ТВиМС, дз – 4

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

4 октября 2021 г.

Номер 8

Будем решать с помощью формулы Байеса, для этого введем события:

A_n – преподаватель получает работу студента n

B – студент решил три задачи

Нас интересует вероятность:

$$P(A_n|B)$$

Тогда по формуле:

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n) \cdot P(A_n)}{P(B)}$$

Теперь считаем все нужные нам вероятности:

$P(A_n) = \frac{1}{3}$, т.к всего 3 студента

$P(B|A_n)$ – решено три задачи n-ым студентом

Нам нужно расставить 3 верно решенных задачи на 4 позиции, т.е у нас будет 4 множителя, каждый из которых имеет вид (т.к все задачи одинаковые и порядок нам не важен) [под решением подразумеваю n-го студента]:

$$P(\text{решена неверно}) \cdot P(\text{верно})^3$$

При этом:

$$P(\text{решена неверно}) = 1 - P(\text{верно})$$

Тогда:

$$P(B|A_1) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 4 = \frac{27}{64}$$

$$P(B|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4 = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4} = \frac{16}{64}$$

$$P(B|A_3) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 4 = 3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$$

Теперь можем заметить, что $P(B)$ не зависит от выбора студента и для всех студентов одинакова, т.е при сравнении вероятностей она нас не интересует, вероятность $P(A_n)$ у всех студентов тоже одинаковая, значит наибольшая вероятность будет при наибольшем множителе $P(B|A_n)$, это:

$$P(B|A_1) = \frac{27}{64} > \frac{16}{64} > \frac{3}{64}$$

Ответ: работа скорее всего принадлежит первому студенту

Номер 9

Введем аналогичные предыдущей задаче события:

$$A_n \text{ – } n\text{-е заболевание}$$
$$B \text{ - 3 раза из 4 тест положителен}$$

Тогда:

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n) \cdot P(A_n)}{P(B)}$$

Решение в таком случае (почти) аналогичное задаче номер 8:

$$P(B|A_n) \text{ – получили 3 положительных теста при условии болезни } A_n$$

Аналогично расставляем 3 верных теста на 4 позиции, при этом вероятности верных и неверных тестов мы знаем из условия (верные 0.1 для A_1, 0.2 для A_2 и 0.8 для A_3)

$$P(B|A_1) = (0.1)^3 \cdot 0.9 \cdot 4 = \frac{1}{1000} \cdot \frac{9}{10} \cdot 4 = \frac{9 \cdot 4}{10000} = \frac{9}{2500}$$
$$P(B|A_2) = (0.2)^3 \cdot 0.8 \cdot 4 = \frac{1}{125} \cdot \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{16}{625}$$
$$P(B|A_3) = (0.8)^3 \cdot 0.2 \cdot 4 = \frac{64}{125} \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{256}{625}$$

По аналогии с предыдущей задачей видим, что вероятность третьей болезни выше остальных, но нам нужно не это, считаем $P(B)$:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

Знаем:

$$P(A_n) = p_n \text{ (дано в условии)}$$

Тогда:

$$P(B) = \frac{9}{2500} \cdot \frac{1}{2} + \frac{16}{625} \cdot \frac{1}{3} + \frac{256}{625} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{5000} + \frac{16}{1875} + \frac{128}{1875} = \frac{393}{5000}$$

Теперь считаем:

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{9}{2500} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{393}{5000}} = \frac{3}{131}$$
$$P(A_2|B) = \frac{\frac{16}{625} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{393}{5000}} = \frac{128}{1179}$$
$$P(A_3|B) = \frac{\frac{256}{625} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{393}{5000}} = \frac{1024}{1179}$$

Ответ: вероятность первого заболевания $\frac{3}{131}$, второго $\frac{128}{1179}$, третьего $\frac{1024}{1179}$

Номер 10

Введем события:

$$\text{A – человек здоровый}$$
$$\text{B – человек богатый}$$
$$\text{C – человек умный}$$

Из условия получаем, что:

$$P(A) > \frac{1}{2} \text{ (больше половины)}$$
$$P(B) > \frac{1}{2} \text{ (больше половины)}$$
$$P(C) \neq 0 \text{ (есть хотя бы один умный)}$$

Используем формулу независимых событий:

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) > \frac{1}{2} \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) > \frac{1}{2} \cdot P(C)$$

К тому же заметим, что:

$$A \cap C \subseteq C$$
$$B \cap C \subseteq C$$

Отсюда:

$$X = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq C$$

Другими словами:

$$P(X) \leq P(C)$$

Посмотрим на $P(X)$:

$$P(X) = P(A \cap C) \left[> \frac{1}{2} P(C)\right] + P(B \cap C) \left[> \frac{1}{2} P(C)\right] - P(A \cap B \cap C) \leq P(C)$$

Из $> \frac{1}{2}P(C)$ у двух множителей получаем, что:

$$[> P(C)] - P(A \cap B \cap C) \leq P(C)$$
$$[> P(C)] - P(C) \leq P(A \cap B \cap C)$$
$$0 < P(A \cap B \cap C) =$$
$$= P(\text{гражданин здоровый и богатый и умный})$$
$$\rightarrow \text{ такой гражданин есть}$$

Ч.Т.Д