Бурмашев Григорий. 208. Дискра – 19

Номер 1

Найдем верхнюю и нижнюю оценку:

- Верхняя :

  $\leq n$. Задаем вопрос про каждую переменную. Тогда, зная значения всех переменных, мы можем определить и значение функции.

- Нижняя:

  $\geq n$. Каждая переменная существенная. Пусть у нас есть алгоритм, который выдает значение функции за менее чем n. Тогда пусть например мы спросили про значения n - 1 переменной и они все были нулями. Алгоритм выдаст нам ответ 0. Но последняя n – я переменная может быть равна 1, тогда верный ответ на самом деле будет 1, но наш алгоритм будет выдавать неправильный ответ. Значит нам все таки нужно узнать значения всех переменных.

Ответ: Сложность вычисления дизъюнкции равна n

Номер 3

У нас 7 элементов, чтобы узнать значение MAJ, нам нужно знать значение хотя бы 4 элементов (чтобы было больше половины). Значит все элементы в многочлене, где менее 4 элементов мы откидываем. Посмотрим разные случаи при разном количестве единичек в MAJ

- Если 4 единички:

  Один из C_7^4 конъюнктов из 4х элементов будет равен единице (тот, в котором нашлась нужная комбинация из вот этих элементов, равных единичке). Ну 1 – нечетное, значит эти конъюнкты мы должны точно оставить, иначе у нас не получится узнать ответ.

- Если 5 единичек:

  Один из C_7^5 конъюнктов из 5ти элементов будет равен единице (аналогично предыдущему случаю), но помимо этого еще C_5^4 конъюнктов из 4х элементов тоже будут равны единичке (те, в которых набрались любые 4 из 5 элементов, равных единичке). Но тогда C_5^4

$+\ 1$ – четное число, а многочлен Жигалкина по сути есть сложение по модулю два, значит наш алгоритм будет работать неверно, если мы сохраним эти множители. Следовательно мы должны их выкинуть

- Если 6 единичек:

  Аналогично предыдущему пункту, один из C_7^6 конъюнктов из 6ти элементов будет равен единице, и еще C_6^4 из четырех элементов будут равны единице, но $C_6^4 + 1$ – четное, $\rightarrow$ опять выкидываем

- Если 7 единичек:

  Всего 1 конъюнкт из 7 элементов равен единичке ($C_7^7 = 1$), но еще C_7^4 конъюнктов из 4х элементов принимают истину $\rightarrow$ опять выкидываем.

  По итогу мы видим, что нам нужно оставить только конъюнкты из 4х элементов, всего их $C_7^4 = 35$ штук.

Ответ: 35

Номер 4

Логично, что есть смысл рассматривать четные и нечетные значения n. Пусть n – четное. Если у нас поровну нулей и единичек, то MAJ у нас будет равна нулю и очевидно, что $\overline{0} \neq 0$ (если мы переворачиваем значения нашиъ переменных), и самодвойственности мы не получаем. Если же у нас нечетное n, тогда у нас будет какое-то наиболее часто встречающееся число. Пусть это 1. Тогда, если мы реверсим наши переменные, то наиболее частым будет 0. Но $\overline{0} = 1$. Т.е мы получили самодвойственность (аналогично для случая, если наиболее часто встречающееся число – 0)

Ответ: при нечетных n

Номер 5

От противного: пусть есть такая $f(x, y)$, что $f(x, y) = \overline{f}(\overline{x}, \overline{y})$ и она еще и зависит как от x, так и от y. Положим тогда две переменные a и b, принимающие соотвественно 0 или 1. Пускай, например, $f(1, 1) = a$, ну тогда по предположению $f(0, 0) = \overline{a}$. И пусть $f(1, 0) = b$. Тогда, аналогично, $f(0, 1) = \overline{b}$. x существенна, тогда $a \neq \overline{b}$. Но тогда $a = b$. А также y существенна, но тогда $\overline{a} \neq \overline{b}$, а значит $a = b$. Мы получили противоречие, значит такой функции не существует

Ч.Т.Д

Номер 6

Оценка сверху:

Наша функция равна y_x. Положим тогда в ДНФ 2^k конъюнктов. У нас $y_0, y_1, \ldots y_{2^k-1}$ элементов. Их всего 2^k. Соотвественно каждому числу у соотвествует свой конъюнкт.

Оценка снизу:

Пусть нам хватит $2^k - 1$ конъюнктов. Приведем контрпример, когда все сломается. Пусть k = 3. Тогда всего у нас 7 конъюнктов. "у"внутри функции у нас тогда 8 штук $(y_0, y_1, y_2 \ldots y_7)$. Тогда функция будет иметь вид:

$$\mathrm{Ind}(x_1, x_2, x_3, y_0, y_1 \ldots y_7)$$

Заметим, что т.к у нас всего 7 конъюнктов, мы можем составить всего 7 индексов, а игриков-то у нас 8. Значит для одного игрика нам не хватит конъюнкта и их должно быть 8. Значит все же нужно 2^k.

Ч.Т.Д