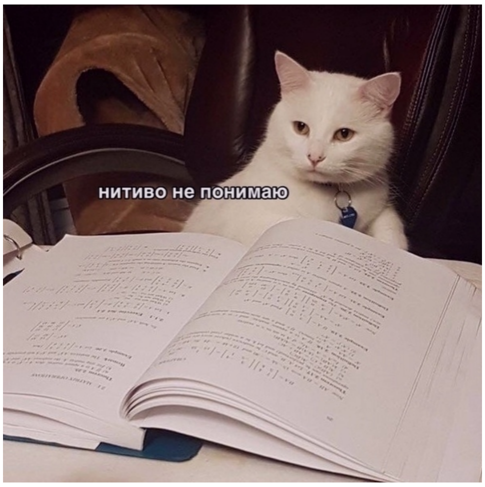
Бурмашев Григорий. 208. Матан. Д/з - 3



№ 10

Исследуйте следующие рекуррентные последовательности на сходимость

а)

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n},\ a_1 = \sqrt{2}$$

- Докажем, что $a_n \leq 2$:
  Воспользуемся методом математической индукции:
  База: $n = 1$
  $$\sqrt{2} \leq 2$$
  $$\text{Верно}$$
  Переход: пусть верно для n, докажем, что это верно для $n+1$:
  $$a_{n+1} \leq 2$$
  $$\sqrt{2a_n} \leq 2$$
  $$2a_n \leq 4$$
  $$a_n \leq 2$$
  $$\text{Верно}$$
- Докажем, что $a_{n+1} \geq a_n$
  $$a_{n+1} \geq a_n$$
  $$\sqrt{2a_n} \geq a_n$$
  $$2a_n \geq a_n^2$$
  $$a_n^2 - 2a_n \leq 0$$
  $$a_n(a_n - 2) \leq 0$$
  Т.к мы доказали, что $a_n \leq 2$, то это верно

- Т.к последовательность не убывает и ограничена сверху, то по теореме Вейерштрасса:
$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$$
Тогда:
$$a = \sqrt{2a}$$
$$a^2 = 2a$$
$$a(a-2) = 0$$
Т.к $a_1 > 0$ и последовательнось не убывает, то:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$
Ответ: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

b)

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n},\ a_1 = 0$$

- Докажем, что $a_n \leq 3$:
Воспользуемся методом математической индукции:
База: n = 1
$$0 \leq 3$$
$$\text{Верно}$$
Переход: пусть верно для n, докажем, что верно для $n+1$:
$$a_{n+1} \leq 3$$
$$\sqrt{6+a_n} \leq 3$$
$$6 + a_n \leq 9$$
$$a_n \leq 3$$
$$\text{Верно}$$
- Докажем, что $a_{n+1} \geq a_n$:
$$a_{n+1} \geq a_n$$
$$\sqrt{6+a_n} \geq a_n$$

$$6 + a_n \geq a_n^2$$
$$a_n^2 - a_n - 6 \leq 0$$
$$(a-3)(a+2) \leq 0$$

Т.к мы доказали, что $a_n \leq 3$, то это верно

- Т.к последовательность не убывает и ограничена сверху, значит:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Тогда:

$$a = \sqrt{6+a}$$
$$a^2 = 6 + a$$
$$a^2 - a - 6 = 0$$
$$(a-3)(a+2) = 0$$

Значит $(a = 3) \vee (a = -2)$. Но $a_1 \geq 0$ и последовательность не убывает, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

c)

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \times (2a_n + \frac{3}{a_n^2}),\ a_1 = 3$$

- Докажем, что $a_n \geq \sqrt[3]{3}$:
  Воспользуемся методом математической индукции:
  База: n = 1

$$3 \geq \sqrt[3]{3}$$
$$3^3 \geq 3$$
$$27 \geq 3$$

Верно

Переход: пусть верно для n, докажем, что это верно и для $n+1$:

$$a_{n+1} \geq \sqrt[3]{3}$$

$$\frac{1}{3} \times (2a_n + \frac{3}{a_n^2}) \geq \sqrt[3]{3}$$

$$\frac{a_n + a_n + \frac{3}{a_n^2}}{3} \geq \sqrt[3]{3}$$

Видно, что слева от знака $\geq$ находится среднее арифметическое, при этом мы знаем, что среднее арифметическое больше, чем среднее геометрическое, тогда:

$$\frac{a_n + a_n + \frac{3}{a_n^2}}{3} \geq \sqrt[3]{a_n \times a_n \times \frac{3}{a_n^2}} \geq \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3a_n^2}{3}} \geq \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3}$$

Верно

- Докажем, что $a_{n+1} \leq a_n$:

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$\frac{1}{3}(2a_n + \frac{3}{a_n^2}) \leq a_n$$

$$2a_n + \frac{3}{a_n^2} \leq 3a_n$$

$$\frac{3}{a_n^2} \leq a_n$$

$$3 \leq a_n \times a_n^2$$

$$a_n^3 \geq 3$$

$$a_n \geq \sqrt[3]{3}$$

Мы это уже доказали, значит это верно

- Т.к последовательность не возрастает и ограничена снизу, значит:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a = \frac{1}{3}(2a + \frac{3}{a^2})$$

$$3a = 2a + \frac{3}{a^2}$$

$$a = \frac{3}{a^2}$$

$$a^3 = 3$$

$$a = \sqrt[3]{3}$$

Значит:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{3}$$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{3}$

