Матан, дз – 4

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

22 марта 2022 г.

Номер 1

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \text{ где } \ a > 0$$

Ищем прямое преобразование Фурье:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax-ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{x(-a-iy)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-a-iy} \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-x(a+iy)}}{-a-iy} \Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+iy}$$

Теперь обратное:

$$\overset{\vee}{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+iy} e^{ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{(a+iy)} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a+iy)} \cdot \frac{a-iy}{a-iy} \cdot ((\cos(xy) + i\sin(xy))\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a-iy}{a^2+y^2} \cdot ((\cos(xy) + i\sin(xy))\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos(xy) + y\sin(xy)}{a^2+y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i(a\sin(xy) - y\cos(xy))}{a^2+y^2} dy$$

Правый элемент обнуляется в силу нечетности, получаем ответ:

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos(xy) + y\sin(xy)}{a^2+y^2} dy$$

Номер 2

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Ищем:

$$\hat{f}\ (x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot cos(xy)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x(1-y))}{x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x(1+y))}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(1-y) + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(1+y) \right)$$

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(1-y) + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(1+y) \right)$$