Бурмашев Григорий. 208. Алгебра – 1

Номер 1

- Проверим, что формула действительно задает бинарную операцию, т.е мы из $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{1\})$ попадаем в $(\mathbb{Q} \setminus \{1\})$

  Из $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ следует, что $3mn - 3m - 3n + 4$ точно приведет нас в $\mathbb{Q}$. Нам нужно доказать, что этой операцией мы не сможем получить 1. Пойдем методом от противного:

  Пусть $3mn - 3m - 3n + 4 = 1$, $m \neq 1, n \neq 1$. Тогда:

  $$3mn - 3m = 3n - 3$$

  $$mn - m = n - 1$$

  $$m(n-1) = n - 1 \,\Big|\, : (n-1) \text{ т.к n} \neq 1$$

  $$m = 1$$

  Получили противоречие, значит $m \circ n$ – бинарная операция

- Теперь докажем, что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой, для этого посмотрим на три аксиомы:

  1. Ассоциативность:
     Пусть $a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus 1$, тогда:
     С одной стороны:

     $$(a \circ b) = 3ab - 3a - 3b + 4$$

     $$(a \circ b) \circ c = 3(3ab - 3a - 3b + 4)c - 3(3ab - 3a - 3b + 4) - 3c + 4 =$$
     $$= 9abc - 9ab - 9ac + 9a - 9bc + 9b + 9c - 8$$

     С другой стороны:

     $$(b \circ c) = 3bc - 3b - 3c + 4$$

     $$a \circ (b \circ c) = 3a(3bc - 3b - 3c + 4) - 3a - 3(3bc - 3b - 3c + 4) + 4 =$$
     $$= 9abc - 9ab - 9ac + 9a - 9bc + 9b + 9c - 8$$

     Значит:
     $$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

2. Нейтральный элемент:
   Пусть $a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

   Найдем его:

$$e \circ a = a$$
$$3ea - 3e - 3a + 4 = a$$
$$e = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$$

   Теперь проверяем:

$$a \circ e = 3ae - 3a - 3e + 4 = 3a \cdot \frac{4}{3} - 3a - 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 =$$
$$= 4a - 3a - 4 + 4 = a$$

   По итогу получаем:

$$e \circ a = a \circ e = a \;\; \forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$$

3. Обратный элемент:

   Найдем его:

$$a \circ b = e = \frac{4}{3}$$
$$3ab - 3b - 3a + 4 = \frac{4}{3}$$
$$9(ab - b - a) + 12 = 4$$
$$9ab - 9b = -8 + 9a$$
$$b(9a - 9) = 9a - 8 \;\Big|\; : (9a - 9) \neq 0 \text{ т.к } a \neq 1$$
$$b = \frac{9a - 8}{9a - 9} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$$

   Теперь проверяем:

$$b \circ a = 3ab - 3a - 3b + 4 = 3a \cdot \frac{9a - 8}{9a - 9} - 3a - 3 \cdot \frac{9a - 8}{9a - 9} + 4 =$$
$$= \frac{3a(9a - 8) - 3a(9a - 9) - 3(9a - 8) + 4(9a - 9)}{9a - 9} = \frac{12a - 12}{9a - 9} = \frac{12(a - 1)}{9(a - 1)} = \frac{4}{3}$$

   По итогу получаем:

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Ч.Т.Д

P.S Можно было конечно доказать коммутативность, но я слишком поздно это понял :(поэтому пофиг

Номер 2

Для группы $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ e (нейтральный элемент) будет равен 1.

Мы ищем все такие z (как на семинаре), что:

$$\begin{cases} z^{18} = 1 \\ z^i \neq 1 \; \forall \; i < 18 \end{cases}$$

Найдем множество $z^{18} = 1$:

По формуле Муавра это будет следующее множество:

$$\{z : z = \cos \frac{2\pi k}{18} + i \cdot \sin \frac{2\pi k}{18}, \; k = 0, 1 \ldots 17\}$$

Откинем сразу те k, которые нам не подходят по второму условию из системы:

- k = 0 нам не подходит, т.к в таком случае у нас $\cos 0 + i \sin 0 = 1$ и, возводя в любую степень, мы будем получать 1 (например $[\cos 0 + i \sin 0]^2 = \cos(0 \cdot 2) + i \sin(0 \cdot 2) = 1$)

- Если возвести любое z из этого множества в 9 степень, то по формуле :

$$z^9 = \cos \left(9 \cdot \frac{2\pi k}{18}\right) + i \cdot \sin \left(9 \cdot \frac{2\pi k}{18}\right) = \cos \pi k + i \sin \pi k$$

  Т.к z^9 не должен быть равен единице, мы должны откинуть k, кратные двум, ибо при четном k:

$$\begin{cases} \cos \pi k = 1 \\ i \sin \pi k = 0 \\ \cos \pi k + i \sin \pi k = 1 \text{ (чего мы не хотим)} \end{cases}$$

- Если же возвести в 6 степень, то по формуле получим:

$$z^6 = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}$$

  Т.к это тоже не должно быть равно единице, можем откинуть k кратные трем, т.к при k кратном трем:

$$\begin{cases} \cos \frac{2\pi k}{3} = 1 \\ i \sin \frac{2\pi k}{3} = 0 \\ \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} = 1 \end{cases}$$

