Бурмашев Гриша. 208. Дискра-2

Пускай (для упрощения написания):

$$x \in A = a$$

$$x \in B = b$$

$$x \in C = c$$

1

Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство:

$$(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$$

Выражение эквивалентно записи:

$$(a \wedge \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b) = a \wedge \neg b$$

Построим таблицу истинности для a, b:

a	b	¬ b	$a \vee b$	$\neg(a \wedge b)$	$a \wedge \neg b$	$(a \wedge \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0

Из таблицы (столбцы 6 и 7) видно, что равенство выполняется

Ответ: да, верно

2

Верно ли, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство:

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

Выражение эквивалентно записи:

$$(a \wedge b) \wedge \neg c = (a \wedge \neg c) \wedge (b \wedge \neg c)$$

$$a \wedge b \wedge \neg c = a \wedge \neg c \wedge b \wedge \neg c$$

Избавимся от повторения:

$$a \wedge b \wedge \neg c = a \wedge b \wedge \neg c$$

Выражения абсолютно эквивалентны

Ответ: да, верно

3

Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется включение:

$$(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$$

Рассмотрим левую часть выражения:
Она эквивалентна записи:

$$(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge \neg b))$$

Упростим и вынесем за скобки **b**:

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b)$$

$$b \vee (a \wedge \neg a)$$

$a \wedge \neg a = 0$:

$$b \vee 0 = b$$

Таким образом:

$$B \subseteq B$$

Это верно

Ответ: да, верно

4

Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство:

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)$$

Выражение эквивалетно записи:

$$((a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c)) \wedge (a \wedge \neg(b \wedge c)) = a \wedge \neg(b \vee c)$$

Вынесем **a** за скобку:

$$(a \wedge (\neg b \vee \neg c)) \wedge (a \wedge \neg(b \wedge c)) = a \wedge \neg(b \vee c)$$

$$(a \wedge (\neg b \vee \neg c)) \wedge (a \wedge (\neg b \vee \neg c)) = a \wedge (\neg b \wedge \neg c)$$

Избавимся от повторения:

$$a \wedge (\neg b \vee \neg c) = a \wedge (\neg b \wedge \neg c)$$

Выражения не равны

Пусть, например:

$$a = 1$$

$$b = 0$$

$$c = 1$$

Тогда:

$$1 \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge (1 \wedge 0)$$

$$1 = 0$$

Мы видим противоречие, значит, исходное равенство не выполняется

Ответ: нет, неверно

5

Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ - невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$

Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$

Представим $A_1 \setminus A_4$ в виде:

$$A_1 \setminus A_4 = A_1 \setminus A_2 + A_2 \setminus A_3 + A_3 \setminus A_4$$

Это истинно, так как это эквивалентно:

$$A_1 \wedge \neg A_4 = A_1 \wedge \neg A_2 \vee A_2 \wedge \neg A_3 \vee A_3 \wedge \neg A_4$$

Упрощая:

$$A_1 \wedge \neg A_4 = \neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_2 \vee A_3 \vee \neg A_3 \vee A_4$$

$$A_1 \wedge \neg A_4 = \neg A_1 \vee A_4$$

$$A_1 \wedge \neg A_4 = A_1 \wedge \neg A_4$$

Верно

В таком случае :

$$A_6 \setminus A_9 = A_6 \setminus A_7 + A_7 \setminus A_8 + A_8 \setminus A_9$$

По условию, они равны друг другу, т.е:

$$A_1 \setminus A_2 + A_2 \setminus A_3 + A_3 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_7 + A_7 \setminus A_8 + A_8 \setminus A_9$$

А так же по условию:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \ldots$$

Т.е:

$$A_1 \setminus A_4 \supseteq A_6 \setminus A_9$$

При этом же мы знаем, что:

$$A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$$

Это возможно лишь в том случае, если:

$$A_1 \setminus A_2 + A_2 \setminus A_3 + A_3 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_7 + A_7 \setminus A_8 + A_8 \setminus A_9 = \varnothing \tag{1}$$

По аналогии:

$$A_2 \setminus A_7 = A_2 \setminus A_3 + A_3 \setminus A_4 + \ldots + A_6 \setminus A_7$$

$$A_3 \setminus A_8 = A_3 \setminus A_4 + A_4 \setminus A_5 + \ldots + A_7 \setminus A_8$$

