Бурмашев Григорий. 208. ИДЗ – 7
Вариант 2

Номер 1

- Дополните вектор $v = \frac{1}{9}(2, -8, -3, -2)$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$

Будем пользоваться методом ортогонализации Грама – Шмидта. Для этого дополним наш вектор до базиса $\mathbb{R}^4$. Нам подойдут векторы из стандартного базиса:

$$v_2 = (0, 1, 0, 0)$$
$$v_3 = (0, 0, 1, 0)$$
$$v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Очевидно, что такая система векторов будет линейно независимой.

$$v = \left(\frac{2}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}\right)$$

Теперь идем по методу:

$$e_1 = v$$

$$e_2 = v_2 - \frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} \cdot e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{-\frac{8}{9}}{1} \cdot \begin{pmatrix}\frac{2}{9}\\-\frac{8}{9}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{9}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{8}{9} \cdot \begin{pmatrix}\frac{2}{9}\\-\frac{8}{9}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{9}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{16}{81}\\-\frac{64}{81}\\-\frac{8}{27}\\-\frac{16}{81}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{81}\\\frac{17}{81}\\-\frac{8}{27}\\-\frac{16}{81}\end{pmatrix}$$

$$e_3 = v_3 - \frac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} \cdot e_1 - \frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} \cdot e_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot e_1 + \frac{\frac{8}{27}}{\frac{17}{81}} \cdot e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{27}\\-\frac{8}{27}\\-\frac{1}{9}\\-\frac{2}{27}\end{pmatrix} + \frac{24}{17} \cdot \begin{pmatrix}\frac{16}{81}\\\frac{17}{81}\\-\frac{8}{27}\\-\frac{16}{81}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{27}\\-\frac{8}{27}\\\frac{8}{9}\\-\frac{2}{27}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{128}{459}\\\frac{8}{27}\\-\frac{64}{153}\\-\frac{128}{459}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\0\\\frac{8}{17}\\-\frac{6}{17}\end{pmatrix}$$

$$e_4 = v_4 - \frac{(v_4,e_1)}{(e_1,e_1)}\cdot e_1 - \frac{(v_4,e_2)}{(e_2,e_2)}\cdot e_2 - \frac{(v_4,e_3)}{(e_3,e_3)}\cdot e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{9}\cdot e_1 + \frac{\frac{16}{81}}{\frac{17}{81}} e_2 + \frac{\frac{6}{17}}{\frac{8}{17}}\cdot e_3 =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{4}{81}\\-\frac{16}{81}\\-\frac{2}{27}\\-\frac{4}{81}\end{pmatrix} + \frac{16}{17}\cdot\begin{pmatrix}\frac{16}{81}\\\frac{17}{81}\\-\frac{8}{27}\\-\frac{16}{81}\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\0\\\frac{8}{17}\\-\frac{6}{17}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{81}\\-\frac{16}{81}\\-\frac{2}{27}\\\frac{77}{81}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{256}{1377}\\\frac{16}{81}\\-\frac{128}{459}\\-\frac{256}{1377}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{9}{34}\\0\\\frac{6}{17}\\-\frac{9}{34}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Получили векторы e_1, e_2, e_3, e_4. Теперь ортонормируем их:

$$f_1 = \frac{e_1}{|e_1|} = \begin{pmatrix}\frac{2}{9}\\-\frac{8}{9}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{e_2}{|e_2|} = \frac{9}{\sqrt{17}}\cdot e_2 = \begin{pmatrix}\frac{16}{9\sqrt{17}}\\\frac{\sqrt{17}}{9}\\-\frac{8}{3\sqrt{17}}\\-\frac{16}{9\sqrt{17}}\end{pmatrix}$$

$$f_3 = \frac{e_3}{|e_3|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{17}}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\0\\\frac{8}{17}\\-\frac{6}{17}\end{pmatrix}$$

$$f_4 = \frac{e_4}{|e_4|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Ответ: дополнили векторами f_2, f_3, f_4

Номер 2

- Подпространство U евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ задано системой уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Для вектора $v = (0, 1, -1, -2)$ найдите его проекцию на U, его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

Находим базис U:

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 & 5 \\ 2 & -7 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда ФСР имеет вид:

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(f_1, f_2) = 0$. Тогда:

$$\mathrm{pr}_u v = \frac{(v, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 + \frac{(v, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = \frac{0}{3} f_1 + \frac{-3}{3} f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Из формулы $v = \mathrm{pr}_u v + \mathrm{ort}_u v$ получаем:

$$\mathrm{ort}_u v = v - \mathrm{pr}_u v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь находим расстояние:

$$p(v, u) = |\mathrm{ort}_u v| = \sqrt{3}$$

Ответ:

$$\mathrm{pr}_u v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ort}_u v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$p(v, u) = \sqrt{3}$$

Номер 3

- Составьте уравнение прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости $x - y - 5z = 3$, проходящей через точку $(8, -6, 2)$ и пересекающей прямую $x = 3t, y = -4t + 5, z = 2t - 3$

