Бурмашев Григорий. Дискра – 14

Номер 1

Пусть x – искомое число, тогда (по условию задачи):

$$x \equiv 6 \pmod 7$$

$$x \equiv 7 \pmod 8$$

$$x \equiv 8 \pmod 9$$

Если прибавить к числу 1, то оно будет делиться на 7, на 8 и на 9:

$$x + 1 \equiv 6 + 1 \pmod 7$$

$$x + 1 \equiv 7 + 1 \pmod 8$$

$$x + 1 \equiv 8 + 1 \pmod 9$$

Т.е $x + 1$ делится на $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. А поскольку число трехзначное, то единственный вариант: $x + 1 = 504,\ x = 503$.

Ответ: 503

Номер 2

Пусть:

$$x = 15k + 3$$

$$x = 21q + 4$$

Тогда из первого условия :

$$15k + 3 = 3(5k + 1)$$

А значит x кратен 3.

При этом:

$$15k + 3 = 21q + 4$$

$$15k - 21q = 1$$

$$3(5k - 7q) = 1$$

Т.е x **НЕ** кратен 3. Мы получили противоречие, а значит решений нет

Ответ: нет решений

Номер 3

а)

$$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$$

$$19^{10} \equiv 1^{10} = 1 \pmod 2$$

$$19^{10} \equiv 1^{10} = 1 \pmod 3$$

По малой теореме Ферма:

$$19^{11-1} \equiv 1 \pmod{11}$$

А значит:

$$19^{10} \equiv 1 \pmod{66}$$

Ответ: 1

б)

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2^{2020} \equiv (-1)^{2020} = 1 \pmod 3$$

$$2^{2020} \equiv 16^{505} \equiv 1^{505} = 1 \pmod 5$$

$$2^{2020} \equiv 32^{404} \equiv 4^{404} \equiv 256^{101} \equiv 4^{101} \pmod 7$$

$$4^{\varphi(7)} \equiv 1 \pmod 7$$

$$\varphi(7) = 6$$

$$101 \pmod 6 = 5$$

$$4^{101} \equiv 4^5 = 1024 \pmod 7 = 2$$

Итого:

$$2^{2020} = 1 \pmod 3$$

$$2^{2020} = 1 \pmod 5$$

$$2^{2020} = 2 \pmod 7$$

Число при делении на 15 дает остаток 1, а при делении на 7 дает остаток 2, очевидно, что это 16.

$$2^{2020} \equiv 16 \pmod{105}$$

Ответ: 16

Номер 4

а)

$$8^{8^{8^8}} \text{ на } 13$$

$$8^{\varphi(13)} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$\varphi(13) = 12$$

$$x = 8^{8^8} (\text{mod } 12)$$

$$12 = 4 \cdot 3$$

$$8^{8^8} \equiv 0^{8^8} = 0 \pmod{4}$$

$$8^{8^8} \equiv (-1)^{8^8} = 1 \pmod{3}$$

x кратно четырем и при делении на 3 дает остаток 1, а значит:

$$x \equiv 4 \pmod{12}$$

$$8^{8^{8^8}} \equiv 8^4 \equiv -5^4 \equiv -25^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod{13}$$

Ответ: 1

б)

$$9^{6^{3979}} \text{ на } 19$$

$$9^{\varphi(19)} \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\varphi(19) = 18$$

$$x = 6^{3979} \pmod{18}$$

$$18 = 9 \cdot 2$$

$$6^{3979} \equiv 0^{3979} = 0 \pmod{9}$$

$$6^{3979} \equiv 0^{3979} = 0 \pmod{2}$$

$$x = 6^{3979} \equiv 0^{3979} = 0 \pmod{18}$$

$$9^{6^{3979}} \equiv 9^0 = 1 \pmod{19}$$

Ответ: 1

Номер 5

$$55 = 5 \cdot 11$$

А значит нужно найти все n, при которых число будет делиться и на 5, и на 11, посмотрим по отдельности:

- на 5:

$$n^2 + 3n + 1 \equiv n^2 + 3n - 5n + 1 = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \equiv$$

$$\equiv n - 1 \pmod 5 = 0$$

  А значит нужны такие n, что:

$$n \equiv 1 \pmod 5 \tag{1}$$

- на 11:

$$n^2+3n+1 \equiv n^2+3n-11n+1 = n^2-8n+1 = n^2-8n+16-15 = (n-4)^2-15 \equiv (n-4)^2-4 =$$

$$= (n-4)^2 - 2^2 = (n-6)(n-2) \pmod{11} = 0$$

  А значит нужны такие n, что:

$$n \equiv 6 \pmod{11} \tag{2}$$

$$n \equiv 2 \pmod{11} \tag{3}$$

  По китайской теореме об остатках, найдется всего 2 числа, которые дают такие остатки (при рассмотрении попарно 1 и 2; 1 и 3)

- При рассмотрении остатка 6 при делении на 11:

$$11k + 6$$

$$6, 17, 28, \ldots$$

  Нам подходит 6, т.к $6 \pmod 5 = 1$

- При рассмотрении остатка 2 при делении на 11:

$$11k + 2$$

$$2, 13, 24, 35, 46, 62 \ldots$$

  Нам подходит 46, т.к $46 \pmod 5 = 1$

Ответ: $n \equiv 6 \pmod{55}$ и $n \equiv 46 \pmod{55}$

Номер 6

Нам нужно найти $\varphi(10800)$. Разложим 10800 намножители:

$$10800 = 25 \cdot 27 \cdot 16$$

Воспользуемся мультипликативностью функции Эйлера (это можно сделать, т.к НОД(25, 27, 16) = 1):

$$\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\varphi(27) = \varphi(3^3) = 9 \cdot 2 = 18$$

$$\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3 \cdot 1 = 8$$

$$\varphi(10800) = \varphi(25) \cdot \varphi(27) \cdot \varphi(16) = 20 \cdot 18 \cdot 8 = 2880$$

Ответ: 2880

Номер 7

$$\varphi(x) = \frac{x}{4}$$

$$x = \varphi(x) \cdot 4$$

x точно делится на 4, тогда пусть x = 4q, q точно делится на два:

$$4 \cdot q = \varphi(4q) \cdot 4$$

$$q = \varphi(4q)$$

Пускай $q = 2^m \cdot y$, причем y не делится на два, т.е разложим q через максимальную возможную степень двойки. Тогда:

$$q = \varphi(4q) = 2^m \cdot y = \varphi(4 \cdot 2^m \cdot y) = \varphi(2^{m+2} \cdot y)$$

НОД$(2^m, y) = 1$, т.к y **не** делится на два, значит:

$$\varphi(2^{m+2} \cdot y) = \varphi(2^{m+2}) \cdot \varphi(y)$$

Поскольку 2 – простое число, то можем разложить:

$$\varphi(2^{m+2}) = 2^{m+2-1} \cdot (2-1)$$

$$\varphi(2^{m+2}) \cdot \varphi(y) = 2^{m+1} \cdot \varphi(y)$$

Возвращаемся к $q = 2^m \cdot y$, тогда $\frac{q}{2^m} = y$

$$\frac{2^{m+1} \cdot \varphi(y)}{2^m} = \frac{q}{2^m} = 2\varphi(y) = y$$

$$y = 2\varphi(y)$$

Т.е y – четное число, мы получаем противоречие, а значит решений нет.

Ответ: нет решений

Номер 8

Возьмем:

$$a_0 = 1$$

$$d = (n-1)!$$

Рассмотрим два соседних числа в такой последовательности и покажем, что они взаимно простые:

$$\text{НОД}\ (1+a(n-1)!;\ 1+b(n-1)!) = \text{НОД}\ (1+a(n-1)!;\ 1-1+(a-b)\cdot(n-1)!) =$$

$$= \text{НОД}\ (1+a(n-1)!;\ (a-b)\cdot(n-1)!)$$

Мы видим, что $(a-b)\cdot(n-1)!$ делится на любое число, меньшее $n-1$, а $1+a(n-1)!$ дает остаток 1 при делении на любое число, меньшее $n-1$, значит их НОД будет равен 1 и они являются взаимно простыми, при этом $a_i = a_0 + id$, а значит условие задачи выполено. Мы построили последовательность, в которой числа попарно взаимно просты.