Диффуры, дз – 3

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

7 марта 2022 г.

Номер 1

a)

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

Для начала решаем однородное (много раз делали такое, не буду подробно расписывать):

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

Оба корня кратности 1, отсюда получаем общее решение:

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x$$

Теперь варьируем постоянные:

$$y = C_1(x) \cdot e^{2x} + C_2(x) \cdot e^x$$

Получается система:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_2'(x) \cdot e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot (2e^{2x}) + C_2'(x) \cdot e^x = \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Из этой системы надо найти константы, вычтем из второго уравнения первое:

$$C_1'(x) \cdot (2e^{2x}) + C_2'(x) \cdot e^x - C_1'(x) \cdot e^{2x} - C_2'(x) \cdot e^x = \frac{1}{1+e^x} - 0$$

$$C_1'(x) \cdot e^{2x} = \frac{1}{1+e^x}$$

$$C_1'(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}$$

$$C_1(x) = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^x} dx = \begin{bmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dx = \frac{du}{e^x} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{u^3(1+u)} du = \int \left(\frac{A}{u^3} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u} + \frac{D}{1+u} \right) du = (\times)$$

Найдем коэффы:

$$1 = A(1+u) + B(u(1+u)) + C(u^2(1+u)) + D(u^3)$$

$$1 = A + Au + Bu + Bu^2 + Cu^2 + Cu^3 + Du^3$$
$$1 = A + u(A+B) + u^2(B+C) + u^3(C+D)$$
$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ C + D = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

Возвращаемся к интегралу:

$$(\times) = \int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + \ln|u| - \ln|u+1| + D_1 =$$
$$= \frac{1}{e^x} - \frac{1}{2e^{2x}} + \ln|e^x| - \ln|e^x+1| + D_1 = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{2e^{2x}} + x - \ln(e^x+1) + D_1$$

Теперь ищем вторую константу, для этого подставим в первое уравнение $C_1'(x) \cdot e^{2x}$:

$$\frac{1}{1+e^x} + C_2'(x) \cdot e^x = 0$$
$$C_2'(x) \cdot e^x = -\frac{1}{1+e^x}$$
$$C_2'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+e^x}$$
$$C_2(x) = -\int \frac{e^{-x}}{1+e^x} dx = \begin{bmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dx = \frac{du}{e^x} \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{u^2(1+u)} du = -\int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u+1}\right) du =$$
$$= \frac{1}{u} + \ln|u| - \ln|u+1| = \frac{1}{e^x} + x - \ln(e^x+1) + D_2$$

Итоговый ответ:

$$y = \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{2e^{2x}} + x - \ln(e^x+1) + D_1\right) \cdot e^{2x} + \left(\frac{1}{e^x} + x - \ln(e^x+1) + D_2\right) \cdot e^x =$$
$$= \frac{1}{2} + e^x + (x - \ln(e^x+1)) \cdot e^{2x} + D_1 \cdot e^{2x} + (x - \ln(e^x+1)) \cdot e^x + D_2 \cdot e^x$$

Ответ:

$$\frac{1}{2} + e^x + (x - \ln(e^x+1)) \cdot e^{2x} + D_1 \cdot e^{2x} + (x - \ln(e^x+1)) \cdot e^x + D_2 \cdot e^x$$

b)

$$y'' + 3y' = \frac{3x-1}{x^2}$$

Решаем однородное:

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda+3) = 0$$
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$$

Получаем решение:

$$y = D_1 + D_2 e^{-3x}$$

Теперь варьируем постоянные:

$$y = D_1(x) + D_2(x) e^{-3x}$$

Получается система:

$$\begin{cases} D_1'(x) + D_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ -3D_2'(x)e^{-3x} = \frac{3x-1}{x^2} \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$D_2'(x) = -\frac{3x-1}{x^2} \cdot \frac{e^{3x}}{3}$$
$$D_2(x) = \int \frac{-3x+1}{x^2} \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx = -\int \frac{e^{3x}}{x} dx + \int \frac{e^{3x}}{3x^2} dx =$$
$$= -\int -\frac{e^{3x}}{x} dx + \int -\frac{e^{3x}}{x} dx - \frac{e^{3x}}{3x} = -\frac{e^{3x}}{3x} + C_2$$

