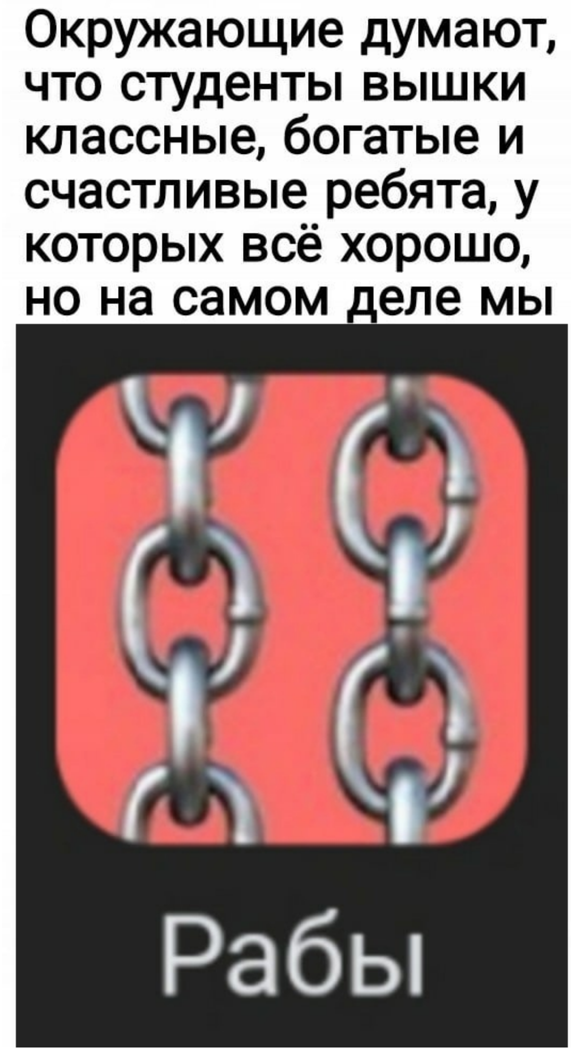
Бурмашев Григорий, 208. Матан – 12



Тех получился немножко ублюдошным, но я не придумал как его сделать красивым, сорри

Номер 8

p > 0 по условию задачи

d)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^p}\,dx + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx$$

1.
$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^p}\,dx$$
$$0 \le \frac{\cos x}{x^p} \sim \frac{2-x^2}{2\cdot x^p} = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{2x^{p-2}}$$
Эквивалентность беру из следующих соображений:
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ (знаем)}$$
$$2-x^2 \sim 2\cos x$$
$$\cos x \sim \frac{2-x^2}{2}$$
Сходится при p < 1

2.
$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx$$
Будем использовать признак Дирихле:

Во первых:
$$\int_1^x \cos t\,dt = \sin t\Big|_1^x$$
$$|\sin x - \sin 1| \le 2$$
Имеем ограниченность

Во вторых:
$\frac{1}{x^p}$ – монотонна и $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p} = 0$ (p > 0 по условию)

Выполнены оба условия, значит интеграл сходится

Из пунктов 1 и 2 имеем, что $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx$ сходится при $p \in (0,1)$

Ответ: сходится при $p \in (0,1)$

f)

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx$$

1. $$0 \leq \frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$$

   Сходится при p < 2

2. $$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx$$

   Зажмем функцию:

   $$0 \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{\ln(1+x)}{x^p} \leq \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$$

   Мы знаем, что $\frac{1}{x^p}$ расходится при $p \leq 1$, а $\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$ сходится при p > 1 $+ \varepsilon (> 0)$

   Отсюда получаем ограничение на сходимость : $(1, \infty)$

Из пунктов 1 и 2 имеем, что $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx$ сходится при $p \in (1, 2)$

$$\textbf{Ответ:}\ \text{сходится при } p \in (1, 2)$$

g)

$$\int_0^\infty \cos\left(x^3\right)\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos t}{3\sqrt[3]{t^2}}\, dt = \frac{1}{3} \cdot \left(\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt + \int_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt \right)$$

1.
$$\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{\cos t}{t^{\frac{2}{3}}}\, dt$$
$$0 \leq \frac{\cos t}{t^{\frac{2}{3}}} \sim \frac{2-t^2}{t^{\frac{2}{3}}} (\text{ а это сходится})$$
Значит $\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt$ сходится

2.
$$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{2}{3}}}\, dt$$
Будем использовать признак Дирихле:

Во первых:
$$\int_1^t \cos u\, du = \sin u\Big|_1^t$$
$$|\sin t - \sin 1| \leq 2$$
Имеем ограниченность

Во вторых:
$\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$ – монотонна и $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} = 0$

Выполнены оба условия, значит интеграл сходится

Из пунктов 1 и 2 следует сходимость $\int_0^\infty \cos\left(x^3\right)\, dx$

Ответ: сходится

Номер 9

a)

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\left(\pi t^2\right)\,dt = \frac{d}{dx}\left(F(t)\Big|_{\sin x}^{\cos x}\right) = \frac{d}{dx}\left(F(\cos x) - F(\sin x)\right) = F'(\cos x) - F'(\sin x) =$$

$$= -\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)$$

Ответ:

$$-\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\,du} = \frac{[\infty]}{[\infty]}$$

Применяем Лопиталя:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{u^2}\right)^2 = 2\left(F(u)\Big|_0^x\right) = 2e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{2u^2}\,du = e^{2x^2}$$

По итогу получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\,du} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty}2e^{-x^2} = 0$$

Ответ: 0