№ 11

Докажите, что:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \times \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Для начала докажем нижнюю границу:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$$

Воспользуемся методом математической индукции:
База: n = 1

$$\frac{1}{e} \leq 1$$

Мы знаем, что $e \geq 1$, значит неравенство выполняется
Переход:
Пусть верно для n, докажем, что это верно и для $n+1$:

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq (n+1)!$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq n! \times (n+1)$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \times (n+1)$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n} \times \frac{n+1}{e} \leq \frac{n^n}{e^n} \times (n+1)$$

Умножим на e^n:

$$(n+1)^n \times \frac{n+1}{e} \leq n^n \times (n+1)$$

Поделим на $(n+1)$:

$$\frac{(n+1)^n}{e} \leq n^n$$

$$(n+1)^n \leq n^n \times e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

Мы знаем про второй замечательный предел, докажем, что $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ не убывает, посмотрим на:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}\right) = \frac{(n+2)^{n+1} \times n^n}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{n+2}{n+1} \times \frac{(n^2+2n)^n}{(n^2+2n+1)^n} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \times \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq \frac{n+2}{n+1} \times \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Т.к $\frac{x_n n+1}{x_n} > 1$, то x_n не убывает

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, а также $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ не убывает, значит:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

Теперь докажем верхнюю границу:

$$n! \leq e \times \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Воспользуемся методом математической индукции:
База: n = 1

$$1 \leq e \times 0.5$$

$$e \geq 2 \to 0.5 \times e \geq 1$$

Верно

Переход: пусть верно для n, докажем, что это верно и для $n+1$:

$$(n+1)! \leq e \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

$$n! \times (n+1) \leq e \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

$$e \times \left(\frac{n}{2}\right)^{n} \times (n+1) \leq e \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

$$n^n \times (n+1) \leq \frac{(n+1)^n \times (n+1)}{2}$$

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq 2$$

При n = 1: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2$, и при этом эта функция не убывает (мы это уже доказали), значит это верно $\forall n,\ n \geq 1$
Ч.Т.Д

Итог: мы доказали как нижнюю, так и верхнюю границу, что и требовалось от нас в задаче

№ 12

Рассмотрим последовательности:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

a)

Доказать, что $a_n \geq b_n$, a_n - не возрастает, b_n - не убывает

- $$a_n \geq b_n$$
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \geq$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$
$$-2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1} \geq 0$$
$$-\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \geq 0$$
$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$$
$$n + 1 \geq n$$
$$1 \geq 0$$

Верно

- $$a_{n+1} \leq a_n$$
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} \leq -2\sqrt{n}$$
$$\frac{2-2n}{\sqrt{n+1}} \leq -2\sqrt{n}$$
$$\frac{1-n}{\sqrt{n+1}} \leq -\sqrt{n}$$
$$\frac{1-2n+n^2}{\sqrt{n+1}} \leq -\sqrt{n}$$
$$n^2 - 2n + 1 \leq n^2 + n$$
$$1 \leq 3n$$
$$n \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Верно}$$

- $$b_{n+1} \geq b_n$$
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} \geq$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n} - 2\sqrt{n+1}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} \geq -2\sqrt{n+1}$$
$$2(n+1) - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} + 1 \geq 0$$
$$2n+3 \geq 2\sqrt{n^2+3n+2}$$
$$4n^2 + 12n + 0 \geq 4n^2 + 12n + 8$$
$$9 \geq 8$$
$$\text{Верно}$$

b)

Из пункта a) получите, что $a_k \geq b_m$ для произвольных индексов $k, m \in \mathbb{N}$ и обе последовательности ограничены

- Возьмем произвольный k такой, что $k < n$, тогда:
$$a_k \geq a_n \geq b_n \rightarrow a_k \geq b_n$$
Аналогично, возьмем произвольный m такой, что $m > n$, тогда:
$$b_n \leq b_m \leq a_n$$
Соединяя, получим:
$$a_k \geq a_n \geq b_m \geq b_n$$
Т.е:
$$a_k \geq b_m \; \forall k, m \in \mathbb{N}$$
- Т.к $a_n \geq b_n$ и a_n не возрастает, то a_n **ограничена** снизу b_n

  Т.к $a_n \geq b_n$ и b_n не убывает, то b_n **ограничена** сверху a_n

c)

Докажите, что:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - c + \alpha_n \text{ где:}$$

c - положительное число

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

Пусть:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B$$

Мы знаем, что:

$$a_n = b_n + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty}(b_n + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}) = B + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = B$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$ т.к при n стремящемся к бесконечности знаменатель увеличивается, а числитель не меняется

Пускай:

$$a_n = -1, \quad b_n \leq a_n \to b_n \leq -1$$

Если $b_n \leq -1$, то и $a_n \leq -1$

$$a_n = A + \alpha_n \text{ ,где } \alpha_n \to 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + A + \alpha_n$$

Пусть $c = -A$, c > 0 (т.к $A < 0$, $-A > 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - c + \alpha_n$$

Ч.Т.Д