

## Аннотация

Над отчетом работали студенты ФКН ПМИ:

- БПМИ208 Бурмашев Григорий, БПМИ208 Прокопова Полина: оформление отчета, написание обзора на статью 1.
- БПМИ208 Кирдяшова Алиса, БПМИ209 Крылова Мария: оформление отчета, написание обзора на статью 2.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>"О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени"</b>	<b>2</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	2
2.2	Построение математической модели . . . . .	2
2.3	Вычисления компонент системы уравнений . . . . .	2
2.4	Заключение . . . . .	4
<b>3</b>	<b>"Параллельное моделирование особенностей кровотока в окрестности кава-фильтра с захваченным тромбом"</b>	<b>4</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	4
3.2	Построение математической модели . . . . .	4
3.3	Аппроксимация . . . . .	5
3.4	Параллелизм . . . . .	6
3.5	Заключение . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>7</b>

# 1 Введение

Область применения математического моделирования очень обширная, так как зачастую вычисления требуют большого количества ресурсов. Например, некоторые вычисления могут быть очень дорогостоящими и нуждающимися в огромной вычислительной мощности. Именно для экономии ресурсов и применяются современные методы численного моделирования экспериментов. Применение аналитических методов при разработке и анализе качества новых устройств является актуальным способом решения задач, базирующимся на использовании мощных современных алгоритмов и вычислительных средств.

В данной работе мы бы хотели рассмотреть применение численных методов математического моделирования в области течения ньютоновских жидкостей. То есть вязких жидкостей, у которых напряжение и градиент скорости линейно зависимы. Обе статьи рассматривают движение вязких жидкостей внутри каналов в виде прямого кругового цилиндра или слоев между параллельными плоскостями. По похожему между собой законом термодинамики строятся математические модели, описывающие движение вязких жидкостей. Причем в одном случае для описания движения жидкости используется трехмерное уравнение Навье-Стокса, а в другом уравнение магнитной гидродинамики. Хотя и математические модели построены для разных областей, они могут быть применены для улучшения результатов друг друга.

## 2 "О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени"

### 2.1 Постановка задачи

Статья посвящена численному моделированию динамики вязкой проводящей жидкости в области, которая изменяется во времени. Этот вопрос актуален в связи с необходимостью исследования задач управления динамикой жидкости в различных областях, где в качестве управляющих рассматриваются различные типы воздействия, таких как магнитные поля, которые могут изменять во времени область течения. В качестве примера приводится нефть, свойства которой меняются в зависимости от глубины и места залегания. Вместе с глубиной залегания растет и температура, как следствие меняется текучесть нефти и происходит потеря свойств неньютоновской жидкости. Помимо этого в месторождениях залегает вода, а изменение её параметров отражается на динамике нефти. Приведенная в статье модель является лишь первым приближением, она позволяет описывать течение таких вязких ньютоновских жидкостей, как нефть и масло в малых полостях и засорах.

### 2.2 Построение математической модели

Для построения математической модели рассматривается система уравнений, которая описывает течение жидкости в области, изменяющейся во времени, где  $u$  – вектор скорости течения,  $p$  – давление,  $H$  – вектор напряженности магнитного поля,  $T$  – температура жидкости

Важным компонентом системы является вектор скорости течения, который имеет вид:

$$u(x, t) \equiv \{u_1(t, x_2), 0, u_3(t, x_2)\}, \quad x_2 \in [0, l(t)], \quad t > 0 \quad (1)$$

Где  $t$  – время, а  $l(t)$ , в свою очередь, задает траекторию движения верхней стенки плоского слоя жидкости, что можно увидеть на изображении:

Если предположить, что у системы уравнений (1) единственное решение, то получаем следующий результат: четверка  $(u, p, H, T)$  является решением нашей системы, причем  $H = \alpha u$ ,  $p = -H^2/(8\pi)$ , поле температуры  $T$  – решение уравнения типа теплопроводности. Полученную математическую модель и будут использовать для моделирования течения жидкости.

