Бурмашев Гриша. 208. Дискра - 3

# 1

Кабинет Нумеролога:

В октябре дни с 1 по 31.
Числа, в которые входит 0 : отрезок $[1, 9]$, 10, 20, 30
(Однозначные он пишет как 01, 02 ...)

В ноябре дни с 1 по 30.
Числа, в которые входит 1: 1, отрезок $[10, 19]$, 21

В декабре дни с 1 по 31.
Числа, в которые входит 2: 2, 12, отрезок $[20, 29]$

Итого: $12 + 12 + 12 = 36$

**Ответ:** 36

# 2

30 студентов по 10 аудиториям:

У каждого студента есть выбор из 10 аудиторий, и он может выбрать любую. Логично, что каждый из 30 студентов может выбрать любую аудиторию. Тогда по правилу произведения:

$$10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10_{30} = 10^{30}$$

Всего есть $10^{30}$ способов распределить 30 студентов по 10 аудиториям

**Ответ:** $10^{30}$

# 3

4 - значные числа, где хотя бы 1 цифра 7:

Посчитаем общее число 4 - значных чисел:

На каждую из позиций можно поставить любое число от 0 до 10, кроме первой (т.к число не может начинаться с нуля) Значит для первой позиции 9 вариантов, для остальных - 10. Тогда:

$$9 * 10 * 10 * 10 = 9000$$

Вычтем из «всего» те числа, которые нам не подходят

4-х значные числа, в которых нет 7:

$$8 * 9 * 9 * 9 = 5832$$

Разность:

$$9000 - 5832 = 3168$$

**Ответ:** 3168

# 4

Докажите, что:

$$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$$

Пусть у нас есть упорядоченная пара элементов:

$$(a; b)$$

Т.е по определению декартового произведения:

$$(a; b) \in (A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2)$$

$$(a \in A_1 \setminus A_2) \cap (b \in B_1 \setminus B_2)$$

$$(a \in A_1 \cap a \notin A_2) \cap (b \in B_1 \cap b \notin B_2)$$

Можно поменять элементы местами:

$$(a \in A_1 \cap b \in B_1) \cap (a \notin A_2 \cap b \notin B_2)$$

Значит, что

$$(a \in A_1 \cap b \in B_1) \to (a; b) \in (A_1 \times B_1)$$

$$(a \notin A_2 \cap b \notin B_2) \to (a; b) \notin (A_2 \times B_2)$$

$$(a; b) \in (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$$

Тогда:

$(a \in A_1 \cap b \in B_1) \cap (a \notin A_2 \cap b \notin B_2) \subseteq (a \in A_1 \cap b \in B_2) \cap (a \notin A_2 \cup b \notin B_2)$

Пусть:

$$F = (a \notin A_2 \cap b \notin B_2)$$

$$G = (a \notin A_2 \cup b \notin B_2)$$

В G мы имеем случаи, когда выполняется либо $a \notin A_2$, либо $b \notin B_2$, либо и то, и другое (всего 3 варианта). А F является одним из этих трех вариантов (выполняется и то, и другое) Т.е F является подмножеством G

Можно точно сказать, что:

$$(a \notin A_2 \cap b \notin B_2) \subseteq (a \notin A_2 \cup b \notin B_2)$$

Значит верно, что:

$(a \in A_1 \cap b \in B_1) \cap (a \notin A_2 \cap b \notin B_2) \subseteq (a \in A_1 \cap b \in B_2) \cap (a \notin A_2 \cup b \notin B_2)$

$$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$$

**Ч.Т.Д**

# 5

Равенство возможно, если слева и справа в исходной записи будет $\varnothing$ (т.е $(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) = (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \varnothing$)

Это возможно, если $A_1 \subseteq A_2$ и $B_1 \subseteq B_2$.

Тогда:

$$A_1 \setminus A_2 = \varnothing, \;\; B_1 \setminus B_2 = \varnothing \rightarrow$$

$$\rightarrow (A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) = \varnothing$$

А также:

$$A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \varnothing$$

Тогда:

$$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) = (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \varnothing$$

**Равенство выполняется**

Равенство также будет, если посмотреть на $(a \notin A_2 \cap b \notin B_2) \subseteq (a \notin A_2 \cup b \notin B_2)$ и превратить 3 возможных случая G (из № 4) в один. Это получится, если $B_2 = A_2 = \varnothing$
Тогда:

