

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

28 октября 2022 г.

Номер 1

Являются ли общезначимыми следующие формулы:

а)

$$(\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \rightarrow \exists y \forall (P(x) \rightarrow Q(y))$$

Видим, что:

$$(\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \equiv \overline{(\exists x P(x))} \vee \exists y Q(y) \equiv \forall x \exists y \overline{P(x)} \vee Q(y)$$

Второе:

$$\exists y \forall (P(x) \rightarrow Q(y)) \equiv \exists y \forall x \overline{P(x)} \vee Q(y)$$

С помощью этих преобразований исходная формула принимает вид:

$$\forall x \exists y \overline{P(x)} \vee Q(y) \rightarrow \exists y \forall x \overline{P(x)} \vee Q(y)$$

Пусть существует такая модель, что формула ложна, т.е. принимает вид $1 \rightarrow 0$. Тогда заметим, что левая и правая часть не зависят друг от друга из-за переменных x и y местами, следовательно левая часть может быть истина только при выполнении хотя бы одного из:

- $\forall x \overline{P(x)}$
- $\exists y Q(y)$

Но тогда мы получаем истинность заключения в нашей формуле, из этого следует, что формула **общезначима**

b)

$$(\forall x P(x, x) \wedge \forall x, y, z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))) \rightarrow \forall x, y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$$

Рассмотрим такую модель, где $P(x, y) \leftrightarrow x \geq y$, тогда можем заметить:

$$\forall x (x \geq x) \equiv 1$$

$$\forall x, y, z, ((x \geq y, y \geq z) \rightarrow x \geq z) \equiv 1$$

Таким образом левая часть нашей исходной формулы принимает вид:

$$\forall x P(x, x) \wedge \forall x, y, z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)) \leftrightarrow 1 \wedge 1 \equiv 1$$

Теперь, аналогично, для правой части формулы (заключения) получаем:

$$\forall x, y (x \geq y \rightarrow y \geq x) \equiv 0$$

Тобишь:

$$\forall x, y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)) \equiv 0$$

Из всего полученного выше получаем, что:

$$(\forall x P(x, x) \wedge \forall x, y, z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))) \rightarrow \forall x, y (P(x, y) \rightarrow P(y, x)) \equiv 1 \rightarrow 0 \equiv 0$$

Следовательно формула **не является** общезначимой

Ответ:

- а) да, является
- б) нет, не является