

ТВИМС, дз – 5

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

12 октября 2021 г.

Номер 1 (пункт б)

Считаем распределение:

Вытянули 0 красных шаров: $\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}$

Вытянули 1 красный шар: $\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12}$

Вытянули 2 красных шара: $\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}$

Считаем математическое ожидание:

$$E[x] = 0 \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} \right) + 1 \cdot \left(\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} \right) + 2 \cdot \left(\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \right) = \frac{7}{6}$$

Считаем дисперсию:

$$D[x] = E[x^2] - (E[x])^2 = 0^2 \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} \right) + 1^2 \cdot \left(\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} \right) + 2^2 \cdot \left(\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \right) - \frac{7^2}{6^2} = \frac{35}{72}$$

Ответ:

$$E[x] = \frac{7}{6}$$

$$D[x] = \frac{35}{72}$$

Номер 6

Считаем распределение (оформлю сразу таблицей, там очев, например получить сумму 4 это $2 + 2$, $1 + 3$ или $3 + 1$, а всего вариантов $6 \cdot 6 = 36$, аналогично для остальных сумм):

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Теперь посчитаем математическое ожидание:

$$E[x] = \frac{2 \cdot 1}{36} + \frac{3 \cdot 2}{36} + \frac{4 \cdot 3}{36} + \frac{5 \cdot 4}{36} + \frac{6 \cdot 5}{36} + \frac{7 \cdot 6}{36} + \frac{8 \cdot 5}{36} + \frac{9 \cdot 4}{36} + \frac{10 \cdot 3}{36} + \frac{11 \cdot 2}{36} + \frac{12 \cdot 1}{36} = 7$$

$$D[x] = \frac{2^2 \cdot 1}{36} + \frac{3^2 \cdot 2}{36} + \frac{4^2 \cdot 3}{36} + \frac{5^2 \cdot 4}{36} + \frac{6^2 \cdot 5}{36} + \frac{7^2 \cdot 6}{36} + \frac{8^2 \cdot 5}{36} + \frac{9^2 \cdot 4}{36} + \frac{10^2 \cdot 3}{36} + \frac{11^2 \cdot 2}{36} + \frac{12^2 \cdot 1}{36} - 7^2 = \frac{35}{6}$$

Ответ:

$$E[x] = 7$$

$$D[x] = \frac{35}{6}$$

Номер 7

Пусть у нас N рыб, нас интересует максимизация вероятности $P(X = 1)$. Всего у нас C_N^2 способов выбрать 2 рыбы из N , а выбрать 1 из 5 помеченных рыб среди всех N у нас $C_5^1 \cdot C_{N-5}^1$, тогда:

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{N-5}^1}{C_N^2} = \frac{10N - 50}{(N - 1)N}$$

Для максимизации этой вероятности считаем производную:

$$\left(\frac{10N - 50}{(N - 1)N} \right)' = \frac{10(N^2 - N) - (10N - 50) \cdot (2N - 1)}{(N^2 - N)^2} = \frac{10(-N^2 + 10N - 5)}{(N^2 - N)^2}$$

Теперь приравниваем производную к нулю, знаменатель у нас всегда больше нуля (N как минимум 5 из условия), коэффициент 10 нас не интересует, значит нужно занулить $-N^2 + 10N - 5$):

$$-N^2 + 10N - 5 = 0$$

Чудесами вычислений получаем точки:

$$N = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$N = 5 - 2\sqrt{5}$$

Точка максимума в $N = 5 + 2\sqrt{5}$

У нас рыбы, поэтому нужно взять натуральное, нам подходят ближайšie слева и справа $N = 9, N = 10$, проверим их:

$$P(X = 1, N = 9) = \frac{90 - 50}{8 \cdot 9} = \frac{5}{9}$$

$$P(X = 1, N = 10) = \frac{100 - 50}{9 \cdot 10} = \frac{5}{9}$$

А значит подходят оба, теперь считаем распределение, математическое ожидание и дисперсию (это и есть **ответ**):

- $N = 9$

0 помеченных рыб :

$$P(X = 0) = \frac{C_{N-5}^2}{C_N^2} = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

1 помеченная рыба:

$$P(X = 1) = \frac{5}{9}$$

2 помеченные рыбы:

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$E[x] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{5}{18} = \frac{10}{9}$$

$$D[x] = 1^2 \cdot \frac{5}{9} + 2^2 \cdot \frac{5}{18} - \frac{10^2}{9^2} = \frac{35}{81}$$

- $N = 10$:

0 помеченных рыб :

$$P(X = 0) = \frac{C_{N-5}^2}{C_N^2} = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

1 помеченная рыба:

$$P(X = 1) = \frac{5}{9}$$

2 помеченные рыбы:

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$E[x] = \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = 1$$

$$D[x] = \frac{5}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} - 1 = \frac{4}{9}$$