Бурмашев Григорий. 208. Матан – 3

# ТЕБЕ

# Номер 10

## a)

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2$$

Проведем исследование функции и построим её график.

1. **Область определения и поведение функции на границах:**

   Функция определена всюду.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2. **Нули и знаки функции:**

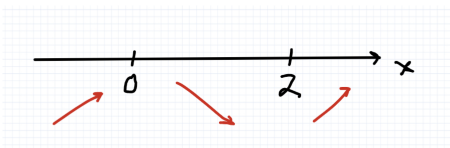
$$(x+1)(x-2)^2 = 0$$

$$x = -1; x = 2$$

3. **Экстремумы и монотонность:**

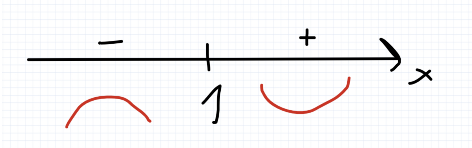
$$f'(x) = 1\cdot(x-2)^2 + (x+1)\cdot 2(x-2) = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0: \ x = 2; x = 0$$
$$f(2) = 0; f(0) = 4$$



4. **Выпуклость:**

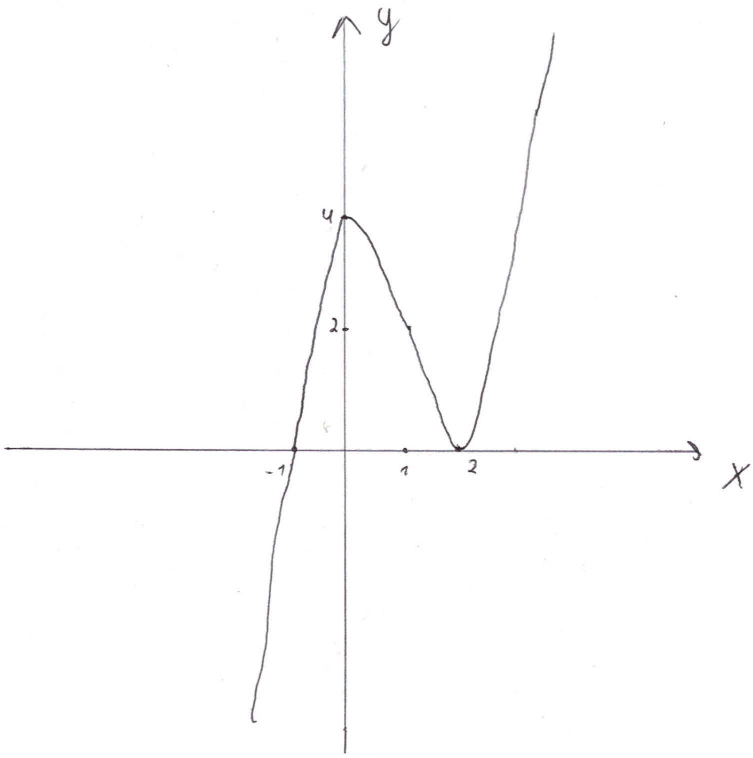
$$f''(x) = 6(x-1)$$
$$f''(x) = 0: \ x = 1$$
$$f(1) = 2$$




5. **Ассимптоты:**

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)(x-2)^2}{x} = \infty$$

6. **График:**



b)

$$f(x) = \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$$

Проведем исследование функции и построим её график.

1. **Область определения и поведение функции на границах:**

   Функция неопределена в $x = -1$

$$\lim_{x \to (-1)+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to (-1)-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2. **Нули и знаки функции:**

