Диффуры, дз – 4

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

22 марта 2022 г.

Номер 1

а)

$$\begin{cases} x' = 2x + y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = 2x + 2y - z \end{cases}$$

Ищем собственные векторы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 0-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 = -(\lambda^2(\lambda-1)+\lambda-1) = -(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

Получаем корни (все кратности 1):

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$$

Получили парное $\pm i$. По аналогии с семинаром, можем рассматривать только один из них, оставим i. Подставляем λ_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

Тогда берем вектор:

$$h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Подставляем λ_2:

$$\begin{pmatrix} 2-i & 1 & -2 \\ -1 & -i & 1 \\ 2 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-i & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -i & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + z(-1 - \frac{i}{2}) = 0 \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases}$$

Тогда берем вектор:

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поработаем с комплексными корнями:

$$x_{h_2} = \left(1 + \frac{i}{2}\right) \cdot e^{it} = e^{it} + \frac{i}{2} e^{it} = \cos t + i \sin t - \frac{\sin t}{2} + \frac{i}{2} \cos t$$

$$y_{h_2} = -\frac{1}{2} e^{it} = -\frac{\cos t}{2} - \frac{i}{2} \sin t$$

$$z_{h_2} = \cos t + i \sin t$$

Итого:

$$x = -1 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot \left(\cos t - \frac{\sin t}{2}\right) + C_3 \cdot \left(\sin t + \frac{\cos t}{2}\right)$$

$$y = 1 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot \left(-\frac{\cos t}{2}\right) + C_3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin t\right)$$

$$z = 0 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot (\cos t) + C_3 \cdot (\sin t)$$

Ответ:

$$x = -1 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot \left(\cos t - \frac{\sin t}{2}\right) + C_3 \cdot \left(\sin t + \frac{\cos t}{2}\right)$$

$$y = 1 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot \left(-\frac{\cos t}{2}\right) + C_3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin t\right)$$

$$z = C_2 \cdot (\cos t) + C_3 \cdot (\sin t)$$

b)

$$\begin{cases} x' = x - y - 4z \\ y' = -2x + 2y + 12z \\ z' = x - y - 5z \end{cases}$$

Ищем:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 12 \\ 1 & -1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda \cdot (\lambda+1)^2$$

Получаем $\lambda_1 = 0$ кратности 1, $\lambda_2 = -1$ кратности 2. Считаем для λ_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 12 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Берем:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Считаем для $\lambda = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -4z \end{cases}$$

Берем:

$$h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы 2, значит хотим еще присоединенный вектор

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 12 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y + 4z = -2 \end{cases}$$

Тогда берем:

$$h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получаем решение:

Ответ:

$$x = 1 \cdot C_1 \cdot e^{0t} + C_2 \cdot (0t - 1)$$
$$y = 1 \cdot C_1 \cdot e^{0t} + C_2 \cdot (-4t - 6) - 4 \cdot C_3 \cdot e^{-t}$$
$$z = C_2 \cdot (t + 1) + 1 \cdot C_3 \cdot e^{-t}$$

c)

$$\begin{cases} x' = 2x + 6y - 15z \\ y' = x + y - 5z \\ z' = x + 2y - 6z \end{cases}$$

Решаем:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$$

Получаем $\lambda_1 = -1$ кратности 3. Смотрим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x + 2y - 5z = 0$$

Ранг матрицы равен 1, значит есть два собственных вектора. Но нам нужно найти тот с.в, у которого есть присоединенный, заметим из нашей матрицы, что мы хотим:

$$\begin{cases} 3x + 6y - 15z = 3a \\ x + 2y - 5z = a \\ x + 2y - 5z = a \end{cases}$$

Потребуем, чтобы вектор $(3a, a, a)$ был собственным вектором. Например, возьмем $h_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Теперь второй можно взять произвольно, лишь бы он был линейно независимым. Например $h_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда сам присоединенный к h_1:

$$x + 2y - 5z = 1$$

Подходит:

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда получаем решение:

Ответ:

$$x = 3 \cdot C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot (3t + 1) \cdot e^{-t} + 5 \cdot C_3 \cdot e^{-t}$$
$$y = 1 \cdot C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot (t + 0) \cdot e^{-t}$$
$$z = 1 \cdot C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot (t + 0) \cdot e^{-t} + 1 \cdot C_3 \cdot e^{-t}$$

d)

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = -x + 4y - 2z \\ z' = -2x + 5y - 2z \end{cases}$$

Считаем:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3$$

Имеем $\lambda_1 = 1$ кратности 3. Смотрим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы 2, будет 1 собственный вектор, значит нужно еще будет взять присоединенных:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

