Линал.
Задание 3
Вариант 2.

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

11 февраля 2021 г.

Номер 1

Посчитаем для начала ранг матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ -23 & -12 & -3 & 16 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -36 & -85 & -17 & 29 \\ 4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ -23 & -12 & -3 & 16 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -36 & -85 & -17 & 29 \\ 0 & -11 & -26 & -6 & 9 \\ -23 & -12 & -3 & 16 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -36 & -85 & -17 & 29 \\ 0 & -11 & -26 & -6 & 9 \\ 0 & 57 & 135 & 39 & -48 \\ -3 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -36 & -85 & -17 & 29 \\ 0 & -11 & -26 & -6 & 9 \\ 0 & 57 & 135 & 39 & -48 \\ 0 & 8 & 19 & 7 & -7 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & -26 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 8 & 19 & 7 & -7 \\ 0 & -36 & -85 & -17 & 29 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -116 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 8 & 19 & 7 & -7 \\ 0 & -36 & -85 & -17 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -116 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 87 & -15 \\ 0 & -36 & -85 & -17 & 29 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -116 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 87 & -15 \\ 0 & 0 & -13 & -377 & 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -29 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 87 & -15 \\ 0 & 0 & -13 & -377 & 65 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -29 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -377 & 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -29 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -29 & 5 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что $\operatorname{rk} A = 3$, т.к у нас всего 3 ведущих элемента.

Приводим к улучшенному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 31 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -29 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 31 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -68 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 29 & -5\end{pmatrix}$$

Представим в виде суммы трех матриц ранга 1:

$$A_1 = \begin{pmatrix}14 & 0 & 0 & 14 \cdot 31 & 14 \cdot (-5) \\ 4 & 0 & 0 & 4 \cdot 31 & 4 \cdot (-5) \\ -23 & 0 & 0 & -23 \cdot 31 & -23 \cdot (-5) \\ -3 & 0 & 0 & -3 \cdot 31 & -3 \cdot (-5) \\ 1 & 0 & 0 & 1 \cdot 31 & 1 \cdot (-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 0 & 0 & 434 & -70 \\ 4 & 0 & 0 & 124 & -20 \\ -23 & 0 & 0 & -713 & 115 \\ -3 & 0 & 0 & -93 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 31 & -5\end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}0 & 6 & 0 & 6 \cdot (-68) & 6 \cdot (11) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \cdot (-68) & 1 \cdot (11) \\ 0 & -12 & 0 & -12 \cdot (-68) & -12 \cdot (11) \\ 0 & -1 & 0 & -1 \cdot (-68) & -1 \cdot (11) \\ 0 & 3 & 0 & 3 \cdot (-68) & 3 \cdot (11)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 6 & 0 & -408 & 66 \\ 0 & 1 & 0 & -68 & 11 \\ 0 & -12 & 0 & 816 & -132 \\ 0 & -1 & 0 & 68 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & -204 & 33\end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & -1 \cdot 29 & -1 \cdot (-5) \\ 0 & 0 & -2 & -2 \cdot 29 & -2 \cdot (-5) \\ 0 & 0 & -3 & -3 \cdot 29 & -3 \cdot (-5) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \cdot 29 & 1 \cdot (-5) \\ 0 & 0 & 6 & 6 \cdot 29 & 6 \cdot (-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & -29 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -58 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -87 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 29 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 174 & -30\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix}14 & 0 & 0 & 434 & -70 \\ 4 & 0 & 0 & 124 & -20 \\ -23 & 0 & 0 & -713 & 115 \\ -3 & 0 & 0 & -93 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 31 & -5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 6 & 0 & -408 & 66 \\ 0 & 1 & 0 & -68 & 11 \\ 0 & -12 & 0 & 816 & -132 \\ 0 & -1 & 0 & 68 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & -204 & 33\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 6 & 0 & 26 & -4 \\ 4 & 1 & 0 & 56 & -9 \\ -23 & -12 & 0 & 103 & -17 \\ -3 & -1 & 0 & -25 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -173 & 28\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}14 & 6 & 0 & 26 & -4 \\ 4 & 1 & 0 & 56 & -9 \\ -23 & -12 & 0 & 103 & -17 \\ -3 & -1 & 0 & -25 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -173 & 28\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & -29 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -58 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -87 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 29 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 174 & -30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 6 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ -23 & -12 & -3 & 16 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Получили исходную матрицу A