$$\frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3} = 0$$

$$x = 0; \; x = -\frac{4}{3}$$

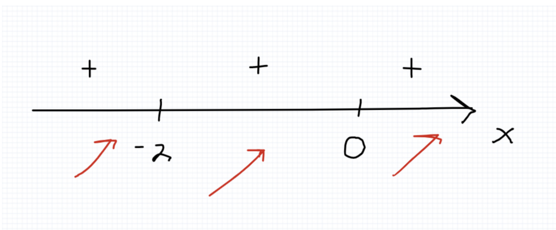
3. **Экстремумы и монотонность:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2(3x+4) + 3x^3)(x+1)^3 - x^3(3x+4)3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{(12x^3 + 12x^2)(x+1) - 9x^4 - 12x^3}{(x+1)^4} = \frac{3x^2(x+2)^2}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0: \; x = -2; x = 0$$

$$f(-2) = -16; f(0) = 0$$



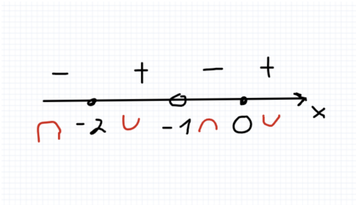
4. **Выпуклость:**

$$f''(x) = \frac{(12x^3+36x^2+24x)(x+1)^4-(3x^4+12x^3+12x^2)4(x+1)^3)}{(x+1)^8} =$$

$$= \frac{12x^4+36x^3+24x^2+12x^5+36x^2+24x-12x^4-48x^5-48x^2}{(x+1)^5} =$$

$$= \frac{12x^2+24x}{(x+1)^5} = \frac{12x(x+2)}{(x+1)^5}$$

$$f''(x)=0: \ x=0; x=-2$$




5. **Ассимптоты:**

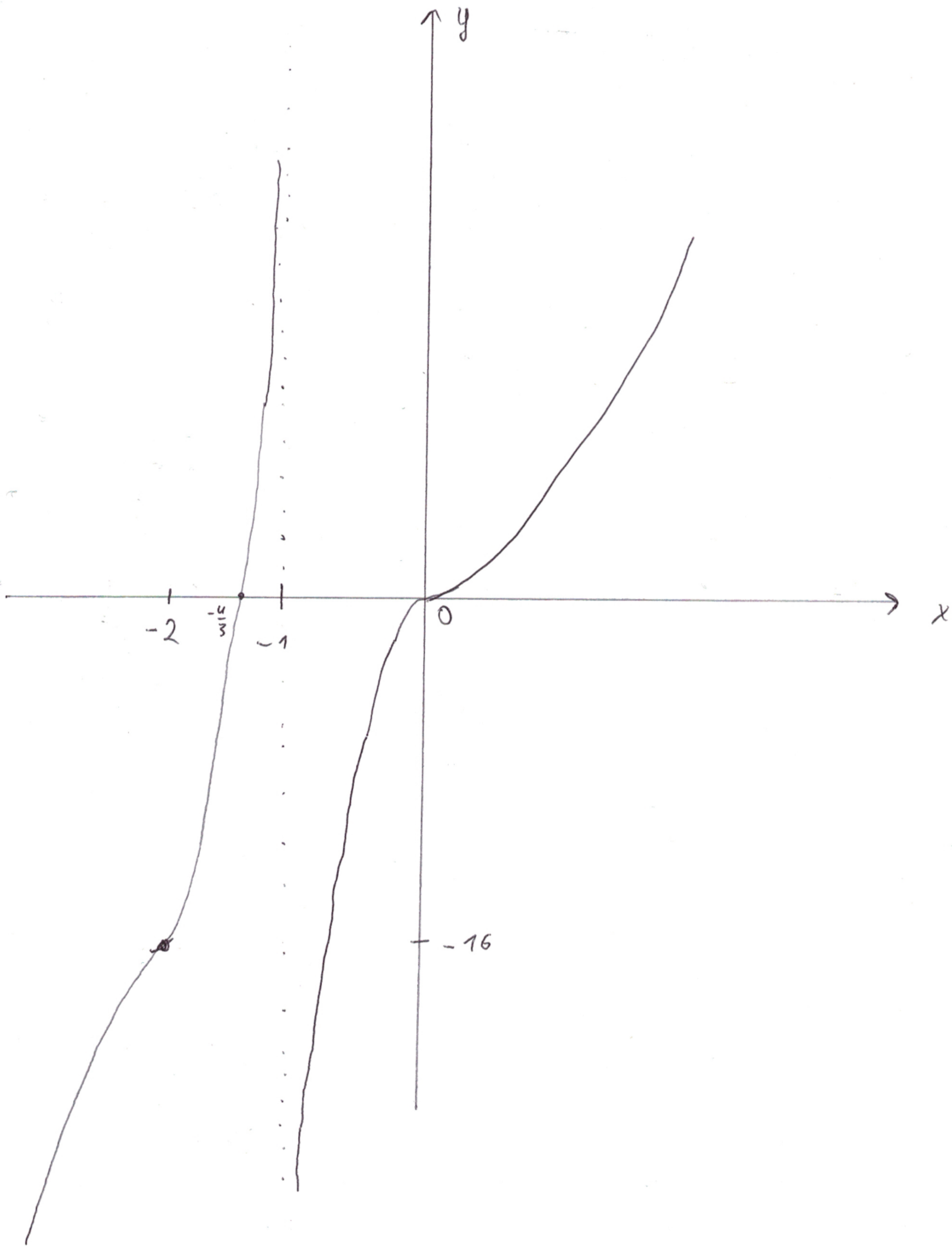
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3x+4)}{x(x+1)^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+4x^3}{x^4+3x^3+3x^2+x} = \frac{3}{1} = 3$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-3x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}-3x) = \lim_{x\to\infty}\frac{-5x^3-9x^2-3x}{x^3+3x^2+3x+1} = -5$$