### 2.3 Вычисления компонент системы уравнений

Автор статьи задает начальные условия для компонент вектора скорости и приводит аналитическое решение нахождения полей скорости и давления, в котором сводит решение к задаче Штурма-Лиувилля

$$\partial \mathbf{H} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mu_m \Delta \mathbf{H},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left( p + \mathbf{H}^2 / 8\pi \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu \Delta \mathbf{u},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{1}{c_p} \frac{\mu}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2,$$

Рис. 1: Система уравнений

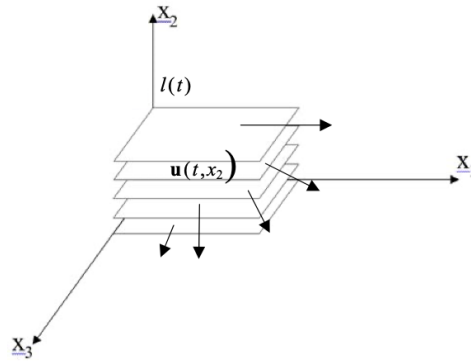


Рис. 2: Слоистое движение жидкости

и в конце концов получает аналитическую формулу для вектора скорости. Абсолютно аналогичным образом были произведены вычисления для получения поля температуры. А поле давления, в свою очередь, имеет вид:

$$p(t, x_2) = -\alpha^2 (u_1^2(t, x_2) + u_3^2(t, x_2)) / 8\pi$$

После нахождения аналитического решения автор, используя метод Гаусса-Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений, находит численные решения для значений полей. Сравнение аналитического и численного решений показало, что погрешность вычислений не превышает 0.6%.

В процессе решения задачи автор статьи решал вопрос быстрого возрастания значений по модулю, который приводит к плохой точности при работе со стандартными типами данных. Для решения была применена библиотека длинной арифметики GMP (GNU Multiple-precision)

Движение жидкости можно представить как решение дифференциального уравнения следующего вида:

$$dx/dt = u(t, x), \quad x(0) = x_0$$

Применив все полученные вычисления и подставив их в указанную выше формулу, автор получил итоговую формулу для слоистого течения жидкости в момент времени  $t$ :

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t c_n^{(i)} \psi_n(x_2/l(\tau)) l^{\lambda_n}(\tau) d\tau + x_i(0), \quad i = 1, 3, \quad x_2(t) \equiv x_2(0)$$

По итогам вычислений автор привел пример моделирования течения жидкости для двух абстрактных моментов времени  $t = 0$  и  $t = 1$ :

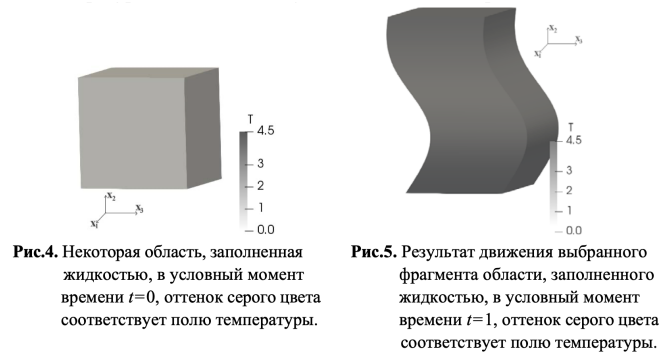


Рис. 3: Результаты моделирования

## 2.4 Заключение

В статье был рассмотрен вопрос построения модели моделирования слоистого течения вязкой проводящей жидкости. Была предложена математическая модель и единообразный вычислительный механизм, что позволяет рассчитывать поле скоростей течения и поле температуры для слоистого течения жидкости. Погрешность точности расчетов не превосходит 0.6%, что позволяет верифицировать модель на основе сравнения найденного точного решения с численным.