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 434 & -70 \\ 4 & 0 & 0 & 124 & -20 \\ -23 & 0 & 0 & -713 & 115 \\ -3 & 0 & 0 & -93 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 31 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -408 & 66 \\ 0 & 1 & 0 & -68 & 11 \\ 0 & -12 & 0 & 816 & -132 \\ 0 & -1 & 0 & 68 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & -204 & 33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -29 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -58 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -87 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 29 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 174 & -30 \end{pmatrix}$$

Номер 2

- Проверим принадлежность v_1 к U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & -11 \\ -2 & -11 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -8 & 5 & -7 & -1 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & -11 \\ -2 & -11 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & -9 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ -2 & -11 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & -9 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & -15 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & -9 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & -9 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что v_1 **не** принадлежит U.

- Проверим принадлежность v_2 к U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & -2 \\ -2 & -11 & 0 & -2 & 9 \\ -1 & -8 & 5 & -7 & 7 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & -2 \\ -2 & -11 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ -2 & -11 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & 5 \\ -1 & -3 & -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из 3й строчки видно, что ОСЛУ будет совместна и $v_2 \in U$.

P.S Я не стал писать через вертикальную черту, а просто поменял знаки у векторов v_1 и v_2 в матрице (перенес их налево, если рассматривать ОСЛУ)

- Дополним вектор v_2 до базиса всего подпространства U:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -9 & -2 & -11 & 0 & -2 \\ -7 & -1 & -8 & 5 & -7 \\ -2 & -1 & -3 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 & -5 & 5 \\ -7 & -1 & -8 & 5 & -7 \\ -2 & -1 & -3 & -5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 & -5 & 5 \\ -7 & -1 & -8 & 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 & -5 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 20 & -22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -45 & 49 \\ -1 & 2 & 1 & 20 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 20 & -22 \\ 0 & -5 & -5 & -45 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

  А значит базис составляют векторы v_2, u_2 и u_4

Ответ:

v_2 лежит в U

Базис составляют векторы v_2, u_2, u_4

Номер 3

Запишем векторы в строки матрицы А и найдем ФСР $AX = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & 10 \\ -3 & 2 & 2 & -13 \\ 1 & 2 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -3 \\ -3 & 2 & 2 & -13 \\ 1 & 2 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -3 \\ -3 & 2 & 2 & -13 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда ответом является однородная система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Номер 4

- Запишем векторы в столбцы и найдем базис и размерность L_1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 16 & 19 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ -5 & -1 & -13 & -7 \\ -3 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 & 15 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ -5 & -1 & -13 & -7 \\ -3 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 & 15 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -12 & -13 \\ -3 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 & 15 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 & 15 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -4 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -4 & 8 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

А значит базисными являются векторы a_1 и a_2, $\dim L_1 = 2$

- Запишем векторы в столбцы и найдем базис и размерность L_2:

$$\begin{pmatrix} 9 & -17 & -22 & -4 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ -9 & 11 & 19 & 1 \\ -2 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -17 & -22 & -4 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ -9 & 11 & 19 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ -9 & 11 & 19 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 14 & 7 & 7 \\ -1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 14 & 7 & 7 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 14 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 14 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

