Бурмашев Григорий. Алгебра. Дз – 6

Номер 1

Начинаем с $x_1^3x_2^2x_3$ и заканчиваем $x_1^3x_2x_3^2$.

Пусть А= $x_1^3x_2^2x_3$, B $= x_1^3x_2x_3^2$ для удобства, т.е A – начало, B – конец

Во – первых x_1 роли не играет, т.к у A и B степени при нем одинаковые, нас интересуют степени при x_2 и x_3. Можем сразу построить цепочку длины 2 из исходных одночленов, т.к степень при x_2 у A больше, а именно:

$$x_1^3x_2^2x_3 \succ x_1^3x_2x_3^2$$

Теперь, чтобы удлинять цепочку, нужно впихивать одночлены посередине. Менять степень при x_1 нельзя из написанного выше. Вставить одночлен вида $x_1^3x_2^2x_3^m, m > 1$ тоже не получится, т.к у A степень при x_3 равна 1, а значит повышать ее с сохранением степени при x_2 не получится. Мы можем вставить одночлен вида $x_1^3x_2^2$, что позволит нам удлинить цепочку до 3 элементов. Остаются многочлены вида $x_1^3x_2x_3^n$. Значит мы сможем для любого сколь угодно большого n $(n > 2)$ построить цепочку следующего вида:

$$x_1^3x_2^2x_3 \succ x_1^3x_2^2 \succ x_1^3x_2x_3^n \succ x_1^3x_2x_3^{n-1} \succ \ldots \succ x_1^3x_2x_3^3 \succ x_1^3x_2x_3^2$$

А значит минимальная длина цепочки будет 2, а максимальная будет соотвественно $n - 2 + 2 = n$. (на самом деле без разницы, как называть, суть в том, что это получится сделать для любого сколь угодно большого числа, при этом условие про невозможность построения бесконечной цепи нарушаться не будет, т.к число конечномерное)

Ответ: длины от 2 до n (заданного выше)

Номер 2

$$g = x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2$$
$$f = x_2^4x_3 - 2x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2$$

Собственно считаем стандартным алгоритмом с лекции:

$$L(f) = x_1x_2^2$$

$$L(g) = x_1^2x_2^2$$

Первый шаг:

$$g \xrightarrow{f} g - x_1 \cdot f = x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^4x_3 = g_1$$
$$L(g_1) = 2x_1^2x_2x_3^2$$

Второй шаг:

по $L(g_1)$ редуцировать не можем, тогда по $x_1x_2^4x_3$ $(-x_2^2x_3 \cdot f)$

$$x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^4x_3 \xrightarrow{f} -x_2^6x_3^2 + x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^3x_3^3 + 2x_1^2x_2x_3^2 = g_2$$
$$L(g_2) = 2x_1^2x_2x_3^2$$

Третий шаг:

тоже не можем, тогда редуцируем по $2x_1x_2^3x_3^3$ $(-2x_2x_3^3 \cdot f\ )$

$$-x_2^6x_3^2+x_2^4x_3^5+2x_1x_2^3x_3^3+2x_1^2x_2x_3^2 \xrightarrow{f} -x_2^6x_3^2-2x_2^5x_3^4+x_2^4x_3^5+2x_1^2x_2x_3^2+4x_1x_2^2x_3^5 = g_3$$

Четвертый шаг:

редуцируем по $4x_1x_2^2x_3^5$ $(-4x_3^5 \cdot f)$

$$-x_2^6x_3^2-2x_2^5x_3^4+x_2^4x_3^5+2x_1^2x_2x_3^2+4x_1x_2^2x_3^5 \xrightarrow{f} 8x_1x_2x_3^7-4x_2^4x_3^6+x_2^4x_3^5-2x_2^5x_3^4+$$

$$+2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 = g_4$$

$$L(g_4) = 2x_1^2x_2x_3^2$$

По $L(g_4)$ не можем редуцировать, но и по всем остальным одночленам тоже (нет одночленов с x_1 и x_2^2), а значит это и есть остаток g относительно системы $\{f\}$.

Ответ:

$$8x_1x_2x_3^7 - 4x_2^4x_3^6 + x_2^4x_3^5 - 2x_2^5x_3^4 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2$$

Номер 3

Будем доказывать по критерию Бухбергера.

Считаем S полиномы от всех пар f и пытаемся их $\rightsquigarrow 0$

- $S(f_1, f_2) : \mathrm{lcm}(f_1, f_2) = 4x_1x_2x_3^2$

$$S(f_1, f_2) = 2x_3^2 \cdot f_1 - x_2 \cdot f_2 = 4x_2 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 8x_1x_3^3$$

$$S(f_1, f_2) \overset{f_2(2x_3)}{\rightarrow} -x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3 \overset{f_3(1)}{\rightarrow} 0$$

Выполняется

- $S(f_2, f_3)$: $\mathrm{lcm}(f_2, f_3) = 4x_1x_2^2x_3^3$

$$S(f_2, f_3) = x_2^2x_3 \cdot f_2 - 4x_1 \cdot f_3 = x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 + 32x_1x_3 + 16x_1x_2$$

$$S(f_2, f_3) \overset{f_1(8)}{\rightarrow} x_2^3x_3^4 - 4x_1^2x_3 - 8x_2x_3^2 \overset{f_3(x_2x_3)}{\rightarrow} 0$$

Выполняется

- $S(f_1, f_3)$: $\mathrm{lcm}(f_1, f_3) = 2x_1x_2^2x_3^3$

$$S(f_1, f_3) = x_2x_3^3 \cdot f_1 - 2x_1 \cdot f_3 = x_2^2x_3^5 + 4x_1x_2x_3^4 + 16x_1x_3 + 8x_1x_2$$

$$S(f_2, f_3) \overset{f_2(x_2x_3^2)}{\rightarrow} 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2 \overset{f_1(4)}{\rightarrow} 0$$

Выполняется

А значит выполнен критерий Бухбергера и множество $\{f_1, f_2, f_3\}$ является системой Грёбнера

Ответ: да, является