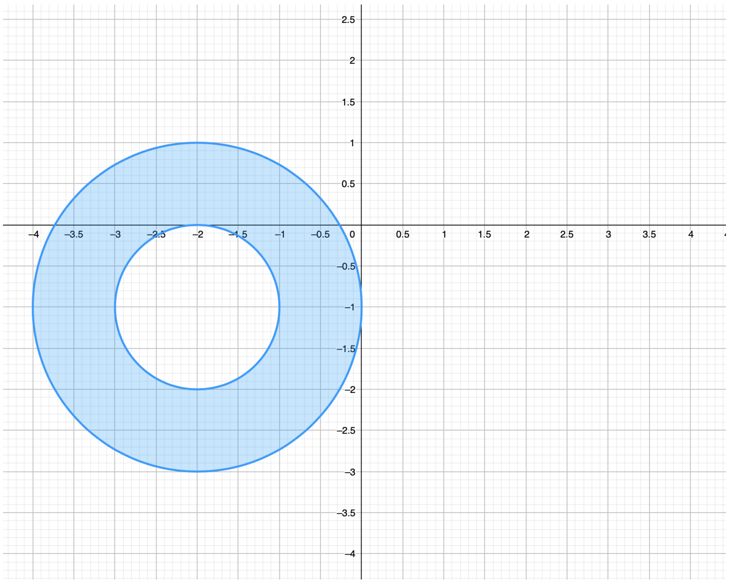
Номер 1

a)

$$1 \leq |z + 2 + i| \leq 2$$

По аналогии с семинаром замечаем, что это будет окружность с центром в точке $(-2, -1)$. А ограничение с двух сторон будет задавать некий бублик (Для ≤ 2 берем всё внутри окружности радиуса 2, для ≥ 1 берем всё снаружи окружности радиуса 1, вот и получается бублик). На графике это будет иметь вид:



b)

$$|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$$

Избавимся от модуля:

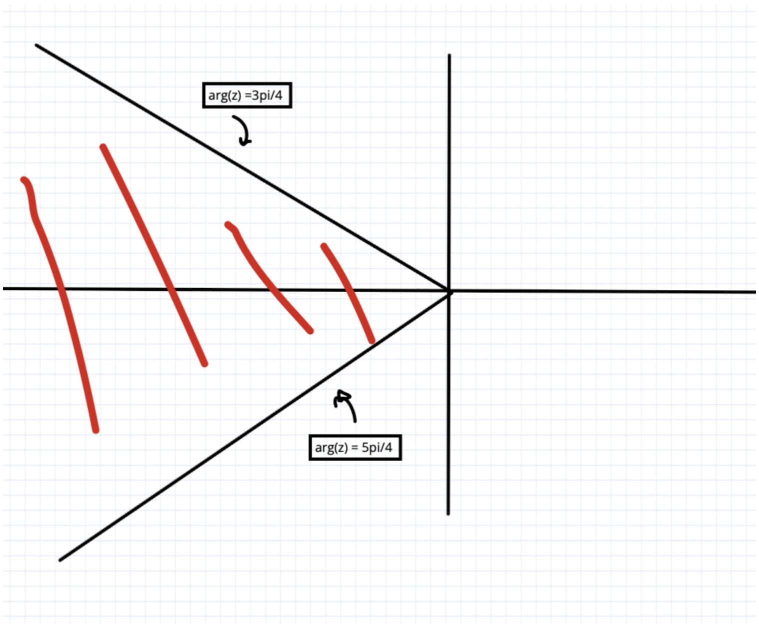
$$-\frac{\pi}{4} < \pi - \arg z < \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} < \pi - \arg z < \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{5\pi}{4} < -\arg z < -\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}$$

Получаем график (нам подходит все, что зажато между двумя прямыми, образованными $\arg(z)$):