## 3 "Параллельное моделирование особенностей кровотока в окрестности кава-фильтра с захваченным тромбом"

### 3.1 Постановка задачи

В мире довольно много случаев смерти людей от тромбоза, причем с медицинской точки зрения очень тяжело предотвратить это заболевание. Человек может следить за уровнем сахара в крови и уровнем свертываемости крови, но все это не гарантирует пациенту, что он не будет подвержен риску отрыва тромба от стенки вены. Одним из способов предотвращения летального исхода от попадания тромба в сердце или легочную артерию является установка в некоторые участки вены кава-фильтров. Таким образом задача сводится к тому, чтобы понять каких именно размеров делать кава-фильтры в зависимости от анализов пациента, а для этого нужно изучить давление и скорость течения крови на данном участке. Стоит понимать, что чем лучше решается задача тромбоулавливания, тем более фильтр влияет как на кровоток, так и на окружающее его пространство. Так как при неправильно подобранных размерах кава-фильтра, он либо вовсе не будет улавливать тромбы, либо будет затруднять проходимость крови в вене.

### 3.2 Построение математической модели

При построении модели, рассматривается область в венозном русле, протяженностью 12см. Сосуд или область  $\Omega \in R^3$  представляет собой основную вену, эллиптического сечения, размером  $1.6 \times 2.4$ . В данной работе рассматривается простейший случай основной вены без ответвлений.

Поле скорости на концах вен стационарно и плоскопараллельно, причем осевая компонента скорости имеет профиль Пуазейля (2) и достигает максимального значения равного 8.8 см/с.

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} R^2 \quad (2)$$

Течение (профиль) Пуазейля является одним из самых простых и точных решений уравнения Навье-Стокса. Профиль Пуазейля - ламинарное течение жидкости через круговые цилиндры. В нашем случае, в качестве такого цилиндра выступает полость основной вены.

Кава-фильтр состоит из 12 прямых проволок, каждая толщиной 0.5 мм. Проволки имеют общую концевую точку с одной стороны, а другой они упираются в стенки сосуда. Общая длина установленного кава-фильтра составляет 2 см. В статье рассматриваются правильные шарообразные тромбы, располагающиеся в кава-фильтре, различного диаметра. Центр тромба в модели располагается на оси вены, в которую установлен фильтр.

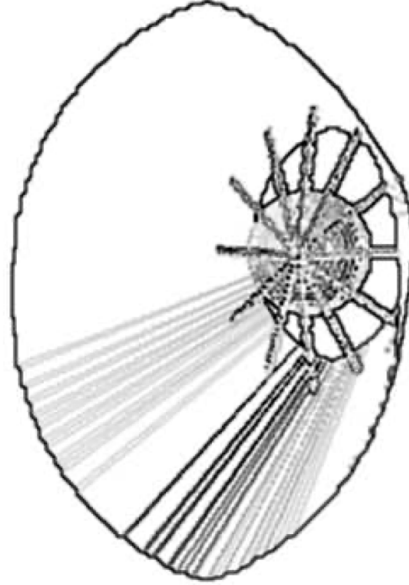


Рис. 4: Конфигурация фильтра с тромбом.

Во время моделирования были выдвинуты следующие предположения:

- Венозная кровь - несжимаемая ньютоновская жидкость.
- Кровь имеет постоянную плотность и динамическую вязкость.
- Стенки вен, кава-фильтр и тромб неподвижны, причем кровь на их поверхностях также неподвижна (условие прилипания).

Система уравнений, описывающих течение жидкости при таких предположениях, называется системой трехмерных уравнений Навье-Стокса.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ в } \Omega \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \partial\Omega$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega$$

### 3.3 Аппроксимация

Решение уравнений математической физики представляет из себя решение систем уравнения бесконечномерного функционального пространства. Нам нужно использовать дискретизацию модели, чтобы перейти к решению проблемы в конечномерном пространстве. Область непрерывного изменения аргументов заменяется дискретным множеством точек, и вместо начального набора функций рассматривается только функции, определенные в точках. Если выбранные точки расположить в узлах прямоугольной решетки, то можно, заменив входящие в исходное уравнение производные на соответствующие

конечные разности, получить систему алгебраических уравнений. В этом случае часть прямоугольной решетки, занимающую область, в которой ищется решение, будем называть расчетной сеткой, а функции дискретного аргумента – сеточными функциями.

