Матан, дз – 5

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

12 октября 2021 г.

Номер 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + nx + n^2}, D = (0, \infty)$$

Воспользуемся признаком Вейерштрасса:

Теорема 5.2. (Признак Вейерштрасса) Если $|a_n(x)| \leqslant b_n$ при $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, а ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.

Заметим, что $D = (0, \infty)$, n идет от 1 до ∞, отсюда делаем вывод, что $x^2 + nx + n^2$ в знаменателе будет положительным, а значит:

$$\frac{1}{x^2 + nx + n^2} < \frac{1}{n^2}$$

Но поскольку все члены нашего ряда положительные $(x > 0, n >= 1)$, то выполняется:

$$\left|\frac{1}{x^2 + nx + n^2}\right| < \frac{1}{n^2} \ \forall x \in D = (0, \infty)$$

При этом заметим, что ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (очевидно), а значит по признаку Вейерштрасса наш исходный ряд сходится абсолютно и равномерно

Ч.Т.Д

Номер 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}},\ D=(-1,1)$$

Предположим, что ряд сходится равномерно на $(-1,1)$, тогда он должен сходиться равномерно и на $[-1,1]$ (аналогично подобной задаче с семинара), **но** в граничной точке $x=1$ мы получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

Видим, что такой ряд будет расходится $\rightarrow$ исходный ряд сходится не равномерно

Ч.Т.Д