Бурмашев Григорий. 208. Дискра - 5

Номер 1

Пусть в дереве есть 2 вершины: a и b. Тогда для одного ребра есть два возможных варианта циклов длины 2:

$$(aba)$$

$$(bab)$$

В дереве на 12 вершинах $n - 1 = 12 - 1 = 11$ ребер. Каждое ребро дает нам 2 цикла, а значит всего $11 \cdot 2 = 22$ цикла.

Ответ: 22 цикла

Номер 2

Пусть у нас есть две вершины степени 5: a и b. Максимум одно из пяти ребер, выходящих из a, ведет в b. И еще 4 ребра из b ведут в другие вершины. Итого 9 ребер. Но в дереве на 9 вершинах $9 - 1 = 8$ ребер. Мы видим **противоречие** $\rightarrow$ это невозможно

Ответ: нет

Номер 3

Т.к это связный граф, то максимальное количество вершин будет, если граф будет иметь вид «цепочки» из вершин степени 2, за исключеним двух вершин, которые являются началом и концом этой цепочки и имеют степени 1. Тогда у нас останется $20-1-1 = 18$ степеней вершин, а значит вершин степени 2 у нас: $\frac{18}{2} = 9$. Всего, в таком случае, $9 + 2 = 11$ вершин. Взять больше вершин степени 1 нельзя, т.к тогда граф перестанет быть связным.

Ответ: 11 вершин.

Номер 4

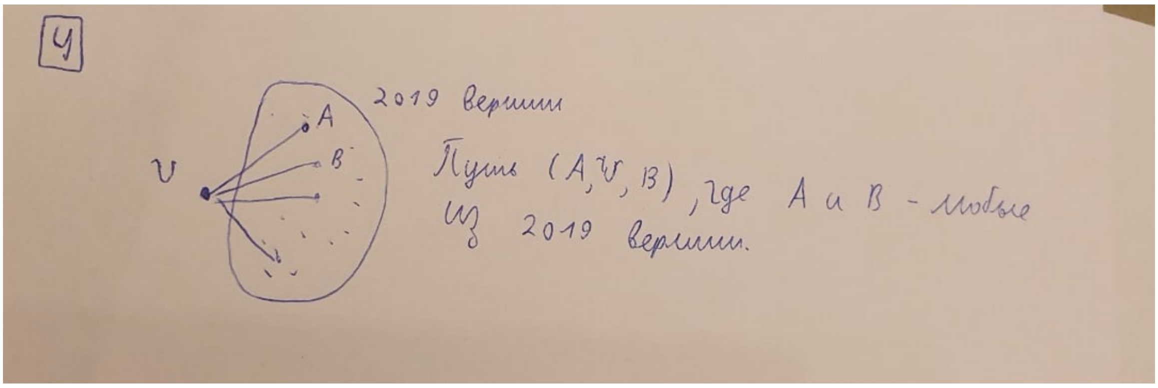
Можно привести пример дерева на 2020 вершинах, в котором нет простого пути длины 3, а именно:

Это дерево с вершиной u степени 2019, из которой выходят ребра в 2019 вершин степени 1. Мы получаем дерево на 2020 вершинах, в котором максимальный простой путь длины 2, т.е:

(любая из 2019 вершин степени 1 - u - любая из оставшихся 2018 вершин)

Ответ: нет

Изображение:



Номер 5

В связном графе наименьшее количество ребер будет, если граф – дерево. Но в условии сказано, что в графе нет мостов. Тогда наш граф – цикл из n вершин степени 2. При удалении любой из вершин количество компонент связности не изменится, а ребер в нем всего $n - 1 + 1 = n$ (n-1 ребро в дереве + 1 ребро, образующее цикл)

Ответ: n ребер

Номер 6

От обратного:

Пусть есть ребро, которое является мостом для множеств вершин A и B в графе и соединяет две вершины a и b. Удалим его. Тогда мы получим две компонентны связности (A и B) Тогда степени вершин a и b будут нечетными (четное - 1 = нечетное), при этом у оставшихся вершин степени все еще остаются четными. А значит сумма степеней вершин как в A, так и в B будет нечетной. Но мы знаем, что сумма степеней внутри одной компоненты связности всегда четна, т.е мы получили **противоречие** и моста в таком графе нет.

Ч.Т.Д

Номер 7

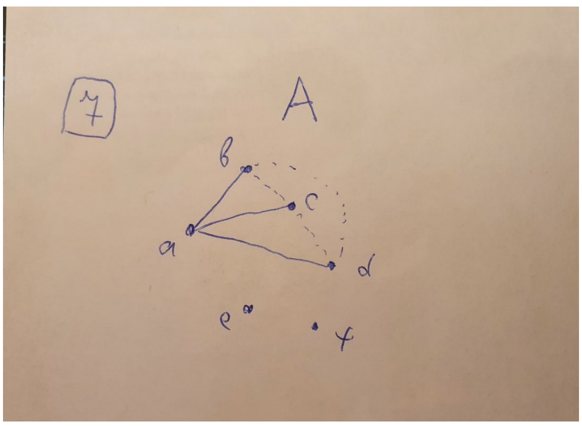
Построим граф на 6ти вершинах A. Либо в самом графе, либо в дополнении есть как минимум 3 ребра. Пусть в графе у нас есть ребра (ab), (ac) и (ad). Если у нас есть хотя бы одно из ребер (bc), (cd) или (bd), то мы получаем хотя бы один цикл длины 3: либо (abc), либо (acd), либо (abd) и граф соотвествует утверждению. Пусть тогда нет ни одного из ребер (bc), (cd) и (bd), но в таком случае мы точно знаем, что они есть в дополнении графа A $\rightarrow$ там есть хотя бы один цикл длины 3.

Аналогично при изначальном рассмотрении дополнения графа. Т.е при отсутствии там ребер (bc), (cd) и (bd) циклы длины 3 образуются в графе A.

А значит в любом графе на 6 и более вершинах у нас есть хотя бы один цикл длины 3

Ч.Т.Д

Изображение:



Номер 9

Зафиксируем одну висячую вершину. Т.к в нашем дереве нет вершин степени 2, то из это висячей вершины выходит одна вершина степени как минимум 3, из которой выходят еще как минимум 2 вершины и так далее... Пусть «снизу» у нас x висячих вершин и еще 1 в самом начале графа. Тогда всего $x+1$ висячая вершина. В таком случае вершин степени 3 и выше:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots$$

Т.к в каждую из x вершин можно попасть как минимум из двух вершин. Т.е поднимаясь снизу вверх по графу мы как минимум удваиваем кол-во вершин на каждом уровне.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots \leq x \leq x + 1$$

При максимальном числе вершин всего у нас $x+1+x$ вершин. При этом:

$$\frac{2x+1}{2} \leq x + 1$$

$$2x + 1 \leq 2x + 2$$

$$1 \leq 2$$

Т.е число висячих вершин больше или равно половине общего числа вершин.

Ч.Т.Д