Бурмашев Григорий. Дискра – 12

## Номер 1

Две последние цифры – это остаток при делении на 100. 99 сравнима с -1 по 100, т.к $99 - (-1) = 100$ делится на 100. Тогда:

$$99^{1000} \overset{100}{\equiv} (-1)^{1000} = 1$$

Значит $99^{1000}$ оканчивается на 01.

**Ответ:** 01

## Номер 2

Мы знаем, что $a^2 - b^2$ делится на $a - b$, т.к $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Отсюда следует, что числа $a^2$ и $b^2$ дают одинаковые остатки при делении на $a - b$. (поскольку мы знаем, что $x$ сравимо с $y$ по модулю $N$ тогда и только тогда, когда $x - y$ делится на $N$)

## Номер 3

**(1)**

Предположим, что $a + b$ делится на $c$.

Число $b$ можно представить как $b = (a + b) - a$. При этом по условию $a$ делится на $c$, $b$ **не** делится на $c$. По предположению $a + b$ делится на $c$. Слева от знака равенства у нас число не делится на $c$, а справа – разность чисел, делящихся на $c$. Мы получили противоречие $\rightarrow$ $a + b$ **не** делится на $c$.

**Ответ:** да

**(2)**

Можно привести контрпример:

$$a = 4, b = 5, c = 3$$

4 не делится на 3, 5 не делится на 3, при этом $4 + 5 = 9$ делится на 3.

**Ответ:** нет

**(3)**

Можно привести контрпример:

$$a = 2, b = 3, c = 6$$

2 не делится на 6, 3 не делится на 6, при этом $2 \cdot 3 = 6$ делится на 6.

**Ответ:** нет

**(4)**

Поскольку $a$ делится на $b$ и $b$ делится на $c$, то и $a$ делится на $c$. Ну а отсюда следует, что $a \cdot b$ делится на $c^2$.

**Ответ:** да

## Номер 4

- Когда $x + 10y$ делится на 13:

  Домножим на 4:
  $$4x + 40y = (4x + y) + 39y$$
  $39y$ делится на 13, а значит и $(4x + y)$ делится на 13.

- Когда $y + 4x$ делится на 13:

  Домножим на 4:
  $$10y + 40x = 39x + (x + 10y)$$
  $39x$ делится на 13, а значит и $x + 10y$ делится на 13.

## Номер 5

$$53x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 42)$$

$$53x = 42 \cdot q + 1$$

$$53x - 42 \cdot q = 1$$

Сделаем замену, чтобы привести к удобному виду:

$$y = -q$$

$$53x + 42y = 1$$

По расширенному алгоритму Евклида посмотрим:

$$\text{НОД}(53, 42) = \text{НОД}(11, 42) = \text{НОД}(11, 9) = \text{НОД}(2, 9) = \text{НОД}(2, 1) = 1$$

Найдем x:

$$1 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2 \cdot 0 + (9 - 2 \cdot 4) \cdot 1 = 9 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 9 \cdot 1 - (11 - 9) \cdot 4 =$$

$$= 5{\cdot}9 - 11{\cdot}4 = 5{\cdot}(42 - 11{\cdot}3) - 11{\cdot}4 = 5{\cdot}42 - 19{\cdot}11 = 5{\cdot}42 - 19{\cdot}(53 - 42) = 24{\cdot}42 - 19{\cdot}53$$

Т.е:

$$x = -19$$

$$y = 24$$

**Ответ:** $x = -19$

## Номер 6

Чтобы доказать несократимость дроби, нужно показать, что НОД равен 1, тогда:

$$\text{НОД}(n^2 - n + 1, n^2 + 1) = \text{НОД}(n^2 - n + 1, n) = \text{НОД}(n^2 + 1, n)$$

Поскольку у нас n – положительное целое, то мы можем из $n^2+1$ вычесть $n$ $k$ раз, где $k$ будет равно $n$, т.е:

$$\text{НОД}(n^2 + 1, n) = \text{НОД}(1, n) = 1$$

## Номер 7

Пусть наше число это x. Оно состоит из 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек. Его сумма цифр равна 300 ($0 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 = 300$). А значит x делится на 3 (по признаку делимости на 3) и не делится на 9 (по признаку делимости на 9). Предположим, что $x$ – это точный квадрат какого-то числа $y$. Тогда $x = y^2$. При этом $x$ делится на 3, запишем его в виде $x = 3 \cdot q$, где $q$ – какое-то целое число. Тогда $y^2 = 3 \cdot q$. Отсюда следует, что $y$ делится на 3. Т.е $y = 3 \cdot r$, где $r$ – какое-то целое число. Тогда $x = y^2 = (3 \cdot r)^2 = 9 \cdot r^2$, т.е $x$ делится на 9, что является противоречием $\rightarrow x$ **не** является точным квадратом

**Ответ:** нет, не может

## Номер 8

Число N такое, что сумма цифр чисел N и N+1 делится на 7.

Если наше число N не заканчивается на 9, то в N + 1 сумма цифр просто увеличится на 1 и мы не сможем получить искомый случай (будет 2 суммы цифр, которые различаются на 1). Значит N оканчивается на какое-то количество девяток (пусть их k). Когда мы рассматриваем число N+1, девятка превращается в ноль (сумма цифр уменьшается на 9) и предыдущая цифра увеличивается на 1 (сумма цифр увеличивается на 1). Если у нас k девяток, то сумма цифр уменьшится соотвественно на $k \cdot 9 - 1$. Пусть сумма цифр была x и делилась на 7 (чтобы подходило условию задачи). Тогда $x - (k \cdot 9 - 1)$ тоже делится на 7, т.е $k \cdot 9 - 1$ делится на 7. Найдем наименьшее k, когда это возможно:

$$k = 1; 9 - 1 = 8$$

$$k = 2; 18 - 1 = 17$$

$$k = 3; 27 - 1 = 26$$

$$k = 4; 36 - 1 = 35$$

35 делится на 7 $\rightarrow$ при k = 4 возможен такой случай.

Чтобы число было наименьшим, перед 4мя девятками должна стоять одна цифра (пусть а). Число имеет вид $\overline{a9999}$. Найдем наименьшее а, при котором сумма цифр будет делится на 7. Т.е $36 + a$ должно делится на 7. Это возможно при a = 6. ($36 + 6 = 42$ делится на 7). Тогда искомое число – 69999

**Ответ:** 69999