Остаются k:

$$1, 5, 7, 11, 13, 17$$

Пока откидывал k заметил, что у всех k, которые не подходят, $\gcd(18, k) \neq 1$. А остались как раз те k, у которых $\gcd = 1$. Поэтому стоит показать, что при $\gcd(18, k) = j$ (> 1) все очень плохо, из $\gcd = j$ следует:

$$k = k' \cdot j \ (k' < k)$$

$$18 = n \cdot j \ (n < 18)$$

Тогда:

$$z = \cos\frac{2\pi k' \cdot j}{n \cdot j} + i \cdot \sin\frac{2\pi k' \cdot j}{n \cdot j} = \cos\frac{2\pi k'}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi k'}{n}$$

Видно, что достаточно возвести z всего лишь в степень n, чтобы получить 1. Т.е:

$$z^n = \cos 2\pi k' + i \cdot \sin 2\pi k' = 1$$

Но $n < 18$, а значит 2е условие в системе не выполняется. Из этого наблюдения получаем, что если $\gcd(18, k) = 1$, то получить 1 мы сможем начиная с 18й степени, а при иных gcd нам достаточно будет возвести в меньшую степень (что я и делал, когда откидывал k руками). А значит$k : 1, 5, 7, 11, 13, 17$ действительно подходят. Получаем ответ:

Ответ:

$$\cos\frac{\pi k}{9} + i \cdot \sin\frac{\pi k}{9}; \ k = 1, 5, 7, 11, 13, 17$$

Номер 3

[Вот это я понимаю глина, давно такого не делал]

Посмотрим, что происходит в степенях у сигмы, чтобы найти $\langle\sigma\rangle$.
(перемножение справа налево, как у Авдеева)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$$

Назовем также $\langle\sigma\rangle = H$ [для дальнейшего удобства :)]
Получается, что:

$$\langle\sigma\rangle = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Тогда множество xH для элемента x будет выглядеть следующим образом:

$$xH = \left\{ x \cdot id, x \cdot \sigma, x \cdot \sigma^2 \right\}$$

А множество Hx соотвественно :

$$Hx = \left\{ id \cdot x, \sigma \cdot x, \sigma^2 \cdot x \right\}$$

Я решил не пытаться что-то мудрить и упрощать себе решение, поэтому сделаю все перебором всех возможных вариантов :)

- Найдем все левые смежные классы группы A_4:

  Пройдемся по всем 24 перестановкам :) :) :), каждую текущую буду заново называть a, и посчитаем для каждой левый класс aH

Глина

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

[Ответ] У нас получилось очень много одинаковых множеств, поэтому выкинем повторяющиеся и оставим только уникальные множества (выкидывал рандомно по одинаковым элементам, особо ни к чему не привязываясь):

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix},\ aH = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ aH = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ aH = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ aH = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ aH = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Найдем все правые смежные классы:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

[Ответ] Аналогично оставляю только уникальные множества:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ Ha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Всего получилось по 8 левых и правых смежных классов, ответ отдельно выписывать не буду, чтобы не дублировать и не тратить место, ответом соответственно являются все aH и Ha, которые я оставил.

[Сорри за глину, надеюсь такого больше не буду делать]

Номер 4

Введем обозначения:

$$G \text{ – циклическая группа}$$
$$H \text{ – подгруппа } G$$
$$a \text{ – образующий элемент для } G$$

Рассмотрим отдельно примитивные случаи:

1. $|G| = 1$
$$H = G \to \text{H циклична}$$

2. $|H| = 1$
$$H = \{e = a^0\} = \langle e \rangle$$

Теперь считаем, что $|G| \neq 1, |H| \neq 1$

Тогда по определению образующего элемента $\quad a^k \in G \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$

Пускай $n = \min\{i : a^i \in H, i > 0\},\; a^n = b.$

Такая степень есть (хотя бы одна), т.к если $a^{-k} \in H$, то $\left(a^{-k}\right)^{-1} = a^k \in H$

Мы знаем, что $\forall c \in H \;\; \exists\, m : a^m = c.$

Представим m как $m = qn + r,\; 0 \leq r < n, q \in \mathbb{Z}.$

Тогда получаем, что $\frac{a^m}{a^{qn}} = a^{m-qn} = a^r = a^m \cdot a^{-qn} = a^m \cdot (a^n)^{-q} = c \cdot b^{-q} = \big|c \in H, b \in H\big| = a^r \in H$

Если $r \neq 0$, то из $(r < n)$ получаем противоречие $(n \neq \min\{i : a^i \in H, i > 0\})$.

Значит $r = 0$. Тогда $m = qn + 0 = qn$. Получается, что мы любой элемент $c \in H$ можем представить как $a^m = a^{qn}$, а значит наша подгруппа H является циклической, а ее образующим элементом будет a^n.

Ч.Т.Д


Окружающие думают, что студенты вышки классные, богатые и счастливые ребята, у которых всё хорошо, но на самом деле мы
Рабы