Специфичность и сложность геометрии обтекаемого препятствия накладывают серьезные ограничения на размер сетки в окрестности препятствия, так размер сетки не может превышать 0,2 мм. Расчетная сетка содержит от 1.5 до 2 миллионов узлов для аппроксимации как давления, так и скорости. Поскольку количество неизвестных в сеточных уравнениях весьма велико, необходимо использовать параллельные компьютеры и эффективные численные методы, использующие прямоугольную структуру сетки. Для аппроксимации по времени используется проекционный алгоритм, а для аппроксимации по пространству используется уравнение конвекции-реакции-диффузии (4) и вводятся типы узлов сетки.

$$-\frac{\nu}{2}\Delta\hat{\mathbf{u}}^{k+1} + \left( \left( \frac{3}{2}\mathbf{u}^k - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{k-1} \right) \cdot \nabla \right) \frac{\hat{\mathbf{u}}^{k+1}}{2} + \frac{\hat{\mathbf{u}}^{k+1}}{\Delta t} = rhs^{k,k+1/2} \text{ в } \Omega \quad (4)$$

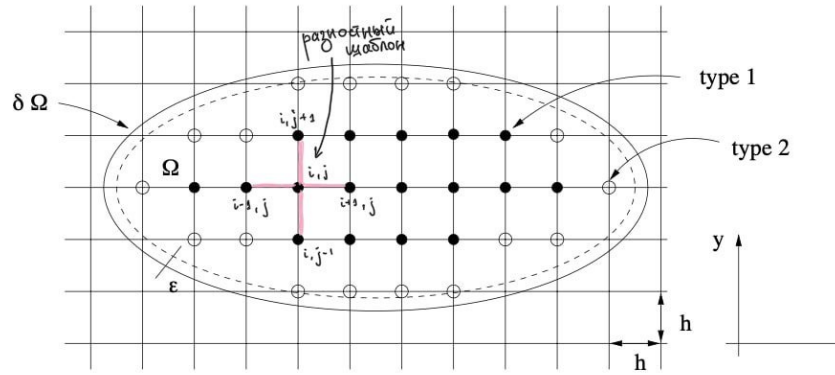


Рис. 5: Сеточные узлы.

Множество сеточных узлов  $\Omega_i^h$  разбивается на внутренние (принадлежащие  $\Omega$ ) и внешние узлы. Внутреннему узлу приписывается тип 1, если в его разностный шаблон входят только внутренние узлы, или тип 2 – в противном случае. Для узлов типа 1 аппроксимируется оператор Лапласа. А для узлов типа 2 (так как они определены не во всех точках) в общем случае аппроксимировать уравнение конвекции-реакции-диффузии нельзя, поэтому предлагается заменить внешнюю точку шаблона на ее проекцию на границу, где известно граничное значение, при этом в этих точках мы не аппроксимируем уравнение конвекции-реакции-диффузии, а создаем проекцию.

Таким образом вводятся точки типа 3 как координатные проекции внешних узлов на границу  $\partial\Omega$ , которые вносят вклад в шаблоны узлов типа 2.

### 3.4 Параллелизм

Проекционный алгоритм, применяемый для аппроксимации по времени требует решения большого количества дифференциальных уравнений на каждой итерации. Авторами статьи было замечено, что для упрощения вычислений можно использовать различные методы параллелизации. Например, параллельный метод Шварца и метод фиктивных компонент.

