Вычислимость и сложность. Дз – 1. Вариант – 1

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

11 марта 2022 г.

Номер 1

$$K = \{a, b\}$$

Строим элементарную формальную систему, описание предикатов ниже

$$Q_{(aa,b)}$$

$$Q_{(ab,a)}$$

$$Q_{(ba,a)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(y,x)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(xb,yaa)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(xb,aay)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(bx,yaa)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(bx,aay)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(xba,ya)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(xba,ay)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(bax,ya)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(xab,ya)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(xba,ya)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(bax,ay)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(abx,ya)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(abx,ay)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(axb,ay)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(axb,ya)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(axa,yb)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(axa,by)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(bxa,ay)}$$

$$Q_{(x,y)} \to Q_{(bxa,ya)}$$

$$Q_{(x,y)} \to P_{xy}$$

P - одноместный предикатный символ, который представляет само искомое множество W (такие слова, что a в два раза больше, чем b)
Q - двуместный предикатный символ, который отвечает за такие пары (x, y), где слова x, y состоят из символов a, b, а если просуммировать количество a и b в обоих элементах кортежа, то получится, что символов a в два раза больше, чем символов b

Номер 2

Хотим:

> Функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется *вычислимой (по Смаллиану)*, если её график $\{(n_1, \ldots, n_k, m) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(n_1, \ldots, n_k) = m\}$ перечислим.

Распишем нашу функцию с помощью известных нам базовых перечислимых отношений. Можем заметить, что если x – четный, то 2 будет являться делителем x (очевидный факт). Тогда можем представить нашу функцию как:

$$y = (y = (x + 1) \wedge 2 \mid x) \vee (y = (x - 1) \wedge 2 \nmid x)$$

Что расшифровывается как: y равно $x + 1$, если x делится на 2, или $y = x - 1$, в случае если x **не** делится на 2. Теперь вспоминаем, что на семинаре номер 2, в задаче номер 3, пункт (в) мы доказали разрешимость:

$$x + y = z$$

Отсюда получаем разрешимость $y = (x + 1)$ и $y = (x - 1)$. А на семинаре номер 2, в задаче номер 6 мы доказали перечислимость:

$$x \mid y$$

Отсюда получаем перечислимость $2 \mid x$ и $2 \nmid x$. На семинаре номер 2, в задаче номер 4 мы доказали перечислимость обьединений и пересечений. Мы смогли расписать через перечислимые отношения, а значит график нашей функции перечислим, а отсюда и сама функция вычислима по Смаллиану

Ч.Т.Д

Номер 3

3. Рассмотрим неразрешимое множество $A \subset \mathbb{N}$. Верно ли, что хотя бы одно из множеств $\{x \in A \mid x \text{ чётное}\}$ или $\{x \in A \mid x \text{ нечётное}\}$ не является разрешимым? Ответ обоснуйте.

Решим от обратного, предположим, что оба множества разрешимы. Тогда посмотрим на их объединение. Во первых вспомним, что объединение двух разрешимых множеств есть разрешимое множество (доказывали на лекции), а во вторых заметим, что объединение этих множеств образует само множество A (потому что мы смотрим все x, которые лежат в A, как чётные, так и нечётные, ну а других чисел у нас просто нет). Но тогда мы приходим к противоречию, ведь по условию задачи множество A является неразрешимым, а отсюда из противоречия получаем, что хотя бы одно из двух множеств является неразрешимым, т.е **не** является разрешимым

Ответ: да, верно