Матан, дз - 3

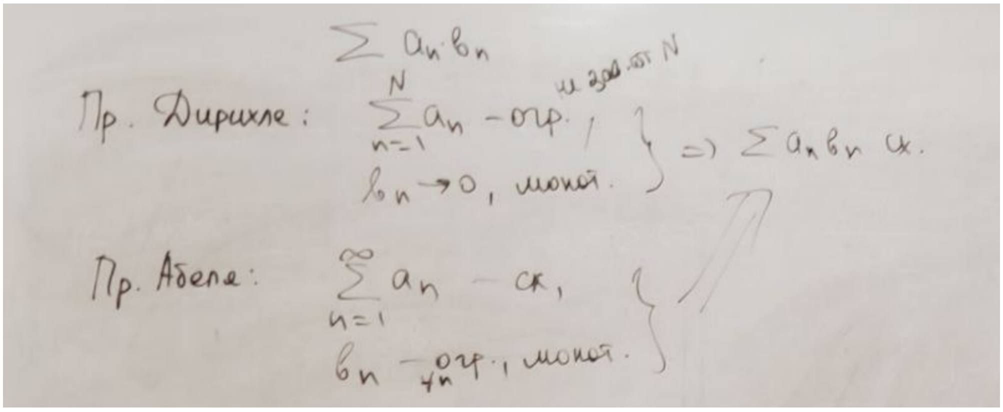
Бурмашев Григорий, БПМИ-208

28 сентября 2021 г.

Номер 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n \cos 3n}{\sqrt{2n+1}}$$

Попробуем решить по признаку Дирихле:



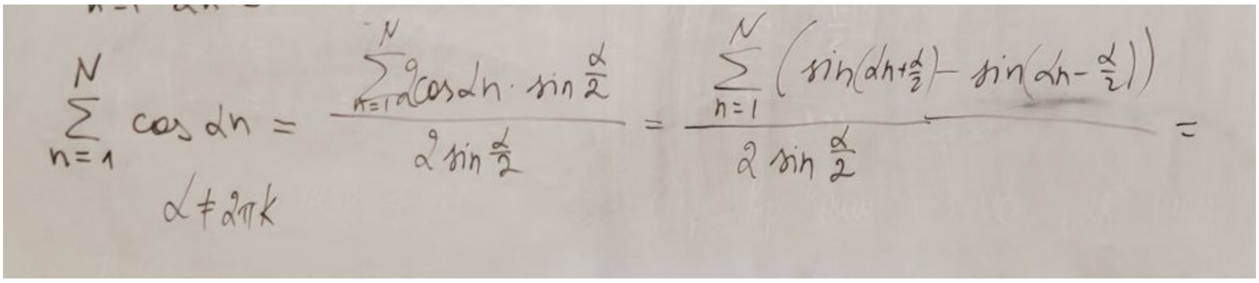
Введем обозначения:

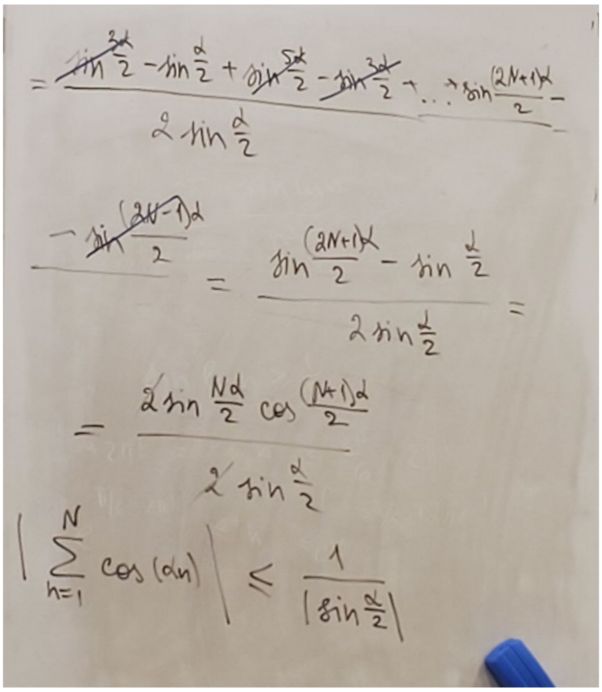
$$a_n = \cos 3n$$

$$b_n = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+1}}$$

Начнем проверять условия для Дирихле:

- На семинаре уже доказали нужное нам, поэтому я думаю бессмысленно перетехивать тоже самое, просто вставлю фотки:





$$\to \sum_{n=1}^{N} \cos 3n \text{ ограничен}$$

- Проверяем стремление к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\ln n}{n}}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n\cdot\sqrt{2n+1}}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2n\ln n+2}{n\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{2n+1}}+\frac{2\ln n}{\sqrt{2n+1}}+\frac{2}{n\sqrt{2n+1}}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{2n+1}}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\ln n}{\sqrt{2n+1}}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{2n+1}}\right)=$$

$$=0+0\ (\text{т.к }\ln\text{ медленее корня})+0=0$$

Выполняется

- Проверяем монотонность, для этого возьмем производную:

$$\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+1}}\right)'=\frac{\frac{2\ln n}{n}\cdot\sqrt{2n+1}-\ln^2 n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}{2n+1}=\frac{\frac{2\ln n\cdot\sqrt{2n+1}}{n}-\frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+1}}}{2n+1}=$$

$$=\frac{\frac{2\ln n\cdot(2n+1)-ln^2 n\cdot n}{n\cdot\sqrt{2n+1}}}{2n+1}=\frac{2\ln n\cdot(2n+1)-\ln^2 n\cdot n}{(2n+1)\cdot n\cdot\sqrt{2n+1}}=\frac{\ln n(4n+2-\ln n\cdot n)}{(2n+1)\cdot n\cdot\sqrt{2n+1}}$$

Теперь заметим, что:

$$(2n+1)\cdot n\cdot\sqrt{2n+1}>0$$

$$\ln n\geq 0$$

$$4n+2-\ln n\cdot n<0,\ \text{т.к }\ \ln n\cdot n>4n+2\text{ начиная с некоторого }n_i$$

А значит все выражение ≤ 0, т.е:

$$(b_n)'\leq 0\to b_n\text{ монотонно убывает}$$

Выполняется

Все необходимые для признака Дирихле условия выполняются, а значит ряд **сходится**

Ч.Т.Д

Номер 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\sqrt[3]{n}\right]}}{\sqrt[3]{n^2+3}}$$

Решаю аналогично подобным задачам с семинара, избавимся от [] путем замены, получим новый ряд и посмотрим сходится ли абсолютно.

Пусть $[\sqrt[3]{n}] = k$, тогда:

$$k \leq \sqrt[3]{n} < k+1$$
$$k^3 \leq n < (k+1)^3$$
$$\left[k^3\right] + 1 \leq n \leq \left[(k+1)^3\right]$$

Теперь смотрим на новый ряд:

$$\left|\sum_{n=[k^3]+1}^{\left[(k+1)^3\right]} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{n^2+3}}\right| = \sum_{n=[k^3]+1}^{\left[(k+1)^3\right]} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} \geq \frac{[(k+1)^3] - [k^3]}{\sqrt[3]{([(k+1)^3])^2+3}} \geq \frac{(k+1)^3 - 1 - k^3}{\sqrt[3]{(k+1)^6+3}} \geq$$

$$\geq \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 1 - k^3}{\sqrt[3]{(k+1)^6+3}} \geq \frac{3k^2+3k}{\sqrt[3]{(k+1)^6+3}} =$$

Не очень хочется раскрывать многочлен 6й степени, поэтому можно просто заметить очевидный факт, что он будет вида $k^6 + bk^5 + \ldots$, поэтому при делении на k^2 (под корнем 3й степени это будет k^6 соотв.) все множители, кроме первого, при $k \to \infty$ уйдут в ноль, а первый множитель будет $\frac{k^6}{k^6} = 1$, поэтому дробь примет вид:

$$= \frac{3 + \frac{3}{k}}{\sqrt[3]{1 + \frac{b}{k} + \ldots}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{3}{\sqrt[3]{1}} = 3 \neq 0$$

Отр.Кр.Коши $\rightarrow$ исходный ряд расходится

Ч.Т.Д