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \setminus \varnothing = A_1$$

$$B_1 \setminus B_2 = B_1 \setminus \varnothing = B_1$$

$$A_2 \times B_2 = \varnothing$$

$$(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) = A_1 \times B_1$$

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = (A_1 \times B_1) \setminus \varnothing = A_1 \times B_1$$

$$A_1 \times B_1 = A_1 \times B_1$$

**Равенство выполяется**

**Ответ:** $((A_1 \subseteq A_2) \wedge (B_1 \subseteq B_2)) \vee (A_2 = B_2 = \varnothing)$

# 6

Двоичные слова длины n без двух нулей подряд:

Попробуем составить рекуррентную последовательность для двоичных слов, чтобы доказать, что их число связано с Фибоначчи (т.к числа Фибоначчи есть рекуррентое соотношение)

Пусть $A_n$ - число двоичных слов длины n, заканчивающихся на 1 (например: слово 10101)
Пусть $B_n$ - число двоичных слов длины n, заканчивающихся на 0 (например: слово 1011010)

Двоичное слово, которое заканчивается на 1, мы можем получить как прибавлением единицы к слову, которое заканчивается на 0, так и к слову, которое заканчивается на 1 (т.к ограничений для единиц у нас нет). Т.е:

$$A_{n+1} = B_n + A_n$$

А двоичное слово, которое заканчивается на 0, мы можем получить только прибавлением нуля к слову, которое заканчивается на 1 (иначе мы нарушим условие отсутствия двух нулей подряд). Т.е:

$$B_{n+1} = A_n$$

Тогда общее число двоичных слов длины n будет равно:

$$A_n + B_n = B_{n-1} + A_{n-1} + A_{n-1}$$

Тогда воспользуемся методом математической индукции:

- База: n = 2

  Двоичные последовательности длины 2: 01, 10, 11

  $$F_{n+1} = F_3 = 3$$
  $$3 = 3$$

  Верно

- База: n = 3

  Двоичные последовательности длины 3: 111, 110, 101, 010, 011,

  $$F_{n+1} = F_4 = 5$$
  $$5 = 5$$

  Верно

- Переход: пусть верно для $n$ и $n-1$:
  $(A_n + B_n = F_{n+1},\ \ A_{n-1} + B_{n-1} = F_n)$, докажем, что это верно и для $n+1$. Т.е:

  $$A_{n+1} + B_{n+1} = F_{(n+1)+1}$$
  $$A_{n+1} + B_{n+1} = F_{n+1} + F_n$$
  $$A_{n+1} + B_{n+1} = A_n + B_n + A_{n-1} + B_{n-1}$$
  $$An + B_n + A_n = A_n + B_n + A_{n-1} + B_{n-1}$$
  $$A_n + B_n + A_{n-1} + B_{n-1} = A_n + B_n + A_{n-1} + B_{n-1}$$
  $$0 = 0$$

**Ч.Т.Д**

# 7

Каких чисел больше среди первых 10 миллионов целых неотрицательных чисел: тех, в десятичной записи которых есть цифра 1, или тех, в десятичной записи которых этой цифры нет?

Посчитаем кол-во чисел, в которых нет единицы:

На каждую из позиций можно поставить любую цифру от 0 до 9, кроме единицы (т.е 9 вариантов). Если в начале стоит 0 - значит у нас просто НЕ семизначное число. Но нужно вычесть случай, когда на всех позициях стоят нули (т.к 0000000 не является числом) По правилу произведения:

$$9 * 9 * 9 * 9 * 9 * 9 * 9 - 1 = 9^7 - 1 = 4782969 - 1 = 4782968$$

Тогда кол-во чисел, в которых единица есть:

$$10000000 - 4782968 = 5217032$$

$$5217032 > 4782968$$

Значит чисел, в которых единица есть, больше, чем чисел, в которых её нет

**Ответ:** больше тех чисел, в десятичной записи которых есть цифра 1

# 8

Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы $3 \times 4$ так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

Посчитаем отдельно каждый из случаев, а потом найдем их объединение

Все возможные случаи, когда верхний ряд - незакрашен (A):

Всего у нас $3 \times 4 = 12$ клеток. 4 из них (верхний ряд) мы не закрашиваем. Остается $12 - 4 = 8$ клеток. Мы имеем 8 позиций и на каждую из позиций есть 2 случая (раскрасить или нет). Тогда по правилу произведения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

$$|A| = 2^8 = 256$$

Все возможные случаи, когда нижний ряд - незакрашен (B):

