

Математические структуры, контрольная работа, вариант Н

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

3 ноября 2022 г.

Номер 1

Пускай:

- a – счастливый билет
- b – хорошо подготовился
- c – экзамен успешно сдал

Тогда наше выражение в таком языке будет иметь вид:

$$(((a \vee b) \rightarrow c) \wedge (\neg b \rightarrow \neg c)) \rightarrow (\neg c \rightarrow \neg a)$$

Проверим, может ли следствие быть ложным, это единственный случай, когда вся формула станет ложной, т.е мы хотим:

$$\begin{cases} ((a \vee b) \rightarrow c) \wedge (\neg b \rightarrow \neg c) = 1 \\ (\neg c \rightarrow \neg a) = 0 \end{cases}$$

Из правой части однозначно получаем:

$$\begin{cases} ((a \vee b) \rightarrow c) \wedge (\neg b \rightarrow \neg c) = 1 \\ (c \vee \neg a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((a \vee b) \rightarrow c) \wedge (\neg b \rightarrow \neg c) = 1 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Теперь подставим значения в первое выражение:

$$((1 \vee b) \rightarrow 0) \wedge (\neg b \rightarrow \neg 0) = 1$$

$$(1 \rightarrow 0) \wedge (\neg b \rightarrow 1) = 1$$

В левой скобке однозначно 0, значит получаем:

$$0 = 1$$

Что неверно, приходим к противоречию, значит случая $1 \rightarrow 0$ не может быть, следовательно заключение является логическим следствием конъюнкции посылок

Ответ: да, является

Номер 2

$$((q \wedge r) \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \wedge q)$$

$$\neg(\neg(q \wedge r) \vee p) \vee \neg(p \wedge q)$$

$$\neg(\neg q \vee \neg r \vee p) \vee (\neg p \vee \neg q)$$

$$(q \wedge r \wedge \neg p) \vee \neg p \vee \neg q$$

Ответ: $(q \wedge r \wedge \neg p) \vee \neg p \vee \neg q$

Номер 3

значит, что нужно + аксиома

$$\begin{array}{c}
 \text{аксиома} \\
 \hline
 p, q \Rightarrow q \quad (\neg L) \quad \frac{p \Rightarrow p, q}{p \Rightarrow q, p} \quad (\neg L) \\
 \hline
 p, \neg q, q \Rightarrow ; p, \neg q \Rightarrow p \\
 \hline
 \quad \quad \quad (\rightarrow L) \\
 p \rightarrow q, p, \neg q \Rightarrow \\
 \hline
 \quad \quad \quad (\wedge L) \\
 p \wedge \neg q, p \rightarrow q \Rightarrow \\
 \hline
 p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \rightarrow q) \quad (\neg R)
 \end{array}$$

Номер 4

Докажем, что не является:

Пусть:

$$M, x \not\models \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$$

Т.е хотим $\exists y : x \preceq y$

$$\begin{cases} y \models \neg(p \rightarrow q) \\ y \not\models (p \wedge \neg q) \end{cases}$$

Разберемся сначала со вторым выражением, хотим $\exists y' : y' \preceq y$, что $y' \not\models p$ или $y' \not\models \neg q \equiv y' \models q$.

Теперь для первого выражения хотим: $\exists z : y \preceq z$, что:

$$\begin{cases} z \models p \\ z \not\models q \end{cases}$$

Построили опровергающую модель Крипке, но **не** получили в ней противоречий, следовательно формула **не** является интуиционистской тавтологией.

Ч.Т.Д

Номер 5

$$\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$$

Пусть:

$$M, x \not\models \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$$

Тогда: $\exists y : x \preceq y$, что:

$$\begin{cases} y \models \neg\neg\neg p \\ y \not\models p \rightarrow \perp \end{cases}$$

Для второго: $\exists z : y \preceq z$:

$$z \models p$$

Для первого:

$$y \models \neg\neg p \rightarrow \perp$$

$$y \not\models \neg\neg p$$

$$y \not\models \neg p \rightarrow \perp$$

Тобись $\exists s : y \preceq s$:

$$s \models \neg p$$

Для $z : z \models p$, для $s : s \models \neg p$, посмотрим, будет ли противоречие.

Заметим, что :

$$p \rightarrow \neg\neg p \text{ есть и-тавтология}$$

Следовательно замечаем:

$$z \models \neg\neg p$$

Но в y :

$$y \not\models \neg\neg p$$

Тогда:

$$z \models \perp$$

Получили **противоречие**, значит исходная формула является и-тавтологией

Ч.Т.Д