Бурмашев Григорий, 208. Матан. Д/з - 2
https://www.instagram.com/burmashev_/
Кто не подписался - тот лох!

№ 10 (листок 1)

a)

Указав $N(\varepsilon)$, вычислите предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{n^2-10n+26}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n^2}}{1-\frac{10}{n}+\frac{26}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)\forall n>N:$$

$$|\frac{n^2+6}{n^2-10n+26}-1|<\varepsilon$$

$$|\frac{10n-20}{n^2-10n+26}|<\varepsilon$$

$$n\geq 2:$$

$$\frac{10n-20}{n^2-10n+26}<\varepsilon$$

$$\frac{\frac{10}{n}-\frac{20}{n^2}}{1-\frac{10}{n}+\frac{26}{n^2}}<\varepsilon$$

$$\frac{10}{n-10}<\varepsilon$$

$$n>\frac{10}{\varepsilon}+10$$

$$N=\left[\frac{10}{\varepsilon}+10\right]+1$$

$$N=\left[\frac{10}{\varepsilon}\right]+11$$

Ответ: $max(N=\left[\frac{10}{\varepsilon}\right]+11,2)$

б)

Указав $N(\varepsilon)$, вычислите предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n}, a > 1$$

Т.к $a > 1, \log_a n$ растет медленнее, чем n, значит:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N :$$

$$|\frac{\log_a n}{n}| < \varepsilon$$

$$|\frac{\lg(n)}{\lg(a) \times n}| < \varepsilon$$

$$\lg(n) < \varepsilon \times \lg(a) \times n$$

$\lg(n)$ растет примерно, как $\sqrt{n}$, тогда можно заменить:

$$\sqrt{n} < \varepsilon \times \lg(a) \times n$$

$$n < \varepsilon^2 \times \lg^2(a) \times n^2$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon^2 \times \lg^2(a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \times \lg^2(a)} < n$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2 \times \lg^2(a)}$$

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2 \times \lg^2(a)}\right] + 1$$

Ответ: $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2 \times \lg^2(a)}\right] + 1$

c)

Указав $N(\varepsilon)$, вычислите предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

При $n \to \infty$ степень $\dfrac{1}{n} \to 0$, значит:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N :$$

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$
$$\sqrt[n]{n} < \varepsilon + 1$$
$$n < (1+\varepsilon)^n$$

По биному Ньютона:

$$n < 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + C_n^3\varepsilon^3 + \ldots + C_n^{n-1}\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n$$

Пусть:

$$n < +n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$
$$1 < \varepsilon + \frac{(n-1)}{2}\varepsilon^2$$
$$2 < 2\varepsilon + (n-1)\varepsilon^2$$
$$\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon^2} < n-1$$
$$\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon^2} + 1 < n$$
$$N = \left[\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon^2} + 1\right] + 1$$
$$N = \left[\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon^2}\right] + 2$$

Ответ: $N = \left[\frac{2-2\varepsilon}{\varepsilon^2}\right] + 2$

Я надеюсь, что мое решение **№10 c)** верное и достаточное, а если нет, то:

Мои полномочия всё

№9 (листок 2)

a)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4+2n+n^2}-\sqrt{n^2-n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{4+2n+n^2-(n^2-n+1)}{\sqrt{4+2n+n^2}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{\sqrt{4+2n+n^2}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n}+1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7+5^n+3^n}{3+2^n}}$$

По арифметике пределов это эквивалентно пределам числителя
и знаменателя:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7+5^n+3^n}$$
$$2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+2^n}$$

1)

При $n\to\infty$ 5^n будет несоизмеримо больше, чем 3^n
а 7 и вовсе перестанет играть роли
Наша функция будет стремится к виду:

$$\sqrt[n]{5^n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n}=5$$

Отсюда следует, что:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7+5^n+3^n}=5$$

2)

Аналогично пункту 1), при $n\to\infty$
3 перестанет влиять на функцию и она будет стремится к:

$$\sqrt[n]{2^n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}=2$$

Возвращаясь к исходному пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7+5^n+3^n}{3+2^n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7+5^n+3^n}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+2^n}}=\frac{5}{2}$$

Ответ: $\frac{5}{2}$