$$y = 3x-5$$

Вертикальная ассимптота по точке разрыва $x=-1$

6. **График:**


y
x
-2
$-\frac{4}{3}$
-1
0
-16

## c)

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$$

Проведем исследование функции и построим её график.

1. **Область определения и поведение функции на границах:**

   $x > 0$

   $$\lim_{x\to0} \sqrt{x}\cdot\ln x = \lim_{x\to0} \sqrt{x}\cdot(x-1)\cdot\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \lim_{x\to0} \sqrt{x}\cdot(x-1)\cdot1 = 0\cdot(-1)\cdot1 = 0$$

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

2. **Нули и знаки функции:**

   $$\sqrt{x} \cdot \ln x = 0$$

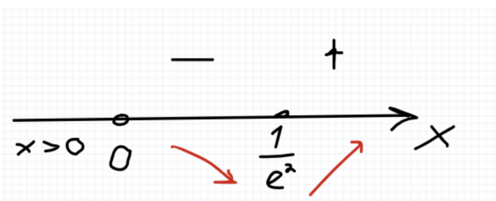
   $$x = 1$$

3. **Экстремумы и монотонность:**

   $$f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$$

   $$f'(x) = 0 : x = \frac{1}{e^2}$$

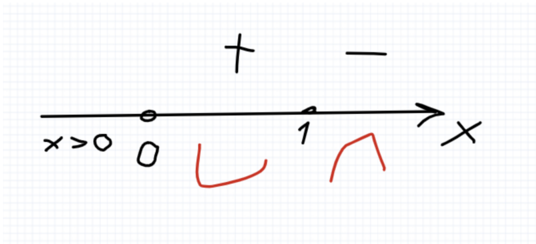
   $$f(\frac{1}{e^2}) = -\frac{2}{e}$$




4. **Выпуклость:**

   $$f''(x) = \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{2+\ln x}{\sqrt{x}}}{4x} = -\frac{\ln x}{4\sqrt{x}\cdot x}$$

