# Диффуры, дз – 5

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

21 апреля 2022 г.

## Номер 2

### а)

$$(2x - x^2)y'' + 2y' - \frac{2}{x}y = (2-x)^2 x e^{-x}$$

Избавимся от скобки, для этого поделим на $(2x - x^2)$, заведомо заметив, что $x = 0$ и $x = 2$ – не являются корнями уравнения, получаем:

$$y'' + \frac{2}{(2-x)x}y' - \frac{2}{(2-x)x^2}y = (2-x)e^{-x}$$

Разберемся сначала с однородным уравнением, замечаем, что $y_1 = x$ – частное решение, тогда применяем формулу Луивилля–Остроградского и получаем:

$$xy_2' - y_2 = C \cdot e^{\int \frac{2}{x^2-2x}dx}$$

Выражаем:

$$xy_2' - y_2 = C \cdot e^{\ln(2-x)-\ln(x)}$$

$$xy_2' - y_2 = C \cdot \frac{2-x}{x}$$

$$\frac{xy_2' - y_2}{x^2} = C \cdot \frac{2-x}{x^3}$$

Тогда делим на $y_1^2 = x^2$ и получаем:

$$\left(\frac{y_2}{x}\right)'_x = C \cdot \frac{2-x}{x^3}$$

$$\frac{y_2}{x} = C \cdot \int \frac{2-x}{x^3} = C \cdot \frac{x-1}{x^2} + D = \frac{C}{x} - \frac{C}{x^2} + D$$

$$y_2 = C - \frac{C}{x} + D \cdot x$$

Назовем $C = C_1$ и $D = C_2$, тогда:

$$y_2 = C_1(x) - \frac{C_1(x)}{x} + C_2(x) \cdot x$$

$$y_2 = C_1(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right) + C_2(x) \cdot x$$

Теперь решим неоднородное методом вариации постоянных:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + C_2' x = 0 \\ C_1' \cdot \frac{1}{x^2} + C_2' = (2 - x)e^{-x} \end{cases}$$

Выражаем производные в системе:

$$\begin{cases} C_1' = x^2 e^{-x} \\ C_2' = (1 - x)e^{-x} \end{cases}$$

А теперь находим сами С-шки:

$$C_1 = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int e^{-x} x dx = -x^2 e^{-x} - 2e^{-x} x + 2\int e^{-x} dx =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + D_1$$

$$C_2 = \int (1 - x)e^{-x} dx = \int (e^{-x} - xe^{-x}) dx = \int e^{-x} dx - \int xe^{-x} dx =$$

$$= -e^{-x} + e^{-x} x + e^{-x} + D_2 = e^{-x} x + D_2$$

Отсюда получаем решение:

$$y = \left(-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + D_1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + (e^{-x} x + D_2)x =$$

$$= e^{-x} x^2 + D_2 \cdot x + \left(-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + D_1\right) - \frac{(-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + D_1)}{x} =$$

$$= e^{-x} x^2 + D_2 \cdot x - e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + D_1 + \frac{e^{-x}(x^2 + 2x + 2)}{x} - \frac{D_1}{x}$$

**Ответ:**

$$y = e^{-x} x^2 + D_2 \cdot x - e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + \frac{e^{-x}(x^2 + 2x + 2)}{x} + D_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

## b)

$$xy'' - (4x+2)y' + (4x+4)y = x^2 e^{2x}$$

Поделим на $x$, заведомо посмотрев, что $x = 0$ не является решением, получаем:

$$y'' - \frac{4x+2}{x}y' + \frac{4x+4}{x}y = xe^{2x}$$

Сначала решаем однородное, для этого замечаем, что $y_1 = e^{2x}$ является частным решением и после используем формулу аналогично предыдущему пункту:

$$e^{2x}y' - 2e^{2x}y = C \cdot e^{\int \frac{4x+2}{x}dx}$$

$$e^{2x}y_2' - 2e^{2x}y_2 = C \cdot e^{4x+2\ln x}$$

$$e^{2x}y_2' - 2e^{2x}y_2 = C \cdot e^{4x} \cdot x^2$$

Аналогично делим и получаем:

$$\frac{e^{2x}y_2' - 2e^{2x}y_2}{e^{4x}} = C \cdot x^2$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = Cx^2$$

$$\frac{y_2}{y_1} = C \cdot \int x^2 dx = C \cdot \frac{x^3}{3} + D$$

$$y_2 = C\frac{x_3}{3} \cdot y_1 = C \cdot \frac{x^3}{3} \cdot e^{2x} + D \cdot e^{2x}$$

