Бурмашев Григорий. 208. Идз – 8

Номер 1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 14 & -14 & -17 \\ -8 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Ищем собственные значения, для этого считаем $\det(A - \lambda E)$:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -3 \\ 14 & -14-\lambda & -17 \\ -8 & 10 & 13-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Получили три собственных значения : $\lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = 3$.

Все алгебраические кратности равны 1

Теперь ищем базисы собственных подпространств:

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 14 & -13 & -17 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 2 & -7 & -11 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 18 & 30 \\ 2 & -7 & -11 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 30 \\ 2 & -7 & -11 \\ 0 & -18 & -30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -7 & -11 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_\lambda = 1$$

- $\lambda = 2$:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 14 & -16 & -17 \\ -8 & 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -8 & 10 & 11 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
Получаем ФСР:
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g_\lambda = 1$$

- $\lambda = 3$:
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 14 & -17 & -17 \\ -8 & 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & 10 & 10 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Получаем ФСР:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g_\lambda = 1$$

Получили, что $a_\lambda = g_\lambda$ для всех получившихся собственных значений, а значит φ диагонализуем

Фиксируем базис:

$$e_1' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода C:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда знаем, что матрица в новом базисе будет задаваться формулой:

$$A' = C^{-1}AC$$

Считаем A':

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 14 & -14 & -17 \\ -8 & 10 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -8 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$\lambda = -1$, базис соотв.подпространства:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$, базис соотв.подпространства:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$, базис соотв.подпространства:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

φ диагонализуем

базис:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Номер 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично предыдущему номеру:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 5 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = -(\lambda-3)^2 \cdot (\lambda - 2)$$

Получили два собственных значения : $\lambda = 3, \lambda = 2$.

Причем у $\lambda = 3 : a_\lambda = 2$

Теперь ищем базисы собственных подпространств:

- $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_\lambda = 1 \neq a_\lambda$$

Значит критерий диагонализуемости не выполнен и диагонализовать мы не сможем.

- $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$\lambda = 3$, базис соотв.подпространства:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$, базис соотв.подпространства:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Номер 3

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 14x_1^2 + 11x_2^2 + 11x_3^3 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 11 & -1 \\ -4 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Ищем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 14-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 11-\lambda & -1 \\ -4 & -1 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+36\lambda^2-396\lambda+1296 = -(\lambda-6)(\lambda-12)(\lambda-18)$$

Получили три собственных значения : $\lambda = 6, \lambda = 12, \lambda = 18$

Все алгебраические кратности равны 1

Считаем:

- $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -4 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

  Получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 12$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 18$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -7 & -1 \\ -4 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -4 & -1 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

  Получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получили, что $a_\lambda = g_\lambda$ для всех получившихся собственных значений, а значит φ диагонализуем. Тогда положим:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь ортонормируем:

$$e'_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$e'_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$e'_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от исходного базиса к e':

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Матрица кв.формы:

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Выражение старых координат через новые:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} - \frac{2x_3'}{\sqrt{6}} \\ x_2 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} - \frac{x_2'}{\sqrt{2}} + \frac{x_3'}{\sqrt{6}} \\ x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} + \frac{x_2'}{\sqrt{2}} + \frac{x_3'}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Сама квадратичная форма в новом базисе:

$$Q(x_1', x_2', x_3') = 6(x_1')^2 + 12(x_2')^2 + 18(x_3')^2$$

Ответ:

выражение координат:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} - \frac{2x_3'}{\sqrt{6}} \\ x_2 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} - \frac{x_2'}{\sqrt{2}} + \frac{x_3'}{\sqrt{6}} \\ x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} + \frac{x_2'}{\sqrt{2}} + \frac{x_3'}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

квадратичная форма:

$$Q(x_1', x_2', x_3') = 6(x_1')^2 + 12(x_2')^2 + 18(x_3')^2$$

Номер 4

[решаю по аналогии с семинаром 205 под номером 30]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix}$$

Из конспекта знаем, что существует базис, в котором матрица будет выглядеть как:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \lambda_0 \in \{1, -1\}$$

Видим, что $A \neq A^T$, тогда ищем собственные значения среди -1 и 1:

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} - (-1) & \frac{-4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} - (-1) & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-8}{9} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-8}{9} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Видим, что ранг уменьшился и $\lambda = -1$ нам подходит, тогда имеем собственный вектор $\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$. Теперь положим:

$$e_3 = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$e_3^{\perp} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

Т.к $(e_3, (0,1,1)) = 0$, $(e_3, (-2,1,2)) = 0$.

Пусть:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

А теперь ортонормируем:

$$e_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Теперь считаем:

$$\varphi(e_1) = Ae_1 = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Знаем, что:

$$\varphi(e_1) = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2$$

А значит:

$$\cos\alpha = (\varphi(e_1), e_1) = 0$$

$$\sin\alpha = (\varphi(e_1), e_2) = 1$$

По итогу:

в базисе (e_1, e_2, e_3) матрица будет иметь канонический вид, а именно:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

базис:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, e_3 = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

осью будет являться вектор e_3

угол поворота : $\alpha = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$