   $$f''(x) = 0 : \ x = 1$$

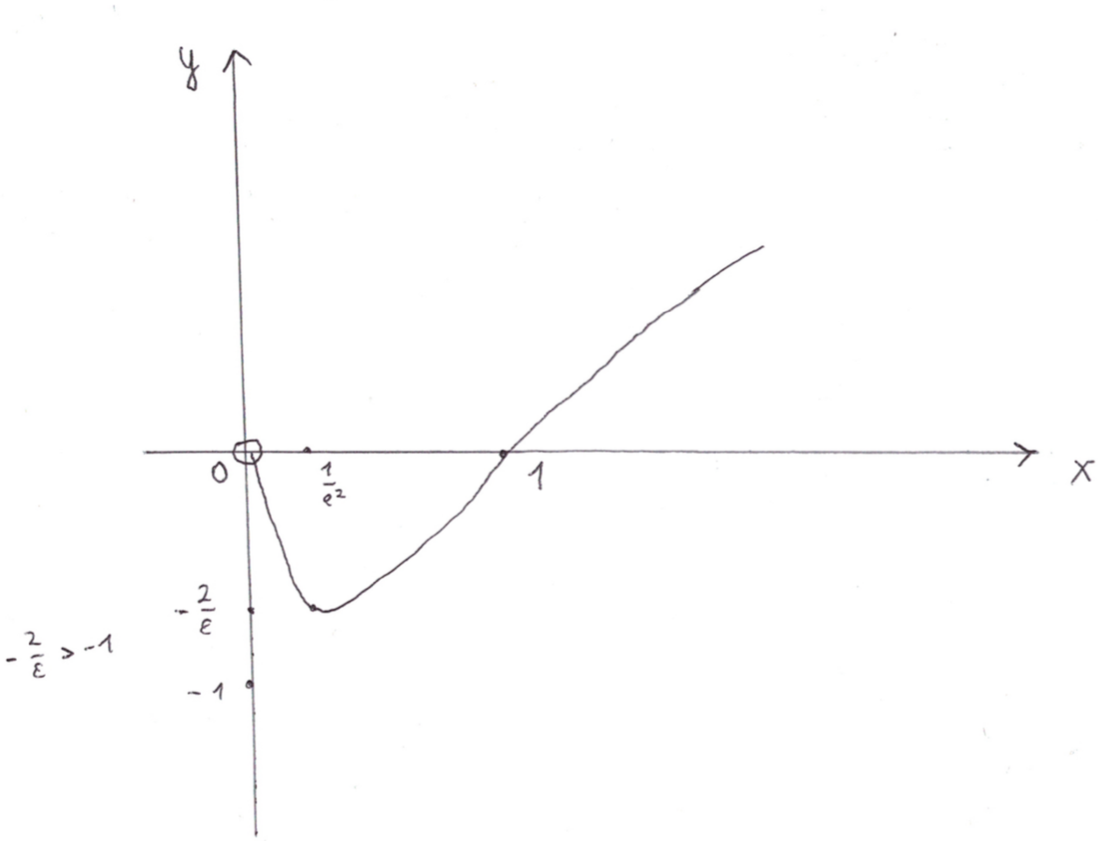



5. **Ассимптоты:**

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 0x) = \infty$$

6. **График:**



## d)

$$f(x) = (x-6) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Проведем исследование функции и построим её график.

1. **Область определения и поведение функции на границах:**
   $x \neq 0$

$$(-\infty; 0) \cup (0; \infty);$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$

2. **Нули и знаки функции:**

$$(x-6) \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$x = 6$$

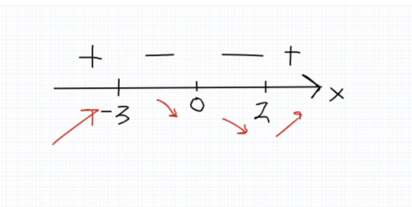
3. **Экстремумы и монотонность:**

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x-6) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x - 6}{e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2}$$

$$f'(x) = 0; x^2 + x - 6 = 0; (x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3; x = 2$$

$$f(-3) = -9 \cdot e^{\frac{1}{3}}; f(2) = -4 \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$