Номер 2

a)

$$Ln(z) - Ln(z) = 0?$$

Знаем свойство:

$$Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Ln(z_1) - Ln(z_2)$$

Применяем его в нашем случае и получаем:

$$Ln(z) - Ln(z) = Ln\left(\frac{z}{z}\right) = Ln(1) = 2k\pi i$$

Видим, что оно не равно нулю при всех k, отличных от нуля, значит утверждение неверное

Ответ: нет, неверно

b)

$$\sin(2z) = 2\sin z \cos z?$$

Подставим по определению:

$$\sin(2z) = \frac{e^{i2z} \cdot e^{-i2z}}{2i}$$

$$2\sin z \cos z = 2 \cdot \frac{e^{iz} \cdot e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz+iz} - e^{-iz-iz}}{2i} = \frac{e^{i2z} \cdot e^{-i2z}}{2i}$$

Получаем равенство

Ответ: да, верно

Номер 3

$$\sin z - \cos z = i$$

Подставляем по определению:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} - \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i$$

Умножаем на e^{iz} обе части:

$$\frac{e^{2iz} - e^{0}}{2i} - \frac{e^{2iz} + e^{0}}{2} = e^{iz} i$$

$$\frac{e^{2iz} - 1}{2i} - \frac{e^{2iz} + 1}{2} = e^{iz} i$$

$$\frac{e^{2iz} - 1}{2} - \frac{i(e^{2iz} + 1)}{2} = -e^{iz}$$

$$e^{2iz} - 1 - i(e^{2iz} + 1) = -2e^{iz}$$

$$e^{2iz} - 1 - i(e^{2iz} + 1) + 2e^{iz} = 0$$

$$e^{2iz}(1 - i) + 2e^{iz} - 1 - i = 0$$

Считаем дискриминант:

$$D = 2^2 - 4 \cdot (1 - i)(-1 - i) = 12$$

Тогда:

$$e^{iz} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2(1 - i)} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1 - i} = \frac{(-1 \pm \sqrt{3})(1 + i)}{2} = \frac{(1 + i)}{2}(-1 \pm \sqrt{3}) = \frac{(-1 \pm \sqrt{3})\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(-1 \pm \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

Очень хочется сделать как на семинаре и в тупую внести все под e, но там вылезает отрицательное число внутри логарифма (я не особо шарю и не хочу лезть в комплексные логарифмы), так что посмотрим отдельно на два случая и избавимся от минуса, чтобы нормально внести:

$$e^{iz} = \left[\begin{array}{l} \frac{(-1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \frac{(-1 - \sqrt{3})}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{array}\right.$$

$$e^{iz} = \left[\begin{array}{l} e^{\ln\left(\frac{(-1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \dfrac{-1(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{array}\right.$$

$$e^{iz} = \left[\begin{array}{l} e^{\ln\left(\frac{(-1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^{i\pi} e^{\ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{array}\right.$$

$$e^{iz} = \left[\begin{array}{l} e^{\ln\left(\frac{(-1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right) + i\frac{\pi}{4}} \\ e^{\ln\left(\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\right) + i\pi + i\frac{\pi}{4}} \end{array}\right.$$

Отсюда:

$$z = \left[\begin{array}{l} -i\ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ -i\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Ответ:

$$z = \left[\begin{array}{l} -i\ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ -i\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Номер 4

Замечаем:

$$z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

Назовем $x = c_1$, тогда:

$$\begin{cases} u = Re\ w = c_1^2 - y^2 \\ v = Im\ w = 2c_1 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = c_1^2 - \frac{v^2}{4c_1^2} \\ y = \frac{v}{2c_1} \end{cases}$$

Видим, что это параболка. Назовем $y = c_2$, тогда:

$$\begin{cases} u = x^2 - c_2^2 \\ v = 2c_2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{v^2}{4c_2^2} - c_2^2 \\ x = \frac{v}{2c_2} \end{cases}$$

Видим, что это снова параболка. Значит прямые переходят в параболы

Ответ: переходят в параболы