Матан, дз – 1

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

24 января 2022 г.

Номер 1

Вычислить предел:

$$\lim_{y\to 1} \int\limits_0^1 x^2 e^{yx^3} dx$$

Рассмотрим прямоугольник $\prod = [0,1]\times[1-\delta, 1+\delta]$. Заметим, что функция $f = x^2 e^{yx^3}$ является непрерывной, отсюда по теореме о непрерывности можно внести предел:

$$\lim_{y\to 1} \int_0^1 x^2 e^{yx^3} dx = \int_0^1 \lim_{y\to 1} x^2 e^{yx^3} dx = \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^3 \\ du = 3x^2 dx \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{e^u}{3} du = \frac{1}{3} \int_0^1 e^u du = \frac{e^u}{3}\bigg|_0^1 = \frac{e-1}{3}$$

Ответ:

$$\frac{e-1}{3}$$

Номер 2

Вычислить предел:

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_{\sin y}^{\pi\sqrt{y+1}} x\cos((1+y)x)dx$$

Рассмотрим прямоугольник $\prod = [\sin(-\delta), \pi\sqrt{\delta+1}] \times [-\delta, \delta]$. Заметим, что функция $f = x\cos((1+y)x)$ является непрерывной, также являются непрерывными функции $\sin y$, $\pi\sqrt{y+1}$, отсюда по теореме о непрерывности (случай 2 с лекции) можно внести предел:

$$\lim_{y\to 0} \int\limits_{\sin y}^{\pi\sqrt{y+1}} x\cos((1+y)x)dx = \int\limits_{\sin 0}^{\pi\sqrt{0+1}} x\cos((1+0)x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} x\cos x dx \overset{\text{и.п.ч}}{=}$$

$$\overset{\text{и.п.ч}}{=} x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 1\sin x dx = x\sin x\Big|_0^\pi + \cos x\Big|_0^\pi = (0-0) + (-1-1) = -2$$

Ответ:

$$-2$$

Номер 3

Исследовать на дифференцируемость и найти производную функции:

$$F = \int\limits_{e^{-y}}^{e^{y}} \ln(1 + x^2y^2)\frac{dx}{x}$$

Сразу заметим, что e^{-y} и e^{y} являются дифференцируемыми функциями. Рассмотрим прямоугольник $\prod = [e^{-a}, e^{b}] \times [a, b]$. Нам нужно доопределить до непрерывности нашу функцию, т.к при $x \to 0$ всё плохо (0 в знаменателе), доопределяем:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Доопределенная функция является непрерывной, теперь можем считать частную производную:

$$\left[\left(\frac{\ln(1 + x^2y^2)}{x}\right)'_y = \frac{1}{x} \cdot \left(\ln(1 + x^2y^2)\right)'_y = \frac{1}{x} \cdot \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} = \frac{2xy}{1 + x^2y^2}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2xy}{1+x^2y^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Но если подставить в $\frac{2xy}{1+x^2y^2}$ $x = 0$, мы получим 0, а значит получаем просто:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{1 + x^2y^2}$$

Частная производная непрерывна, теперь можем сослаться на теорему о дифференцируемости (случай 2) и по формуле Лейбница:

$$F' = \ln\left(1 + e^{2y}y^2\right)\frac{1}{e^{y}} \cdot e^{y} - \ln\left(1 + e^{-2y}y^2\right)\frac{1}{e^{-y}} \cdot (-e^{-y}) + \int\limits_{e^{-y}}^{e^{y}} \frac{2xy}{1 + x^2y^2}dx =$$

$$= \ln(1 + e^{2y}y^2) + \ln(1 + e^{-2y}y^2) + \int\limits_{e^{-y}}^{e^{y}} \frac{2xy}{1 + x^2y^2}dx = [\times]$$

Посчитаем интеграл отдельно:

$$\int\limits_{e^{-y}}^{e^{y}} \frac{2xy}{1 + x^2y^2}dx = \begin{bmatrix} u = 1 + x^2y^2 \\ du = 2xy^2dx \end{bmatrix} = \int\limits_{e^{-y}}^{e^{y}} \frac{2xy}{u}\frac{du}{2xy^2} =$$

$$= \frac{1}{y} \int\limits_{e^{-y}}^{e^{y}} \frac{du}{u} = \frac{1}{y} \cdot \ln(1 + x^2 y^2) \Bigg|_{e^{-y}}^{e^{y}} = \frac{1}{y} \cdot \big(\ln(1 + e^{2y} y^2) - \ln(1 + e^{-2y} y^2)\big)$$

