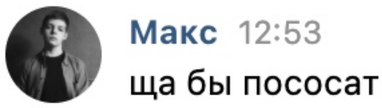
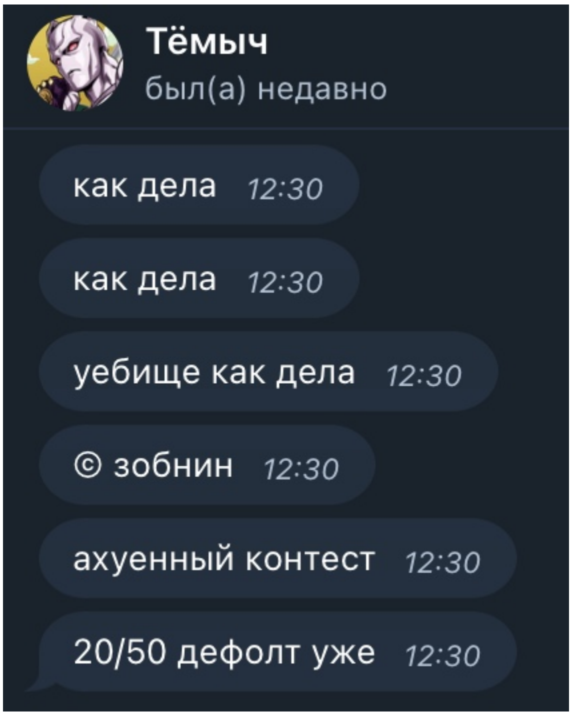
Бурмашев Григорий. 208. Матан – 5





Номер 8

а)

$$\int \mathrm{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \mathrm{arctg} x \, dx =$$

Интегрируем по частям:

$$u' = 1$$

$$u = x$$

$$v = \mathrm{arctg} x$$

$$v' = \frac{1}{1+x^2}$$

Тогда:

$$= x\mathrm{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx =$$

Этот интеграл уже считали на семе:

$$= x\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Ответ:

$$x\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

b)

$$\int x^2 \cos^2 x \, dx =$$

Интегрируем по частям:

$$u' = \cos^2 x$$
$$u = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$
$$v = x^2$$
$$v' = 2x$$

Тогда:

$$= x^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) - 2 \int x \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \, dx = \left(\frac{x^3}{2} + \frac{\sin 2x \cdot x^2}{4} \right) - \frac{2x^3}{6} - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot x \, dx$$

Интегрируем по частям:

$$f' = \sin 2x$$
$$f = -\frac{\cos 2x}{2}$$
$$g = x$$
$$g' = 1$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2x \cdot x}{2} - \int -\frac{\cos 2x \cdot 1}{2} \, dx \right) = -\frac{x \cdot \cos 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, dx = \frac{x \cdot \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C$$

Тогда:

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{\sin 2x \cdot x^2}{4} + \frac{x \cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + C$$

Ответ:

$$\frac{x^3}{6} + \frac{\sin 2x \cdot x^2}{4} + \frac{x \cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + C$$

c)

$$\int \ln^2 x \, dx =$$

Интегрируем по частям:

$$u' = 1$$

$$u = x$$

$$v = \ln^2 x$$

$$v' = \frac{2\ln x}{x}$$

Тогда:

$$= x\ln^2 x - 2 \cdot \int \ln x \, dx =$$

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x\ln x - x$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

Ответ:

$$x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

d)

$$\int x^2 \ln(1+x) \, dx$$

Интегрируем по частям:

$$u' = x^2$$

$$u = \frac{x^3}{3}$$

$$v = \ln(1+x)$$

$$v' = \frac{1}{1+x}$$

Тогда:

$$\frac{x^3 \cdot \ln(1+x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{x^3}{(1+x)} \, dx =$$

Найдем отдельно интеграл:

$$\int \frac{x^3}{1+x} \, dx = \begin{bmatrix} t = 1+x \\ x = t-1 \end{bmatrix} = \int \frac{(t-1)^3}{t} \, dt = \int \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t} \, dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 3t - \ln(t) + C = \frac{(1+x)^3}{3} - \frac{3(1+x)^2}{2} + 3(1+x) - \ln(1+x) + C$$

