

Бурмашев Григорий. 208. Матан. Д/з - 5



## Задача № 12

Найти:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$
$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

а)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Пускай  $n = 2k$  (т.е четное), тогда:

$$a_n = \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1 + (-1)^{2k}}{2} = \frac{1}{2k} + 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1$$

А значит:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Пускай  $n = 2k+1$  (т.е нечетное), тогда:

$$a_n = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1 + (-1)^{2k+1}}{2} = -\frac{1}{2k+1} + \frac{0}{2} = -\frac{1}{2k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n \left(-\frac{1}{2k+1}\right) = 0$$

А значит:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

**Ответ:**

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

б)

$$a_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$$

Мы знаем, что:

$$\sin^2 \frac{n\pi}{4} \in [0, 1]$$

Рассмотрим случай, когда  $\sin^2 \frac{n\pi}{4} = 0$ :

$$\frac{n\pi}{4} = \pi k \rightarrow n = 4k$$

Тогда:

$$a_n = \frac{4k}{4k+1} \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k}{4k+1} \cdot 0 = 0$$

А значит:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $\sin^2 \frac{n\pi}{4} = 1$ :

$$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi k}{2} + \pi k \rightarrow n = 4k + 2$$

Тогда:

$$a_n = \frac{4k+2}{4k+3} \cdot 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k+2}{4k+3} \cdot 1 = 1$$

А значит:

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

**Ответ:**

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

с)

$$a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Рассмотрим случай, когда  $\frac{n(n-1)}{2}$  чётно, тогда  $n = 4k$ :

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{4k(4k-1)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2$$

Рассмотрим оставшиеся  $n$ , пусть  $n = 4k + 1$ :

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+2} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+1)(4k)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

Пусть  $n = 4k + 2$ :

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+3} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+1)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -4$$

Пусть  $n = 4k + 3$ :

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+4} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+2)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0$$

Мы рассмотрели все возможные значения  $n$ .

**Ответ:**

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -4$$