# Линал. ИДЗ - 2 Вариант 2.

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

17 января 2021 г.

# 1.

Решите матричное уравнение AX = B, где:

$$A = \begin{pmatrix} -18 & 6 & -1 & 0 \\ -23 & -2 & 3 & 2 \\ -6 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -20 & 27 & 28 \\ -23 & 14 & 17 \\ -10 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Решим:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -18 & 6 & -1 & 0 & -20 & 27 & 28 \\ -23 & -2 & 3 & 2 & -23 & 14 & 17 \\ -6 & -1 & 1 & 2 & -10 & 4 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} -18 & 6 & -1 & 0 & -20 & 27 & 28 \\ -5 & -8 & 4 & 2 & -3 & -13 & -11 \\ -6 & -1 & 1 & 2 & -10 & 4 & -2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} -18 & 6 & -1 & 0 & -20 & 27 & 28 \\ -5 & -8 & 4 & 2 & -3 & -13 & -11 \\ -1 & 7 & -3 & 0 & -7 & 17 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -120 & 53 & 0 & 106 & -279 & -134 \\ -5 & -8 & 4 & 2 & -3 & -13 & -11 \\ -1 & 7 & -3 & 0 & -7 & 17 & 9 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -120 & 53 & 0 & 106 & -279 & -134 \\ 0 & -43 & 19 & 2 & 32 & -98 & -56 \\ -1 & 7 & -3 & 0 & -7 & 17 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 9 & -4 & -6 & 10 & 15 & 34 \\ 0 & -43 & 19 & 2 & 32 & -98 & -56 \\ -1 & 7 & -3 & 0 & -7 & 17 & 9 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 9 & -4 & -6 & 10 & 15 & 34 \\ 0 & -7 & 3 & -22 & 72 & -38 & 80 \\ -1 & 7 & -3 & 0 & -7 & 17 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 9 & -4 & -6 & 10 & 15 & 34 \\ 0 & -7 & 3 & -22 & 72 & -38 & 80 \\ -1 & 0 & 0 & -22 & 65 & -21 & 89 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 2 & -1 & -28 & 82 & -23 & 114 \\ 0 & -7 & 3 & -22 & 72 & -38 & 80 \\ -1 & 0 & 0 & -22 & 65 & -21 & 89 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 2 & -1 & -28 & 82 & -23 & 114 \\ 0 & -1 & 0 & -106 & 318 & -107 & 422 \\ -1 & 0 & 0 & -22 & 65 & -21 & 89 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -240 & 718 & -237 & 958 \\ 0 & -1 & 0 & -106 & 318 & -107 & 422 \\ -1 & 0 & 0 & -22 & 65 & -21 & 89 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -65 & 21 & -89 \\ 0 & 1 & 0 & 106 & -318 & 107 & -422 \\ 0 & 0 & -1 & 240 & -718 & 237 & -958 \end{array}\right)$$

Таким образом:

$$X = \begin{pmatrix} -65 - 22a_1 & 21 - 22a_2 & -89 - 22a_3 \\ -318 - 106a_1 & 107 - 106a_2 & -422 - 106a_3 \\ -718 - 240a_1 & 237 - 240a_2 & -958 - 240a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \ \forall a_1, a_2, a_3$$

**Ответ:**

$$\begin{pmatrix} -65 - 22a_1 & 21 - 22a_2 & -89 - 22a_3 \\ -318 - 106a_1 & 107 - 106a_2 & -422 - 106a_3 \\ -718 - 240a_1 & 237 - 240a_2 & -958 - 240a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \ \forall a_1, a_2, a_3$$

## 2.

Решите уравнение относительно неизвестной перестановки X:

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&1&5&6&3&4&8\end{pmatrix}^{12}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&3&6&2&7&4&5\end{pmatrix}^{-1}\right)^{115}X=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&4&2&8&5&3&1\end{pmatrix}$$

Приведем левую часть к циклам и упростим:

$$\big((1274563)^{12}(8)^{12}\cdot((1852)(3)(467))^{-1}\big)^{115}$$

$$\big((1274563)^{12}(8)^{12}\cdot(1258)(3)(476)\big)^{115}$$

$$\big((1274563)^{5}(8)\cdot(1258)(3)(476)\big)^{115}$$

$$((1642357)(8)\cdot(1258)(3)(476))^{115}$$

$$(1642357)^{3}(8)\cdot(1258)^{3}(3)(476)$$

$$(1274563)(8)\cdot(1852)(3)(476)$$

Умножим эти две перестановки:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&7&1&5&6&3&4&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&3&7&2&4&6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&2&1&4&7&5&3&6\end{pmatrix}$$

