Математические структуры, дз – 1

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

28 сентября 2022 г.

Номер 1

Приведите к ДНФ формулу:

$$(p \vee q) \to (p \vee \neg r)$$

Решаем, для начала избавимся от $\to$:

$$(p \vee q) \to (p \vee \neg r) \equiv \neg(p \vee q) \vee (p \vee \neg r) \equiv$$

Теперь избавимся от отрицания:

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg r) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg r \equiv$$

Теперь используем дистрибутивность и "сократим"скобку, которая всегда равна 1 $(\neg p \vee p)$:

$$\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \vee \neg r \equiv \neg q \vee p \vee \neg r$$

Ответ: $\neg q \vee p \vee \neg r$

Номер 2

Докажите, что следующая формула является тавтологией для любого $n > 0$:

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij} \to \bigvee_{j=1}^{n} \bigvee_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 < i_2}}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j})$$

Доказательство:

Чтобы показать, что эта формула – тавтология, нужно понять, что она всегда равна 1. Нам нужно проверить случай $1 \to 0$, поскольку только этот случай дает 0.

Если абсолютно все наши переменные ложны, то мы получаем $0 \to 0$, что равно 1.

Посмотрим, как выглядит левое выражение:

$$(p_{11} \vee p_{12} \vee \ldots \vee p_{1n}) \wedge \ldots \wedge (p_{n+1,1} \vee \ldots \vee p_{n+1,n})$$

Теперь предположим, что левая часть выражения дает 1. Простыми словами это означает, что в каждой скобке найдется хотя бы один элемент, который не равен нулю. Т.е для любого i от 1 до $n+1$ мы найдем $p_{ij} = 1$. С другой стороны заметим, что тогда для $i_1 < i_2$ найдется такое j, что $(p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j}) = 1$ (вытекает из рассуждений выше). Следовательно хотя бы одна скобка даст нам 1 в правом выражении, а значит все правое выражение тоже даст нам 1, следовательно случай $1 \to 0$ получить мы никак не можем, а значит формула – тавтология.

Ч.Т.Д