Количество аналогично случаю для верхнего ряда. У нас 4 клетки в нижнем ряду незакрашены, а оставшиеся 8 мы можем как закрасить, так и нет:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

$$|B| = 2^8 = 256$$

Все возможные случаи, когда незакрашены вертикали (C):

2 средних вертикали занимают $3 \times 2 = 6$ клеток. У нас остается $12 - 6 = 6$ свободных клеток, которые мы можем как закрасить, так и нет:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |

$$|C| = 2^6 = 64$$

Мы знаем формулу включений-исключений, она гласит:

$$|A \cup B \cup C| = |A| \cup |B| \cup |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

$|A \cap B| = 2^4$ (верхний+нижний незакрашены, остается 4 клетки)

$|A \cap C| = 2^4$ (верхний ряд + вертикали незакрашены, остается 4 клетки)

$|C \cap B| = 2^4$ (нижний ряд + вертикали незакрашены, остается 4 клетки)

$|A \cap B \cap C| = 2^2$ (верхний, нижний ряд + вертикали незакрашены, остается 2 клетки)

Подставляем значения в формулу:

$|A \cup B \cup C| = 256 + 256 + 64 - 16 - 16 - 16 + 4 = 580 - 48 = 532$ способа

**Ответ:** 532

# 9

Пускай:
a - повар
b - медик
c - пилот
d - астроном

По условию:

$$|a| = |b| = |c| = |d| = 6$$
$$|a \cap b \cap c \cap d| = 1$$
$$|a \cap b| = |a \cap c| = |a \cap d| = |b \cap c| = |b \cap d| = |c \cap d| = 4$$
$$|a \cap b \cap c| = |a \cap b \cap d| = |b \cap c \cap d| = 2$$

Тогда по формуле включений - исключений для 4-х множеств:

$$|a \cup b \cup c \cup d| = 6 + 6 + 6 + 6 - 4 * 6 + 2 * 4 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Значит, всего у нас 7 людей.

Можно заметить, что поваров, медиков и пилотов одновременно у нас по формуле включений - исключений для двух множеств:

$$|a \cup b \cup c| = 6 + 6 + 6 - 4 - 4 - 4 + 2 = 8 \text{ человек}$$

Но у нас всего 7 человек. Мы видим противоречие, значит тех.задание невыполнимо

**Ответ:** нет

# 10

Подслово 011 в двоичных словах длины 9

Т.к найти напрямую слова, содержащие последовательности 011 очень сложно (как мне показалось), то намного проще из общего числа слов вычесть те слова, где 011 не встречается

Двоичных слов длины 9 у нас:

$$2^9 = 512$$

Найдем слова, в которых нет последовательности 011:
Пусть для n таких слов $F(n)$, тогда:

- Если на n-й позиции стоит 1, то мы можем на (n-1) позицию поставить либо 1, либо 0.

  Если ставим 1, тогда больше нулей у нас быть не может и это просто n единичек ($111\dots1_n$)

  Если ставим 0, то получаем $F_{n-2}$ слов (длина слова как-бы уменьшается и мы рассматриваем количество для n - 2)

- Если на n-й позиции стоит 0, то мы можем на (n-1) позицию поставить что угодно, при этом мы не ограничены в выборе и получаем рекурренто $F_{n-1}$ слов

  Таким образом, для длины n мы имеем $F_n = 1 + F_{n-2} + F_{n-1}$

  Но это зависимость не работает для случая, когда длина меньше трех, т.к $n > 0$ и двоичных слов с 011 длины меньше трех вообще нет.

  Если n = 1:

  Слов $2^1 = 2$

  Если n = 2:

  Слов $2^2 = 4$

  Т.е:

$$F_n = 1 + F_{n-2} + F_{n-1},\ n \geq 3$$

  (P.S Я не очень хорошо чувствую и понимаю, нужно ли здесь доказывать верность формулы по мат.индукции, но скорее склоняюсь к тому, что не нужно, поэтому был бы рад услышать уточнения)

  Посчитаем для n = 9:

$$F_3 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$F_4 = 1 + 4 + 7 = 12$$

$$F_5 = 1 + 7 + 12 = 20$$

$$F_6 = 1 + 12 + 20 = 33$$

$$F_7 = 1 + 20 + 33 = 54$$

$$F_8 = 1 + 33 + 54 = 88$$

$$F_9 = 1 + 54 + 88 = 143$$

Тогда получаем:

$$512 - 143 = 369 \text{ слов}$$

**Ответ:** 369