Номер 1

a)

Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

А также введем матрицу линейного отображения C для φ. Тогда для нахождения этой матрицы нужно решить следующее матричное уравнение:

$$AC^T = B$$

Решим его (матрица C пригодится в пункте b):

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 2 & 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & -5 & -6 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 3 & -2 & 27 & 36 \\ -3 & 1 & -2 & 2 & -3 & 4 & -24 & -36 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 0 & -27 & -58 & -21 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 2 & -15 & -5 & 21 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 4 & 3 & -3 & -3 & 2 & -32 & -42 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & 13 & 32 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 31 & 34 & -15 \\ -1 & 2 & -3 & -2 & 2 & -42 & -63 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & -4 & 6 & -99 & -131 & 21 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 2 & -2 & 42 & 63 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 15 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 31 & 34 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & -3 & 2 & -32 & -42 \\ 0 & 5 & -8 & -4 & 6 & -99 & -131 & 21 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 2 & -2 & 42 & 63 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -1 & 9 & -101 & -99 & 63 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -31 & -34 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 28 & -21 & 271 & 364 & -51 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -2 & 15 & 0 & -27 \end{array}\right) =$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & -2 & 3 & 2 & -2 & 42 & 63 & 0 \\
0 & 1 & -11 & -1 & 9 & -101 & -99 & 63 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -31 & -34 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 36 & -27 & 333 & 432 & -81 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 10 & -6
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & -19 & 0 & 16 & -160 & -135 & 126 \\
0 & 1 & -11 & -1 & 9 & -101 & -99 & 63 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -31 & -34 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 10 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 & 15
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -76 & 73 & -749 & -781 & 411 \\
0 & 1 & 0 & -45 & 42 & -442 & -473 & 228 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -31 & -34 & 15 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 10 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 & 15
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -76 & 73 & -749 & -781 & 411 \\
0 & 1 & 0 & -45 & 42 & -442 & -473 & 228 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 9 & 6 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 10 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 & 15
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -76 & 73 & -749 & -781 & 411 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 8 & -23 & -42 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 9 & 6 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 10 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 & 15
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 8 & -23 & -42 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 9 & 6 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 10 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 & 15
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 14 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 10 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 & 15
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 14 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 18 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 8 & 15
\end{array}\right)
$$

$$
C^T = \begin{pmatrix}
2 & 3 & 0 \\
-1 & 1 & 3 \\
6 & 14 & 6 \\
7 & 18 & 9 \\
-3 & 8 & 15
\end{pmatrix}
$$

$$
C = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 6 & 7 & -3 \\
3 & 1 & 14 & 18 & 8 \\
0 & 3 & 6 & 9 & 15
\end{pmatrix}
$$

И так, мы нашли матрицу перехода C, но помимо этого можно заметить еще кое что: мы смогли привести матрицу A^T к улучшенному ступенчатому виду и получить единичную матрицу, что означает, что $rkA^T = 5$, ну тогда и $rkA = 5$. А это означает, что векторы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 являются линейно независимыми и образуют базис всего пространства $\mathbb{R}^5$.

Мы знаем, что линейное отображение φ **единственным** образом определяется базисными векторами (теорема 16.11 из теха лекций Авдеева), т.е:

$$
\varphi\left(a_1\right), \varphi\left(a_2\right), \varphi\left(a_3\right), \varphi\left(a_4\right), \varphi\left(a_5\right)
$$

Значит существует единственное линейное отображение, которое переводит $a_1, \ldots, a_5$ в $b_1, \ldots, b_5$

Ч.Т.Д

b)

В пункте a) мы нашли матрицу линейного отображения, воспользуемся ей:

1. Для нахождения базиса ядра нужно решить ОСЛУ Сх $= 0$ и найти её ФСР:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & 14 & 18 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -8 & -11 & -11 \\ 3 & 1 & 14 & 18 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -8 & -11 & -11 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -8 & -11 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -8 & -11 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда ФСР:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

