Бурмашев Григорий, БПМИ-208

8 апреля 2022 г.

Номер 11 [листок 5]

Представим синус через тангенсы и по свойствам мат.ожидания получаем:

$$\mathbb{E}\left(\sin(2X)|\operatorname{tg} X\right) = \mathbb{E}\left(\frac{2\operatorname{tg} X}{1+\operatorname{tg}^2 X}\middle| \operatorname{tg} X\right) = \frac{2\operatorname{tg} X}{1+\operatorname{tg}^2 X}$$

Ответ:

$$\frac{2\operatorname{tg} X}{1+\operatorname{tg}^2 X}$$

Номер 12 [листок 5]

Задача 12 (ДЗ). Пусть (X, Y) — нормальный вектор с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\mathbb{E}(e^X|Y)$.

Хотим найти:

$$\varrho_{X|Y}(x,y) = \frac{\varrho_{X,Y}(x,y)}{\varrho_Y(y)}$$

Поработаем сначала с матрицей ковариаций, назовем её R:

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\det R = 11$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

Ищем вспомогательные плотности (все данные знаем из матрицы ковариаций в условии):

$$\varrho_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^2}$$

$$\varrho_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{11}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{11}x^2 - \frac{2}{11}xy + \frac{4}{11y^2}\right)}$$

А значит:

$$\varrho_{X|Y}(x,y) = \frac{\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{11}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{11}x^2 - \frac{2}{11}xy + \frac{4}{11}y^2\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^2}} = \sqrt{\frac{3}{22}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{11}x^2 - \frac{2}{11}xy + \frac{1}{33}y^2\right)}$$

Отсюда получаем мат.ожидание:

$$\mathbb{E}(e^X|Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x \cdot \sqrt{\frac{3}{22}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{11}x^2 - \frac{2}{11}xy + \frac{1}{33}y^2\right)} dx$$

Ответ:

$$\mathbb{E}(e^X|Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[e^x \cdot \sqrt{\frac{3}{22}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{11}x^2 - \frac{2}{11}xy + \frac{1}{33}y^2\right)} \right] dx$$

Номер 2 [листок 5+]

Задача 2. Пусть X и Y — независимые стандартные нормальные случайные величины. Найдите характеристическую функцию случайной величины $X^2 + Y^2$.

$$\varphi_{X^2+Y^2} = \mathbb{E}e^{it(X^2+Y^2)} = \iint\limits_{R^2} e^{it(X^2+Y^2)} \cdot \varrho_{X,Y}(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R^2} e^{it(x^2+y^2)} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = (\times)$$

Делаем полярную замену:

$$(\times) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} e^{itr^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \int\limits_0^{+\infty} e^{r^2\cdot\left(it-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} dr^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\left(it-\frac{1}{2}\right)r^2}}{it-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-2it}$$

Ответ:

$$\frac{1}{1-2it}$$