Теперь найдем $D_1(x)$:

$$D_1'(x) - \frac{3x-1}{3x^2} = 0$$
$$D_1'(x) = \frac{3x-1}{3x^2}$$
$$D_1(x) = \int \frac{3x-1}{3x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{3x^2} dx = \ln|x| + \frac{1}{3x} + C_1$$

Итого:

$$y = \ln|x| + \frac{1}{3x} + C_1 + \left(-\frac{e^{3x}}{3x} + C_2\right) e^{-3x} =$$
$$= \ln|x| + \frac{1}{3x} + C_1 - \frac{1}{3x} + C_2 \cdot e^{-3x} =$$
$$\ln|x| + C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}$$

Ответ:

$$\ln|x| + C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}$$

Номер 2

а)

$$4x^2y'' - 4xy' - 5y = -4\sqrt{x}$$

Это уравнение Эйлера, поэтому делаем замену $x = e^t$ и тогда характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$4\lambda(\lambda - 1) - 4\lambda - 5 = -4e^{\frac{t}{2}}$$

Тогда ищем однородное:

$$4\lambda(\lambda - 1) - 4\lambda - 5 = 0$$
$$4\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 0$$
$$(2\lambda + 1)(2\lambda - 5) = 0$$
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{5}{2}$$

А значит общее решение:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot e^{\frac{5}{2}t}$$

Сделаем обратную замену:

$$y(x) = C_1 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + C_2 \cdot x^{\frac{5}{2}} = \frac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot x^{\frac{5}{2}}$$

Ищем частное решение в виде:

$$y_1 = d \cdot e^{\frac{t}{2}},\ y_1' = \frac{1}{2}d \cdot e^{\frac{t}{2}},\ y_1'' = \frac{1}{4}d \cdot e^{\frac{t}{2}}$$

Подставляем:

$$(4 \cdot \frac{1}{4}d - 8 \cdot \frac{1}{2}d - 5)de^{\frac{t}{2}} = -4e^{\frac{t}{2}}$$
$$-8d = -4$$
$$d = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Отсюда:

$$y_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Тогда получаем ответ:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot x^{\frac{5}{2}}$$

Ответ:

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{C_1}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot x^{\frac{5}{2}}$$

b)

$$x^2y'' - 6y = -16x^2 \ln x$$

Делаем замену $x = e^t$, тогда:

$$\lambda(\lambda - 1) - 6 = -16e^{2t} \cdot t$$

Ищем однородное:

$$\lambda(\lambda - 1) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$$

А значит:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{-2t}$$

Обратная замена:

$$y(x) = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^{-2}$$

Теперь ищем частное, 2 – не корень, поэтому ищем в виде:

$$y_1 = e^{2t}(at + b)$$

$$y_1' = e^{2t}(2at + a + 2b)$$

$$y_1'' = 4e^{2t}(a + b + at)$$

Тогда подставляем:

$$4e^{2t}(a + b + at) - (e^{2t}(2at + a + 2b)) - 6e^{2t}(at + b) = -16e^{2t} \cdot t$$

$$e^{2t} \cdot (4a + 4b + 4at - 2at - a - 2b - 6at - 6b) = -16e^{2t} \cdot t$$

$$3a - 4at - 4b = -16 \cdot t + 0$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ -4at = -16t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Тогда:

$$y_1 = e^{2t}(4t + 3) = 4te^{2t} + 3e^{2t} = 4 \ln x \cdot x^2 + 3x^2$$

Отсюда ответ:

$$y = 4 \ln x \cdot x^2 + 3x^2 + C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^{-2}$$

Ответ:

$$4 \ln x \cdot x^2 + 3x^2 + C_1 \cdot x^3 + \frac{C_2}{x^2}$$

Номер 4

а)

$$\begin{cases} x' = -2x - y + 37\sin t \\ y' = -4x - 5y \end{cases}$$

Решаем однородную систему:

$$\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = -4x - 5y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda+6)(\lambda+1)$$

Имеем корни -6 и -1 кратности 1. Смотрим для $\lambda = -6$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y \\ -4x + y \end{pmatrix} = 0$$

