ТВиМС, дз – какое-то

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

8 марта 2022 г.

Номер 1

У X распределение $\mathrm{Exp}(q)$. Для начала посмотрим на хар.функцию для самой X:

$$\varphi_X(a) = \frac{q}{q - ia}$$

Теперь смотрим на хар.функцию для $X \cdot q$:

$$\varphi_{X \cdot q}(t) = \varphi_X(tg) \cdot e^{it0} = \varphi_X(tg) = \frac{q}{q - itg} = \frac{1}{1 - it} = \mathrm{Exp}(1)$$

Номер 5 [листок 2]

b)

$$(\mathrm{Im}\varphi(t))^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Re}\varphi(2t)\right) \ ?$$

Проверяем:

$$\left(\mathrm{Im}\left(\mathbb{E}\cos(Xt) + i\mathbb{E}\sin(Xt)\right)\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Re}\left(\mathbb{E}\cos(2Xt) + i\mathbb{E}\sin(2Xt)\right)\right)$$

$$\left(\mathbb{E}\sin(Xt)\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \mathbb{E}\cos(2Xt)\right)$$

$$\left(\mathbb{E}\sin(Xt)\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \mathbb{E}\cos(1 - 2\sin^2(Xt))\right) \leq \frac{1}{2}E\sin^2(Xt)$$

$$\left(\mathbb{E}\sin(Xt)\right)^2 \leq \frac{1}{2}E\sin^2(Xt)$$

Ну а это верно как свойство математического ожидания

Ч.Т.Д

c)

$$(\mathrm{Re}\varphi(t))^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{Re}\varphi(2t)\right) \ ?$$

Проверяем:

$$\mathbb{E}^2\cos(Xt) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \mathbb{E}\cos(2Xt)\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(2\cos^2(Xt) - 1\right) \leq E\left(\cos^2(Xt)\right)$$

Ну а это верно как свойство математического ожидания

Ч.Т.Д

Номер 8 [листок 3]

Задача 8 (ДЗ). Игральную кость независимо подбросили 12000 раз. Оцените вероятность того, что шестерок будет не менее 1800, но не более 2100.

Представим наше подбрасывание (взял под копирку с семинара 2010):

$$I_6 - - \text{ индикатор того, что выпало 6}$$

$$X = \sum_{i=1}^{12000} I_6$$

$$\mathbb{E}I_6 = P(\text{выпало } 6) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{D}I_6 = \mathbb{E}I_6^2 - (\mathbb{E}I_6)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} = \frac{5}{36}$$

Отсюда

$$\sigma(I_6) = \sqrt{\frac{5}{36}}$$

Ну а по условию задачи мы хотим найти:

$$P\left(1800 \le \sum_{i=1}^{12000} I_6 \le 2100\right)$$

Применяем ЦПТ и получаем:

$$P\left(1800 \le \sum_{i=1}^{12000} I_6 \le 2100\right) = P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{1800} I_6 - \frac{12000}{6}}{\sqrt{12000 \cdot \frac{5}{36}}} \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{12000} I_6 - \frac{12000}{6}}{\sqrt{12000 \cdot \frac{5}{36}}} \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{2100} I_6 - \frac{12000}{6}}{\sqrt{12000 \cdot \frac{5}{36}}}\right) \sim$$

$$\sim \Phi\left(\frac{2100 - \frac{12000}{6}}{\sqrt{12000 \cdot \frac{5}{36}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800 - \frac{12000}{6}}{\sqrt{12000 \cdot \frac{5}{36}}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{\frac{5000}{3}}}\right) + \Phi\left(\frac{200}{\sqrt{\frac{5000}{3}}}\right) = \Phi(\sqrt{6}) + \Phi(2\sqrt{6})$$

Ответ:

$$\Phi(\sqrt{6}) + \Phi(2\sqrt{6})$$

Номер 9 [листок 3]

Задача 9 (ДЗ). Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением $U[0,a]$. Пусть $U_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^3$, $V_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^4$. Найдите предел в смысле сходимости по распределению последовательности случайных величин $\sqrt{n}(\frac{5}{4}\frac{V_n}{U_n} - a)$.