А значит базисными являются векторы b_1 и b_2, $\dim L_2 = 2$

- Найдем базис и размерность $U = L_1 + L_2$, для этого запишем векторы из L_1 и L_2 в одну матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 16 & 19 & 9 & -17 & -22 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & -1 & -13 & -7 & -9 & 11 & 19 & 1 \\ -3 & -4 & -1 & 6 & -2 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 16 & 19 & 9 & -17 & -22 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & -1 & -13 & -7 & -9 & 11 & 19 & 1 \\ -1 & -9 & 15 & 25 & 7 & -11 & -16 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 16 & 19 & 9 & -17 & -22 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & -1 & -13 & -7 & -9 & 11 & 19 & 1 \\ 0 & -9 & 18 & 27 & 9 & -15 & -21 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 & 15 & 5 & -9 & -12 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & -1 & -13 & -7 & -9 & 11 & 19 & 1 \\ 0 & -9 & 18 & 27 & 9 & -15 & -21 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 & 15 & 5 & -9 & -12 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & -9 & 18 & 27 & 9 & -15 & -21 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 15 & 5 & -9 & -12 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & -9 & 18 & 27 & 9 & -15 & -21 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 18 & 18 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & -9 & 18 & 27 & 9 & -15 & -21 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 18 & 18 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 33 & 33 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 66 & 33 & 33 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 & 9 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

А значит базис составляют векторы a_1, a_2 и b_2, $\dim U = 3$

- Размерность $W = L_1 \cap L_2$ будет равна 2 + 2 - 3 = 1. Тогда посчитаем базис W:

  1. Найдем ФСР L_1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & -3 \\ -5 & 0 & -1 & -4 \\ 16 & -3 & -13 & -1 \\ 19 & -2 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & -3 \\ -5 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -16 & -13 \\ 19 & -2 & -7 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 27 & 23 \\ -5 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -16 & -13 \\ 19 & -2 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 27 & 23 \\ 0 & -15 & -81 & -69 \\ 1 & -3 & -16 & -13 \\ 19 & -2 & -7 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 27 & 23 \\ 0 & -15 & -81 & -69 \\ 1 & -3 & -16 & -13 \\ 0 & 55 & 297 & 253 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -16 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 27 & 23 \\ 0 & 55 & 297 & 253 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -16 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 27 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -16 & -13 \\ 0 & 5 & 27 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -16 & -13 \\ 0 & 1 & \frac{27}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{27}{5} & \frac{23}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 \\ x_2 = -\frac{27}{5}x_3 - \frac{23}{5}x_4 \end{cases}$$

Отсюда получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ -4 & -23 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Найдем ФСР L_2:

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & -9 & -2 \\ -17 & 4 & 11 & 6 \\ -22 & 5 & 19 & 6 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -9 & -2 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \\ -22 & 5 & 19 & 6 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 54 & -20 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \\ -22 & 5 & 19 & 6 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 54 & -20 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \\ -2 & 0 & 14 & -4 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 54 & -20 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 54 & -20 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -27 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & -2 & 54 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -27 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & -2 & 54 & -20 \\ 0 & 1 & -27 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -27 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -27 & 10 \end{pmatrix}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 27x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} 7 & 27 & 1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Размерность по формуле будет равна $2 + 2 = 3 + \dim W$, $\dim W = 1$. Теперь найдем базис пересечения, объединив ФСР L_1 и L_2 в одну систему (ну и запишем в виде матрицы соотвественно):

$$\begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ -4 & -23 & 0 & 5 \\ 7 & 27 & 1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 85 & -20 & 5 \\ 7 & 27 & 1 & 0 \\ -2 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 85 & -20 & 5 \\ 0 & -162 & 36 & 0 \\ -2 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 85 & -20 & 5 \\ 0 & -162 & 36 & 0 \\ 0 & 44 & -10 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 85 & -20 & 5 \\ 0 & 14 & -4 & 4 \\ 0 & 44 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 14 & -4 & 4 \\ 0 & 44 & -10 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & -60 & 270 \\ 0 & 44 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & -60 & 270 \\ 0 & 0 & -186 & 837 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & -60 & 270 \\ 0 & 0 & -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 27 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -27 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 113 & -513 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & -6 & 27 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 27 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{9}{2}x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{9}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

Получается следующий вектор:

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 1 & \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim W = 1$$

Ответ:

- Базис L_1: $a_1,\ a_2$
- Базис L_2: $b_1,\ b_2$
- Базис U: $a_1,\ a_2,\ b_2$
- Размерности:

$$\dim L_1 = 2, \dim L_2 = 2, \dim U = 3, \dim W = 1$$