Получаем собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. А для $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - y \\ -4x - 4y \end{pmatrix} = 0$$

Получаем $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тогда решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{-6t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdot e^{-6t} + C_2 \cdot e^{-t} \\ 4C_1 \cdot e^{-6t} - C_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

Выразим x':

$$y' = -4x - 5y$$

$$x = \frac{-5y - y'}{4}$$

$$-2x = -\frac{-5y - y'}{2}$$

$$x' = \frac{-y'' - 5y'}{4}$$

Тогда:

$$-\frac{-5y - y'}{2} - y + 37\sin t = \frac{-y'' - 5y'}{4}$$

$$y'' + 7y' + 6y = -148\sin t$$

Ищем частное решение в виде:

$$y_1 = a\cos t + b\sin t$$

$$y_1' = -a\sin t + b\cos t$$

$$y_1'' = -a\cos t - b\sin t$$

Подставляем:

$$-a\cos t - b\sin t + 7(-a\sin t + b\cos t) + 6(a\cos t + b\sin t) = -148\sin t$$

$$(5b - 7a)\sin t + (5a + 7b)\cos t = -148\sin t$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 5b - 7a = -148 \\ 5a + 7b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 14 \\ b = -10 \end{cases}$$

А значит:

$$y_1 = 14\cos t - 10\sin t$$

Вспоминаем что есть x:

$$x = \frac{-5y - y'}{4}$$

$$y_1' = -14\sin t - 10\cos t$$

$$x = \frac{-5(14\cos t - 10\sin t) - (-14\sin t - 10\cos t)}{4}$$

$$x = 16\sin t - 15\cos t$$

Ответ:

$$x = C_1 \cdot e^{-6t} + C_2 \cdot e^{-t} + 16\sin t - 15\cos t$$

$$y = 4C_1 \cdot e^{-6t} - C_2 \cdot e^{-t} + 14\cos t - 10\sin t$$

b)

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y - 2e^t \\ y' = -4x - 5y \end{cases}$$

Решаем однородную систему:

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = -4x - 5y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 35 = (\lambda+7)(\lambda-5)$$

Имеем корни -7 и 5 кратности 1. Смотрим для $\lambda = -7$:

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x - 5y \\ -4x + 2y \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ А для $\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 5y \\ -4x - 10y \end{pmatrix}$$

Получаем собственный вектор $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdot e^{-7t} - 5C_2 \cdot e^{5t} \\ 2C_1 \cdot e^{-7t} + 2C_2 \cdot e^{5t} \end{pmatrix}$$

Выразим x':

$$y' = -4x - 5y$$

$$x = \frac{-5y - y'}{4}$$

$$3x = \frac{-15y - 3y'}{4}$$

$$x' = \frac{-y'' - 5y'}{4}$$

Тогда:

$$\frac{-y'' - 5y'}{4} = \frac{-15y - 3y'}{4} - 5y - 2e^t$$

$$y'' + 2y' - 35y = 8e^t$$

Корни никакие не совпадают, ищем решение в виде:

$$y_1 = ae^t$$

Тогда:

$$ae^t + 2ae^t - 35ae^t = 8e^t$$

$$-32ae^t = 8e^t$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

А значит:

$$y_1 = -\frac{e^t}{4}$$

Вспоминаем что есть x:

$$x = \frac{-5y - y'}{4}$$

$$x = \frac{6\frac{e^t}{4}}{4}$$

$$x = \frac{3e^t}{8}$$

Ответ:

$$x = C_1 \cdot e^{-7t} - 5C_2 \cdot e^{5t} + \frac{3e^t}{8}$$

$$y = 2C_1 \cdot e^{-7t} + 2C_2 \cdot e^{5t} - \frac{e^t}{4}$$

c)

$$\begin{cases} x' = -5x - y \\ y' = x - 3y - 9e^{2t} \end{cases}$$

Решаем однородное:

$$\begin{cases} x' = -5x - y \\ y' = x - 3y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda+4)^2$$

Имеем один корень $\lambda = -4$ кратности 2. Найдем собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ x+y \end{pmatrix} = 0$$