По итогу:

$$\mathrm{Ker}\varphi =< \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Дополним базис ядра до базиса всего пространства $\mathbb{R}^5$ стандартным алгоритмом:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Для дополнения нам нужно взять векторы из стандартного базиса e_4 и e_5

2. В таком случае образы векторов e_4 и e_5 будут образовывать базис $\mathrm{Im}\varphi$ (по теореме 18.5 из теха лекций Авдеева):

$$C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & 14 & 18 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & 14 & 18 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

По итогу:

$$\mathrm{Im}\varphi =< \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} >$$

Ответ:

$$\mathrm{Ker}\varphi =< \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$\mathrm{Im}\varphi =< \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} >$$

Номер 2

Найдем базис ядра и образа нашего отображения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 10 & -8 & 7 & 13 & 18 \\ 18 & -20 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 10 & -8 & 7 & 13 & 18 \\ -2 & -4 & -9 & -27 & -26 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 10 & -8 & 7 & 13 & 18 \\ 0 & -7 & -7 & -28 & -28 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ 10 & -8 & 7 & 13 & 18 \\ 0 & -7 & -7 & -28 & -28 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -28 & -28 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & -7 & -7 & -28 & -28 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & -7 & -7 & -28 & -28 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда ФСР:

$$\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\mathrm{Ker}\varphi =< \begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix} >$$

Теперь найдем базис образа:

$$\begin{pmatrix}-3 & -3 & -1 & 1 & 0\\ -5 & -4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 3 & 5 & -5 & 3\\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 5 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

Значит нам нужны векторы из стандартного базиса e_3, e_4 и e_5

Тогда:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2\\ 10 & -8 & 7 & 13 & 18\\ 18 & -20 & 5 & -1 & 10\\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\7\\5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2\\ 10 & -8 & 7 & 13 & 18\\ 18 & -20 & 5 & -1 & 10\\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\13\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2\\ 10 & -8 & 7 & 13 & 18\\ 18 & -20 & 5 & -1 & 10\\ 3 & -3 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\18\\10\\3\end{pmatrix}$$

А значит:
$$\mathrm{Im}\varphi =< \begin{pmatrix}-1\\-2\\7\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\13\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\18\\10\\3\end{pmatrix} >$$
По условию задачи мы должны построить такое линейное отображение ψ, что $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$ и $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{Ker}\varphi$. Введем матрицу A_ψ для ψ. Тогда по определению ядра:
$$A_\psi \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\7\\5\\2\end{pmatrix} = 0;\ A_\psi \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\13\\-1\\2\end{pmatrix} = 0;\ A_\psi \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\18\\10\\3\end{pmatrix} = 0$$
Дополним тогда базис $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Im}\varphi$ до базиса всего пространства $\mathbb{R}^5$:
$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 7 & 5 & 2\\ -1 & 1 & 13 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 18 & 10 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -3 & -6 & 6 & 0\\ -1 & 1 & 13 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 18 & 10 & 3\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}0 & -3 & -6 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 31 & 9 & 5\\ 1 & 2 & 18 & 10 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 18 & 10 & 3\\ 0 & 0 & 25 & 15 & 5\\ 0 & -3 & -6 & 6 & 0\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 18 & 10 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$$
Значит нам понадобятся векторы из стандартного базиса e_4 и e_5.

Теперь можем выразить $\mathrm{Im}\psi$ с одной стороны через $\mathrm{Ker}\varphi$ (т.к они равны по условию задачи), а с другой через e_4 и e_5, используя нашу матрицу A_ψ, т.е:
$$A_\psi \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$A_\psi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

У нас получилось 5 матричных уравнений и мы можем использовать их (соединив их все вместе в одно матричное уравнение), чтобы найти саму эту матрицу A_ψ:

$$A_\psi \cdot \begin{pmatrix} -1 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 13 & 18 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 13 & 18 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot A_\psi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 5 & 2 \\ -11 & 1 & 13 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 18 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_\psi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем следующее (у меня тех не хочет вставлять такое большое количество элементов на одной строке для разделения вертикальной чертой и я хз как это пофиксить, поэтому оставил без |, сорри):

