2\ln\left(|t-1|\right) - t + C =$$

$$-2\ln\left(|e^x-1|\right) - e^x + C$$

Ответ: $-2\ln\left(|e^x - 1|\right) - e^x + C$

c)

$$\int \frac{dx}{x(\ln x + 5)}$$

Пусть $t = \ln x$, $x = e^t$, $dx = e^t \cdot dt$, тогда х сократится:

$$\int \frac{e^t}{e^t \cdot (t+5)} dt = \int \frac{dt}{t+5} = \ln|t+5| + C = \ln(|\ln x + 5|) + C$$

Ответ: $\ln(|\ln x + 5|) + C$

d)

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)}\, dx$$

Пусть $t = \sin x$, $dx = \frac{dt}{\cos x}$

$$\int \left[\frac{\cos x}{(1-t)(1+t)} \cdot \frac{1}{\cos x} \right] dt = \int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \cdot (\ln|t+1| - \ln|t-1|) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| \right) + C$$

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\left| \frac{\sin x+1}{\sin x-1} \right| \right) + C$

e)

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - 4\sin^2 x}}\, dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)}}\, dx$$

Пусть $t = 2\sin x$, $dx = \frac{dt}{2\cos x}$

$$\int \left[\frac{2t \cdot cosx}{2\sqrt{(1-t)(1+t)}} \cdot \frac{1}{2\cos x} \right] dt = \int \frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-t^2}}{2} + C = -\frac{\sqrt{1 - 4\sin^2 x}}{2} + C$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{1-4\sin^2 x}}{2} + C$

f)

$$\int \sin^7 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin^6 x\,dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x)^3\,dx$$

Пусть $t = \cos x$, $dx = -\frac{dt}{\sin x}$

$$\int \left[\sin x \cdot (1-t^2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right)\right] dt = \int -(1-t^2)^3\,dt = \int (t^2-1)^3 dt =$$

$$= \int (t^2-2t+1)^3 dt = \int (t^6-3t^4+3t^2-1)dt = \frac{t^7}{7} - 3\cdot\frac{t^5}{5} + t^3 - t + C =$$

$$= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{3\cos^5 x}{5} + \cos^3 x - \cos x + C$$

Ответ: $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{3\cos^5 x}{5} + \cos^3 x - \cos x + C$

g)

$$\int x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Пусть $x = \sin t$, $dx = \cos t\ dt$, $t = \mathrm{arcsin} x$

$$\int \sin^2 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\ dt = \int \sin^2 t \cdot \cos t \cdot \cos t\ dt =$$

$$= \int (\sin^2 t \cdot cos^2 t)dt = \int \frac{\sin^2(2t)}{4} dt = \int \frac{1-\cos 4t}{8} dt = \frac{1}{8} \cdot \int (1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{\mathrm{arcsin}}{8} - \frac{\sin(4\mathrm{arcsin} x)}{8\cdot 4} + C = \frac{\mathrm{arcsin}}{8} - \frac{\sin(4\mathrm{arcsin} x)}{32} + C$$

Ответ: $\frac{\mathrm{arcsin}}{8} - \frac{\sin(4\mathrm{arcsin} x)}{32} + C$

h)

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Пусть $x = a \cdot \sin t$, $t = \mathrm{arcsin}\frac{x}{|a|}$, $dx = a \cdot \cos t\ dt$

Тогда $(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} = (a^2 - a^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} = |a^3| \cdot |\cos^3 t|$

$$\int \frac{a \cdot \cos t\ dt}{|a^3| \cdot |\cos^3 t} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arcsin}\left(\frac{x}{|a|}\right)\right)}{a^2} + C$$

Ответ: $\frac{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arcsin}\left(\frac{x}{|a|}\right)\right)}{a^2} + C$