Возвращаемся:

$$[\times] = \ln(1+e^{2y}y^2)+\ln(1+e^{-2y}y^2)+\left(\frac{1}{y} \cdot \big(\ln(1 + e^{2y} y^2) - \ln(1 + e^{-2y} y^2)\big)\right) =$$

$$= \ln(1 + e^{2y} y^2) + \ln(1 + e^{-2y} y^2) + \frac{\ln(1 + e^{2y} y^2) - \ln(1 + e^{-2y} y^2)}{y}$$

Ответ: функция дифференцируема, производная функции равна:

$$\ln(1 + e^{2y} y^2) + \ln(1 + e^{-2y} y^2) + \frac{\ln(1 + e^{2y} y^2) - \ln(1 + e^{-2y} y^2)}{y}$$

Номер 4

Исследовать на дифференцируемость и найти производную функции, исследовать производную на непрерывность:

$$\int\limits_{y}^{y^2} e^{-x^2 y} dx$$

Рассмотрим прямоугольник $\prod = [a, b^2] \times [a, b]$. $e^{-x^2 y}$ является непрерывной, поэтому можем сразу считать частную производную:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2 y} \cdot (-x^2)$$

Частная производная непрерывна, теперь можем сослаться на теорему о дифференцируемости (случай 2) и по формуле Лейбница:

$$F' = e^{-y^2} \cdot 2y - e^{-y^3} + \int\limits_{y}^{y^2} -x^2 e^{-x^2 y} dx$$

Интеграл не хочет браться, поэтому оставлю его в таком виде. Теперь посмотрим на непрерывность производной нашей функции. Заметим, что y и y^2 являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Теперь можем сослаться на следствие теоремы о дифференцируемости и отсюда получить непрерывную дифференцируемость F и соответственно непрерывность производной

Ответ: функция дифференцируема, производная функции равна:

$$e^{-y^2} \cdot 2y - e^{-y^3} + \int\limits_{y}^{y^2} -x^2 e^{-x^2 y} dx$$

Производная непрерывна.

Номер 5

С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(p\tan x)}{\tan x}dx$$

Рассмотрим прямоугольник $\prod = [0, \frac{\pi}{2}] \times [a, b]$. Посмотрим на проблемные точки, где происходит разрыв, это 0 (в знаменателе 0) и $\frac{\pi}{2}$ (в знаменателе бесконечность). Устремим к ним и посмотрим что там:

$$\frac{\arctan(p\tan(x))}{\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{\frac{p}{\cos^2 x}}{1+p^2\tan^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{p}{1+p^2\tan^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} p$$

$$\frac{\arctan(p\tan(x))}{\tan(x)} \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{p}{1+p^2\tan^2 x} \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\sim} 0$$

Теперь дополним до непрерывной функции:

$$f(x,p) = \begin{cases} 0, & x = \frac{\pi}{2} \\ p, & x = 0 \\ \frac{\arctan(p\tan x)}{\tan x}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ну а теперь можем считать частную производную:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{cases} 0, & x = \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{1+p^2\tan^2(x)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь можно заметить аналогичный номеру 3 случай, при подстановке в $\frac{1}{1+p^2\tan^2(x)}$ 0 мы получаем 1, при подстановке $\frac{\pi}{2} - 0$, поэтому наша частная производная это просто:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{1+p^2\tan^2(x)}$$

Получаем непрерывность. Теперь ссылаемся на теорему о дифференцировании (случай 1) и считаем производную функции:

$$F'(p) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+p^2\tan^2(x)}dx = \begin{bmatrix} u = \tan(x) \\ du = (1+u^2)dx \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1+p^2u^2)}du$$

