Бурмашев Григорий. 208. Алгебра – 7

Номер 1

$$I = (x^2y + 2z^2(= f_1), y^2 - yz = (f_2))$$
$$g_1 = x^3z^3 + 3xyz^3$$
$$g_2 = x^3y^2z + 2xy^2z^2$$

Решаем стандартным алгоритмом:

1) Строим базис Гребнера:

$$S(f_1, f_2) = yf_1 - x^2f_2 = x^2y^2 + 2yz^2 - (x^2y^2 - x^2yz) = 2yz^2 + x^2yz \xrightarrow{f_1} 2yz^2 - 2z^3 = 2(yz^2 - z^3)$$

Дальше не редуцируется, значит добавляем $f_3 = yz^2 - z^3$

$$S(f_1, f_3) = z^2f_1 - x^2f_3 = x^2yz^2 + 2z^4 - x^2yz^2 + x^2z^3 = x^2z^3 + 2z^4$$

Дальше не редуцируется, значит добавляем $f_4 = x^2z^3 + 2z^4$

$$S(f_1, f_4) = z^3f_1 - yf_4 = 2z^5 - 2yz^4 \xrightarrow{f_3(2z^2)} 0$$
$$S(f_2, f_3) = z^2f_2 - yf_3 = y^2z^2 - yz^3 - (y^2z^2 - yz^3) = -yz^3 + yz^3 = 0$$
$$S(f_2, f_4) = x^2z^3f_2 - y^2f_4 = -x^2yz^4 - 2y^2z^4 \xrightarrow{f_4(yz)} -2y^2z^4 + 2yz^5 \xrightarrow{f_3(yz^2)} 0$$
$$S(f_3, f_4) = x^2zf_3 - yf_4 = -x^2z^4 - 2yz^4 \xrightarrow{f_4(z)} 2z^5 - 2yz^4 \xrightarrow{f_3(2z^2)} 0$$

Проверили для всех f, алгоритм построения базиса закончен, получили базис : (f_1, f_2, f_3, f_4)

$$f_1 = x^2y + 2z^2$$
$$f_2 = y^2 - yz$$
$$f_3 = yz^2 - z^3$$
$$f_4 = x^2z^3 + 2z^4$$

2) Редуцируем g_1 и g_2 относительно полученного базиса:

- g_1
$$x^3z^3 + 3xyz^3 \overset{f_4(x)}{\to} 3xyz^3 - 2xz^4 \overset{f_3(3xz)}{\to} xz^4$$
Далее не редуцируется, значит g_1 не принадлежит идеалу I

- g_2
$$x^3y^2z + 2xy^2z^2 \overset{f_1(xyz)}{\to} 2xy^2z^2 - 2xyz^3 \overset{f_3(2xy)}{\to} 0$$
Значит g_2 принадлежит идеалу I

Ответ: g_1 не принадлежит, g_2 принадлежит

Номер 2

$$(xy + 2yz, x - y^2, yz^2 - y) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$$

$$z > x > y$$

Делаем замену для удобства [это было гигантской ошибкой]:

$$z = x', x = y', y = z'$$

$$(y'z' + 2z'x', y' - z'^2, z'x'^2 - z')$$

$$(2x'z' + y'z'(= f_1), y' - z'^2(= f_2), x'^2z' - z'(= f_3))$$

Теперь строим базис Гребнера:

$$S(f_1, f_2) = y'f_1 - 2x'z'f_2 = 2x'z'^3 + y'^2z' \overset{f_1(z'^2)}{\to} y'^2z' - y'z'^3 \overset{f_2(y'z')}{\to} 0$$

$$S(f_1, f_3) = x'f_1 - 2f_3 = x'y'z' + 2z' \overset{f_2(x'z')}{\to} x'z'^3 + 2z' \overset{f_1(\frac{1}{2}z'^2)}{\to} 2z' - \frac{1}{2}y'z'^3 \overset{f_2(\frac{1}{2}z'^3)}{\to} -\frac{1}{2}(z'^5 - 4z')$$

Далее редуцировать не можем, поэтому поставим $f_4 = z'^5 - 4z'$

$$S(f_1, f_4) = z'^4f_1 - 2x'z'f_4 = 8x'z' + y'z'^5 \overset{f_1(4)}{\to} y'z'^5 - 4y'z' \overset{f_4(y')}{\to} 0$$

$$S(f_2, f_3): \text{ т.к } gcd(L(f_2), L(f_3)) = 1 \text{ то } S(f_2, f_3) \rightsquigarrow 0$$

$$S(f_2, f_4): \text{ т.к } gcd(L(f_2), L(f_4)) = 1 \text{ то } S(f_2, f_4) \rightsquigarrow 0$$

$$S(f_3, f_4) = z'^4f_3 - x'^2f_4 = 4x'^2z' - z'^5 \overset{f_3(4)}{\to} 4z' - z'^5 \overset{f_4}{\to} 0$$