Берем вектор:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ищем присоединенный:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Возьмем тогда:

$$h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ищем второй присоединенный:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} -x + 3y - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Положим тогда:

$$h_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получаем решение:

Ответ:

$$x = 1 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot (t + 2) \cdot e^t + C_3 \cdot \left(\frac{t^2}{2} \cdot 1 + t \cdot 2 + 8\right) \cdot e^t$$

$$y = 1 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot (t + 1) \cdot e^t + C_3 \cdot \left(\frac{t^2}{2} \cdot 1 + t \cdot 1 + 3\right) \cdot e^t$$

$$z = 1 \cdot C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot (t + 0) \cdot e^t + C_3 \cdot \left(\frac{t^2}{2} \cdot 1 + t \cdot 0 + 1\right) \cdot e^t$$

Номер 2

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y - 2e^t \\ y' = x - y - e^t \end{cases}$$

Решаем сначала однородную систему:

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Смотрим:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Хотим:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = -1$$

Отсюда корни:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

Можем один откинуть, т.к они сгруппируются в итоге, найдем для $1+i$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 5 & 0 \\ 1 & -2-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x - y(2+i) = 0$$

Тогда берем:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$x_{h_1} = (2+i)\cdot e^{(1+i)t} = 2e^t\cdot e^{it} + ie^t\cdot e^{it} = e^t(2e^{it} + ie^it) = e^t\cdot(-\sin t + 2\cos t + 2i\sin t + i\cos t)$$

$$y_{h_1} = e^{(1+i)t} = e^t\cos t + e^t\cdot i\sin t$$

А отсюда:

$$x = C_1\cdot e^t(-\sin t + 2\cos t) + C_2\cdot e^t\cdot(2\sin t + \cos t)$$

$$y = C_1\cdot e^t\cos t + C_2\cdot e^t\cdot\sin t$$

Теперь решаем неоднородную часть:

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y - 2e^t \\ y' = x - y - e^t \end{cases}$$

Ищем решение в виде:

$$\begin{cases} x_1 = A \cdot e^t \\ y_1 = B \cdot e^t \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} x_1' = A \cdot e^t \\ y_1' = B \cdot e^t \end{cases}$$

Подставляем:

$$\begin{cases} A \cdot e^t = 3A \cdot e^t - 5B \cdot e^t - 2e^t \\ B \cdot e^t = A \cdot e^t - B \cdot e^t - e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 3A - 5B - 2 \\ B = A - B - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

А значит

$$\begin{cases} x_1 = e^t \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Итого:

Ответ:

$$x = C_1 \cdot e^t(-\sin t + 2\cos t) + C_2 \cdot e^t \cdot (2\sin t + \cos t) + C_3 \cdot e^t$$

$$y = C_1 \cdot e^t \cdot \cos t + C_2 \cdot e^t \cdot \sin t + 0$$

Номер 3

$$\begin{cases} x' = -2x + y + t\ln t \\ y' = -4x + 2y + 2t\ln t \end{cases}$$

Для начала решим однородное:

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -4x + 2y \end{cases}$$

Смотрим:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

Получаем $\lambda_1 = 0$ кратности 2. Теперь смотрим собственный вектор:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$2x - y = 0$$

Берем:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ищем присоединенный:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-2x + y = 1$$

Берем:

$$h_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$x = 1 \cdot C_1 \cdot e^{0t} + C_2 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) e^{0t} = C_1 + C_2\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = 2 \cdot C_1 \cdot e^{0t} + C_2 \cdot (2t+2)e^{0t} = 2C_1 + C_2(2t+2)$$

Ну и по методу вариации постоянных:

$$x = C_1(t) + tC_2(t) + \frac{1}{2}C_2(t)$$

$$y = 2C_1(t) + 2tC_2(t) + 2C_2(t)$$

$$x' = C_1'(t) + C_2(t) + tC_2(t)' + \frac{1}{2}C_2(t)'$$

$$y' = 2C_1(t)' + 2tC_2(t)' + 2C_2(t)' + 2C_2(t)$$

Подставляем:

$$\begin{cases} x' = -2x + y + t\ln t \\ y' = -4x + 2y + 2t\ln t \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2(t) + tC_2(t)' + \frac{1}{2}C_2(t)' = -2(C_1(t) + tC_2(t) + \frac{1}{2}C_2(t)) + (2C_1(t) + 2tC_2(t) + 2C_2(t)) + \\ 2C_1(t)' + 2tC_2(t)' + 2C_2(t)' + 2C_2(t) = -4(C_1(t) + tC_2(t) + \frac{1}{2}C_2(t)) + 2(2C_1(t) + 2tC_2(t) + 2C_2 \end{cases}$$

