Бурмашев Григорий. ИДЗ – 6.

Номер 1

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -1x_1^2 + 21x_2^2 - 60x_3^2 - 4x_1x_2 + 18x_1x_3 + 86x_2x_3$$

1. Воспользуемся методом Лагранжа, чтобы найти нормальный вид:

$$-(x_1 + 2x_2 - 9x_3)^2 + 4x_2^2 + 81x_3^2 - 36x_2x_3 + 21x_2^2 - 60x_3^2 + 86x_2x_3 =$$

$$= -(x_1 + 2x_2 - 9x_3)^2 + 25x_2^2 + 21x_3^2 + 50x_2x_3 =$$

$$= -(x_1+2x_2-9x_3)^2+(5x_2+5x_3)^2+21x_3^2-25x_3^2 = -(x_1+2x_2-9x_3)^2+(5x_2+5x_3)^2-4x_3^2$$

Введем замену координат:

$$\widetilde{x_1} = x_1 + 2x_2 - 9x_3$$

$$\widetilde{x_2} = 5x_2 + 5x_3$$

$$\widetilde{x_3} = 2x_3$$

Тогда получаем:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -\widetilde{x_1}^2 + \widetilde{x_2}^2 - \widetilde{x_3}^2$$

2. Найдем выражение старых координат через новые. Для этого введем матрицу замены базиса C. Тогда мы знаем матрицу C^{-1} (из x_i в $\widetilde{x_i}$):

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда найдем C:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Тогда:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Отсюда выражение координат:

$$x_1 = \widetilde{x_1} - \frac{2}{5}\widetilde{x_2} + \frac{11}{2}\widetilde{x_3}$$

$$x_2 = \frac{1}{5}\widetilde{x_2} - \frac{1}{2}\widetilde{x_3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\widetilde{x_3}$$

Ответ:

нормальный вид:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -\widetilde{x_1}^2 + \widetilde{x_2}^2 - \widetilde{x_3}^2$$

выражение старых координат через новые:

$$x_1 = \widetilde{x_1} - \frac{2}{5}\widetilde{x_2} - \frac{11}{4}\widetilde{x_3}$$

$$x_2 = \frac{1}{5}\widetilde{x_2} + \frac{1}{4}\widetilde{x_3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\widetilde{x_3}$$

Номер 2

$Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + (6b+2)x_2^2 + (6b-1)x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2(6b+5)x_2x_3$

Матрица квадратичной формы:

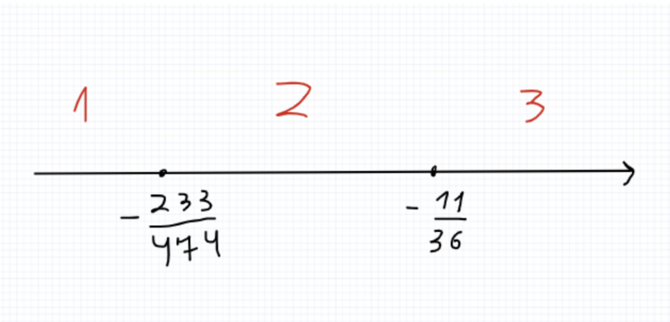
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 1 & 6b+2 & 6b+5 \\ -4 & 6b+5 & 6b-1 \end{pmatrix}$$

Найдем угловые миноры этой матрицы:

1. $\triangle_1 = 6$
2. $\triangle_2 = 6(6b+2) - 1 = 36b + 11$
3. $\triangle_3 = 6(6b+2)(6b-1) + (6b+5)(-4) - 4(6b+5) + 4(6b+2)(-4) - (6b+5)(6b+5)6 - (6b-1) = -474b - 233$ Приравняем $\triangle_2$ и $\triangle_3$ к нулю, чтобы найти точки b:

$$36b + 11 = 0; b = -\frac{11}{36}$$

$$-474b - 233 = 0; b = -\frac{233}{474}$$



Посмотрим на сигнатуры на всех участках:

1. $\triangle_1 > 0, \triangle_2 < 0, \triangle_3 < 0 : + + -$ (1 перемена знаков)
2. $\triangle_1 > 0, \triangle_2 < 0, \triangle_3 > 0 : + - -$ (2 перемены знаков)
3. $\triangle_1 > 0, \triangle_2 > 0, \triangle_3 > 0 : + + +$ (знаки не меняются)