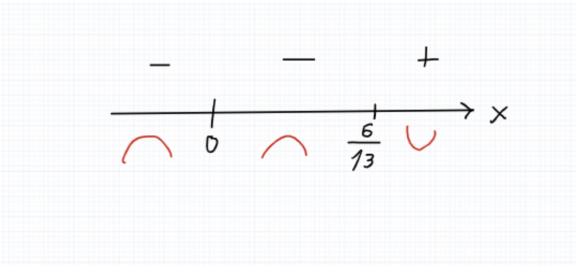
4. **Выпуклость:**

$$f''(x) = (2x+1)\cdot(e^{-\frac{1}{x}}\cdot x^{-2})+\left(x^2+x-6\right)\cdot\left(e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^{-2}}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right)\right) =$$

$$= \frac{2x}{e^{1/x}\cdot x^2}+\frac{1}{e^{1/x}\cdot x^2}+\frac{(x^2+x-6)}{e^{1/x}\cdot x^4}-\frac{2(x^2+x-6)}{e^{1/x}\cdot x^3} =$$

$$= \frac{13x-6}{x^4\cdot e^{1/x}}$$

$$f''(x) = 0 : x = \frac{6}{13}$$




5. **Ассимптоты:**

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x-6}{x\cdot e^{1/x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-6}{x\cdot 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x}}{1} = 1$$

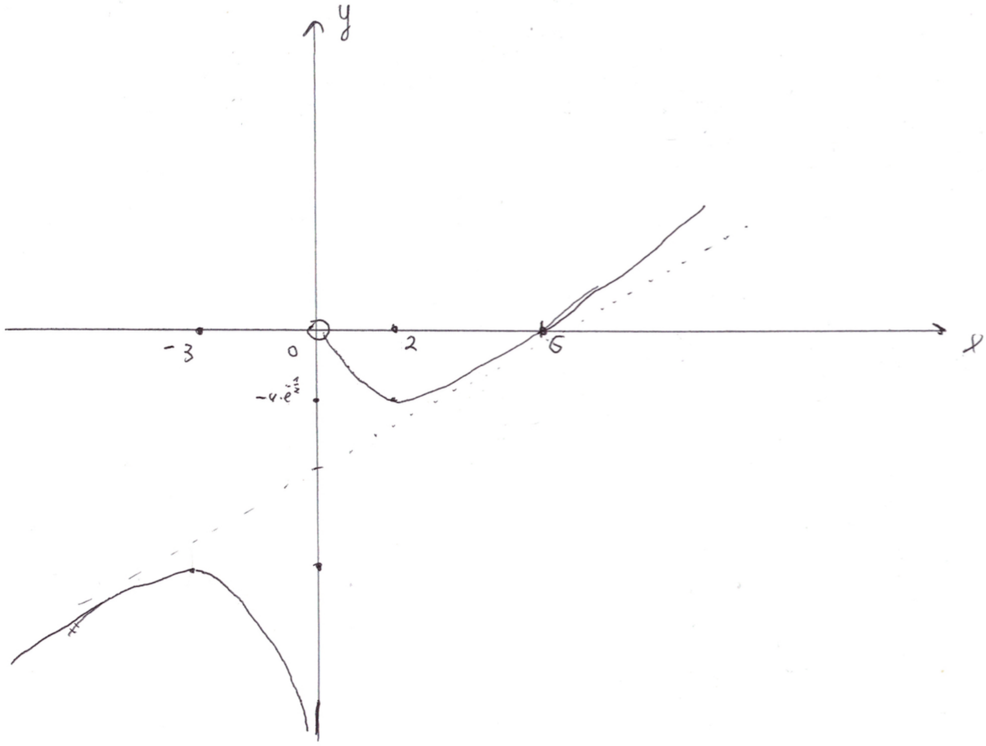
$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-6}{e^{1/x}}-1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x-6-x\cdot e^{1/x}\right) = -6-\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot e^{1/x}-x\right) =$$

$$= -6-\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{x} = -6-\lim_{x\to\infty}e^{1/x} = -6-1 = -7$$

$$y = x-7$$

Вертикальная ассимптота в точке разрыва $x = 0$

6. **График:**



y
x
-3
0
2
6
$-4\cdot e^{\frac{1}{2}}$