Много букв, что аж не влезает, но там все сокращается и остается просто:

$$\begin{cases} C_1'(t) + tC_2(t)' + \frac{1}{2}C_2(t)' = t\ln t \\ 2C_1(t)' + 2tC_2(t)' + 2C_2(t)' = 2t\ln t \end{cases}$$

Из второго уравнения вычитаем первое, умноженное на два:

$$C_2(t)' = 2t\ln t - 2t\ln t$$

$$C_2(t)' = 0$$

$$C_2(t) = D_2$$

Отсюда:

$$C_1(t)' = t\ln t$$

$$C_1(t) = \int t\ln t = \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 1) + D_1$$

Подставляем:

$$x = \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 1) + D_1 + t \cdot D_2 + \frac{1}{2}D_2$$

$$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}t^2(2\ln t - 1) + D_1\right) + 2tD_2 + 2D_2$$

Номер 4

а)

$$\begin{cases} x' = x + y + 3t + 6 \\ y' = -10x - y + 6t + 3 \end{cases}, \ x(0) = y(0) = 0$$

Применяем преобразование Лапласа:

$$x(t) \overset{L}{\to} X(p)$$

$$x'(t) \overset{L}{\to} pX(p) - x(0) = pX(p)$$

$$y(t) \overset{L}{\to} Y(p)$$

$$y(t)' \overset{L}{\to} pY(p) - y(0) = pY(p)$$

Ну и для функций справа:

$$3t + 6 \overset{L}{\to} \frac{6p+3}{p^2}$$

$$6t + 3 \overset{L}{\to} \frac{3p+6}{p^2}$$

Тогда получаем:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + Y(p) + \frac{6p+3}{p^2} \\ pY(p) = -10X(p) - Y(p) + \frac{3p+6}{p^2} \end{cases}$$

Выражаем $Y(p)$:

$$\begin{cases} Y(p) = pX(p) - X(p) - \frac{6p+3}{p^2} \\ p\left(pX(p) - X(p) - \frac{6p+3}{p^2}\right) = -10X(p) - \left(pX(p) - X(p) - \frac{6p+3}{p^2}\right) + \frac{3p+6}{p^2} \end{cases}$$

Поработаем со вторым уравнением, пусть $X = X(p), Y = Y(p)$, чтобы не городить символов, раскрываем скобки, все с X переносим в левую часть:

$$pX(p-1) + 10X + pX - X = \frac{9p+9}{p^2} + \frac{6p+3}{p}$$

$$X\left(p(p-1) + 10 + p - 1\right) = \frac{9p+9}{p^2} + \frac{6p+3}{p}$$

$$X = \frac{\frac{9p+9}{p^2} + \frac{6p+3}{p}}{\left(p(p-1) + 10 + p - 1\right)}$$

$$X = \frac{\frac{9p+9+6p^2+3p}{p^2}}{p^2-p+9+p}$$

$$X = \frac{\frac{6p^2+12p+9}{p^2}}{p^2+9}$$

$$X = \frac{6p^2+12p+9}{p^4+9p^2}$$

Вспоминаем про нашу систему и ищем $Y(p) = Y$:

$$Y = pX - X - \frac{6p+3}{p^2}$$

$$Y = \frac{p(6p^2+12p+9)}{p^4+9p^2} - \frac{6p^2+12p+9}{p^4+9p^2} - \frac{6p+3}{p^2}$$

$$Y = \frac{p(6p^2+12p+9)-(6p^2+12p+9)}{p^2(p^2+9)} - \frac{(6p+3)(p^2+9)}{p^2(p^2+9)}$$

$$Y = \frac{6p^3+12p^2+9p-6p^2-12p-9-6p^3-3p^2-54p-27}{p^2(p^2+9)}$$

$$Y = \frac{3(p^2-19p-12)}{p^2(p^2+9)}$$

Итого получили:

$$\begin{cases} X(p) = \frac{6p^2+12p+9}{p^2(p^2+9)} \\ Y(p) = \frac{3(p^2-19p-12)}{p^2(p^2+9)} \end{cases}$$

Теперь надо сделать обратное преобразование, упростим дроби до чего-то более понятного, начнем с $X(p)$:

$$\frac{6p^2+12p+9}{p^2(p^2+9)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+9}$$

Ищем коэффы:

$$6p^2+12p+9 = Ap(p^2+9) + B(p^2+9) + (Cp+D)p^2$$

$$6p^2+12p+9 = Ap^3 + Ap9 + Bp^2 + B9 + Cp^3 + Dp^2$$

$$6p^2+12p+9 = p^3(A+C) + p^2(B+D) + p9A + 9B$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=6 \\ 9A=12 \\ 9B=9 \end{cases} \sim \begin{cases} C=-\frac{4}{3} \\ D=5 \\ A=\frac{4}{3} \\ B=1 \end{cases}$$

