Матан, дз – 13

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

26 апреля 2022 г.

Номер 1

Надо понять, что такое $\frac{1}{z}$ (если $z = x + iy$):

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Тогда заменим:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z' = x' + iy'$$

$$|z|^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Знаем:

там было очень много геометрии, давайте я просто итоговый ответ запишу, чтобы ими пользоваться?

$$\zeta = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \quad \xi = \frac{x}{|z|^2 + 1} \quad \eta = \frac{y}{|z|^2 + 1}$$

Тогда подставляем:

$$\zeta = \frac{\frac{1}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x^2+y^2} + 1} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\xi = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x^2+y^2} + 1} = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\eta = \frac{-\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x^2+y^2} + 1} = -\frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$$

Ответ: координаты для $M\left(\frac{1}{z}\right)$:

$$\left(\frac{1}{x^2+y^2+1};\ \frac{x}{x^2+y^2+1};\ -\frac{y}{x^2+y^2+1}\right)$$

Номер 2

skip

Номер 3

Подставляем в известное нам с семинара уравнение:

$$\frac{z-0}{z-i}\cdot\frac{\infty-i}{\infty-0}=\frac{w-(-1)}{w-i}\cdot\frac{\infty-i}{\infty-(-1)}$$

Замечаем:

$$\frac{\infty-1}{\infty-0}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{1}=1$$

$$\frac{\infty-i}{\infty-(-1)}=\frac{1-\frac{i}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=1$$

Тогда получаем:

$$\frac{z-0}{z-i}=\frac{w+1}{w-i}$$

$$z(w-i)=(z-i)(w+1)$$

$$zw-zi=zw+z-iw-i$$

$$-zi=z-iw-i$$

$$iw=z+zi-i$$

$$-w=zi-z+1$$

$$w=-zi+z-1$$

$$w=z(-i+1)-1$$

$$w=(1-i)z-1$$

Ответ:

$$w=(1-i)z-1$$

Номер 4

Аналогично предыдущему номеру:

$$\frac{z-1}{z-0}\cdot\frac{i-0}{i-1}=\frac{w-1}{w+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}$$

$$\frac{z-1}{z}\cdot i=\frac{w-1}{w+1}\cdot(i+1)$$

$$\frac{zi-i}{z}=\frac{wi+w-i-1}{w+1}$$

$$(zi-i)(w+1)=(wi+w-i-1)z$$

$$ziw+zi-iw-i=wiz+wz-iz-z$$

$$zi-iw-i=wz-iz-z$$

$$zi-i+iz+z=wz+iw$$

$$2iz-i+z=w(z+i)$$

$$w=\frac{2iz-i+z}{z+i}$$

$$w=\frac{z(1+2i)-i}{z+i}$$

Ответ:

$$w=\frac{z(1+2i)-i}{z+i}$$