Но из 1 :

$$A_2 \setminus A_7 = \varnothing + \varnothing + A_4 \setminus A_5 + \varnothing$$

$$A_3 \setminus A_8 = \varnothing + A_4 \setminus A_5 + \varnothing + \varnothing$$

Т.е:

$$A_2 \setminus A_7 = A_4 \setminus A_5 = A_3 \setminus A_8$$

$$A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$$

Ч.Т.Д

6

Для любого целого положительного n докажите равенство:

$$1 \times (n-1) + 2 \times (n-2) + \ldots + (n-1) \times 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

Воспользуемся методом математической индукции:

- База: n = 1

$$1 \times 0 = \frac{0 \times 1 \times 2}{6}$$
$$0 = 0$$

Верно

- Переход: пусть верно для n, докажем, что это верно для $n = 1$:

$$1 \times n + 2 \times (n-1) + \ldots + n \times 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Если из новой последовательности вычесть изначальную, то мы получим:

$$1 \times n + 2 \times (n-1) + \ldots + n \times 1 - (1 \times (n-1) + 2 \times (n-2) + \ldots + (n-1) \times 1) =$$

$$= n + 2n - 2 + \ldots n - n + 1 + -2n + 4 - \ldots n + 1$$

"n-ки"сокращаются и равенство превращается в:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Это равно по сумме арифметической прогрессии:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Пусть:

$$A = 1 \times (n-1) + 2 \times (n-2) + \ldots + (n-1) \times 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$B = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \ldots + n \times 1$$

Представим B как $A+B-A$, где $(B-A)$ мы уже нашли (сумма арифм.прогресии):

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)(n(n-1)+3n))}{6}=\frac{(n+1)(n^2+2n)}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)n(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Т.е:

$$B=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=$$
$$=1\times n+2\times(n-1)+\ldots+n\times 1$$

Ч.Т.Д

7

Докажите, что для любого $n \geq 1$ выполняется равенство:

$$F_{n-1}\times F_{n+1}-F_n^2=(-1)^{n+1}$$

Воспользуемся методом математической индукции:

- База: n = 1

$$1\times 2-1^2=(-1)^2$$
$$1=1$$

Верно

- Переход: Пусть верно для n, докажем, что это верно для $n+1$:

$$F_n\times F_{n+2}-F_{n+1}^2=(-1)^{n+2}$$
$$F_n\times(F_{n+1}+F_n)-F_{n+1}^2=(-1)^{n+1}\times(-1)$$

Представим $(-1)^{n+1}$ как наше изначальное равенство:

$$F_n\times F_{n+1}+F_n^2-F_{n+1}^2=-1(F_{n-1}\times F_{n+1}-F_n^2)$$
$$F_n^2+F_n\times F_{n+1}-F_{n+1}^2+F_{n-1}\times F_{n+1}-F_n^2=0$$
$$F_{n+1}\times(F_n+F_{n-1})-F_{n+1}^2=0$$
$$F_{n+1}^2-F_{n+1}^2=0$$
$$0=0$$

Ч.Т.Д

8

Докажите для любого $n > 1$ неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

Воспользуемся методом математической индукции:

- База: $n = 2$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24}$$

$$\frac{7}{12} > \frac{13}{24}$$

$$\frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

Верно

- Переход:

Пусть верно для n, тогда докажем для $n+1$:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{13}{24}$$

Пусть наша исходная сумма равна S_n, а новая - S_{n+1} т.е:

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Если добавить и вычесть из S_{n+1} множитель $\frac{1}{n+1}$, то можно заметить S_n:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{13}{24}$$

Это эквивалентно:

$$S_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{13}{24}$$

Упростим:

$$S_n + \frac{-2+1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > \frac{13}{24}$$

$$S_n + \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} > \frac{13}{24}$$

$$S_n + \frac{-2n-1+2n+2}{(2n+2)(2n+1)} > \frac{13}{24}$$

$$S_n + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > \frac{13}{24}$$

Мы знаем, что:

$$S_n > \frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0 \text{ ,т.к } n > 1 \text{ по условию}$$

Следовательно верно:

$$S_n + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > \frac{13}{24}$$

Это эквивалентно:

$$S_{n+1} > \frac{13}{24}$$

Ч.Т.Д

9

В прямоугольнике $3 \times n$ (три строки и n столбцов) стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

Стоит заметить, что всего у нас 3n фишек.

