Бурмашев Григорий. Дискра – 17

Номер 1

Пусть f – выигрыш, он точно неотрицательный. Математическое ожидание выигрыша равно $40 \cdot 25\% = 10$. Положим a $= 1000$, тогда по неравенству Маркова:

$$Pr[f \geq a] \leq \frac{E[f]}{a}$$

$$Pr[f \geq 1000] \leq \frac{10}{1000} = 0.01$$

Вероятность получить не менее 1000 рублей не превосходит 1%

Номер 2

Посчитаем вероятности:

1. Шестерка выпала ровно 0 раз:

$$\frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

2. Шестерка выпала ровно 1 раз:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{72}$$

3. Шестерка выпала ровно 2 раза:

$$\frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{72}$$

4. Шестерка выпала ровно 3 раза:

$$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

Тогда мат.ожидание:

$$E(\mathrm{Sum}) = \frac{1}{216} \cdot 3 + \frac{5}{72} \cdot 2 + \frac{25}{72} \cdot 1 - \frac{125}{216} = \frac{3 + 30 + 75 - 125}{216} = -\frac{17}{216}$$

Ответ: $-\frac{17}{216}$

Номер 3

Очевидно, что:

$$2^x \geq 64, \text{ если } x \geq 6$$

А значит:

$$Pr[x \geq 6] = Pr[2^x \geq 64]$$

Тогда по неравенству Маркова:

$$Pr[2^x \geq 64] \leq \frac{E[2^x]}{64}$$

Ну а по условию $E[2^x] = 5$, итого:

$$Pr[x \geq 6] \leq \frac{5}{64} = \frac{50}{640} < \frac{1}{10} = \frac{64}{640}$$

Номер 4

Два события являются независимыми, а значит:

$$E[LR] = E[L] \cdot E[R]$$

$$E[L] = E[R]$$

Найдем $E[L]$:

Вероятность получить i единиц равна:

$$\frac{C_{50}^{i}}{2^{50}}$$

Где:

C_{50}^{i} – количество спобосов расставить i единиц на 50 позиций
2^{50} – вероятность получения именно этой расстановки

А значит:

$$E[L] = 1 \cdot \frac{C_{50}^{1}}{2^{50}} + \ldots + 50 \cdot \frac{C_{50}^{50}}{2^{50}} = \sum_{i=0}^{50} i \cdot \frac{C_{50}^{i}}{2^{50}}$$

Тогда:

$$E[LR] = \left(\sum_{i=0}^{50} i \cdot \frac{C_{50}^{i}}{2^{50}} \right)^2$$

(Не очень понимаю, как можно красиво посчитать эту штуку, поэтому оставил как есть)

Ответ: $E[LR] = \left(\sum_{i=0}^{50} i \cdot \frac{C_{50}^{i}}{2^{50}} \right)^2$

Номер 5

Введем следующую индикаторную функцию I, которая будет обозначать количество элементов, которые перешли сами в себя, т.е:

$$I = I_1 + I_2 + \dots I_n$$

Где:

$$I_i = \begin{cases} 1, \text{если i переходит в перестановке сам в себя} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда:

$$E[I] = E[I_1 + \dots I_n] = E[I_1] + \dots + E[I_n]$$

Посчитаем $E[I_i]$:

$$E[I_i] = 1 \cdot Pr[\text{i перешла в перестановке сама в себя}] +$$

$$+0 \cdot Pr[\text{i перешла не сама в себя}] = Pr[\text{i перешла в перестановке сама в себя}] =$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Тогда:

$$I = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

Ответ: 1 элемент

Номер 6

Введем следующую индикаторную функцию I, которая будет обозначать количество элементов, попавших в пересечение:

$$I = I_1 + I_2 + \dots I_n$$

Где:

$$I_i = \begin{cases} 1, \text{если i-й элемент попал в пересечение} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда:

$$E[I] = E[I_1 + \dots I_n] = E[I_1] + \dots + E[I_n]$$

Посчитаем $E[I_i]$:

$$E[I_i] = 1 \cdot Pr[\text{i-й в пересечении}] +$$

$$+0 \cdot Pr[\text{i-й не в пересечении}] = Pr[\text{i-й в пересечении}]$$

Количество способов задать множество X или Y:

$$C_n^k$$

В свою очередь количество способов задать множество X или Y с i-тым элементом:

$$C_{n-1}^{k-1}$$

А значит:

$$E[I_i] = \frac{\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2}{(C_n^k)^2} = \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!}\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

По итогу:

$$E[I] = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot n = \frac{k^2}{n}$$

Ответ: $\frac{k^2}{n}$