ТВиМС, дз какое-то

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

28 апреля 2022 г.

Номер 1

Ну, нужно найти мат.ожидания, так что ищем их, для этого надо выразить плотности, выражаем (берем с сема, хех):

$$\rho_{X_{(n)}}(t) = I_{[a,b]} \cdot \frac{n \cdot (t-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

$$\rho_{X_{(1)}}(t) = I_{[a,b]} \cdot \frac{n \cdot (b-t)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

Тогда:

$$\mathbb{E}\left[X_{(n)}\right] = \int\limits_a^b t \cdot \frac{n \cdot (t-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dt = \frac{n}{(b-a)^n} \int\limits_a^b (t-a)^n dt + \frac{na}{(b-a)^n} \int\limits_a^b (t-a)^{n-1} dt = \frac{a+bn}{n+1}$$

А для $X_{(1)}$:

$$\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = \int\limits_a^b t \cdot \frac{n \cdot (b-t)^{n-1}}{(b-a)^n} dt = n \cdot \int\limits_a^b \frac{(t-b)(b-t)^{n-1}}{(b-a)^n} dt + nb \int\limits_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(b-a)^n} dt = \frac{an+b}{n+1}$$

Тогда мат.ожидание:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}X_{(1)} + \frac{1}{2}\mathbb{E}X_{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{an+b}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a+bn}{n+1} = \frac{a+b}{2} = \theta$$

А значит несмещенность есть

Ответ: несмещенность есть

Номер 2

Задача 1 в 1 с сема, только другой n, буду вставлять куски с семинара Зеленова, чтобы не делать одно и тоже.
Хотим доказать, что:

$$X_{(m+1)} \xrightarrow{P} x_{\frac{1}{2}},\ n = 2m \to \infty$$

Решение: По определению сходимости по вероятности, мы должны показать, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim_{m\to\infty} P(|X_{(m+1)} - x_{1/2}| \geq \varepsilon) = 0.$$

Из свойств модуля и формулы для вероятности $\bigcup$ непересекающихся событий получаем:

$$P(|X_{(m+1)} - x_{1/2}| \geq \varepsilon) = P(X_{(m+1)} - x_{1/2} \geq \varepsilon) + P(X_{(m+1)} - x_{1/2} \leq -\varepsilon) =$$

$$= P(X_{(m+1)} \geq x_{1/2} + \varepsilon) + P(X_{(m+1)} \leq x_{1/2} - \varepsilon) \leq$$

$$\leq P(X_{(m+1)} > x_{1/2} + \tfrac{\varepsilon}{2}) + P(X_{(m+1)} \leq x_{1/2} - \varepsilon)$$

Итак, мы можем записать:

$$0 \leq P(|X_{(m+1)} - x_{1/2}| \geq \varepsilon) \leq P(X_{(m+1)} \leq x_{1/2} - \varepsilon) + P(X_{(m+1)} > x_{1/2} + \tfrac{\varepsilon}{2}) \tag{5}$$

Покажем теперь, что оба слагаемых в правой части (5) стремятся к нулю.

Применим представление с семинара:

$$P\left(X_{(m+1)} \leq x_{\frac{1}{2}} - \varepsilon\right) = P\left(\sum_{j=1}^{2m} Y_j^{t_1} \geq m+1\right)$$

Где $t_1 = (x_{\frac{1}{2}} - \varepsilon)$, а величины $Y_1^{t_1}, \ldots Y_{2m}^{t_1}$ – результаты n независимых испытаний с вероятность успеха $p_{t_1} = F_{X_1}(t_1)$ и вероятностью неудачи $q_{t_1} = 1 - F_{X_1}(t_1)$. Сделаем следующее преобразование выражения под знаком вероятности:

$$P\left(\sum_{j=1}^{2m} Y_j^{t_1} \geq m+1\right) = P\left(\frac{\sum Y_j^{t_1} - (2m)\mathbb{E}Y_1^{t_1}}{\sqrt{2m+1}\sqrt{\mathbb{D}Y_1^{t_1}}} \geq \frac{m+1-2m\mathbb{E}Y_1^{t_1}}{\sqrt{2m}\sqrt{\mathbb{D}Y_1^{t_!}}}\right)$$

Из ЦПТ можно вывести, что при $m \to \infty$:

$$P\left(\frac{\sum Y_j^{t_1} - (2m)\mathbb{E}Y_1^{t_1}}{\sqrt{2m+1}\sqrt{\mathbb{D}Y_1^{t_1}}} \geq \frac{m+1-2m\mathbb{E}Y_1^{t_1}}{\sqrt{2m}\sqrt{\mathbb{D}Y_1^{t_!}}}\right) \sim \int\limits_{A_m}^{+\infty} \rho_{N(0,1)}(t)dt$$