Итого получаем (закинув тройку в константу):

$$y_2 = C_1(x) \cdot x^3 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{2x}$$

Теперь применяем метод вариации переменных:

$$\begin{cases} C_1' \cdot x^3 \cdot e^{2x} + C_2' \cdot e^{2x} = 0 \\ C_1' \cdot (3x^2e^{2x} + x^3 2e^{2x}) + C_2' \cdot 2e^{2x} = xe^{2x} \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} C_1' = \frac{1}{3x} \\ C_2' = -\frac{x^2}{3} \end{cases}$$

Получаем:

$$C_1 = \frac{\ln x}{3} + D_1$$

$$C_2 = -\frac{x^3}{9} + D_2$$

Отсюда ответ:

$$y = \left(\frac{\ln x}{3} + D_1\right) x^3 \cdot e^{2x} + \left(-\frac{x^3}{9} + D_2\right) \cdot e^{2x} = \frac{\ln x \cdot x^3 \cdot e^{2x}}{3} + x^3 \cdot e^{2x} \cdot D_1 - \frac{x^3 \cdot e^{2x}}{9} + e^{2x} \cdot D_2$$

**Ответ:**

$$y = \frac{\ln x \cdot x^3 \cdot e^{2x}}{3} + x^3 \cdot e^{2x} \cdot D_1 - \frac{x^3 \cdot e^{2x}}{9} + e^{2x} \cdot D_2$$

## Номер 3

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),\ f(x) = 1$$

Из условия фундаментальные решения:

$$y_1 = x,\ y_2 = x^2 - 1$$

Сразу выразим производные для определителя:

$$y_1' = 1,\ y_1'' = 0$$

$$y_2' = 2x,\ y_2' = 2$$

Тогда:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 - 1 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Считаем:

$$x^2y'' - 2xy' + y'' + 2y = 0$$

$$y''(x^2 + 1) - 2xy' + 2y = 0$$

Ну все, вид уравнения нашли, теперь вспоминаем про $f(x) = 1$ и ищем общее решение:

$$y''(x^2 + 1) - 2xy' + 2y = 1$$

Ищем частное решение в виде:

$$y_3 = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_3' = A \cdot 2x + B$$

$$y_3'' = 2A$$

Тогда подставляем:

$$2A(x^2 + 1) - 2x(2xA + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 1$$

$$2Ax^2 + 2A - 4x^2A - 2xB + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 1$$

Отсюда:

$$x^2(2A - 4A + 2A) + x(-2B + 2B) + 2A + 2C = 1$$

$$\begin{cases} 2A - 4A + 2A = 0 \\ -2B + 2B = 0 \\ 2A + 2C = 1 \end{cases}$$

Тогда положим самый простой из вариантов:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

И получаем:

$$y_3 = x + \frac{1}{2}$$

Тогда общее решение:

$$y = C_1 \cdot x + C_2 \cdot (x^2 - 1) + x + \frac{1}{2}$$

**Ответ:**

вид уравнения:

$$y''(x^2 + 1) - 2xy' + 2y = 1$$

общее решение:

$$y = C_1 \cdot x + C_2 \cdot (x^2 - 1) + x + \frac{1}{2}$$

## Номер 4

Знаем:

$$y'' + p(x)y = 0,\ x \geq 0,\ p(x) - \text{непрерывна}$$

К тому же есть два решения со свойствами:

$$y_1(x) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$y_2(x) \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$y_1'(x), y_2'(x) \text{ ограничены на } x \geq 0$$

Тогда смотрим, по Луивиллю-Остроградскому:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = C \cdot e^0 = C,\ C - \text{const}$$

