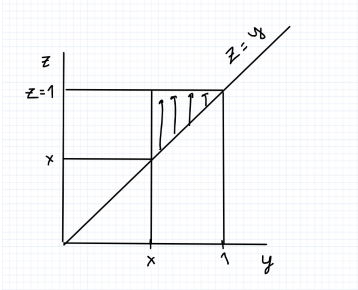
Бурмашев Григорий, БПМИ-208

22 ноября 2021 г.

Номер 1

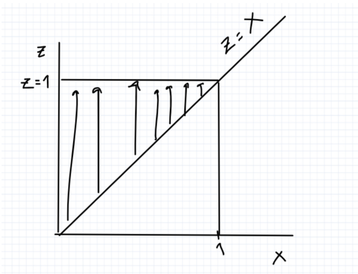
$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz$$

Делаем подобно 9й таске с семинара (меняем порядок интегрирования):



$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz = \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_x^z e^{z^3} dy = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{z^3} (z-x) dz =$$

Теперь снова меняем порядок:



$$= \int_0^1 dz \int_0^z e^{z^3} (z-x) dx = \int_0^1 e^{z^3} dz \int_0^z (z-x) dx = \int_0^1 e^{z^3} dz \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{z^3} z^2 dz =$$

Пусть $t = z^3$, отсюда $dt = 3z^2 dz$, тогда:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{6} \cdot \left(e^{1^3} - e^{0^3} \right) = \frac{1}{6} \cdot (e-1)$$

Ответ:

$$\frac{(e-1)}{6}$$

Номер 2

$$\iiint\limits_{[0;1]^3} f(x,y,z)dxdydz = 1$$

Для начала заметим, что функция является симметричной по своим аргументам, т.е $f(x,y,z) = f(x,z,y)$ и т.д

Ищем:

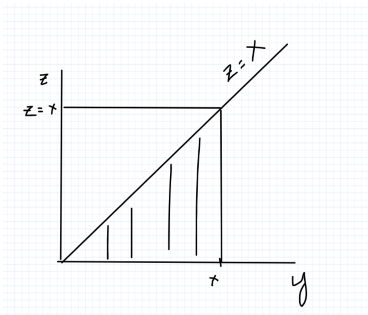
$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x,y,z)dz$$

Для начала заметим, что (пробегаем все значения от 0 до 1):

$$\iiint\limits_{[0;1]^3} f(x,y,z)dxdydz = 1 = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y,z)dz$$

Так что нам нужно выразить то, что мы ищем через этот интеграл. Пусть то, что мы ищем будет называться I

Теперь аналогично предыдущей задаче начнем менять интегралы местами, поменяем z и y:



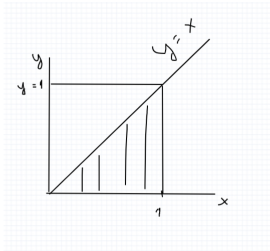
$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x,y,z)dz = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x f(x,z,y)dy = \begin{bmatrix} y = z \\ z = y \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_y^x f(x,y,z)dz$$

Теперь заметим, что полученное похоже на наш исходный интеграл, только внутренний интеграл был $\int\limits_0^y$, а стал $\int\limits_y^x$, тогда если их сложить, то получим сумму от 0 до y и от y до x, т.е просто от 0 до x:

$$2I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^x f(x,y,z)dz$$

Теперь проделаем ту же операцию, только поменяем x и y:

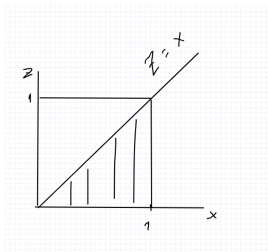


$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^y f(x,y,z)dz = \begin{bmatrix} x = y \\ y = x \end{bmatrix} = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^x f(x,y,z)dz$$

Ну и собствено снова складываем, в этот раз полученный выше $2I$ и новый I, на этот раз объединятся от 0 до x и от x до 1:

$$3I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^x f(x,y,z)dz$$

Осталось проделать тоже самое с внутренним интегралом, мы еще не меняли местами x и z, для этого возьмем $3I$ из того что мы получили выше:



$$3I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^x f(x,y,z)dz = \int_0^1 dz \int_0^1 y \int_x^1 f(x,y,z)dx = \begin{bmatrix} x = z \\ z = x \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_x^1 f(x,y,z)dz$$

Теперь складываем с формулой $3I$ из второй по счету замены, $0, x$ и $x, 1$ переходят в $0, 1$

$$6I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y,z)dz$$

Ну а по условию задачи и определению это равно единице, т.е:

$$6I = 1$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x,y,z)dz = \frac{1}{6}$$

Ответ:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x,y,z)dz = \frac{1}{6}$$