Итого:

$$\frac{6p^2+12p+9}{p^2(p^2+9)} = \frac{4}{3p}+\frac{1}{p^2}+\frac{5-\frac{4}{3}p}{p^2+9} = \frac{4}{3p}+\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p^2+9}-\frac{\frac{4}{3}p}{p^2+9} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{4}{3}+t+\frac{5}{3}\sin 3t+\frac{4}{3}\cos 3t$$

Теперь тоже самое проделываем с $Y(p)$:

$$\frac{3(p^2-19p-12)}{p^2(p^2+9)} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+9}$$

$$3(p^2-19p-12) = (A+C)p^3+(B+D)p^2+9Ap+9B$$

$$\begin{cases} 0 = A+C \\ 3 = B+D \\ -57 = 9A \\ -36 = 9B \end{cases} \sim \begin{cases} C = \frac{19}{3} \\ D = 7 \\ A = -\frac{19}{13} \\ B = -4 \end{cases}$$

Итого:

$$\frac{3(p^2-19p-12)}{p^2(p^2+9)} = -\frac{19}{13p}-\frac{4}{p^2}+\frac{\frac{19}{3}p}{p^2+9}+\frac{7}{p^2+9} \xrightarrow{L^{-1}} -\frac{19}{3}-4t+\frac{19}{13}\cos 3t+\frac{7}{3}\sin 3t$$

Получаем:

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4}{3}+t+\frac{5}{3}\sin 3t+\frac{4}{3}\cos 3t \\ y(t) = -\frac{19}{3}-4t+\frac{19}{13}\cos 3t+\frac{7}{3}\sin 3t \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' = -x - y + e^{2t} \\ y' = 2x + 2y + 2e^{2t} \end{cases}, \ x(0) = y(0) = 1$$

Делаем тоже самое:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(p)$$

$$x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$$

$$y(t) \xrightarrow{L} Y(p)$$

$$y(t)' \xrightarrow{L} pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

$$e^{2t} \xrightarrow{L} \frac{1}{p-2}$$

$$2e^{2t} \xrightarrow{L} \frac{2}{p-2}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) - Y(p) + \frac{1}{p-2} \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 2Y(p) + \frac{2}{p-2} \end{cases}$$

Выражаем $Y(p)$, пусть аналогично $X = X(p), Y = Y(p)$:

$$\begin{cases} Y = 1 - X - pX + \frac{1}{p-2} \\ p\left(1 - X - pX + \frac{1}{p-2}\right) - 1 = 2X + 2\left(1 - X - pX + \frac{1}{p-2}\right) + \frac{2}{p-2} \end{cases}$$

Второе выражение:

$$X(-p^2 + p) = 3 - p + \frac{-p+4}{p-2}$$

$$X = \frac{p^2 - 4p + 2}{p(p-1)(p-2)}$$

Тогда:

$$Y = 1 - \frac{p^2 - 4p + 2}{p(p-1)(p-2)} - p\frac{p^2 - 4p + 2}{p(p-1)(p-2)} + \frac{1}{p-2}$$

$$Y = \frac{p^2 + 3p - 2}{p(p-1)(p-2)}$$

Суммируем:

$$\begin{cases} X(p) = \frac{p^2-4p+2}{p(p-1)(p-2)} \\ Y(p) = \frac{p^2+3p-2}{p(p-1)(p-2)} \end{cases}$$

Начнем с $X(p)$:

$$\frac{p^2-4p+2}{p(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2}$$

Ищем коэффы:

$$p^2 - 4p + 2 = A(p-1)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p-1)$$

$$p^2 - 4p + 2 = Ap^2 - 3Ap + 2A + Bp^2 - 2Bp + Cp^2 - Cp$$

$$p^2 - 4p + 2 = p^2(A + B + C) + p(3A - 2B - C) + 2A$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 3A - 2B - C = -4 \\ 2A = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} C = -1 \\ B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

Значит:

$$\frac{p^2-4p+2}{p(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} \xrightarrow{L^{-1}} 1 + e^t - e^{2t}$$

Теперь разбираемся с $Y(p)$:

$$\frac{p^2+3p-2}{p(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2}$$

$$p^2 + 3p - 2 = p^2(A + B + C) + p(3A - 2B - C) + 2A$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 3A - 2B - C = -4 \\ 2A = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} C = 4 \\ B = -2 \\ A = -1 \end{cases}$$

Значит:

$$\frac{p^2+3p-2}{p(p-1)(p-2)} = -\frac{1}{p} - \frac{2}{p-1} + \frac{4}{p-2} \xrightarrow{L^{-1}} -1 - 2e^t + 4e^{2t}$$

Получаем:

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + e^t - e^{2t} \\ y(t) = -1 - 2e^t + 4e^{2t} \end{cases}$$