[Какая же глина] разобьем на сумму, чтобы посчитать два интеграла отдельно:

$$\frac{1}{(1+u^2)(1+p^2u^2)} = \frac{Au+B}{1+u^2}+\frac{Cu+D}{1+p^2u^2} = \frac{Ap^2u^3+Au+Bp^2u^2+B+Cu^3+Cu+Du^2+D}{(1+u^2)(1+p^2u^2)}$$

Ищем коэффы:

$$\begin{cases} B+D=1 \\ A+C=0 \\ Bp^2+D=0 \\ Ap^2+C=0 \end{cases} \sim \begin{cases} B+D=1 \\ A+C=0 \\ Bp^2+D=0 \\ Ap^2+C=0 \end{cases} \sim \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{1}{1-p^2} \\ C=0 \\ D=\frac{p^2}{p^2-1} \end{cases}$$

Из-за знаменателя у коэффов B и D получаем крайние случаи $p=\pm1$, где в знаменателе получается 0. Рассмотрим их отдельно позже. Подставляем коэффы (пусть $p\neq\pm1$):

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)(1+p^2u^2)}du = \int\limits_0^\infty \frac{\frac{1}{1-p^2}}{1+u^2}du + \int\limits_0^\infty \frac{\frac{p^2}{p^2-1}}{1+p^2u^2du} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{(1-p^2)(1+u^2)}du + \int\limits_0^\infty \frac{p^2}{(p^2-1)(1+p^2u^2)}du =$$

$$= \frac{1}{1-p^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)}du + \frac{p^2}{p^2-1}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+p^2u^2)}du = A$$

Считаем отдельно:

$$\int \frac{1}{(1+p^2u^2)}du = \begin{bmatrix} t=pu \\ du=\frac{dt}{p} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{p(1+t^2)}dt = \frac{1}{p}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{p}\arctan(pu)$$

$$\int \frac{1}{(1+u^2)}du = \arctan(u)$$

Возвращаемся:

$$A = \frac{1}{1-p^2}\cdot\left(\arctan(\tan x)\Big|_0^{x=+\infty}\right)+\frac{p}{p^2-1}\cdot\left(\arctan(p\cdot\tan x)\Big|_0^{x=+\infty}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{p-1}{p^2-1} =$$

$$= \frac{\pi}{2(p+1)}$$

Теперь надо вспомнить (к сожалению) про крайний случай при $p = \pm 1$. У нас получается следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+p^2\tan^2(x)}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2 x}dx = \begin{bmatrix} t = \tan x \\ dt = 1+t^2 dx \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt$$

Считаем этот интеграл отдельно:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{At+B}{1+t^2} + \int \frac{Ct+D}{1+t^2}dt$$

$$\frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{-At^2+A-2Bt}{(1+t^2)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} =$$

$$= \frac{-At^2+A-2Bt+(Ct+D)(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{-At^2+A-2Bt+Ct^3+Ct+Dt^2+D}{1+t^2}$$

Находим коэффы:

$$\begin{cases} A+D=1 \\ -2B+C=0 \\ -A+D=0 \\ C=0 \end{cases} \sim \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=0 \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Возвращаемся:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\frac{1}{2}t+0}{1+t^2} + \int \frac{\frac{1}{2}t+0}{1+t^2}dt = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2}$$

Теперь возвращаемся к нашему интегралу, он будет равен:

$$\left(\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

С крайним случаем закончили. Теперь возвращаемся в самое начало, мы хотим найти $F(p)$, при этом мы знаем производную, тогда интегрируем:

$$F(p) = \int \frac{\pi}{2(p+1)}dp = \frac{\pi}{2}\int \frac{1}{p+1}dp = \frac{\pi}{2}\cdot \ln|p+1| + C$$

Нужно найти константу, для этого просто подставим $p = 0$ в $F(p)$:

$$0 = \frac{\pi}{2}\ln 1 + C$$

$$C = -\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$$

Итого:

$$F(p) = \frac{\pi}{2} \cdot \ln|p+1| + 0, p \neq \pm 1$$

Но поскольку F непрерывная функция, то мы просто можем доопределить её в точках $p = \pm 1$ и все, а значит все выполняется при любых p.

Ответ:

$$F(p) = \frac{\pi}{2} \cdot \ln|p+1|$$