Матан, дз – 12

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

7 декабря 2021 г.

Номер 1

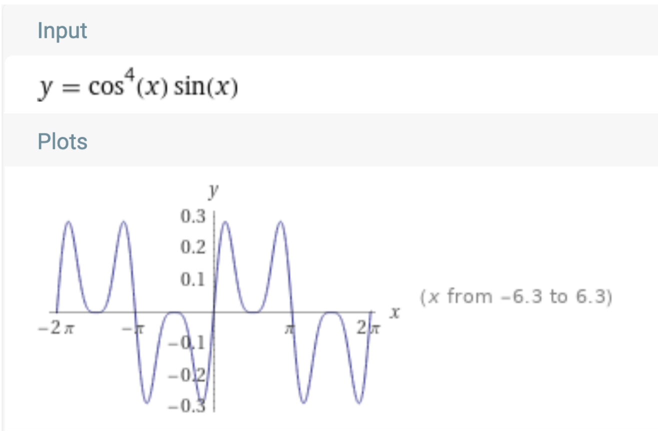
$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 y$$

Переходим в полярные координаты:

$$(r^2)^3 = r^5 \cos^4 \varphi \sin \varphi$$

$$r = \cos^4 \varphi \sin \varphi$$

Смотрим на график:



У нас $r > 0$, значит интервал от π до 2π нас не интересует, будем брать от 0 до π

$$S = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\cos 4\varphi \sin \varphi} 1 \cdot r dr = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\cos 4\varphi \sin \varphi} 1 \cdot r dr = \int_0^\pi d\varphi \left(\frac{r^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\cos^4 \varphi \sin \varphi}$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \left(\frac{\cos^8 \varphi \sin^2 \varphi}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\cos^8 \varphi \sin^2 \varphi \right) d\varphi = (\times)$$

Такой интеграл особо не посчитаешь, вольфрам выдает какую-то странную рандомную формулу, поэтому буду в тупую раскладывать по формулам из школы:

$$\cos^8 x \sin^2 x = \cos^7 x \sin x \cdot (\cos x \sin x) = \cos^7 x \sin x \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = cos^6 x \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos^2 x)^3 \sin^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^3 2\sin^2 x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}(1+\cos 2x)^3 \sin^2 2x =$$

$$= \frac{1}{32}(1+\cos 2x)^3 \sin^2 2x = \frac{1}{32}\left(\cos^3 2x + 3\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1\right)\sin^2 2x =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\cos^3 2x \sin^2 2x + 3\cos^2 2x \sin^2 2x + 3\cos 2x \sin^2 2x + \sin^2 2x\right)$$

Тогда наш интеграл принимает вид:

$$(\times) = \frac{1}{64}\int_0^\pi \left(\cos^3 2\varphi \sin^2 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi \sin^2 2\varphi + 3\cos 2\varphi \sin^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi\right) d\varphi$$

Посчитаем по отдельности и потом сложим как сумму:

-
$$\int \cos^3 2\varphi \sin^2 2\varphi d\varphi = \left| \begin{matrix} u = \sin 2\varphi \\ du = 2\cos 2\varphi d\varphi \\ d\varphi = \frac{du}{2\cos 2\varphi} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \cos^3 2\varphi \cdot u^2 \frac{du}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{2}\int (1-u^2)u^2 du =$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^2 - u^4) du = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^3 2\varphi}{3} - \frac{\sin^5 2\varphi}{5}\right)$$

$$\int_0^\pi \cos^3 2\varphi \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^3 2\varphi}{3} - \frac{\sin^5 2\varphi}{5}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

-
$$\int \cos^2(2\varphi)\sin^2(2\varphi) d\varphi = \int \frac{1}{4}\sin^2 4\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int \sin^2 4\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 8\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int 1 - \cos 8\varphi d\varphi = \frac{1}{8}\varphi - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\sin 8\varphi$$

$$3\int_0^\pi \cos^2(2\varphi)\sin^2(2\varphi) d\varphi = 3\left(\frac{1}{8}\varphi - \frac{1}{64}\sin 8\varphi\right)\Bigg|_0^\pi = 3\left(\frac{\pi}{8} - 0\right) = \frac{3\pi}{8}$$

- $$\int \cos 2\varphi \sin^2 2\varphi d\varphi = \begin{vmatrix} u = \sin 2\varphi \\ du = 2\cos 2\varphi d\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} = \frac{1}{6}\sin^3 2\varphi$$

  $$3\int_0^{\pi} \cos 2\varphi \sin^2 2\varphi d\varphi = 3\cdot\left(\frac{1}{6}\sin^3 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 3\cdot(0-0) = 0$$

- $$\int \sin^2 2\varphi d\varphi = \int \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\sin 4\varphi$$

  $$\int_0^{\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$(\times) = \frac{1}{64}\left(0 + \frac{3\pi}{8} + 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi}{512}$$

Ответ:

$$\frac{7\pi}{512}$$

Номер 2

$$2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$$

Имеем:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Неравенство будем рисовать как шар:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

Пересечем наши условия:

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z \end{cases}$$

$$2z + z^2 = 4z$$

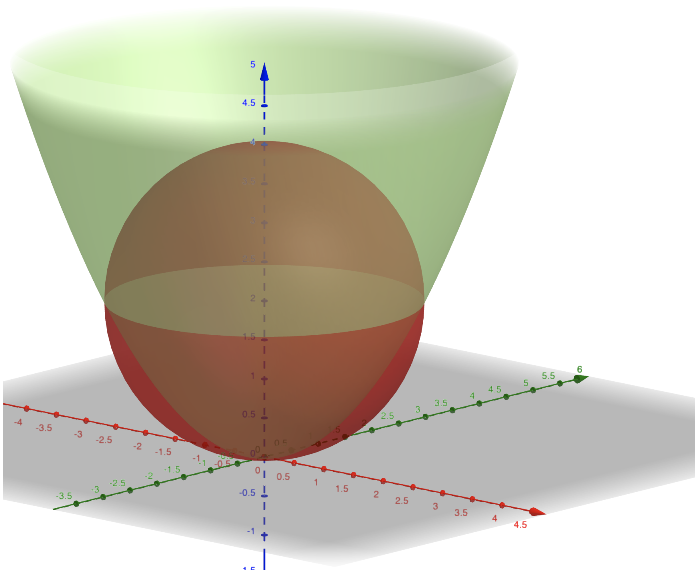
$$z^2 = 2z$$

$$z(z - 2) = 0$$

$$z = 0, x^2 + y^2 = 0$$

$$z = 2, x^2 + y^2 = 4$$

Графичек для понимания:



На семе вывели формулу площади, у нас множество D задается как $x^2 + y^2 \leq 4$, формула:

$$S = \iint\limits_{\substack{x \in [1,4] \\ y \in [2,3]}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx dy$$

Итого имеем площадь:

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{1 + \frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2}} dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = (\times)$$

Перейдем в полярные координаты: $x^2 + y^2$ удобно превратится в r^2:

$$(\times) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+r^2} r dr = \begin{vmatrix} u = r^2 + 1 \\ du = 2rdr \\ dr = \frac{du}{2r} \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \int_1^5 \sqrt{u} du = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_1^5 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot 5^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2 \cdot 1}{3} \right) d\varphi = \pi \left(\frac{10\sqrt{5} - 2}{3} \right)$$

Ответ:

$$\pi \left(\frac{10\sqrt{5} - 2}{3} \right)$$