Отдельно посмотрим на случаи, когда $\triangle_2$ и $\triangle_3$ равны нулю:

- $b = -\frac{233}{474}$:

$$\triangle_1 > 0, \triangle_2 < 0, \triangle_3 = 0 : + - \ \ (1 \text{ перемена знака})$$

- $b = -\frac{11}{36}$:

Тут мы уже не можем приравнять $\triangle_2$ к нулю, ибо он является промежуточным, нам нужно заменять координаты, чтобы понять сигнатуру:

$Q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + (6b+2)x_2^2 + (6b-1)x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2(6b+5)x_2x_3$

Введем замену координат:

$$\widetilde{x_1} = x_3$$

$$\widetilde{x_2} = x_2$$

$$\widetilde{x_3} = x_1$$

Тогда:

$Q(x_1,x_2, x_3) = 6\widetilde{x_3}^2 + (6b+2)\widetilde{x_2}^2 + (6b-1)\widetilde{x_1}^2 + 2\widetilde{x_3}\widetilde{x_2} - 8\widetilde{x_3}\widetilde{x_1} + 2(6b+5)\widetilde{x_2}\widetilde{x_1}$

Отсюда матрица квадратичной формы в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} 6b-1 & 6b+5 & -4 \\ 6b+5 & 6b+2 & 1 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Подставляем $b = -\frac{11}{36}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{6} & \frac{19}{6} & -4 \\ \frac{19}{6} & \frac{1}{6} & 1 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Тогда угловые миноры будут равны:

$$\triangle_1 = -\frac{17}{6} < 0$$

$$\triangle_2 = -\frac{17}{6} \cdot \frac{1}{6} - \frac{19}{6} \cdot \frac{19}{6} = -\frac{21}{2} < 0$$

$$\triangle_3 = -\frac{529}{6} < 0$$

Перемен знаков нет, значит сигнатура $+++$

Ответ:

- $b < \frac{233}{474}$:
$$\widetilde{x}_1{}^2 + \widetilde{x}_2{}^2 - \widetilde{x}_3{}^2$$
- $b \in (-\frac{233}{474}; -\frac{11}{36})$:
$$\widetilde{x}_1{}^2 - \widetilde{x}_2{}^2 - \widetilde{x}_3{}^2$$
- $b > -\frac{11}{36}$:
$$\widetilde{x}_1{}^2 + \widetilde{x}_2{}^2 + \widetilde{x}_3{}^2$$
- $b = -\frac{233}{474}$:
$$\widetilde{x}_1{}^2 - \widetilde{x}_2{}^2$$
- $b = -\frac{11}{36}$:
$$\widetilde{x}_1{}^2 + \widetilde{x}_2{}^2 + \widetilde{x}_3{}^2$$

Номер 3

$$\beta(x,y) = (-4b+17)x_1y_1 + (-2b+8)x_1y_2 + (-2b+7)x_1y_3+$$
$$+(-2b+8)x_2y_1+2x_2y_2+(-2b+6)x_2y_3+(-a+3.5)x_3y_1+(-2b+b)x_3y_2+3x_3y_3$$

Нам нужно, чтобы биллинейная форма была симметричной, а также ее квадратичная форма была положительно определена.

1. Проверим симметричность, для этого посмотрим на матрицу билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} -4b+17 & -2b+8 & -2b+7 \\ -2b+8 & 2 & -2b+6 \\ -a+3.5 & -2b+6 & 3 \end{pmatrix}$$

   Для симметрии нужно, чтобы $-a+3.5 = -2b+7$, а значит получаем точное значение для а:

$$a = 2b - 3.5$$

   Тогда матрица:

$$\begin{pmatrix} -4b+17 & -2b+8 & -2b+7 \\ -2b+8 & 2 & -2b+6 \\ -(2b-3.5)+3.5 & -2b+6 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Теперь найдем, найдем угловые миноры и воспользуемся критерием Сильвестра (угловые миноры должны быть больше нуля):

$$\triangle_1 = -4b+17;$$

   Отсюда $b < \frac{17}{4} = 4.25$

$$\triangle_2 = (-4b+17)\cdot 2 - (-2b+8)\cdot(-2b+8) = -4b^2+24b-30$$

   Отсюда $b \in \left(\frac{6-\sqrt{6}}{2}; \frac{6+\sqrt{6}}{2}\right)$

$$\triangle_3 = (-4b+17)\cdot 6+(-2b+8)(-2b+6)(-2b+7)+(-2b+7)(-2b+8)(-2b+6)-$$
$$-(-2b+7)\cdot 2\cdot(-2b+7)-(-2b+6)(-2b+6)(-4b+17)-3(-2b+8)(-2b+8) =$$
$$= -16b^2+96b-128$$

   Отсюда $b \in (2,4)$

   Самое строгое условие у нас у $\triangle_3$, значит, чтобы все миноры были больше нуля, нужно, чтобы $b \in (2,4)$.