Итого:

$$\frac{x^3 \cdot \ln(1+x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{3(1+x)^2}{2} + 3(1+x) - \ln(1+x)\right) + C =$$

$$= \frac{x^3 \cdot \ln(1+x)}{3} - \frac{(1+x)^3}{9} - \frac{(1+x)^2}{2} + (1+x) - \frac{\ln(1+x)}{3} + C =$$

$$= \frac{(x^3-1)[\ln(1+x)]}{3} - \frac{(1+x)^3}{9} - \frac{(1+x)^2}{2} + (1+x) + C$$

Ответ:

$$\frac{(x^3-1)[\ln(1+x)]}{3} - \frac{(1+x)^3}{9} - \frac{(1+x)^2}{2} + (1+x) + C$$

e)

$$\int \sin(\ln x)\, dx$$

Сделаем замену:

$$t = \ln x$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

Тогда:

$$\int \sin(t) e^t\, dt$$

Интегрируем по частям:

$$u' = e^t$$

$$u = e^t$$

$$v = \sin t$$

$$v' = \cos t$$

Тогда:

$$\int \sin(t) e^t\, dt = \sin(t) e^t - \int \cos(t) e^t\, dt$$

Найдем интеграл отдельно:

$$\int \cos(t) e^t\, dt = e^t \cdot \cos(t) + \int \sin(t) e^t\, dt + C$$

Итого:

$$\int \sin(t)e^t\,dt = \sin(t)e^t - e^t \cdot \cos(t) - \int \sin(t)e^t\,dt + C$$

Перенесем интеграл в левую часть:

$$2\int \sin(t)e^t\,dt = \sin(t)e^t - e^t \cdot \cos(t) + C$$

$$\int \sin(t)e^t\,dt = \frac{\sin(t)e^t - e^t \cdot \cos(t)}{2} + C$$

Ответ:

$$\frac{\sin(\ln x) \cdot x - x \cdot \cos(\ln x)}{2} + C$$

f)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$$

Интегрируем по частям:

$$u' = 1$$

$$u = x$$

$$v = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$v' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Тогда:

$$x \cdot \sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx$$

Найдем интеграл:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \int \left(\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx - a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

Тогда:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx + a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

Перенесем интеграл в левую часть:

$$2\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}{2} + C$$

Ответ:

$$\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}{2} + C$$

g)

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx$$

Интегрируем по частям:

$$u' = e^{ax}$$

$$u = a\cdot e^{ax}$$

$$v = \cos(bx)$$

$$v' = \frac{\sin(bx)}{b}$$

Тогда:

$$= \frac{e^{ax}\cdot\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\sin(bx)\cdot e^{ax}}{1}\,dx$$

Найдем интеграл отдельно:

$$\int \sin(bx)\cdot e^{ax}\,dx = -\frac{e^{ax}\cdot\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\int \frac{e^{ax}\cdot\cos(bx)}{1}\,dx$$

Тогда:

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx = \frac{\sin(bx)\cdot e^{ax}}{2} - \frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{e^{ax}\cdot\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\cdot\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx\right) + C =$$

$$= \frac{\sin(bx)\cdot e^{ax}}{2} + \frac{a}{b}\cdot\frac{e^{ax}\cdot\cos(bx)}{b} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx + C$$

Перенесем все налево:

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx\cdot\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{\sin(bx)\cdot e^{ax}}{2} + \frac{a\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx)}{b^2} + C$$

По итогу:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{(e^{ax}\cdot\sin(bx)\cdot b^2 + e^{ax}\cdot cos(bx)\cdot 2a)}{2b^2\cdot\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)} + C$$

Ответ:

$$\frac{\left(e^{ax}\cdot\sin(bx)\cdot b^2 + e^{ax}\cdot cos(bx)\cdot 2a\right)}{2b^2\cdot\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)} + C$$