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 1 & 13 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 18 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 0 & 2 & 15 & 15 & 5 & -5 & 0 \\ -11 & 1 & 13 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 18 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 0 & 2 & 15 & 15 & 5 & -5 & 0 \\ -11 & 1 & 13 & 0 & 2 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 18 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 0 & 2 & 15 & 15 & 5 & -5 & 0 \\ -11 & 1 & 13 & 0 & 2 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 18 & 0 & 3 & 30 & 30 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 25 & 23 & 5 & -5 & -2 \\ -11 & 1 & 13 & 0 & 2 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 18 & 0 & 3 & 30 & 30 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 25 & 23 & 5 & -5 & -2 \\ -11 & 1 & 13 & 0 & 0 & 7 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 18 & 0 & 3 & 30 & 30 & 10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 25 & 23 & 5 & -5 & -2 \\ -11 & 1 & 13 & 0 & 0 & 7 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 18 & 0 & 0 & 45 & 42 & 10 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
-1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 25 & 23 & 5 & -5 & -2 \\
0 & 23 & -64 & 0 & 0 & -268 & -248 & -56 & 56 & 20 \\
1 & 2 & 18 & 0 & 0 & 45 & 42 & 10 & -10 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$=$$

$$
= \begin{pmatrix}
-1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 25 & 23 & 5 & -5 & -2 \\
0 & 23 & -64 & 0 & 0 & -268 & -248 & -56 & 56 & 20 \\
0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 70 & 65 & 15 & -15 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
-1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 25 & 23 & 5 & -5 & -2 \\
0 & 23 & 1 & 0 & 0 & -86 & -79 & -17 & 17 & 7 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 14 & 13 & 3 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{5} & -\frac{24}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{444}{115} & -\frac{408}{115} & -\frac{88}{115} & \frac{88}{115} & \frac{36}{115} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{267}{115} & \frac{264}{115} & \frac{84}{115} & -\frac{84}{115} & -\frac{3}{115} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{444}{115} & -\frac{408}{115} & -\frac{88}{115} & \frac{88}{115} & \frac{36}{115} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

И мы (наконец-то...) получаем матрицу A_ψ:

Ответ:

$$
\begin{pmatrix}
-\frac{267}{115} & \frac{264}{115} & \frac{84}{115} & -\frac{84}{115} & -\frac{3}{115} \\
-\frac{444}{115} & -\frac{408}{115} & -\frac{88}{115} & \frac{88}{115} & \frac{36}{115} \\
\frac{14}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\
-3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\
-5 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Номер 3

Найдем базис $\mathrm{Ker}\varphi$:

$$\begin{pmatrix} -14 & 8 & 12 & -2 \\ 4 & 16 & -16 & -12 \\ 10 & 8 & -18 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 56 & -36 & -38 \\ 4 & 16 & -16 & -12 \\ 10 & 8 & -18 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 56 & -36 & -38 \\ 0 & 128 & -88 & -88 \\ 10 & 8 & -18 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 56 & -36 & -38 \\ 0 & 128 & -88 & -88 \\ 0 & 288 & -198 & -198 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 56 & -36 & -38 \\ 0 & 128 & -88 & -88 \\ 0 & 32 & -22 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 56 & -36 & -38 \\ 0 & -32 & 22 & 22 \\ 0 & 32 & -22 & -22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 56 & -36 & -38 \\ 0 & -32 & 22 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 16 & -11 & -11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{16} & -\frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Отсюда ФСР:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{11}{16} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{11}{16} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Координаты были заданы в базисе $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, а значит:

$$\varphi\left(\frac{5}{4}e_1 + \frac{11}{16}e_2 + e_3\right) = 0$$

$$\varphi\left(\frac{1}{4}e_1 + \frac{11}{16}e_2 + e_4\right) = 0$$

Чтобы дополнить базис $\mathrm{Ker}\varphi$ до базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$ нужны векторы из стандартного базиса e_1 и e_2. А значит базисом $\mathrm{Im}\varphi$ будут $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$.

