Бурмашев Григорий. 208. Дискра – 18

Номер 1

Воспользуемся методом деления пополам. Возьмем элемент, который находится в середине последовательности, а также 2 элемента: один слева и другой справа. Рассмотрим все возможные случаи расположения знаков (пусть i – середина):

1. $$a\left[i-1\right] > a\left[i\right] > a\left[i+1\right]$$

   В этом случае мы условно попали правее искомого элемента. А значит нам нужно искать элемент в другой части (в левой). Размер множества уменьшится в 2 раза.

2. $$a\left[i-1\right] < a\left[i\right] < a\left[i+1\right]$$

   В этом случае мы условно попали левее искомого элемента. А значит нам нужно искать элемент в другой части (в правой). Размер множества уменьшится в 2 раза.

3. $$a\left[i-1\right] < a\left[i\right] > \left[i+1\right]$$

   В этом случае мы аккурат попали в искомый нами элемент. И можем заканчивать поиск.

Этот алгоритм повторяем до тех пор, пока не попадаем в искомый элемент. Размер множества каждый раз будет уменьшаться в 2 раза. А значит нам потребуется $3 \cdot \log N$ вопросов (очевидно, что N меньше n), т.е не более $O\left(\log n\right)$ ходов.

Ч.Т.Д

Номер 2

Если монет четное количество, то случай очевидный. Берем и разбиваем все наши монеты попарно. Потом смотрим каждую из пар и взвешиваем. В какой-то одной из пар одна из монет окажется легче другой, она и будет фальшивой. Всего потребуется $[n/2]$ взвешиваний, т.к из n монет у нас получится $[n/2]$ пар.

Рассмотрим случай, когда монет нечетное количество. Тогда также разбиваем все монеты попарно, но у нас останется одна лишняя. Взвешиваем все эти пары монет. Всего у нас будет $[n/2]$ взвешиваний, но уже возможно 2 разных случая:

1. В одной из пар одна из монет оказалась легче другой, это значит, что она и есть фальшивая. Поиск закончен.

2. Во всех парах все монеты оказались одного веса, ну тогда у нас остается всего 1 монета, а значит она и будет фальшивой (ибо фальшивая точно есть)

По итогу у нас получится те же $[n/2]$ взвешиваний, чего от нас и просят в задаче.

Ч.Т.Д

Номер 3

Докажем от обратного, пусть мы можем решить за k взвешиваний. Причем $k < [n/2]$. Ну а тогда $k \leq [n/2] - 1$ (т.к k и n – натуральные). Рассмотрим, аналогично предыдущей задаче, оба случая:

1. Если монет четное количество, то максимально мы взвесим $2k \leq (n-2)$ монет, но у нас тогда останутся невзвешенные монеты (как минимум две, а значит как пункт **2.** из второй задачи решить не получится) и мы можем не найти фальшивую.

2. Если монет нечетное количество, то максимально мы взесим $2k \leq 2 \cdot [n/2] - 2$ монет, но у нас все равно останутся невзвешенные монеты и мы можем не найти фальшивую.

Из этих двух пунктов следует, что нам придется произвести $[n/2]$ взвешиваний.

Ч.Т.Д

Номер 4

Чтобы был логарифм по основанию три, надо монеты разбивать на три кучи. Так и будем делать, нам нужно, чтобы две кучи были одного размера. Тогда взвесим эти 2 кучи. У нас может быть 2 состояния:

1. Кучи монет равны. Это означает, что фальшивой монеты там точно нет, ведь она весит меньше, чем настоящая. А значит фальшивая монета находится в третьей куче (которую мы не взвешивали). Откидываем эти две кучу и рассматриваем далее третьую, т.е мы уменьшили размер множества в три раза.

2. Одна из куч оказалась меньше. Это означает, что фальшивая монета точно находится в этой куче, потому что фальшивая монета весит меньше настоящей, а кучи у нас одного размера. Откидываем две другие кучу и берем эту. Мы опять же уменьшили размер множества в три раза.

Этот алгоритм мы продолжаем до самого конца, пока не найдем фальшивую монету. Потребуется нам на это как раз $[\log_3 n]$ взвешиваний.

Ч.Т.Д

Номер 5

Если мы будем решать алгоритмом из предыдущей задачи и делить кучу на три и уменьшать за каждый ход размер множества соотвественно в три раза, то, если мы попытаемся сделать меньше чем $\log_3 n$ ходов, то мы окажемся в рамках какого-то множества монет, причем размер множества не будет равен единице (ибо опять же за каждый ход размер уменьшается в три раза, а глубина дерева у нас будет $\log_3 n$). А значит у нас будет какое-то количество монет, среди которых есть одна фальшивая. Но поскольку ходы у нас закончились, то ничего с этим множеством мы сделать не сможем и найти монету у нас не получится. При попытке делить кучу пополам мы соотвественно за ход будем уменьшать размер множества в 2 раза, а значит такой алгоритм будет работать еще медленее. А если делить монеты на 4 и более куч, то нам потребуется более чем одно взвешивание для уменьшения размера в 3 раза, т.к мы условно взвесим две кучи, и если они будут равны, то нам придется взвешивать и две другие тоже, что явно медленее, чем при делении на 3 кучи. И тогда в худшем случае это будет $2 \cdot \log_4 n$, что медленнее $\log_3 n$. А значит нам в любом случае потребуется $[\log_3 n]$ взвешиваний.

Ч.Т.Д