Для решения уравнения конвекции-реакции-диффузии применяется параллельный двухуровневый итерационный метод Шварца. В отличие от классического одноуровневого метода, в двухуровневом алгоритме точное решение задач в подобластях заменяется на параллельное итерационное решение. Естественным приложением этого метода является параллельное решение нестационарных уравнений Навье-Стокса с помощью проекционного метода, в котором необходимо решать сеточный аналог уравнения Пуассона на каждом временном шаге. Помимо использования параллельного метода фиктивных компонент, наиболее эффективного на прямоугольных сетках, предлагается использовать адаптивные

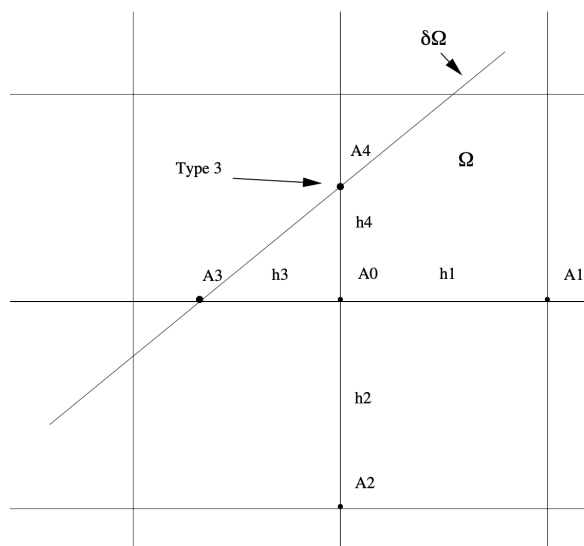


Рис. 6: Фиктивный узел типа 3.

механизмы выбора начального приближения для итерационных методов. В свою очередь, метод фиктивных компонент не требует матрично-векторных произведений и позволяет сократить количество итераций в несколько раз при установленном течении. Будучи вычислительно недорогими, технологически простыми и легко параллелизуемыми, эти механизмы позволяют существенно сократить число итераций и, следовательно, вычислительную работу.

Характерной особенностью используемых параллельных вычислений является их кластеризация. Множество всех доступных процессоров разбивается на три равные группы — кластеры для компонент скорости. Каждый кластер решает свою сеточную задачу независимо от других, причем на каждом кластере применяется параллельная реализация двухуровневого метода Шварца. Кроме этого, из общего множества процессоров выделяется подмножество, на котором можно использовать параллельный метод фиктивных компонент.

В работе был приведен пример параллельного алгоритма для коа-фильтра с захваченным тромбом диаметра 1.2 см, выполненные на сетке  $160 \times 120 \times 80$ , в которой около 1.5 миллиона расчетных узлов для каждой из компонент скорости и давления. Такой эксперимент может быть посчитан не менее чем на 36 процессорах из-за ограничения на память. В такой случае на каждом временном шаге обрабатывается около 6 миллионов переменных. Минимальное количество временных шагов, необходимых для отыскания установившегося решения, оказывается равным 200, а общее время решения задачи равным 3500 с.

### 3.5 Заключение

В статье были рассмотрены методы моделирования движения крови около коа-фильтра с захваченным тромбом. Как видно из статьи, главной проблемой являемся нехватка вычислительной мощности для решения систем дифференциальных уравнений. Таким образом при усложнения нашей модели, например, добавление к венам отростков сосудов, про которые не стоит забывать, или изменения формы тромба, вычисления будут усложнены в разы. Именно поэтому при моделировании данной системы надо уделить много времени вопросу параллелизма вычислений. Авторы статьи планируют в дальнейшем планируют уделить время разработке усложненной модели.

## 4 Вывод

Таким образом, мы рассмотрели примеры применения численных методов математического моделирования в области течения ньютоновских жидкостей. Первая статья предлагает математическую модель

течения жидкости в области, которая изменяется во времени. Вторая статья рассказывает о моделировании особенностей кровотока в окрестности кава-фильтра с захваченным тромбом. Мы считаем, что результаты первой статьи можно применять в широком спектре задач, в том числе и для решения вопроса из второй статьи, возможность рассчитывать поле температуры при моделировании модели позволяет, например, учитывать температуру пациента, поскольку она оказывает прямое влияние на кровоток человека.