Из вида уравнения получили, что справа просто стоит константа, нужно ее оценить, мы можем это сделать из условия об ограниченности производных:

$$|y_1 y_2' - y_1' y_2| \leq (|y_1(x)| + |y_2(x)|)\, M$$

Но (опять же из условия) обе функции стремятся к нулю, поэтому если взять достаточно большие $x$, $|y_1(x)| + |y_2(x)|$ станет очень и очень малой величиной. Но при этом $C$ – константа и мы ее ограничили чем-то, что очень близко к нулю, значит $C = 0$, тобишь определитель равен нулю, из чего по определению $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются зависимыми

**Ч.Т.Д**

# Номер 5

## а)

$$y'' + \frac{1}{1+x^2}y = 0,\ x \geq 0$$

Доказываем, нужно по теореме Штурма искать такое:

$$y'' + q(x) \cdot y = 0$$

Что:

$$q(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Совсем нетрудно заметить, что мы можем оценить как (взяв $x \geq 1$):

$$\frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Тогда получаем понятное нам уравнение:

$$y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0$$

Домножаем:

$$2x^2y'' + y = 0$$

А такое уравнение мы решать умеем, это уравнение Эйлера, решаем:

$$2\lambda(\lambda - 1) + 1 = 0$$

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Отсюда корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}$$

Значит:

$$y = e^{\frac{t}{2}} \left( C_1 \cos\frac{t}{2} + C_2 \sin\frac{t}{2} \right)$$

Возвращаемся от стандартной замены:

$$y = \sqrt{x} \left( D_1 \cos\frac{\ln|x|}{2} + D_2 \sin\frac{\ln|x|}{2} \right)$$

Видим, что здесь бесконечно много корней (периодичные функции), ну тогда по теореме Штурма и для нашего исходного уравнения тоже бесконечно много корней

**Ч.Т.Д**

**b)**

$$y'' - xy' + y = 0,\ (-\infty, +\infty)$$

Пусть:

$$y(x) = a(x) \cdot z(x)$$

Найдем производные:

$$y' = a'z + az'$$

$$y'' = a''z + az'' + 2a'z'$$

$$a''z + az'' + 2a'z' - xa'z - xaz + az = 0$$

Отсюда:

$$2a' - xa = 0$$

$$2(a)'_x = xa$$

$$2\int \frac{a'}{a} = \int x dx$$

$$2\ln|a| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln|a| = \frac{x^2}{4} + C$$

$$a = C \cdot e^{\frac{x^2}{4}}$$

Пусть $C = 1$, тогда:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \cdot z(x)$$

Теперь будем подставлять, посчитаем:

$$a = e^{\frac{x^2}{4}}$$

$$a' = \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{x^2}{4}}$$

$$a'' = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right) e^{\frac{x^2}{4}}$$

$$e^{\frac{x^2}{4}} \cdot z'' + \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + 1\right) \cdot z \cdot e^{\frac{x^2}{4}} = 0$$

Тогда уравнение:

$$z'' + \left(\frac{6 - x^2}{4}\right) z = 0$$

Хотим как-то применять Штурма, Заметим, что на $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ дробь $\frac{6-x^2}{4}$ положительна. Тогда оценим тут как:

$$\frac{6-x^2}{4} \leq \frac{3}{2}, x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$$

Тогда рассматриваем более простое уравнение:

$$z'' + \frac{3}{2}z = 0$$

И решаем его:

$$\lambda^2 + \frac{3}{2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}i$$

Отсюда:

$$z = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$$

Замечаем, что корней здесь не более двух в силу периодичности функций $\sin, \cos$ (в наш отрезок тупо не влезет больше двух нулей). Еще сами точки $-\sqrt{6}, \sqrt{6}$ могут иметь нули, тогда набирается четыре корня, теперь осталось проверить что происходит вне этого промежутка (должен быть 1 корень для условия задачи), там дробь отрицательна, значит можем оценить:

$$\frac{6-x^2}{4} \leq 0$$

Тогда по теореме Штурма можем смотреть на уравнение:

$$z'' + 0z = 0$$

У него корни имеют вид:

$$y = Ax + B$$

Значит их тут не более одного. Итого суммируем и получаем, что на $(-\infty, +\infty)$ у нашего уравнения не более 5 корней, что от нас и требовалось получить.

**Ч.Т.Д**