   Тогда, поскольку $a = 2b - 3.5$, то $a \in (0.5; 4.5)$

Номер 4

Матрица:

$$\begin{pmatrix} 33 & -21 & -48 \\ -21 & 18 & 12 \\ -48 & 12 & 144 \end{pmatrix}$$

Посчитаем угловые миноры матрицы Грама:

$$\triangle_1 = 33$$

$$\triangle_2 = 33 \cdot 18 - 21 \cdot (-21) = 153$$

$$\triangle_3 = 33 \cdot 18 \cdot 144 - 21 \cdot 12 \cdot (-48) + 48 \cdot 21 \cdot 12 +$$

$$+ 48 \cdot 18 \cdot (-48) - 12 \cdot 12 \cdot 33 - 144 \cdot (-21) \cdot (-21) = 0$$

Они все ≥ 0, к тому же определитель матрицы равен нулю, а значит мы сможем найти систему векторов, матрица Грама которой будет равна заданной матрице.

Запишем в виде квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3)$ и соотвественно приведем к стандартному виду методом Лагранжа:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 33x_1^2 + 18x_2^2 + 144x_3^2 - 42x_1x_2 - 96x_1x_3 + 24x_2x_3 =$$

$$33(x_1 - \frac{21}{33}x_2 - \frac{48}{33}x_3)^2 + 18x_2^2 + 144x_3^2 + 24x_2x_3 + \frac{441}{33}x_2^2 + \frac{2304}{33}x_3^2 + \frac{2016}{33}x_2x_3 =$$

$$= 33\left(x_1 - \frac{7}{11}x_2 - \frac{16}{11}x_3\right)^2 + 18x_2^2 + 144x_3^2 + 24x_2x_3 - \frac{147}{11}x_2^2 - \frac{768}{11}x_3^2 - \frac{672}{11}x_2x_3 =$$

$$= 33\left(x_1 - \frac{7}{11}x_2 - \frac{16}{11}x_3\right)^2 + \frac{51}{11}x_2^2 + \frac{816}{11}x_3^2 - \frac{408}{11}x_2x_3 =$$

$$= 33\left(x_1 - \frac{7}{11}x_2 - \frac{16}{11}x_3\right)^2 + \frac{51}{11}(x_2 - 4x_3)^2 + \frac{408}{11}x_2x_3 - \frac{408}{11}x_2x_3 =$$

$$= 33\left(x_1 - \frac{7}{11}x_2 - \frac{16}{11}x_3\right)^2 + \frac{51}{11}(x_2 - 4x_3)^2$$

Введем замену координат:

$$\widetilde{x_1} = x_1 - \frac{7}{11}x_2 - \frac{16}{11}x_3$$

$$\widetilde{x_2} = x_2 - 4x_3$$

$$\widetilde{x_3} = x_3$$

Тогда в новых координатах матрица квадратичной формы будет:

$$D = \begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{51}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

А матрица D' (корни от каждого элемента матрицы) :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{33} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{51}{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

А матрица перехода от новых координат к старым (C^{-1})

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{11} & -\frac{16}{11} \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда искомые три вектора будут находиться в столбцах матрицы $D' \cdot C^{-1}$:

$$D' \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{33} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{51}{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{11} & -\frac{16}{11} \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{33} & \frac{-7\sqrt{33}}{11} & \frac{-16\sqrt{33}}{11} \\ 0 & \frac{\sqrt{561}}{11} & \frac{-4\sqrt{561}}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По итогу (наконец-то) получаем векторы:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{33} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{-7\sqrt{33}}{11} \\ \frac{\sqrt{561}}{11} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{-16\sqrt{33}}{11} \\ \frac{-4\sqrt{561}}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{33} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} \frac{-7\sqrt{33}}{11} \\ \frac{\sqrt{561}}{11} \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} \frac{-16\sqrt{33}}{11} \\ \frac{-4\sqrt{561}}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$