ТВиМС, дз – 2

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

29 января 2022 г.

Задача 7

Задача 7. Пусть X_n — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных (т.е. не совпадающих с константой почти наверное) положительных величин с $\mathbb{E}X_n = q$. Докажите, что $\prod\limits_{n=1}^{N} X_n$ стремится к нулю почти наверное при $N \to \infty$ при *a*) $q < 1$; *b*) $q = 1$.

Достаточное условие сходимости п.н. Пусть X_n — последовательность случайных величин. Предположим, что при каждом $\delta > 0$ верно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \delta) < \infty$. Тогда $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$.

а) $q < 1$

Расписываем достаточное условие для нашего случая, т.к величины положительные произведение тоже положительное и модуль можем убрать (хотим стремление к нулю):

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) < \infty$$

Теперь по указанию от Зеленова вспоминаем про неравенство Чебышева:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i}{\delta}$$

Теперь подгоняем под наш случай, докидываем сумму и избавляемся от произведения справа (из независимости величин получаем просто q^n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{\delta}$$

Теперь для достаточного условия можем зажать через q^n, т.е нужно проверить просто:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{\delta} < \infty$$

Ну а это уже верно, т.к $q < 1$ и такой ряд сходится. Отсюда получаем, что выполняется достаточное условие сходимости п.н и мы получаем:

$$\prod_{n=1}^{N} X_n \xrightarrow{\text{п.н}} 0$$

Ч.Т.Д

b) $q = 1$

Пользуемся указанием Зеленова и смотрим на $\sqrt{X_n}$ и $\mathbb{E}\sqrt{X_n}$. Заметим (по свойству мат ожидания):

$$\mathbb{E}X_n > \left(\mathbb{E}\sqrt{X_n}\right)^2 \to \sqrt{\mathbb{E}X_N} > \mathbb{E}\sqrt{X_n} \to 1 > \mathbb{E}\sqrt{X_n}$$

Теперь можем вновь вернуться к неравенству Чебышева, но уже для корня:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} \sqrt{X_i} \geq \delta\right) \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}\sqrt{X_i}}{\delta}$$

Отсюда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\prod_{i=1}^{n} \sqrt{X_i} \geq \delta\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\mathbb{E}\sqrt{X_i}\right)^n}{\delta}$$

Но $E\sqrt{X_i} < 1$ (показали выше), а значит мы получаем случай аналогичный пункту а). Ряд в правой части неравенства сходится, отсюда выполняется достаточное условие сходимости п.н и:

$$\prod_{n=1}^{N} \sqrt{X_n} \xrightarrow{\text{п.н}} 0 \longrightarrow \prod_{n=1}^{N} \sqrt{X_n}^2 \xrightarrow{\text{п.н}} 0$$

Отсюда:

$$\prod_{n=1}^{N} X_n \xrightarrow{\text{п.н}} 0$$

Ч.Т.Д

Номер 4 [не из листка]

Задача IV *(не из листа)*
Пусть в условиях задачи 1 из листа $Z_n = \sqrt{n} \cdot I_{X \leq \frac{1}{n}}$.
Исследуйте эту последовательность на 4 вида сходимости указанные в начале листа 1.

1) Почти наверное

Проверяем:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot I_{X \leq \frac{1}{n}} = 0\right) = 1?$$

Пусть:

$$B = \left\{\omega \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot I_{X(\omega) \leq \frac{1}{n}} = 0\right\}$$

Считаем:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot I_{X \leq \frac{1}{n}} = 0\right) = P\left(X \in B\right) = \int_B \rho_x(t)dt = \int_0^1 1dt = 1$$