Они будут равны (в базисе $\mathbf{f}$):

$$\varphi(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = -14f_1 + 4f_2 + 10f_3$$

$$\varphi(e_2) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = 8f_1 + 16f_2 + 8f_3$$

Теперь дополним их до базиса всего пространства $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} -14 & 4 & 10 \\ 8 & 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 36 & 26 \\ 8 & 16 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 18 & 13 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что нам нужен вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е f_3

Тогда возьмем такой базис $\mathbb{R}^3$:

$$f_1' = -14f_1 + 4f_2 + 10f_3$$

$$f_2' = 8f_1 + 16f_2 + 8f_3$$

$$f_3' = f_3$$

Тогда сможем составить следующую матрицу перехода:

$$(f_1', f_2' f_3') = (f_1, f_2, f_3) \cdot C_1$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 10 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

И такой базис $\mathbb{R}^5$:

$$e_1' = e_1$$

$$e_2' = e_2$$

$$e_3' = \frac{5}{4}e_1 + \frac{11}{16}e_2 + e_3$$

$$e_4' = \frac{1}{4}e_1 + \frac{11}{16}e_2 + e_4$$

Тогда сможем составить следующую матрицу перехода:

$$(e_1', e_2', e_3', e_4') = (e_1, e_2, e_3, e_4) \cdot C_2$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{16} & \frac{11}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что D тогда равна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Потому что:

$$f(e_1') = f(e_1) = f_1' = (1, 0, 0)$$
$$f(e_2') = f(e_2) = f_2' = (0, 1, 0)$$
$$f(e_3') = f\left(\frac{5}{4}e_1 + \frac{11}{16}e_2 + e_3\right) = (0, 0, 0)$$
$$f(e_4') = f\left(\frac{1}{4}e_1 + \frac{11}{16}e_2 + e_4\right) = (0, 0, 0)$$

Тогда:

$$A = C_1 D C_2^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 10 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{16} & \frac{11}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -14 & 8 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 10 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{16} & \frac{11}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Номер 4

Нам нужно найти многочлен h, координаты которого заданы в базисе (f_1, f_2, f_3). Значит нам нужно найти эти базисные векторы. Многочлен степени не выше 2 от переменной x имеет вид ax^2+bx+c. Тогда, пользуясь условием задачи:

$$\rho_1(f) = f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$

$$\rho_2(f) = f'(-1) = 2ax + b + 0 = -2a + b$$

$$\rho_3(f) = \frac{3}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \left[ax^2 + bx + c\right]\,dx = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{8a}{3} + 2b + 2c\right) = 4a+3b+3c$$

Тогда найдем f_1, f_2 и f_3:

Из пункта 18.11 теха лекций Авдеева мы знаем, что :

$$\rho_i(f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

1.
$$\rho_1(f_1) = 1;\ \rho_2(f_1) = 0;\ \rho_3(f_1) = 0$$

$$f_1(1) = 1;\ f_1'(-1) = 0;\ \frac{3}{2}\cdot\int_0^2 f_1(x)\,dx = 0$$

В начале решения мы получили общие значения для f, тогда получаем систему:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -2a + b = 0 \\ 4a + 3b + 3c = 0 \end{cases}$$

Перейдем к матричному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Получаем:

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -6 \\ c = 10 \end{cases}$$

А значит:

$$f_1 = -3x^2 - 6x + 10$$

2. Аналогично предыдущему пункту:

$$\rho_1(f_2) = 0;\ \rho_2(f_2) = 1;\ \rho_2(f_2) = 0$$

$$f_2(1) = 0;\ f_2'(-1) = 1;\ \frac{3}{2} \cdot \int_0^2 f_2(x)\,dx = 0$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a + b = 1 \\ 4a + 3b + 3c = 0 \end{cases}$$

