Математические структуры, кр – 1

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

17 апреля 2022 г.

Номер 1

1. Дана примитивно-рекурсивная функция $g(x)$. Докажите примитивную рекурсивность функции

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(i) < x \text{ для всех } 0 \leqslant i \leqslant y, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На семинаре доказали, что $\operatorname{sg}(x)$ – примитивно-рекурсивная функция, возьмем это за основу для доказательства, поскольку $f(x,y)$ очень похожа на неё. Тогда введём вспомогательную функцию:

$$h(x,i) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(i) < x \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда можем выразить ее через $\operatorname{sg}(x)$ и $x \dot{-} y$:

$$h(x,i) = \operatorname{sg}(x \dot{-} g(i))$$

В номере 3 из листка 3 доказали, что функции $\operatorname{sg}(x)$ и $x \dot{-} y$ примитивно-рекурсивные, $g(x)$ – примитивно-рекурсивная по условию задачи, а значит $h(x,i)$ – тоже примитивно-рекурсивная функция как композиция. Но мы хотим $f(x,y)$, для этого замечаем, что мы можем выразить её через $h(x,i)$, просто добавив условие про $0 \leq i \leq y$:

$$f(x,y) = \prod_{i \leq y} h(x,i)$$

А теперь вспоминаем про номер 6 из листка 3, где доказали замкнутость относительно мультиплицирования. Отсюда получаем, что $f(x,y)$ – примитивно-рекурсивная функция.

Ч.Т.Д

Номер 2

2. Докажите, что функция $f(x,y) = \text{НОД}(x,y)$ (наибольший общий делитель чисел x и y) является примитивно-рекурсивной.

Обозначим для удобства:

$$f(x,y) = \text{НОД}(x,y) = \text{gcd}(x,y)$$

Замечаем:

$$\text{gcd}(x,0) = x$$

$$\text{gcd}(x,y) = \text{gcd}\left(\max(x,y) - \min(x,y), \min(x,y)\right)$$

Из семинара знаем, что функции $\min(x,y), \max(x,y), x - y$ примитивно-рекурсивны, а значит мы смогли представить нашу функцию $f(x,y)$ как суперпозицию примитивно-рекурсивных функций, значит $f(x,y)$ – примитивно рекурсивна.

Ч.Т.Д

К тому же можно заметить (не очень формально), что функцию НОД мы можем определить как рекурсивный алгоритм с помощью ЯП. На семинаре доказывали, что $\text{rm}(x,y)$ – остаток от деления x на y является примитивно-рекурсивной функцией. Пример кода рекурсивного вычисления НОД:

```python
def gcd(x, y):
    if y == 0:
        return x
    else:
        return gcd(y, x % y)
```

Номер 3

3. Рассмотрим частичную функцию $f(x) = \mu y\,(1 \dot{-} |g(y) - x| = 0)$, где

$$g(y) = \begin{cases} 5y \dot{-} 2, & \text{если } y \neq 3, \\ \text{не определено}, & \text{если } y = 3. \end{cases}$$

Опишите функцию $f(x)$ явно, т.е. укажите, в каких точках она определена и какое значение принимает в каждой из таких точек.

Разберемся с $\mu y()$:

$$1 \dot{-} |g(y) - x| = \begin{cases} 1 - |g(y) - x|, & \text{если } 1 \geq |g(y) - x| \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда:

$$1 \dot{-} |g(y) - x| = 0 \sim |g(y) - x| \geq 1$$

Тогда предположим, что $f(x) = 0$ и посмотрим, что происходит в таком случае:

$$f(x) = 0 \to y = 0 \to |g(0) - x| \geq 1 \to |0 - x| \geq 1 \to x \geq 1$$

Получаем, что $f(x) = 0 \;\forall\; x \;\geq 1$. Еще интересует $x = 0$, в этой точке:

$$f(0) = \mu y(1 \dot{-} |g(y) - 0| = 0)$$

$$f(0) = \mu y(1 \dot{-} |g(y)| = 0)$$

$$f(0) = \mu y(1 \dot{-} g(y) = 0)$$

Отсюда:

$$y = 1$$

Значит:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Номер 4

4. Докажите, что следующая функция частично-рекурсивна:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если число } x \text{ чётно,} \\ \text{не опредлено,} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Воспользуемся задачей 8 (пункт 4) из листка 4. Для этого представим нашу функцию в другом виде, чтобы было удобнее, знаем, что:

$$2^x = 4^{\frac{x}{2}}$$

Тогда:

$$f(x) = \begin{cases} 4^{\frac{x}{2}}, \text{ если число } x \text{ чётно} \\ \text{не определено, иначе.} \end{cases}$$

Делаем аналогично указанной выше задаче и кладем:

$$\mu z \left(h(x, 2, z) = 0\right)$$

Где:

$$h(x, 2, z) = |x - 2 \cdot z|$$

Это в точности будет задавать:

$$\frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ если } x \text{ делится на 2 без остатка} \\ \text{не определено, иначе.} \end{cases}$$

x делится на 2 без остатка по определению означает, что x – четно, а значит нашу функцию мы можем представить как:

$$f(x) = 4^{\mu z (h(x,2,z)=0)}$$

Ну и получаем, что наша функция это композиция примитивно-рекурсивной (4^x, т.е степень) и частично-рекурсивной (из задачи 8 пункт 4) функций, а значит $f(x)$ – частично-рекурсивна

Ч.Т.Д