Дифференциальные уравнения, дз – 2

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

2 марта 2022 г.

Номер 1

Если дано комплексное число z:

$$z = x + iy$$

- Тригонометрическая форма:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

  Где:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$$

  А если $x > 0, y > 0$, то можно как:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

- Показательная форма:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

1)

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

Находим тригонометрическую форму:

$$|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Итого:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Находим показательную форму:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Ответ:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

2)

$$z = 2i$$

Находим тригонометрическую форму:

$$|z| = \sqrt{0+4} = 2$$

$$\cos\varphi = 0$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{2} = 1$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Итого:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Находим показательную форму:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Ответ:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

3)

$$z = -7i$$

Находим тригонометрическую форму:

$$|z| = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos\varphi = 0$$

$$\sin\varphi = -\frac{7}{7} = -1$$

Отсюда

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Итого:

$$z = 7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Находим показательную форму:

$$z = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Ответ:

$$7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$7e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

4)

$$z = 1 - \sqrt{3}i$$

Находим тригонометрическую форму:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отсюда

$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

Итого:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Находим показательную форму:

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Ответ:

$$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

5)

$$z = \sqrt{3}i$$

Находим тригонометрическую форму:

$$|z| = \sqrt{3}$$

$$\cos\varphi = 0$$

$$\sin\varphi = 1$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Итого:

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Находим показательную форму:

$$z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Ответ:

$$\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

б)

$$z = 3 + 4i$$

Находим тригонометрическую форму:

$$|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Т.к $3 > 0, 4 > 0$, то:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

Итого:

$$z = 5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)$$

Находим показательную форму:

$$z = 5e^{i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)}$$

Ответ:

$$5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)$$

$$5e^{i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)}$$

Номер 2

Если есть комплексное число z и есть его тригонометрическая форма, то у нас есть формула:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

А корней всегда будет n штук, т.е в данном случае $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

1)

$$(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$$

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

Тригонометрическую форму уже посчитали:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

В данном случае $n = 2$, поэтому $k \in \{0, 1\}$. Теперь извлекаем по формуле:

$$\sqrt[2]{z} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right)\right)$$

$$\sqrt[2]{z} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right)\right)$$

Ответ:

Общий вид:

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right)\right)$$

Множество:

$$k \in \{0, 1\}$$

2)

$$(2i)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 2i$$

Тригонометрическую форму уже посчитали:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

В данном случае $n = 3$, поэтому $k = \in \{0, 1, 2\}$. Теперь извлекаем по формуле:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right)$$

Ответ:

Общий вид:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right)$$

Множество:

$$k \in \{0, 1, 2\}$$

3)

$$(-7i)^{\frac{1}{6}}$$

$$z = -7i$$

Тригонометрическую форму уже посчитали:

$$z = 7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

В данном случае $n = 6$, поэтому $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. Теперь извлекаем по формуле:

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{7}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6}\right)\right)$$

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k\right)\right)$$

Ответ:

Общий вид:

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k\right)\right)$$

Множество:

$$k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

4)

Найти частное от деления:

$$\frac{23+i}{3+i}$$

Для этого домножим числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю, т.е на $3-i$:

$$\frac{23+i}{3+i}=\frac{23+i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{(23+i)(3-i)}{3^2+1^2}=\frac{70-20i}{10}=7-2i$$

Ответ:

$$7-2i$$

Номер 3

а)

$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$$

$$\lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0$$

Отсюда корни:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$$

У λ_1 кратность 3, отсюда получаем решения:

$$e^{0x} = 1$$
$$xe^{0x} = x$$
$$x^2e^{0x} = x^2$$

У λ_2 кратность 2, отсюда получаем решения:

$$e^{3x}$$
$$xe^{3x}$$

Итого решение:

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}$$

Ответ:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}$$

b)

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Угадывается корень 1, далее делением на $\lambda - 1$ получаем:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

Отсюда корни:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

У λ_1 кратность 2, отсюда получаем решения:

$$e^x$$
$$xe^x$$

У λ_2 кратность 1, отсюда получаем решение:

$$e^{-x}$$

Итого решение:

$$C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x}$$

Ответ:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x}$$

c)

$$y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 3$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 3) = 0$$

Придется работать с комплексными корнями, так что считаем для первой скобки:

$$\lambda^2 = -1 + 0i,\ |\lambda^2| = \sqrt{1} = 1,\ \varphi = \pi$$

$$\sqrt{\lambda^2} = \left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right)\right), k \in \{0, 1\}$$

$$k = 0 : \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$$

$$k = 1 : \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 0 - i = -i$$

Отсюда получили первые два корня:

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

Теперь считаем тоже самое, но для второй скобки:

$$\lambda^2 = -3 + 0i,\ |\lambda^2| = \sqrt{3},\ \varphi = \pi$$

$$\sqrt{\lambda^2} = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right)\right), k \in \{0, 1\}$$

$$k = 0 : \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}(0 + i) = \sqrt{3}i$$

$$k = 1 : \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sqrt{3}(0 - i) = \sqrt{3}(-i)$$

И еще два корня:

$$\lambda_3 = \sqrt{3}i, \lambda_4 = -\sqrt{3}i$$

Теперь обьединяем решения:

$$\lambda_1 = \pm i, \lambda_2 = \pm\sqrt{3}i$$

С семинара:

В общем случае:
если есть пара комплексных корней
λ1 = a+bi, λ2 = a-bi
то для записи вещественных решений в
общее решение отправляется слагаемое
D1 e^ax cos bx + D2 e^ax sin bx.

Тогда получаем решение:

$$y = D_1e^{0x}\cos(x) + D_2e^{0x}\sin(x) + D_3e^{0x}\cos(\sqrt{3}x) + D_4e^{0x}\sin(\sqrt{3}x)$$

Итого:

$$y = D_1\cos(x) + D_2\sin(x) + D_3\cos(\sqrt{3}x) + D_4\sin(\sqrt{3}x)$$

Ответ:

$$y = D_1\cos(x) + D_2\sin(x) + D_3\cos(\sqrt{3}x) + D_4\sin(\sqrt{3}x)$$

d)

$$y^{'''} - 3y^{'} + 2y = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$$

Угадывается корень 1, далее делением на $\lambda - 1$ получаем:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

Отсюда корни:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

У λ_1 кратность 2, отсюда получаем решения:

$$e^x$$
$$xe^x$$

У λ_2 кратность 1, отсюда получаем решение:

$$e^{-2x}$$

Итого решение:

$$C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x}$$

Ответ:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x}$$

e)

$$y^{(6)} + 64y = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^6 + 64 = 0$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^6 + 64 = 0$$

Переходим в комплексные и ищем корни:

$$\lambda^6 = -64 + 0i, |\lambda^6| = \sqrt{64^2} = 64, \varphi = \pi$$

$$\sqrt[6]{\lambda^6} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)\right), k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

$$\sqrt[6]{\lambda^6} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right)\right), k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

Эх, перебираем все k:

$$k = 0 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(0 + i\right) = 2i$$

$$k = 2 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}2\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 3 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}3\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}3\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$k = 4 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}4\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}4\right)\right) = 2\left(0 - i\right) = -2i$$

$$k = 5 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}5\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}5\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

Обьединяем попарно корни:

$$\lambda_1 = \sqrt{3} \pm i,\ \lambda_2 = \pm 2i,\ \lambda_3 = -\sqrt{3} \pm i$$

Получаем итоговый ответ:

$$y = D_1 e^{\sqrt{3}x}\cos x + D_2 e^{\sqrt{3}x}\sin x + D_3\cos 2x + D_4\sin 2x + D_5 e^{-\sqrt{3}x}\cos x + D_6 e^{-\sqrt{3}x}\sin x$$

Ответ:

$$y = D_1 e^{\sqrt{3}x}\cos x + D_2 e^{\sqrt{3}x}\sin x + D_3\cos 2x + D_4\sin 2x + D_5 e^{-\sqrt{3}x}\cos x + D_6 e^{-\sqrt{3}x}\sin x$$

Номер 4

а)

$$y'' + 4y = 2\cos^2 x$$

Сначала решим однородное:

$$y'' + 4y = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4 + 0i, |\lambda^2| = \sqrt{16} = 4, \varphi = \pi$$

$$\sqrt{\lambda^2} = \sqrt{4}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right)\right), k \in \{0, 1\}$$

$$k = 0 : 2(0 + i) = 2i$$

$$k = 1 : 2(0 - i) = -2i$$

$$\lambda = \pm 2i$$

Получаем решение:

$$\lambda_1 = \pm 2i$$

И тогда:

$$D_1 \cos(2x) + D_2 \sin(2x)$$

Теперь ищем частное решение, вспоминаем формулу:

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

Начнем с 1, это будет просто константа d:

$$y_1 = d$$

$$y_1' = y_1'' = 0$$

Тогда:

$$0 + 4d = 1$$

$$d = \frac{1}{4}$$

Теперь ищем второе. Корни у нас мнимые вида $\pm 2i$ с кратностью 1, у косинуса внутри 2, значит нужно домножить на x

$$y_2 = x\left(p \cdot \cos 2x + q \cdot \sin 2x\right)$$

$$y_2' = p\cos 2x + q \cdot \sin 2x - 2px\sin 2x + 2qx\cos 2x$$

$$y_2'' = 4q\cos 2x - 4px\cos 2x - 4p\sin 2x - 4qx\sin 2x$$

Тогда:

$$4q\cos 2x - 4px\cos 2x - 4p\sin 2x - 4qx\sin 2x + 4x(p\cos 2x + q\sin 2x) = \cos 2x$$

$$4q\cos 2x - 4p\sin 2x = \cos 2x$$

$$\begin{cases} 4q = 1 \\ -4p = 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} q = \frac{1}{4} \\ p = 0 \end{cases}$$

Т.е:

$$y_2 = x(0 + \frac{1}{4}\sin 2x) = \frac{1}{4}\sin 2x$$

Тогда общее решение:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + D_1\cos(2x) + D_2\sin(2x)$$

Ответ:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + D_1\cos(2x) + D_2\sin(2x)$$

b)

$$y''' - 3y' - 2y = e^{-x}$$

Сначала решим однородное:

$$y''' - 3y' - 2y = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

Получаем решения:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

У λ_1 кратность 2, отсюда получаем решения:

$$e^{-x}$$

$$xe^{-x}$$

У λ_2 кратность 1, отсюда получаем решение:

$$e^{2x}$$

Итого решение:

$$C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

Теперь ищем частное решение, у e^{-x} совпадение степени с $\lambda_1 = -1$, кратность равна 2, поэтому будет множитель x^2:

$$y_1 = x^2 d e^{-x}$$

$$y_1' = 2xde^{-x} - dx^2 e^{-x}$$

$$y_1'' = 2de^{-x} - 4xde^{-x} + dx^2 e^{-x}$$

$$y_1''' = -x^2 de^{-x} + 6xde^{-x} - 6de^{-x}$$

Подставляем:

$$-x^2 de^{-x} + 6xde^{-x} - 6de^{-x} - 3(2xde^{-x} - dx^2 e^{-x}) - 2x^2 de^{-x} = e^{-x}$$

$$-6de^{-x} = e^{-x}$$

$$d = -\frac{1}{6}$$

Тогда:

$$y_1 = -\frac{1}{6} x^2 e^{-x}$$

Отсюда получаем общее решение:

$$y = -\frac{1}{6} x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

Ответ:

$$y = -\frac{1}{6} x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

c)

$$y^{(4)} - y = e^x \cos x$$

Сначала решим однородное:

$$y^{(4)} - y = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 1$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

Получаем решения:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \pm i$$

Итого решение:

$$D_1 e^x + D_2 e^{-x} + D_3 \cos x + D_4 \sin x$$

Теперь ищем частное решение, $a + bi = 1 + i$ – не корень, значит будет x^0, поэтому:

$$y_1 = e^x (r \cos x + t \sin x)$$

$$y_1' = e^x (r \cos x + t \sin x) + e^x (-r \sin x + t \cos x)$$

$$y_1'' = e^x (r \cos x + t \sin x) + e^x (-r \sin x + t \cos x) + e^x (r \cos x + t \sin x) + e^x (-r \sin x - t \cos x) =$$

$$= 2e^x (-r \sin x + t \cos x)$$

$$y''' = 2e^x (-r \sin x + t \cos x) + 2e^x (-r \cos x - t \sin x)$$

$$y^{(4)} = 4e^x (-r \cos x - t \sin x) = -4e^x (r \cos x + t \sin x)$$

Подставляем:

$$-4e^x (r \cos x + t \sin x) - e^x (r \cos x + t \sin x) = e^x \cos x$$

$$-5e^x (r \cos x + t \sin x) = e^x \cos x$$

$$-5(r \cos x + t \sin x) = \cos x$$

$$-5r \cos x - 5t \sin x = \cos x$$

$$\begin{cases} r = -\frac{1}{5} \\ t = 0 \end{cases}$$

А значит:

$$y_1 = e^x (-\frac{1}{5} \cos x + 0) = -\frac{1}{5} e^x \cos x$$

Ответ:

$$-\frac{1}{5} e^x + \cos x D_1 e^x + D_2 e^{-x} + D_3 \cos x + D_4 \sin x$$

d)

$$y''' - 2y'' + 2y' = 5\cos x + 2x$$

Сначала решим однородное:

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda((\lambda - 1)^2 + 1) = 0$$

Получаем решения:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \pm i$$

Итого решение:

$$C_1 + D_1 e^x \sin x + D_2 e^x \cos x$$

Теперь ищем частное решение. В правой части два слагаемых, найдем сначала для $5\cos x$:

$$y_1 = r\cos x + t\sin x$$

$$y_1' = -r\sin x + t\cos x$$

$$y_1'' = -r\cos x - t\sin x$$

$$y_1''' = r\sin x - t\cos x$$

Подставляем:

$$r\sin x - t\cos x - 2(-r\cos x - t\sin x) + 2(-r\sin x + t\cos x) = 5\cos x$$

$$(2t - r)\sin x + (2r + t)\cos x = 5\cos x$$

$$\begin{cases} 2t - r = 0 \\ 2r + t = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Значит:

$$y_1 = 2\cos x + \sin x$$

Теперь найдем для $2x$ (что есть $e^{0x}2x$), степень у e совпадает с $\lambda_1 = 0$ кратности 1, поэтому будет множитель x:

$$y_2 = x(ax + b)$$

$$y_2' = 1(ax + b) + ax = 2ax + b$$

$$y_2'' = 2a$$

$$y_2''' = 0$$

Подставляем:

$$0 - 2(2a) + 2(2ax + b) = 2x$$

$$-4a + 4ax + 2b = 2x$$

$$\begin{cases} 4a = 2 \\ -4a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Значит:

$$y_2 = x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

Получаем итоговый ответ:

$$y = x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 2\cos x + \sin x + C_1 + D_1 e^x \sin x + D_2 e^x \cos x$$

Ответ:

$$y = x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 2\cos x + \sin x + C_1 + D_1 e^x \sin x + D_2 e^x \cos x$$

e)

$$y''' - 2y'' = 16\sin 2x - 12x$$

Сначала решим однородное:

$$y''' - 2y'' = 0$$

Смотрим на характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2$$

Рассмотрим уравнение $P(\lambda) = 0$:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 2) = 0$$

Получаем решения:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

У λ_1 кратность 2, отсюда получаем решения:

$$e^{0x} = 1$$
$$xe^{0x} = x$$

У λ_2 кратность 1, отсюда получаем решение:

$$e^{2x}$$

Итого общее решение:

$$C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$$

Теперь ищем частное решение, сначала найдем для $16\sin 2x$:

$$y_1 = r\cos 2x + t\sin 2x$$

$$y_1' = 2t\cos 2x - 2r\sin 2x$$

$$y_1'' = -4(r\cos 2x + t\sin 2x)$$

$$y_1''' = 8(r\sin 2x - t\cos 2x)$$

Подставляем:

$$8(r\sin 2x - t\cos 2x) - 2(-4(r\cos 2x + t\sin 2x)) = 16\sin 2x$$

$$8r\sin 2x - 8t\cos 2x + 8r\cos 2x + 8t\sin 2x = 16\sin 2x$$

$$\sin 2x(8r + 8t) + \cos 2x(-8t + 8r) = 16\sin 2x$$

$$\begin{cases} 8r + 8t = 16 \\ -8t + 8r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1t = 1 \end{cases}$$

Получаем:

$$y_1 = \cos 2x + \sin 2x$$

Теперь ищем для $-12x$, опять получаем совпадение с 0, причем на этот раз с кратностью 2, значит будет x^2:

$$y_2 = x^2(ax + b)$$

$$y_2' = 2x(ax + b) + x^2(a) = 3ax^2 + 2bx$$

$$y_2'' = 6ax + 2b$$

$$y_2''' = 6a$$

Подставляем:

$$6a - 2(6ax + 2b) = -12x$$

$$6a - 12ax - 4b = -12x$$

$$\begin{cases} -12a = -12 \\ 6a - 4b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Получаем:

$$y_2 = x^2(x + \frac{3}{2})$$

Получаем итоговый ответ:

$$y = x^2(x + \frac{3}{2}) + \cos 2x + \sin 2x + C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$$

Ответ:

$$y = x^2\left(x + \frac{3}{2}\right) + \cos 2x + \sin 2x + C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$$

[Наконец-то...]