Мы знаем, что: $aX=b\to X=a^{-1}\cdot b$, тогда:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&2&1&4&7&5&3&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&7&4&6&8&5&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&7&4&6&8&5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&4&2&8&5&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&4&2&1&6&7&3\end{pmatrix}$$

**Ответ:**

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&4&2&1&6&7&3\end{pmatrix}$$

## 3.

Определите чётность перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 21 & 22 & \dots & 97 & 98 & \dots & 115 \\ 95 & 96 & \dots & 115 & 19 & \dots & 94 & 1 & \dots & 18 \end{pmatrix}$$

- От 1го до 21го у нас 21 элемент. Они все идут в порядке возрастания и каждый из них больше, чем все оставшиеся элементы справа, начиная с 22го (их всего $76 + 18 = 94$):

$$21 \cdot 94 = 1974$$

- От 22го до 97го у нас 76 элемент. Они все идут в порядке возрастания и каждый из них больше, чем все оставшиеся элементы справа, начиная с 98го (их всего 18):

$$76 \cdot 18 = 1368$$

- С 98го по 115й элементы идут в порядке возрастания и инверсий там нет.

Значит:

$$1974 + 1368 = 3342$$

$$(-1)^{3342} = 1 \to \text{перестановка чётная}$$

**Ответ:**

перестановка чётная

# 4.

Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & x & 0 \\ x & 0 & 2 & x & 0 & x \\ 6 & 9 & 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 6 & 8 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 8 & x & x \\ 0 & 2 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 7 \begin{vmatrix} x & 0 & 2 & 0 & x \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & x & x \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot x \begin{vmatrix} x & 0 & 2 & x & x \\ 6 & 9 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 8 & x \\ 0 & 2 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

- Найдем значение определителя при коэффициенте -7:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 & 0 & x \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & x & x \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & x & x \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & x \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & x & x \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & x & x \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -7 & 6 \\ 1 & 4 & 8-x & 1-x \\ 0 & -30 & x-8 & x-12 \\ 0 & 0 & -14+2x & 1+2x \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -7 & 6 \\ -30 & x-8 & x-12 \\ 0 & -14+2x & 1+2x \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-918x + 3366) = 918x - 3366$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & x \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & x & x \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 8 & x & x \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot x \begin{vmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 8 & 2 & x \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (23x - 176) - x(-60x + 420) = -46x + 352 + 60x^2 - 420x = 60x^2 - 466x + 35$$

Таким образом:

$$x(918x - 3366) - 6(60x^2 - 466x + 35) = 918x^2 - 3366x - 360x^2 + 2796x - 2112 =$$

$$= 558x^2 - 570x - 2112$$

- Теперь найдем значение определителя при коэффициенте x:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 & x & x \\ 6 & 9 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 8 & x \\ 0 & 2 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot x \begin{vmatrix} 9 & 0 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & 8 & x \\ 2 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 0 & 2 & x & x \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & 8 & x \\ 2 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & 8 & x \\ 2 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 & 7-x \\ 0 & 6 & 4 & -6 \\ 0 & -30 & -16 & x-12 \\ 0 & 12 & 14 & -11+2*x \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 4 & -6 \\ -30 & -16 & x-12 \\ 12 & 14 & -11+2*x \end{vmatrix} =$$

$$= 12x + 3536$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & x & x \\ 9 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & 8 & x \\ 2 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x & x \\ 1 & 4 & 0 & 1-x \\ 0 & -30 & -16 & x-12 \\ 0 & 0 & 6 & 1+2*x \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & x & x \\ -30 & -16 & x-12 \\ 0 & 6 & 1+2*x \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (60x^2 - 226x + 112) = -60x^2 + 226x - 112$$

Таким образом:

$$x(12x+3536)-6(-60x^2+226x-112) = 12x^2+3536x+360x^2+672 = 372x^2+180x+672$$

- Итого:

$$-7(558x^2 - 570x - 2112) + x(372x^2 + 180x + 672) =$$

$$= -3906x^2 + 3990x + 14784 + 372x^3 + 180x^2 + 672x =$$
$$= 372x^3 - 3726x^2 + 4662x + 14784$$