Введем названия для удобства:

$$l \text{ – искомая прямая}$$

$$l_0 \text{ – прямая, которую пересекает } l$$

$$\alpha \text{ – плоскость}$$

$$M \text{ – точка } (8, -6, 2)$$

Нормаль плоскости α будет : $(1, -1, -5)$

Составим нашу прямую, которая проходит через точку M:

$$l = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

По условию $l \,||\, \alpha$, следовательно $(l, (1, -1, -5)) = 0$, т.е:

$$x - y - 5z = 0$$

$$x = y + 5z$$

Тогда можем найти коэффы для прямой:

$$l = \begin{pmatrix} y + 5z \\ y \\ z \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Прямая пересекает прямую l_0, приравняем их координаты:

$$\begin{cases} yp + 5zp + 8 = 3t \\ yp - 6 = -4t + 5 \\ zp + 2 = 2t - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yp + 5zp + 8 = 3t \\ yp = -4t + 11 \\ zp = 2t - 5 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} t = 2 \\ yp = 3 \\ zp = -1 \\ xp = yp + 5zp = 3 - 5 = -2 \end{cases}$$

Тогда получаем, что:

$$l = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

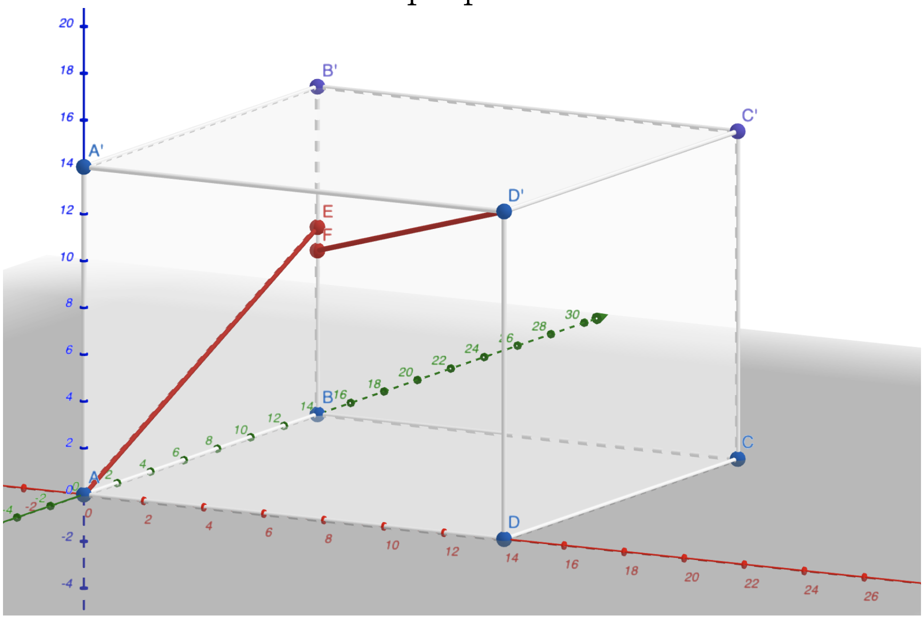
Ответ:

$$l = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Номер 4

- Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 14. Точка F – середина ребра BB', а точка E лежит на ребре BB', причём $BE : EB' = 4 : 3$. Найдите угол и расстояние между прямой AE и $D'F$

График:



Условие:

$AB = 14, BE : EB' = 4 : 3$

Пусть A – начало координат, AD задает ось x, AB задает ось y, AA' задает ось z.

Тогда координаты точек:

$$A(0,0,0),\ \ B'(0,14,14),\ \ D'(14,0,14),\ \ F(0,14,7),\ \ E(0,14,8)$$

Тогда:

$$\overrightarrow{AE} = (0, 14, 8)$$

$$\overrightarrow{D'F} = (-14, 14, -7)$$

$$\overrightarrow{EF} = (0, 0, -1)$$

Теперь считаем угол (по формуле с лекций):

$$\cos\phi = \frac{|(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{D'F})|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{D'F}|} = \frac{140}{\sqrt{260}\cdot\sqrt{441}} = \frac{2\sqrt{65}}{39}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{2\sqrt{65}}{39}\right)$$

Считаем расстояние (также по ст.формуле):

$$p(AE, D'F) = \frac{|\,(AE, D'F, EF)\,|}{|\,[AE, D'F]\,|} = \frac{|\,([AE, D'F]\,, EF)\,|}{|\,[AE, D'F]\,|}$$

Отдельно посчитаем:

$$[AE, D'F] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 14 & 8 \\ -14 & 14 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 14 & -7 \end{vmatrix} - e_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -14 & -7 \end{vmatrix} + e_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 14 \\ -14 & 14 \end{vmatrix} = -210 \cdot e_1 - 112 \cdot e_2 \cdot + 196 \cdot e_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} -210 \\ -112 \\ 196 \end{pmatrix}$$

$$|[AE, D'F]| = 14\sqrt{485}$$

$$|\,([AE, D'F]\,, EF)\,| = -196$$

Возвращаемся к расстоянию:

$$p(AE, D'F) = -\frac{196}{14\sqrt{485}} = -\frac{14}{\sqrt{485}}$$

Ответ:

$$\angle = \arccos\left(\frac{2\sqrt{65}}{39}\right)$$

$$p(AE, D'F) = -\frac{14}{\sqrt{485}}$$