Всего один собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Значит есть жорданова клетка ранга 2, придется искать присоединенный вектор:

$$(A - \lambda E)h_2 = h_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Например, $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда выпишем решения по формуле:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot e^{-4t} \\ 1 \cdot e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} \cdot (-t+0) \\ e^{-4t} \cdot (t+1) \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$x = -C_1 \cdot e^{-4t} + C_2 \cdot e^{-4t} \cdot (-t+0)$$
$$y = C_1 \cdot e^{-4t} + C_2 \cdot e^{-4t} \cdot (t+1)$$

Выразим y':

$$x' = -5x - y$$

$$y = -5x - x'$$

$$y' = -5x' - x''$$

Подставляем:

$$-5x' - x'' = x - 3(-5x - x') - 9e^{2t}$$

$$x'' + 8x' + 16x = 9e^{2t}$$

Ищем решение в виде:

$$x_1 = ae^{2t}$$

$$x_1' = 2ae^{2t}$$

$$x_1'' = 4ae^{2t}$$

Тогда:

$$4ae^{2t} + 8(2ae^{2t}) + 16ae^{2t} = 9e^{2t}$$

$$36ae^{2t} = 9e^{2t}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{e^{2t}}{4}$$

$$x_1' = \frac{e^{2t}}{2}$$

Вспоминаем что есть y:

$$y = -5x - x'$$

$$y = -5\frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^{2t}}{2}$$

$$y = -\frac{7e^{2t}}{4}$$

Ответ:

$$x = -C_1 \cdot e^{-4t} + C_2 \cdot e^{-4t} \cdot (-t + 0) + \frac{e^{2t}}{4}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-4t} + C_2 \cdot e^{-4t} \cdot (t + 1) - \frac{7e^{2t}}{4}$$

d)

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - e^{-t} \\ y' = -2x - 2y - e^{-t} \end{cases}$$

Решаем однородное:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Получили два корня -1 и 2 кратности 1. Для $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ -2x - y \end{pmatrix} = 0$$

Получаем собственный вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x - 4y \end{pmatrix} = 0$$

Получаем собственный вектор $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \cdot e^{-t} - 2C_2 \cdot e^{2t} \\ 2C_1 \cdot e^{-t} + C_1 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

Выразим y':

$$x' = 3x + 2y - e^{-t}$$

$$-2y = 3x - e^{-t} - x'$$

$$y = -\frac{3x - e^{-t} - x'}{2}$$

$$y' = \frac{-3x' - e^{-t} + x''}{2}$$

$$\frac{-3x' - e^{-t} + x''}{2} = -2x + 3x - e^{-t} - x' - e^{-t}$$

$$x' + 2x = x'' + 3e^{-t}$$

$$x'' - x' - 2x = -3e^{-t}$$

Совпадает корень $\lambda = -1$ со степенью, а значит будем искать решение в виде:

$$x_1 = e^{-t}(at + b)$$

$$x_1' = ae^{-t} - be^{-t} - ate^{-t}$$

$$x_1'' = -2ae^{-t} + be^{-t} + ate^{-t}$$

Тогда:

$$-2ae^{-t} + be^{-t} + ate^{-t} - (ae^{-t} - be^{-t} - ate^{-t}) - 2(e^{-t}(at + b)) = -3e^{-t}$$

$$\begin{cases} -3ae^{-t} = -3e^{-t} \\ b = C_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = C_3 \end{cases}$$

Отсюда:

$$x_1 = e^{-t}(t + C_3)$$

$$x_1' = -e^{-t}((t + C_3) - 1)$$

Вспоминаем что есть y:

$$y = -\frac{3x - e^{-t} - x'}{2}$$

$$y = -\frac{3(e^{-t}(t + C_3)) - e^{-t} + e^{-t}((t + C_3) - 1))}{2}$$

$$y = -e^{-t}(2t + 2C_3 - 1)$$

Ответ:

$$x = -C_1 \cdot e^{-t} - 2C_2 \cdot e^{2t} + e^{-t}(t + C_3)$$

$$y = 2C_1 \cdot e^{-t} + C_1 \cdot e^{2t} - e^{-t}(2t + 2C_3 - 1)$$