Бурмашев Григорий. 208. Матан – 13(?)

Номер 9

a)

$$f(x,y) = x^2 \ln\left(x^2+y^2\right)$$

Расписываем через полярные координаты:

$$r^2 \cdot \cos^2\phi \cdot \ln(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi) = r^2\cos^2\phi \cdot \ln(r^2) = r^2\cos^2\phi \cdot 2\ln(r)$$

Теперь смотрим на предел ($\cos^2$ ограничен очев):

$$\lim_{r\to 0} r^2\cos^2\phi \cdot 2\ln r = 2\lim_{r\to 0}\left(r^2\cos^2\phi \cdot \ln r\right) = 2\lim_{r\to 0}\left(\cos^2\phi \cdot \frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}}\right)$$

Получили штуку как на семинаре, ограниченный косинус умножаем на что-то, если это что-то стремится к нулю, тогда все круто (весь предел равен нулю), посмотрим:

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{r\to 0}\left(\frac{\frac{1}{r}}{-\frac{2}{r^3}}\right) = \lim_{r\to 0} -\frac{r^2}{2} = 0$$

А значит:

$$2\lim_{r\to 0}\left(\cos^2\phi \cdot \frac{\ln r}{\frac{1}{r^2}}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2\ln(x^2+y^2)\right) = 0$$

Чтобы была непрерывность значение функции в точке должно совпадать с пределом, т.к $\ln(0)$ неопр, то мы можем доопределить до непрерывной функции f следующим образом:

$$f = \begin{cases} x^2\ln(x^2+y^2), \text{ кроме } (0,\ 0) \\ 0, \quad \text{в } (0,0) \end{cases}$$

Ответ: возможно

$$f = \begin{cases} x^2\ln(x^2+y^2), \text{ кроме } (0,\ 0) \\ 0, \quad \text{в } (0,0) \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Расписываем через полярные координаты:

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos^2\phi + r\sin\phi}{\sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}} = \frac{r(r\cos^2\phi + \sin\phi)}{r} = r\cos^2\phi + \sin\phi$$

Получили штуку почти как на семе, $r\cos^2\phi$ к нулю, у $\sin\phi$ предела вообще нет, значит доопределить до непрерывной функции мы не сможем

$$\textbf{Ответ:}\ \text{невозможно}$$

Номер 10

a)

$$f(x,y) = \sqrt[3]{4x^2+y^2}$$

Пускай $h_1 = -0.2, h_2 = 0.3$. Тогда расписываем аналогично семинару:

$$\triangle f = f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) = \sqrt[3]{4(1+h_1)^2 + (2+h_2)^2} - \sqrt[3]{4+4} =$$

$$= \sqrt[3]{4h_1^2 + 8h_1 + h_2^2 + 4h_2 + 8} - 2 = \sqrt[3]{8\left(\frac{h_1^2}{2} + h_1 + \frac{h_2^2}{8} + \frac{h_2}{2} + 1\right)}$$

$$= 2\left(1 + h_1 + \frac{h_2}{2} + \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - 2 = 2\left(1 + \frac{1}{3}\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) + \overline{o}(\sqrt[3]{\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{8}})\right) - 2 =$$

$$= \frac{2}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_2 + \overline{o}\left(\sqrt[3]{h_1^2 + h_2^2}\right)$$

Тогда получаем:

$$df = \frac{2}{3}\cdot(-0.2) + \frac{1}{3}\cdot(0.3) = -\frac{1}{30}$$

$$\textbf{Ответ:}\ -\frac{1}{30}$$

b)

$$f(x,y) = x^3y - xy^3$$

$\triangle f = f(1+h_1, 2+h_2) - f(1,2) = (1+h_1)^3(2+h_2) - (1+h_1)(2+h_2)^3 + 6$

Раскрываем все скобки:

$$(1+h_1)^3(2+h_2) - (1+h_1)(2+h_2)^3 + 6 = h_2h_1^3 + 2h_1^3 + 3h_2h_1^2 + 6h_1^2 -$$

$$-h_2^3h_1 - 6h_2^2h_1 - 9h_2h_1 - 2h_1 - h_2^3 - 6h_2^2 - 11h_2 - 6 + 6$$

Все ненужные множители закидываем под $\overline{o}\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$, оставляем только коэффы при h_1 и h_2:

$$-2h_1 - 11h_2 + \overline{o}\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

Тогда получаем:

$$df = -2 \cdot (-0.5) - 11 \cdot (0.8) = -7.8$$

Ответ: -7.8

Номер 11

a)

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\frac{\sigma f}{\sigma x} = 2x + 0$$
$$\frac{\sigma y}{\sigma x} = 2y + 0$$

Тогда:

$$df = (2x)\,dx + (2y)\,dy$$

Ответ:

$$df = (2x)\,dx + (2y)\,dy$$

b)

$$f(x,y) = x^y + y^x$$
$$\frac{\sigma f}{\sigma x} = y \cdot x^{y-1} + \ln(y) \cdot y^x$$
$$\frac{\sigma f}{\sigma y} = \ln(x) \cdot x^y + x \cdot y^{x-1}$$

Тогда :

$$df = \left(y \cdot x^{y-1} + \ln(y) \cdot y^x\right)\,dx + \left(\ln(x) \cdot x^y + x \cdot y^{x-1}\right)\,dy$$

Ответ:

$$df = \left(y \cdot x^{y-1} + \ln(y) \cdot y^x\right)\,dx + \left(\ln(x) \cdot x^y + x \cdot y^{x-1}\right)\,dy$$