Получаем базис Гребнера из (f_1, f_2, f_3, f_4):

$$f_1 = 2x'z' + y'z'$$

$$f_2 = y' - z'^2$$

$$f_3 = x'^2z' - z'$$

$$f_4 = z'^5 - 4z'$$

Видим, что $L(f_3) = x'^2z'$ делится на $L(f_1) = 2x'z'$, значит мы можем f_3 выкинуть и искать минимальный редуцированный базис Грёбнера по (f_1, f_2, f_4):

$$(2x'z' + y'z', y' - z'^2, z'^5 - 4z')$$

$$f_1 - z' \cdot f_2:$$

$$(2x'z' + z'^3, y' - z'^2, z'^5 - 4z')$$

избавляемся от коэффов:

$$(x'z' + \frac{1}{2}z'^3, y' - z'^2, z'^5 - 4z')$$

теперь возвращаемся к замене:

$$(yz + \frac{1}{2}y^3, x - y^2, y^5 - 4y)$$

Ответ:

$$(yz + \frac{1}{2}y^3, x - y^2, y^5 - 4y)$$

Номер 3

$$I = (x^2y + 2xz + z^2, y^2z - 2z)$$

- Ищем для $\mathbb{R}[x,y]$:

  Делаем как на семинаре, задаем порядок $z > x > y$ и ищем базис Гребнера:

  $$S(f_1, f_2) = y^2f_1 - zf_2 = x^2y^3 + 2zxy^2 + 2z^2 \xrightarrow{f_1(2)} x^2y^3 + 2zxy^2 - 2x^2y - 4xz \xrightarrow{f_2(2x)} x^2y^3 - 2x^2y$$

  Далее не можем, поэтому пусть $f_3 = x^2y^3 - 2x^2y$

  $$S(f_1, f_3): \text{ т.к } gcd(L(f_1), L(f_3)) = 1 \text{ то } S(f_1, f_3) \rightsquigarrow 0$$

  $$S(f_2, f_3) = x^2yf_2 - zf_3 = -2zx^2y + 2zx^2y = 0$$

  Все проверили, значит (f_1, f_2, f_3) – базис Грёбнера. Теперь для пересечения берем те f, которые зависят только от x и y, это:

  $$f_3 = x^2y^3 - 2x^2y$$

- Ищем для $\mathbb{R}[x,z]$:

  Задаем порядок $y > z > x$ [мне сказали, что так проще]

  $$S(f_1, f_2) = yzf_1 - x^2f_2 = 2x^2z + 2xyz^2 + yz^3 \rightarrow$$

  Дальше не можем, ставим $f_3 = 2x^2z + 2xyz^2 + yz^3$

  $$S(f_1, f_3) = z^3f_1 - x^2f_3 = -2x^4z - 2x^3yz^2 + 2xz^4 + z^5 \xrightarrow{f_1(2xz^2)} -2x^4z + 4x^2z^3 + 4xz^4 + z^5$$

  Дальше не можем, ставим $f_4 = -2x^4z + 4x^2z^3 + 4xz^4 + z^5$

  $$S(f_1, f_4): \text{ т.к } gcd(L(f_1), L(f_4)) = 1 \text{ то } S(f_1, f_4) \rightsquigarrow 0$$

  $$S(f_2, f_3) = z^2f_2 - yf_3 = -2x^2yz - 2xy^2z^2 - 2z^3 \xrightarrow{f_2(2xz)} -2x^2yz - 4xz^2 - 2z^3 \xrightarrow{f_1(2z)} 0$$

  $$S(f_2, f_4) = z^4f_2 - y^2f_4 = 2x^4y^2z - 4x^2y^2z^3 - 4xy^2z^4 - 2z^5 \xrightarrow{f_2(4xz^3)}$$

  $$\xrightarrow{f_2(4xz^3)} 2x^4y^2z - 4x^2y^2z^3 - 8xz^4 - 2z^5 =$$

  $$= -4x^4z + 2x^4y^2z + 8x^2z^3 - 4x^2y^2z^3 \xrightarrow{f_2(4x^2z^2)} -4x^4z + 2x^4y^2z \xrightarrow{f_2(2x^4)} 0$$

  $$S(f_3, f_4) = z^2f_3 - yf_4 = 2x^4yz + 2x^2z^3 - 4x^2yz^3 - 2xyz^4 \xrightarrow{f_3(2xz)} 2x^4yz + 4x^3z^2 + 2x^2z^3 \xrightarrow{f_1(2x^2z)} 0$$

  Получили базис из (f_1, f_2, f_3, f_4). Теперь для пересечения берем те f, которые зависят только от x и z, т.е:

  $$f_4 = -2x^4z + 4x^2z^3 + 4xz^4 + z^5$$

  [пока считал я умер, если где-то ошибься, сорри :()]

Ответ:

для $\mathbb{R}[x, y]$:

$$x^2y^3 - 2x^2y$$

для $\mathbb{R}[x, z]$:

$$-2x^4z + 4x^2z^3 + 4xz^4 + z^5$$