Матан, дз – 9

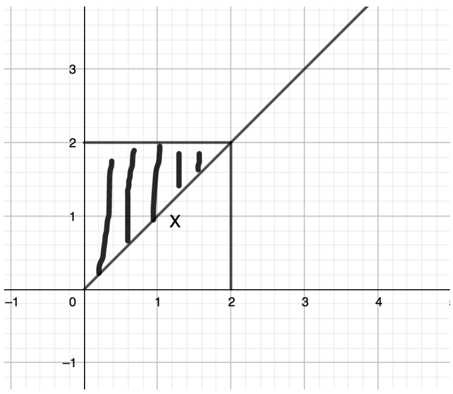
Бурмашев Григорий, БПМИ-208

15 ноября 2021 г.

Номер 1

$$\int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2)dy = \int_0^2 dx \int_x^2 x^2 \ln(1+y^2)dy \ (=)$$

Рисуем графичек, внешним интегралом (по иксу) идем от 0 до 2, а внутренним (по y) идем от x до 2, визуально:



Ну теперь собственно "переворачиваем" графичек, меняем порядок интегрирования и считаем:

$$(=) \int_0^2 dy \int_0^y x^2 \ln(1+y^2)dx = \int_0^2 \ln(1+y^2)\frac{x^3}{3}\Big|_0^y dy =$$

$$= \int_0^2 \ln(1+y^2)\frac{y^3}{3}dy = \frac{1}{3}\int_0^2 \ln(1+y^2)y^3 dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}y^4\log(y^2+1)\Big|_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{2y^5}{y^2+1}dy\right) = \frac{1}{3}\left(4\ln 5 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{y^5}{y^2+1}dy\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(4\ln 5 - \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{u^2}{u+1}du\right) = \frac{1}{3}\left(4\ln 5 - \frac{1}{4}\left(4+\ln 5\right)\right) = \frac{1}{3}\left(4\ln 5 - 1 - \frac{\ln 5}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{15\ln 5}{4} - 1\right) = \frac{5\ln 5}{4} - \frac{1}{3}$$

Ответ:

$$\int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2) dy = \frac{5\ln 5}{4} - \frac{1}{3}$$

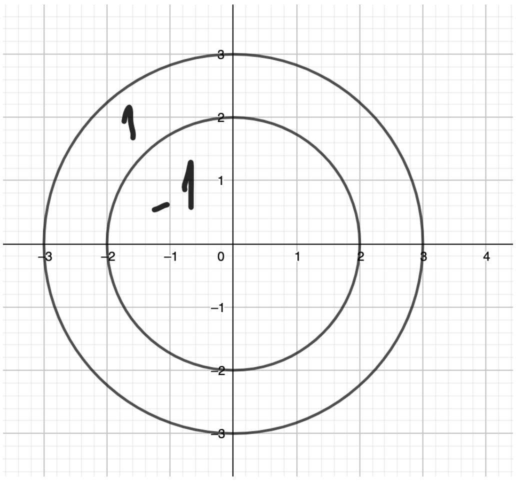
Номер 2

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2+y^2-4)dxdy, D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 9\}$$

По определению функции sgn:

$$\operatorname{sgn}(x^2+y^2-4) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2 > 4 \\ 0, & x^2+y^2 = 4 \\ -1, & x^2+y^2 < 4 \end{cases}$$

Тогда можно нарисовать графичек:



Т.е на внутреннем круге радиусом 2 получаем значение функции -1, а на кольце 1. Можем сразу посчитать площади: площадь большого круга с радиусом 3 есть 9π, площадь маленького круга есть 4π, тогда площадь кольца $9\pi - 4pi = 5\pi$. На точки где функция принимает 0 ($x^2+y^2=4$) забиваем, ибо 0 нас не интересует. Итого:

$$\iint\limits_{x^2+y^2<4} -1dxdy + \iint\limits_{4<x^2+y^2<9} 1dxdy = -1\cdot 4\pi + 1\cdot 5\pi = 5\pi - 4\pi = \pi$$

Ответ:

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2+y^2-4)dxdy = \pi$$