Матан, дз – 5

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

15 февраля 2022 г.

Номер 1

$$F(p) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x} \sin 3x \; dx, p, q > 0$$

1) Дифференцируем по параметру, возьмем p, начинаем обосновывать. Проблемы у нас в нуле, так что нужно будет доопределить (синус в нуле ведет себя как ноль):

$$f = \begin{cases} \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x} \sin 3x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f непрерывна на $[0, +\infty) \times [c, d], c > 0$, c содержит в себе q. Берем производную по параметру:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{cases} -e^{-px} \sin 3x & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что в нуле производная для $x > 0$ тоже дает ноль, так что можно избавиться от системы:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -e^{-px} \sin 3x, x \geq 0, \text{ непрерывна там же}$$

2) $\exists\; p_0 = q : \int\limits_0^\infty \frac{e^{-p_0 x} - e^{-qx}}{x} \sin 3x = \int\limits_0^\infty 0 dx$ сходится

3) $-\int\limits_0^\infty e^{-px} \sin 3x$ равномерно сходится на $[c, d]$ по признаку Вейерштрасса

: $|-e^{-px}\sin 3x| \le e^{-cx}$, а $\int\limits_0^\infty e^{-cx}dx$ сходится. Значит на $[c,d]$ можно брать производную по теореме о дифференцировании НИЗП:

$$F'(p) = -\int\limits_0^\infty e^{-px}\sin 3x dx$$

А в силу произвольности выбора c, d мы можем утверждать это для любого $p > 0$:

$$F'(p) = -\int\limits_0^\infty e^{-px}\sin 3x dx, p > 0$$

Ну а теперь считаем:

$$-\int\limits_0^\infty e^{-px}\sin 3x dx = -\left(\frac{e^{-px}}{p^2+9}\left(-p\sin 3x - 3\cos 3x\right)\right)\Bigg|_0^{+\infty} = -\left(0 + \frac{3}{p^2+9}\right) = -\frac{3}{p^2+9}$$

Тогда:

$$F(p) = -\int \frac{3}{p^2+9} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{3}\right) + C$$

Нужно найти константу, возьмем $p = q$, тогда:

$$F(q) = 0 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{q}{3}\right) + C$$

$$C = \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{3}\right)$$

Итого:

$$F = -\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{3}\right)$$

Ответ:

$$F = -\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{q}{3}\right)$$

Номер 2

$$\int\limits_0^\infty xe^{-px}\cos 2xdx, p > 0$$

Заметим, что номер аналогичен 7 с семинара и при откидывании икса и последующем взятии частной производной мы вернемся к исходной функции, т.е:

$$(-e^{-px}\cos 2x)'_p = xe^{-px}\cos 2x$$

Поэтому рассмотрим интеграл $\int -e^{-px}\cos 2xdx$, а его мы как раз считали в 4 номере из семинара. Так что:

$$F(p) = -\int\limits_0^\infty e^{-px}\cos 2xdx = -\frac{e^{-px}}{p^2+4}(2\sin 2x - p\cos 2x)\Bigg|_0^\infty = -\frac{p}{p^2+4}$$

Теперь обосновываем:

1)

$$f = e^{-px}\cos 2x \text{ непрерывна}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -xe^{-px}\cos 2x \text{ непрерывна на } [0, +\infty] \times [c, d]$$

2) $\exists\, p_0 > 0$ – любой, т.к сходится

3) $\int\limits_0^\infty xe^{-px}\cos 2xdx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, т.к $|-xe^{-px}\cos 2x| \le |-xe^{-px}| \le xe^{-cx}$. Ну а такой интеграл сходится. Значит по той же теореме из 1 номера:

$$F'(p) = \int\limits_0^\infty xe^{-px}\cos 2xdx = \left(-\frac{p}{p^2+4}\right)' = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$$

Ответ:

$$\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$$

Номер 3

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx, p > 0$$

Можно заметить, что т.к у нас тут ln, то от более простой функции можно прийти к нашей исходной с помощью производных, а именно:

$$(x^{p-1})'_p = x^{p-1} \ln x$$

$$(x^{p-1})''_p = \left(x^{p-1} \ln x\right)'_p = x^{p-1} \ln^2 x$$

Так что рассмотрим:

$$F(p) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$$

Но надо это все будет обосновать, так что по теореме о дифференцируемости проверяем сначала первый переход (от $F(p)$ к $F'(p)$):
1)

$$f = x^{p-1} \text{ непрерывна}$$

В частной производной проблемы из-за $\ln x$, так что дополним

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{cases} x^{p-1} \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ непрерывна на } [0,1] \times [c,d]$$

2) $\exists\, p_0 > 0$ – любой, т.к $\int\limits_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$сходится

3) $\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln x$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса : $|x^{p-1} \ln x| \leq |x^{c-1} \ln x|$. Ну а $\lim\limits_{a \to 0} \int\limits_a^1 x^{c-1} \ln x dx$ сходится как собственный интеграл.Значит по теореме о дифференцируемости:

$$F'(p) = \left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$$

Теперь проверяем второй переход, чтобы наконец вернуться к исходной функции, рассмотрим:

$$F'(p) = \int_0^1 x^{p-1} \ln x$$

1)

$$f = \begin{cases} x^{p-1}\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ непрерывна}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{cases} x^{p-1}\ln^2 x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ непрерывна на } [0,1]\times[c,d]$$

2) $\exists\, p_0 > 0$ – любой, т.к т.к $\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln x dx = -\frac{1}{p^2}$ сходится

3) $\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln^2 x$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса : $|x^{p-1}\ln^2 x| \leq |x^{c-1}\ln^2 x|$. Ну а $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^1 x^{c-1}\ln^2 x dx$ сходится как собственный интеграл. Значит по теореме о дифференцируемости:

$$F''(p) = \left(-\frac{1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3}$$

Ну а из показанного в самом начале это и будет нашим исходным интегралом, т.е:

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x dx, = F''(p) = \frac{2}{p^3}$$

Ответ:

$$\frac{2}{p^3}$$

Номер 4

$$F(p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - 1}{\ln x} dx, p > 0$$

Начинаем обосновывать:
1) Проблема у нас при $x = 1$, т.к имеем логарифм, так что нужно будет доопределить, при стремлении к 1 получаем неопределенность $(\frac{0}{0})$, поэтому посмотрим по Лопиталю:

$$\frac{x^{p-1} - 1}{\ln x} \sim \frac{(p-1)x^{p-2}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 1]{} p - 1$$

$$f = \begin{cases} \frac{x^{p-1}-1}{\ln x}, & x > 1 \\ p - 1, & x = 1 \end{cases}$$

f непрерывна на $[0, 1] \times [c, d]$, берем производную по параметру:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{cases} x^{p-1}, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Заметим, что в единице производная для $x > 1$ тоже дает один, так что можно избавиться от системы:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = x^{p-1}$$

2) $\exists\, p_0 = 1 : \int\limits_0^1 \frac{x^{p_0-1}-1}{\ln x} dx = \int\limits_0^1 0 dx$ сходится

3) $\int\limits_0^1 x^{p-1} dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса: $|x^{p-1}| \le x^{c-1}$, а $\int\limits_0^1 x^{c-1} dx$ сходится. Значит можно брать производную по теореме о дифференцировании НИЗП:

$$F'(p) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$$

Отсюда:

$$F = \int \frac{1}{p} = \ln p + C$$

Нужно найти константу, возьмем $p = 1$, тогда:

$$F(1) = 0 = \ln p + C$$

$$C = 0$$

Итого:

$$F = \ln p$$

Ответ:

$$F = \ln p$$