Где:

$$A_m = \frac{m+1-2m\mathbb{E}Y_1^{t_1}}{\sqrt{2m}\sqrt{\mathbb{D}Y_1^{t_1}}}$$

Заметим, что $\mathbb{E}Y^{t_1} = p_{t_1}$, а $\mathbb{E}Y^{t_1} = p_{t_1} \cdot q_{t_1}$, поэтому:

$$A_m = \frac{m(1-2p_{t_1}) - p_{t_1}}{\sqrt{2m}\sqrt{p_{t_1} \cdot q_{t_1}}}$$

Вспомним, что $p_{t_1} = F_{X_1}(t_1) = F_{X_1}(x_{1/2} - \varepsilon)$. Из условий нашей задачи (задачи 4 листа 6) ясно, что $F_{X_1}(x_{1/2} - \varepsilon) < F_{X_1}(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$. Поэтому при $m \to \infty$ формула (9) дает $A_m \to +\infty$. Значит, интеграл в правой части формулы (8) стремится к нулю. Следовательно, благодаря формулам (6), (7) и (8) получаем, что $P(X_{(m+1)} \leq x_{1/2} - \varepsilon) \to 0$.

Мы показали, что в правой части (5) слагаемое $P(X_{(m+1)} \leq x_{1/2} - \varepsilon)$ стремятся к нулю. Аналогичным образом можно показать, что слагаемое $P(X_{(m+1)} > x_{1/2} + \frac{\varepsilon}{2})$ тоже стремится к нулю. Сперва запишем, что

$$P\left(X_{(m+1)} > x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - P\left(X_{(m+1)} \leq x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Также:

$$P\left(X_{(m+1)} \leq x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = P\left(\sum_{j=1}^{2m} Y_j^{t_2} \geq m+1\right) \sim \int_{B_m}^{+\infty} \rho_{N(0,1)}(t)dt$$

Где $t_1 = x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}$, величины$Y_1^{t_2}, \dots Y_{2m}^{t_2}$ – результаты n независимых испытаний с вероятность успеха $p_{t_1} = F_{X_1}(t_t)$, а число B_m вычисляется как:

$$B_m = \frac{m+1-(2m)\mathbb{E}Y_1^{t_2}}{\sqrt{2m}\sqrt{\mathbb{D}Y_1^{t_2}}}$$

Заметим, что $\mathbb{E}Y^{t_2} = p_{t_2}$, а $\mathbb{E}Y^{t_2} = p_{t_2} \cdot q_{t_2} = p_{t_2}(1-p_{t_2})$. Поэтому:

$$B_m = \frac{m(1-2p_{t_2}) - p_{t_2}}{\sqrt{2m}\sqrt{p_{t_2} \cdot q_{t_2}}}$$

Поскольку $p_{t_2} = F_{X_2}(t_2) = F_{X_1}(x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2})$, из задачи 4 следует, что:

$$p_{t_2} = F_{X_1}(x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}) > F_{X_1}(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$$

Формула для B_m и неравенство $p_{t_2} > \frac{1}{2}$ гарантируют, что $B_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, поэтому:

$$P\left(X_{(m+1)} \le x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 1$$

$$P\left(X_{(m+1)} > x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - P\left(X_{(m+1)} \le x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0a$$

Итак, мы показали, что $P\left(X_{(m+1)} > x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $P\left(X_{(m+1)} \le x_{\frac{1}{2}} - \varepsilon\right)$ стремятся к нулю, вспомним неравенство из самого начала решения:

$$0 \le P\left(|X_{(m+1)} - x_{\frac{1}{2}}| \ge \varepsilon\right) \le P\left(X_{(m+1)} > x_{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(X_{(m+1)} \le x_{\frac{1}{2}} - \varepsilon\right)$$

Благодаря теореме о зажатой последовательности мы получаем, что $P(|X_{(m+1)} - x_{\frac{1}{2}}| \ge \varepsilon)$ стремится к нулю при $m \to \infty$, отсюда и следует сходимость $X_{(m+1)} \xrightarrow{P} x_{\frac{1}{2}}$ при $n = 2m \to \infty$. Аналогично доказывается для X_m. А значит получаем то, что хотели

Ч.Т.Д

Задача 11 [листок 6]

$$\begin{cases} \varrho(x) = e^{-(x-a)},\ x > a \\ \varrho(x) = 0,\ x \leq a \end{cases}$$

Используем метод момента:

$$\mathbb{E}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x{\cdot}e^{-(x-a)}{\cdot}I_{x>a}dx = \int\limits_{a}^{+\infty} x{\cdot}e^{-(x-a)}dx = -x{\cdot}e^{-(x-a)}\Big|_{a}^{+\infty} + \int\limits_{a}^{+\infty} e^{-(x-a)}dx = a{+}1$$

Значит:

$$\overline{X} = a + 1 \to a = \overline{X} - 1$$

Ответ:

$$a = \overline{X} - 1$$