**Ответ:**

$372x^3 - 3726x^2 + 4662x + 14784$

## 5.

Найдите коэффициент при $x^5$ в выражении определителя:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 5 & x & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & x & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & x & 7 & 9 & 1 & 5 \\ 5 & x & 7 & 9 & 8 & 2 & 9 \\ x & 7 & 9 & 8 & 1 & 4 & x \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 4 & x & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 9 & x & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Упростим матрицу: вычтем из первой строки последнюю и из самого левого столбца самый правый (при таких преобразованиях det не изменится):

$$\begin{vmatrix} 8 & -5 & 3 & -4 & 0 & 7 & -6 \\ -5 & 1 & 6 & x & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & x & 7 & 9 & 1 & 5 \\ -4 & x & 7 & 9 & 8 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 8 & 1 & 4 & x \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 4 & x & 0 \\ -6 & 6 & 5 & 9 & x & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

У нас остается всего 6 иксов, значит максимальная степень у икса в определителе будет 6, а чтобы получить 5ю степень, нужно рассматривать перестановки со всеми иксами, кроме какого-то одного. Рассмотрим все возможные такие случаи ($a_{ij}$ – элемент в нашей матрице на i-й строке и j-м столбце):

- Если не берем $a_{24}$:

  Тогда мы точно берем $a_{42}, a_{33}, a_{57}, a_{66}, a_{75}$, чтобы получить пятую степень у икса. Остаются на выбор варианты $a_{11}, a_{14}, a_{21}$. Мы из них можем взять $a_{21}$ и $a_{14}$ (чтобы выполнялось условие на единственность элементов из каждой строки и каждого столбца). Коэффициент в перестановке получается $-5 \cdot (-4) = 20$.

  Итоговая перестановка:

  $$a_{42}a_{33}a_{57}a_{66}a_{75}a_{21}a_{14}$$

  Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ нечетна (7 элементов и 4 цикла), значит знак в определителе будет отрицательный, т.е в итоге -20.

- Если не берем $a_{33}$:

  Тогда мы точно берем $a_{42}, a_{24}, a_{57}, a_{66}, a_{76}$. Остаются на выбор варианты $a_{11}, a_{13}, a_{31}$. Мы берем $a_{31}$ и $a_{13}$ и получаем коэффициент $3 \cdot 3 = 9$.

  Итоговая перестановка:

  $$a_{42}a_{24}a_{57}a_{66}a_{76}a_{31}a_{13}$$

  Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ нечетна (7 элементов и 4 цикла), значит знак в определителе будет отрицательный, т.е в итоге -9.

- Если не берем $a_{42}$:

  Тогда мы точно берем $a_{24}, a_{33}, a_{57}, a_{66}, a_{75}$. Остаются на выбор варианты $a_{11}, a_{12}, a_{41}$. Мы берем $a_{41}, a_{12}$ и получаем коэффициент $-4 \cdot (-5) = 20$.

  Итоговая перестановка:

  $$a_{24}a_{33}a_{57}a_{66}a_{75}a_{41}a_{12}$$

  Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ нечетна (7 элементов и 4 цикла), значит знак в определителе будет отрицательный, т.е в итоге -20.

- Если не берем $a_{57}$

  Тогда мы точно берем $a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{66}, a_{75}$. Остаются на выбор варианты $a_{11}, a_{17}, a_{51}$. Мы должны взять $a_1 1$ и $a_{51}$. Но $a_{51} = 0$, значит перестановка будет равна нулю.

- Если не берем $a_{66}$:

  Тогда мы точно берем $a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{57}, a_{75}$. Остаются на выбор варианты $a_{11}, a_{16}, a_{61}$. Мы должны взять $a_{16}$ и $a_{61}$. Коэффициент в перестановке получается $7 \cdot 7 = 49$.

  Итоговая перестановка:

  $$a_{24}a_{33}a_{42}a_{57}a_{75}a_{16}a_{61}$$

Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ нечетна (7 элементов и 4 цикла), значит знак в определителе будет отрицательный, т.е в итоге -49.

- Если не берем $a_{75}$:

  Тогда мы точно берем $a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{57}$. Остаются на выбор варианты $a_{11}, a_{15}, a_{71}$. Мы должны взять $a_{15}$ b $a_{71}$. Но $a_{15} = 0$, значит перестановка будет равна нулю.

**Итого:**

$-20 - 9 - 20 - 49 = -98$. Т.е коэффициент при $x^5$ будет равен -98

**Ответ:**
-98