Ну собственно таска аналог 5й с сема. Будем пользоваться теорией с сема:

Предл №1 (лекц 5; предл 3)
$a \in \mathbb{R}$; $h_n \to 0$; $h_n \in \mathbb{R}$ f – непрерывна (? на $\mathbb{R}$? или можно меньше?)
$\exists f'(a)$; $X_n \xrightarrow{d} X$
тогда: $\dfrac{f(a + h_n X_n) - f(a)}{h_n} \to f'(a) X$

! Предл №2 (лекц 4; предл 4)
$X_n \xrightarrow{d} X$; g – непрерывна (? на $\mathbb{R}$? или можно меньше?)
тогда $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

! Предл №3 (лекц 4; предл 5)
$X_n \xrightarrow{P} C = \text{const}^{*}$; $Y_n \xrightarrow{d} Y$
$\Rightarrow$ $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} C \cdot Y$; $X_n + Y_n \xrightarrow{d} C + Y$

* $X_n \xrightarrow{P} C = \text{const} \iff X_n \xrightarrow{d} C = \text{const}$!

Приведем все к общему знаменателю:

$$\sqrt{n}\left(\frac{5}{4}\frac{V_n}{U_n} - a =\right) = \sqrt{n}\left(\frac{5}{4}V_n - U_n \cdot a\right) \cdot \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^3}$$

Заметим:
$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}Y_k = \text{const}$$
Если $Y_1, \ldots Y_n$ независимы, одинаково распределенны и $\mathbb{E}Y_k$ – есть (ЗБЧ). Следовательно (из предл. 2 и предл. 3):

$$\frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^3} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mathbb{E}X_i^3}$$

А отсюда:
$$\sqrt{n}\left(\frac{5}{4}V_n - U_n \cdot a\right) \cdot \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j^3} \xrightarrow{d} \frac{Z}{\mathbb{E}X_i^3}$$

Пусть:

$$W_i = \frac{5}{4}X_i^4 - aX_i^3$$

Ну и:

$$\sum_{j=1}^{n} W_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{5}{4}X_j^4 - aX_j^3\right)$$

Тогда:

$$\sqrt{n}\left(\frac{5}{4}V_n - U_n \cdot a\right) = \frac{W_1 + \ldots + W_n}{\sqrt{n}} = \frac{W_1 + \ldots + W_n - n\mathbb{E}W_i}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\mathbb{E}W_i$$

Заметим, что $\sqrt{n}\mathbb{E}W_i$ либо стремится к нулю, если $\mathbb{E}W_i = 0$, либо к бесконечности, если $\mathbb{E}W_i \neq 0$. А левая штука похожа на ЦПТ. Теперь считаем:

$$\mathbb{E}W_i = \frac{5}{4}\mathbb{E}X_i^4 - a\mathbb{E}X_i^3$$

$$\mathbb{E}X_i^3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot \frac{1}{a} \cdot I_{x\in[0,a]} = \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{a} x^3 = \frac{a^3}{4}$$

$$\mathbb{E}W_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{5}{4}X_i^4 - a \cdot X_i^4\right) \cdot I_{x\in[0,a]}dx = \frac{5}{4} \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_0^a - a \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^a = 0$$

Смотрим:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(W_i) - n \cdot \mathbb{E}W_i}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\mathbb{E}W_i = \sqrt{\mathbb{D}W_i} \cdot \frac{\sum_{i=1^n(W_i) - n\mathbb{E}W_i}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sqrt{\mathbb{D}W_i} \cdot \overline{Z}$$

Ну а:

$$\overline{Z} \sim N(0,1)$$

Тогда найдем:

$$\mathbb{D}W_i = \int\limits_{0}^{a}\left(\frac{5}{4}x^4 - ax^3\right)^2 dx =$$

$$= \frac{25}{16a}\int_0^a x^8 dx - \frac{5}{2}\int_0^a x^7 dx + a\int_0^a x^6 dx = \frac{a^8}{252}$$

Тогда:

$$Z \cdot \frac{4}{a^3} \to N\left(0, \sqrt{\frac{a^8}{256} \cdot \frac{4}{a^3}}\right) = N\left(0, a \cdot \frac{2\sqrt{7}}{21}\right)$$

Ответ:

$$\sqrt{n}\left(\frac{5}{4}\frac{V_n}{U_n}-1\right)\xrightarrow{d}N\left(0,a\cdot\frac{2\sqrt{7}}{21}\right)$$