ТВиМС, дз - 3

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

28 сентября 2021 г.

Задача 5

Пусть в – выигрыш, п – проигрыш (в игре)

Рассмотрим оба варианта:

- Сильный - слабый - сильный:

  P(2 выигрыша подряд) = P(пвв) + P(ввп) + P(ввв) =

  $$= (1-q)pq + qp(1-q) + qpq = 2pq - pq^2$$

- Слабый - сильный - слабый:

  P(2 выигрыша подряд) = P(пвв) + P(ввп) + P(ввв) =

  $$(1-p)qp + pq(1-p) + pqp = 2pq - p^2q$$

Теперь выбираем, что лучше:

$$2pq - pq^2 \ ? \ 2pq - p^2q$$

$$pq^2 \ ? \ p^2q$$

Т.к $p > q$, то :$2pq - p^2q < 2pq - pq^2$

Ответ: лучше сильный - слабый - сильный
вероятность выиграть :

$$2pq - pq^2$$

Задача 9

N = 2:

P(взять белый шар) = P(переложить белый и взять белый) + P(переложить черный и взять белый)

$$P = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b+1} = \frac{a^2+ab+a}{(a+b+1)(a+b)} = \frac{a}{a+b}$$

N = 10:

Кажется глупо и сложно решать напрямую, поэтому вероятно тут есть подвох и это можно решить через мат.индукцию (формула для $N = 2$ выполняется и для прочих N). База уже доказана пунктом выше, предположим, что это верно для N, посмотрим на $N+1$ коробку:

Мы можем рассмотреть первые N коробок как "условно" одну большую коробку, из которой вероятность вытянуть белый шар будет $\frac{a}{a+b}$, а вероятность вытянуть черный шар будет $\frac{b}{a+b}$, тогда рассуждения для $N+1$ становятся аналогичными:

$$P = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b+1} = \frac{a^2+ab+a}{(a+b+1)(a+b)} = \frac{a}{a+b}$$

Ответ: $\frac{a}{a+b}$

Задача 10

По определению события A и B являются независимыми, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Также заметим:

$$P(A \cap B) - -\text{делится и на 2, и на 5, т.е на 10}$$

Рассмотрим для начала очевидные случаи n:

- $n \leq 4$:

  При таком n $P(A \cap B) = 0$ (делиться на 10 не может, т.к ≤ 4), $P(B) = 0$ (делиться на 5 не может по аналогичной причине), отсюда получаем, что выполняется равенство для независимости, т.к:

  $$P(A \cap B) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) \cdot P(B)$$

- $4 <$ n < 10:

  При таком n $P(A \cap B)$ все еще равна 0, но вот $P(A)$ и $P(B)$ уже точно не равны нулю, т.к при таких n можно вытянуть число, которое может делится на 2 (ну или на 5), отсюда получаем, что:

  $$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$

- $n \geq 10$:

  При таких n все события уже могут случиться, и надо смотреть более внимательно, мы хотим:

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

  Посчитаем в общем случае эти вероятности:

  всего у нас n чисел, для $P(A)$ мы выбираем среди них только четные, пусть r_2 – остаток от деления n на 2, четное будет каждое 2е число тогда:

  $$P(A) = \frac{\frac{n-r_2}{2}}{n} = \frac{n - r_2}{2n}$$

  Аналогично для $P(B)$ – пусть r_5 – остаток от деления n на 5, делится на 5 каждое 5е число, тогда:

  $$P(B) = \frac{\frac{n-r_5}{5}}{n} = \frac{n - r_5}{5n}$$

И для $P(A \cap B)$ – деление на 10, берем r_{10}:

$$P(A \cap B) = \frac{\frac{n - r_{10}}{10}}{n} = \frac{n - r_{10}}{10n}$$

Теперь подставляем это в равенство для независимых событий и упрощаем:

$$\frac{n - r_{10}}{10n} = \frac{n - r_2}{2n} \cdot \frac{n - r_{10}}{10n}$$
$$n(r_2 + r_5 - r_{10}) = r_2 \cdot r_5$$

Рассмотрим всевозможные случаи:

- Пусть $r_2 + r_5 - r_{10} = 0$:

  Тогда $r_2 \cdot r_5 = 0$, если $r_5 = 0$, тогда получаем, что n кратно 5, подставляем $r_5 = 0$ и получаем, что $r_2 = r_{10}$, если $r_2 = 1$, то этот случай невозможен, т.к n уже кратно 5 и r_{10} либо 0, либо 5, отсюда получаем, что $r_2 = 0 = r_{10}$ и n – кратно 10.

  Если же $r_2 = 0$, тогда $r_5 = r_{10}$, и при этом n – четно. Помимо только кратных 10 нам подходят еще числа, которые при делении на 10 дают остаток 2 или 4.

  Итого 2 варианта : числа, кратные 10 и числа вида $10a + b$, где a – любое натуральное, $b \in \{2, 4\}$, можно объединить эти два случая в один вида $10a + c$, где $c \in \{0, 2, 4\}$

- Пусть $r_2 + r_5 - r_{10} \neq 0$:

  Тогда $n = \frac{r_2 \cdot r_5}{r_2 + r_5 - r_{10}}$, если $r_2 = 0$, тогда $n = 0$, у нас такого быть не может (множество начинается с 1), если же $r_2 \neq 0$, тогда $r_2 = 1$ (других остатков по модулю 2 нет), тогда:

  $$n = \frac{r_5}{1 + r_5 - r_{10}}$$

  Отчетливо видно, что $r_5 < 4$, тогда точно $n \leq 4$, а этот случай мы уже рассмотрели выше

Все случаи разобраны, получаем ответ:

Ответ: $n \leq 4$, $n = 10a + b$, где a – натуральное , $b \in \{0, 2, 4\}$