Воспользуемся методом математической индукции:

- База: n = 1

  Мы имеем прямоугольник размера 3×1 и 3 фишки трех разных цветов. Пусть у нас есть цвета r, g, b, тогда очевидный случай:

r	g	b

Верно

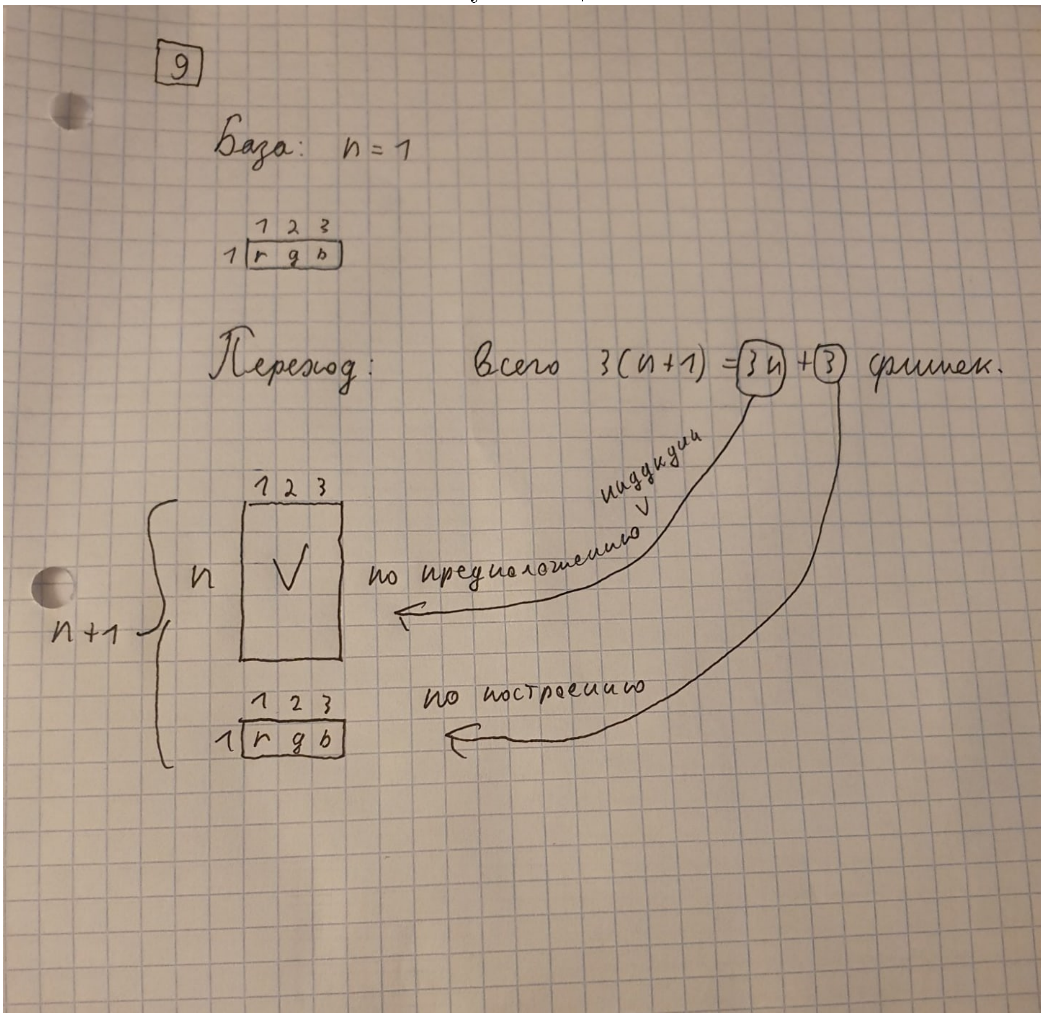
- Переход:

  Пусть верно для n. Т.е мы сможем переставить $3n$ фишек трех разных цветов таким образом, чтобы в произвольном прямоугольнике размера $3 \times n$ в каждом столбце были фишки всех цветов.

Докажем, что это выполняется для $n+1$:

Из условия у нас есть $3(n+1) = 3n+3$ фишек. Переставим фишки таким образом, чтобы в последней $n+1$ строке было три фишки трех разных цветов. Тогда у нас останется $3n$ фишек и прямоугольник размером $3 \times n$. Но, по предположению индукции, мы сможем переставить $3n$ фишек в прямоугольнике $3 \times n$, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов. Таким образом, у нас расставлены фишки в прямоугольнике $3 \times n$ по предположению индукции, а оставшиеся 3 фишки разных цветов стоят в последней строчке (по построению)

Визуализация:



Ч.Т.Д