Матан, дз – 8

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

8 марта 2022 г.

Номер 1

Сразу говорим что $a_0 = a_k = 0$, т.к функция нечетная, а b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(sign(x)\cdot\sin kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\pi k}{k} = (\times)$$

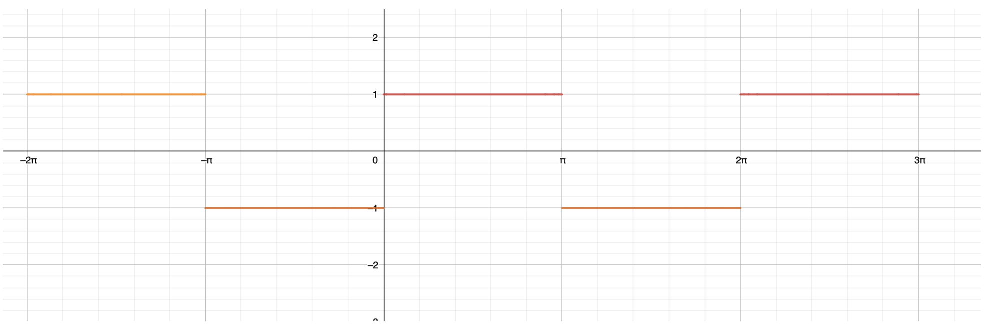
k у нас целые, к тому же при четных k получаем ноль, тогда оставляем только k нечетные, т.е $k = 2n-1$, получаем:

$$(\times) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)}{(2n-1)} = \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

Итого получаем разложение Фурье:

$$sign(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\cdot\sin(2n-1)x$$

Посмотрим на график:



$x_0 \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, тогда ряд Фурье $\longrightarrow f(x_0)$, а в точках разрыва $(x_0 = -\pi, x_0 = 0, x_0 = \pi)$ ряд сходится к полусумме пределов слева и справа, т.е:

$$\longrightarrow \frac{-1+1}{2} = 0, \text{ тогда ряд Фурье} \longrightarrow 0$$

Теперь ищем суммы, начнем с первой:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

В полученный ряд подставим $\frac{\pi}{2}$ и получим (слева 1 т.к очев $sign(\frac{\pi}{2}) = 1$):

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \cdot \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \cdot (-1)^{n+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$$

Ну и отсюда получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{1}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi}{4}$$

Теперь ищем вторую:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Для нахождения напишем равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sign^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^2}{\pi^2(2n-1)^2}$$

Считаем левый интеграл:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sign^2(x) = \frac{1}{\pi} \cdot (\pi - (-\pi)) = 2$$

То есть:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^2}{\pi^2(2n-1)^2} = 2$$

$$\frac{16}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{}{\pi^2(2n-1)^2} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{}{\pi^2(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ответ:

разложение:

$$sign(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \cdot \sin(2n-1)x$$

сходимость:

$$x_0 \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi),\ \text{тогда ряд Фурье} \longrightarrow f(x_0)$$

$$x_0 = -\pi,\ x_0 = 0,\ x_0 = \pi,\ \text{тогда ряд Фурье} \longrightarrow 0$$

суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Номер 2

Теперь смотрим на $[0, 2\pi]$. График функции есть прямая, которая равна нулю в точке $x = \pi$. Функция нечетная относительно этой точки π, а значит $a_0 = a_k = 0$. Ищем b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\sin kx\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin kx dx - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x\sin kx dx = (\times)$$

Считаем отдельно:

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k}\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{\cos 2\pi k}{k} + \frac{\cos 0}{k} = \frac{2\sin^2\pi k}{k} = 0$$

$$\int\limits_0^{2\pi}x\sin kx dx = -\frac{x\cos(kx)}{k}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi}\cos(kx)dx = -\frac{2\pi\cos(2\pi k)}{k} + \frac{\sin(2\pi k)}{k^2} = -\frac{2\pi}{k}$$

Подставляем:

$$(\times) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

Итого получаем разложение Фурье:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(kx)$$

Смотрим график:

$x_0 \in (0, 2\pi)$, тогда ряд Фурье $\longrightarrow f(x_0)$, а в точках разрыва $(0, 2\pi)$ ряд сходится к полусумме пределов слева и справа, т.е при $x_0 = 0, x_0 = 2\pi$ ряд Фурье $\longrightarrow 0$.

Теперь ищем суммы, начнем с первой:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi\frac{n}{3}\right)}{n}$$

Подставим точку $\frac{\pi}{3}$:

$$\frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi\frac{n}{3}\right)}{n}$$

Ну а значит:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi\frac{n}{3}\right)}{n} = \frac{\pi}{3}$$

Смотрим вторую сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Для нахождения напишем равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Найдем интеграл:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\pi - x)^2 dx = \begin{bmatrix} u = \pi - x \\ du = -dx \\ dx = -du \end{bmatrix} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\pi}^{-\pi} u^2 du =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{u^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{-\pi^3}{12\pi} + \frac{\pi^3}{12\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

А значит:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Смотрим третью сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Заметим, что в разложении у нас $\sin(kx)$, мы хотим подставить $\frac{\pi}{2}$, чтобы получить (-1) в степени, но тогда синус будет обращаться в ноль при четных k, а значит тогда делаем аналогично предыдущему номеру $n = 2k - 1$ и получаем:

$$\frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

А значит:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ:

разложение:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kx)$$

сходимость:

$$x_0 \in (0, 2\pi), \text{ряд Фурье } \longrightarrow f(x_0)$$

$$x_0 = 0, x_0 = 2\pi, \text{ряд Фурье } \longrightarrow 0$$

суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{3}\right)}{n} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$