Перейдем к матричному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

А значит:

$$f_2 = 0x^2 + x - 1 = x - 1$$

3. Для f_3:

$$\rho_1(f_3) = 0;\ \rho_2(f_3) = 0;\ \rho_3(f_3) = 1$$

$$f_3(1) = 0;\ f_3'(-1) = 0;\ \frac{3}{2} \cdot \int_0^2 f_3(x)\,dx = 1$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \\ 4a + 3b + 3c = 1 \end{cases}$$

Перейдем к матричному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

А значит:

$$f_3 = x^2 + 2x - 3$$

Мы получили векторы, а значит теперь можем выразить многочлен h. По условию он имеет координаты (1, 4, -1), а значит:

$$h = f_1 + 4f_2 - f_3 = -3x^2 - 6x + 10 + 4(x - 1) - (x^2 + 2x - 3) = 9 - 4x - 4x^2$$

Теперь переведем h из координат базиса (f_1, f_2, f_3) в координаты базиса $(\varepsilon_1' = -1-2x+4x^2,\ \varepsilon_2' = 3+5x-5x^2,\ \varepsilon_3' = 9+10x+19x^2)$:

$h = x_1(-1-2x+4x^2)+x_2(3+5x-5x^2)+x_3(9+10x+19x^2) = x_1\varepsilon_1'+x_2\varepsilon_2'+x_3\varepsilon_3' = 9-4x-4x^2$

Переведем это равенство в систему линейных уравнений, чтобы найти коэффициенты:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 9 & 9 \\ -2 & 5 & 10 & -4 \\ 4 & -5 & 19 & -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 9 & 9 \\ -2 & 5 & 10 & -4 \\ 0 & 5 & 39 & -12 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & -1 & -8 & -22 \\ 0 & 5 & 39 & -12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & -1 & -8 & -22 \\ 0 & 0 & -1 & -122 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 122 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 15 & 57 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 122 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 15 & 57 \\ 0 & 1 & 0 & -954 \\ 0 & 0 & 1 & 122 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1773 \\ 0 & 1 & 0 & -954 \\ 0 & 0 & 1 & 122 \end{array}\right)$$

А значит:

$$\begin{cases} x_1 = -1773 \\ x_2 = -954 \\ x_3 = 122 \end{cases}$$

И h имеет вид:

$$h = -1773\varepsilon_1' - 954\varepsilon_2' + 122\varepsilon_3'$$

Теперь можем перейти к линейной функции α. Она в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ имеет координаты (2, 2, -2), т.е $\alpha = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$. Тогда:

$$\alpha(h) = 2\varepsilon_1(h) + 2\varepsilon_2(h) - 2\varepsilon_3(h) =$$

$$= 2\varepsilon_1(-1773\varepsilon_1'-954\varepsilon_2'+122\varepsilon_3')+2\varepsilon_2(-1773\varepsilon_1'-954\varepsilon_2'+122\varepsilon_3')-2\varepsilon_3(-1773\varepsilon_1'-954\varepsilon_2'+122\varepsilon_3')$$

Аналогично пункту про ρ, мы знаем, что:

$$\varepsilon_i(\varepsilon_j') = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тогда часть слагаемых обнуляется (используя линейность и написанное выше):

$$\alpha(h) = 2\varepsilon_1(-1773\varepsilon_1') + 2\varepsilon_2(-954\varepsilon_2') - 2\varepsilon_3(122\varepsilon_3') =$$

$$= 2\cdot(-1773)\cdot\varepsilon_1(\varepsilon_1')+2\cdot(-954)\cdot\varepsilon_2(\varepsilon_2')-2\cdot122\cdot\varepsilon_3(\varepsilon_3') = 2\cdot(-1773)+2\cdot(-954)-2\cdot122 =$$
$$= -3546 - 1908 - 244 = -5698$$

Ответ:

$$\alpha(h) = -5698$$