Вероятность равна 1 $\rightarrow$ есть сходимость почти наверное к нулю

$$Z_n \xrightarrow{\text{п.н}} 0$$

2) По вероятности

Сходимость по вероятности к нулю следует из сходимости почти наверное к нулю (доказывали на семе)

$$Z_n \xrightarrow{P} 0$$

3) В среднем

Проверяем:

$$\mathbb{E}|Z_n| \to 0?$$

Собственно считаем мат.ожидание:

$$\mathbb{E}|\sqrt{n} \cdot I_{X \leq \frac{1}{n}}| = \mathbb{E}(\sqrt{n} \cdot I_{X \leq \frac{1}{n}}) = \sqrt{n} \cdot \mathbb{E}I_{X \leq \frac{1}{n}} =$$

$$= \sqrt{n} \cdot 0 + \sqrt{n} \cdot P\left(I_{X \leq \frac{1}{n}} = 1\right) = \sqrt{n} \cdot P\left(X \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) =$$

Из того, что у нас равномерное распределение на $[0,1]$, получаем:

$$= \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n-0} = \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0$$

Значит есть сходимость в среднем

$$Z_n \xrightarrow{L_1} 0$$

4) В среднем квадратичном

Проверяем:

$$\mathbb{E}|Z_n^2| \to 0?$$

Получаем мат.ожидание аналогичное пункту 3, только теперь вместо $\sqrt{n}$ у нас просто n, значит после вычислений мы получим (индикатор себя также ведет):

$$\mathbb{E}|Z_n^2| = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \nrightarrow 0$$

К нулю не стремится, значит сходимости в среднем квадратичном нет.

$$Z_n \overset{L_2}{\nrightarrow} 0$$

Ответ:

$$Z_n \xrightarrow{\text{п.н}} 0$$

$$Z_n \xrightarrow{P} 0$$

$$Z_n \xrightarrow{L_1} 0$$

$$Z_n \overset{L_2}{\nrightarrow} 0$$

Номер 5 [не из листка]

Задача V *(не из листа)*
Пусть X_n - это рассмотренная на семинаре последовательность, для которой $X_n \xrightarrow{P} 0$, но при этом не верно, что $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.
Рассмотрим $Z_n = 2^k \cdot X_n$, где $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Покажите, что $Z_n \xrightarrow{P} 0$, но при этом не верно, что $X_n \to 0$ почти наверное, в среднем, или в среднем квадратическом.

Определяем Z_n, X_n берем 1 в 1 с сема:

$$Z_n = 2^k \cdot X_n = 2^k \cdot I_{\left\{x \in \left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]\right\}}$$

На семе определили:

X_n	0	1
P	$1-\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$

Аналогично для Z_n будет:

Z_n	0	2^k
P	$1-\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$

Теперь можем решать

1) $Z_n \xrightarrow{P} 0$

Проверяем:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(|Z_n| \geq \varepsilon\right) = 0?$$

Смотрим:

$$P(Z_n \geq \varepsilon) \leq P(Z_n \neq 0) = P(Z_n = 2^k) = \frac{1}{2^k}$$

$k = [\log_2 n]$. В пределе получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|Z_n| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{[\log_2 n]}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Стремление к нулю есть, значит есть сходимость по вероятности

$$Z_n \xrightarrow{P} 0$$

Ч.Т.Д

2) $Z_n \xrightarrow{L_1} 0$

Проверяем:

$$\mathbb{E}|Z_n| \to 0?$$

Считаем мат.ожидание:

$$\mathbb{E}|Z_n| = \mathbb{E}Z_n = 2^k \cdot \mathbb{E}I_{\left\{x \in \left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]\right\}} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1 \nrightarrow 0$$

К нулю не стремится, значит нет сходимости в среднем к нулю

$$Z_n \overset{L_1}{\nrightarrow} 0$$

Ч.Т.Д

3) $Z_n \xrightarrow{L_2} 0$

Проверяем:

$$\mathbb{E}|Z_n^2| \to 0?$$

Считаем мат.ожидание:

$$\mathbb{E}|Z_n^2| = \mathbb{E}Z_n^2 = 2^{2k} \cdot \mathbb{E}I_{\left\{x \in \left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]\right\}} = 2^{2k} \cdot \frac{1}{2^k} = 2^k \nrightarrow 0$$

К нулю не стремится, значит нет сходимости в среднем квадратичном

$$Z_n \overset{L_2}{\nrightarrow} 0$$

Ч.Т.Д