~~Матан~~ ТВиМС, дз – 1

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

14 сентября 2021 г.

2. [С помощью условной вероятности]

a) Еще хотя бы один туз

Сразу посчитаем важные для решения переменные:

- Ровно 1 туз в руке (6 карт):

$$C_{32}^5 \cdot C_4^1$$

(С из 32 по 5 выбрать не тузовые карты и С из 4 по 1 выбрать 1 туз)

- Ровно 2 туза в руке:

$$C_{32}^4 \cdot C_4^2$$

- Ровно 3 туза в руке:

$$C_{32}^3 \cdot C_4^3$$

- Ровно 4 туза в руке:

$$C_{32}^2 \cdot C_4^4$$

- 0 тузов в руке:

$$C_{32}^6$$

- Общее число вариантов выбрать руку:

$$C_{36}^6$$

Т.к нужно решить через условную вероятность, то задать искомую вероятность можно так :

P(есть **еще** хотя бы 1 туз, при условии, что есть хотя бы 1 туз)

Тогда введем события:

A – есть **еще** хотя бы один туз
B – есть хотя бы один туз

Ответом будет:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Теперь считаем:

$A \cap B$ – есть хотя бы 2 туза

$$P(A \cap B) = \frac{C_{32}^4 \cdot C_4^2 + C_{32}^3 \cdot C_4^3 + C_{32}^2 \cdot C_4^4}{C_{36}^6} = \frac{215760 + 19840 + 496}{1947792} = \frac{236096}{1947792}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{нет тузов}) = 1 - \frac{C_{32}^6}{C_{36}^6} = 1 - \frac{906192}{1947792} = \frac{100}{187}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{236096}{1947792}}{\frac{100}{187}} = \frac{17}{75}$$

Ответ: $\frac{17}{75}$

b) Еще хотя бы один туз, при условии туз пик

Делаем все аналогично пункту a)

Ищем вероятности для решения:

- Ровно 1 туз пик:
$$\frac{C_{32}^5 \cdot C_4^1}{4}$$
- 2 туза и есть туз пик:
$$\frac{2 \cdot C_{32}^4 \cdot C_4^2}{4}$$
- 3 туза и есть туз пик:
$$\frac{3 \cdot C_{32}^3 \cdot C_4^3}{4}$$
- 4 туза (аналогично пункту **a**)

Ищем :

P(есть еще хотя бы один туз, при условии, что есть хотя бы 1 туз пик)

События:

$$A \text{ – есть еще хотя бы один туз}$$
$$B \text{ – есть хотя бы 1 туз пик}$$
$$A \cap B \text{ – хотя бы 2 туза, причем хотя бы 1 туз пик}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\frac{2 \cdot C_{32}^4 \cdot C_4^2}{4} + \frac{3 \cdot C_{32}^3 \cdot C_4^3}{4} + \frac{C_{32}^2 \cdot C_4^4}{1}}{C_{36}^6}$$

$$P(B) = \frac{\frac{2 \cdot C_{32}^4 \cdot C_4^2}{4} + \frac{3 \cdot C_{32}^3 \cdot C_4^3}{4} + \frac{C_{32}^2 \cdot C_4^4}{1} + \frac{C_{32}^5 \cdot C_4^1}{4}}{C_{36}^6}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2 \cdot C_{32}^4 \cdot C_4^2}{4} + \frac{3 \cdot C_{32}^3 \cdot C_4^3}{4} + \frac{4 \cdot C_{32}^2 \cdot C_4^4}{4}}{\frac{2 \cdot C_{32}^4 \cdot C_4^2}{4} + \frac{3 \cdot C_{32}^3 \cdot C_4^3}{4} + \frac{4 \cdot C_{32}^2 \cdot C_4^4}{4} + \frac{C_{32}^5 \cdot C_4^1}{4}} =$$

$$= \frac{2 \cdot C_{32}^4 \cdot C_4^2 + 3 \cdot C_{32}^3 \cdot C_4^3 + 4 \cdot C_{32}^2 \cdot C_4^4}{2 \cdot C_{32}^4 \cdot C_4^2 + 3 \cdot C_{32}^3 \cdot C_4^3 + 4 \cdot C_{32}^2 \cdot C_4^4 + C_{32}^5 \cdot C_4^1} = \frac{431520 + 59520 + 1984}{493024 + 805504} = \frac{493024}{1298528} =$$

$$= \frac{71}{187}$$

Ответ: $\frac{71}{187}$

5.

a) Неразличимые шары

Общее число исходов (по методу шаров и перегородок):

$$C_{n+k-1}^{n-1}$$

Нам нужно, чтобы во всех коробках было хотя бы по одному шару, разложим в каждую из n коробок по 1 шару, у нас останется $k-n$ шаров, их раскладываем уже произвольно (тем же методом, что и выше):

Тогда наше событие:

$$P(\text{нет пустых ящиков}) = \frac{C_{k-n+n-1}^{n-1}}{C_{n+k-1}^{n-1}} = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{n+k-1}^{n-1}}$$

Ответ: $\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{n+k-1}^{n-1}}$

b) Различимые шары

Общее число исходов:

$$n^k$$

Наше событие:

$$P(\text{нет пустых ящиков}) = 1 - P(\text{есть пустой ящик})$$

Найдем вероятность наличия хотя бы одного пустого ящика, пусть i-й ящик – пустой. Тогда нам нужно будет (как угодно) разложить k шаров по $n-1$ ящику. Тогда вероятность наличия хотя бы одного пустого ящика будет определяться объединением события выше по всем i от 1 до n. Назовем такое событие A, т.е:

$$A_i = \{\text{i-й ящик пустой}\}$$

$$P(\text{есть пустой ящик}) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = P\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} C_n^m \cdot \frac{(n-m)^k}{n^k}$$

Ответ: $\sum\limits_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} C_n^m \cdot \frac{(n-m)^k}{n^k}$

9.

[Похожа на задачу 5]

a) Неразличимые шары

Общее число исходов:

$$C_{n+k-1}^{n-1}$$

Теперь кладем в j-й ящик k_j шаров. У нас остается $k-k_j$ шаров и $n-1$ ящиков, т.е:

$$C_{(n-1)+(k-k_j)-1}^{(n-1)-1} = C_{n+k-k_j-2}^{n-2}$$

Тогда наше событие:

$$P = \frac{C_{n+k-k_j-2}^{n-2}}{C_{n+k-1}^{n-1}}$$

Ответ: $P = \frac{C_{n+k-k_j-2}^{n-2}}{C_{n+k-1}^{n-1}}$

b) Различимые шары

Общее число исходов:

$$n^k$$

Кладем в j-й ящик k_j шаров, т.к шары различимы, это можно сделать $C_k^{k_j}$ (выбор k_j шаров из k шаров) способами. У нас остается $n-1$ ящиков и $k-k_j$ шаров. Остальные шары раскладываем как хотим, на это уйдет $(n-1)^{k-k_j}$ способов.

По итогу:

$$P = \frac{C_k^{k_j}(n-1)^{k-k_j}}{n^k}$$

Ответ: $P = \frac{C_k^{k_j}(n-1)^{k-k_j}}{n^k}$