Бурмашев Григорий, 208. Алгебра – 2

Номер 1

Для начала проверим, что такие матрицы действительно будут образовывать подгруппу H группы G:

Замечание:

Чтобы матрица вида $\begin{pmatrix} a^3 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ была невырожденной, нужно, чтобы $a \neq 0$, т.к определитель такой матрицы равен a^5

У нас есть три свойства для подгрупп, проверим их:

1. Проверим на наличие нейтрального элемента внутри H
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \ \ (a = 1, \ b = 0)$$
$$\det\,(e) = 1 \neq 0$$
2. Проверим на наличие ab в в H:
Пусть $x = \begin{pmatrix} a^3 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c^3 & d \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$, $x, y \in H, a \neq 0, c \neq 0$, тогда:
$$xy = \begin{pmatrix} a^3 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^3 & d \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \cdot c^3 & (b \cdot c^2 + a^3 \cdot d) \\ 0 & a^2 \cdot c^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (a \cdot c)^3 & (b \cdot c^2 + a^3 \cdot d) \\ 0 & (a \cdot c)^2 \end{pmatrix} \in H$$
$$\det\,(xy) = a^5 \cdot c^5 \neq 0$$
3. Проверим на принадлежность обратного элемента к H:
Пусть $x = \begin{pmatrix} a^3 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \in H, a \neq 0$, тогда:
$$\exists\, x^{-1}, \text{ т.к матрица невырожденна}$$
$$x^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} & -\frac{b}{a^5} \\ 0 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{a}\right)^3 & -\frac{b}{a^5} \\ 0 & \left(\frac{1}{a}\right)^2 \end{pmatrix} \in H$$
$$\det\,(x^{-1}) \neq 0 \text{ (из } a \neq 0)$$

Заметим, что все коэффициенты во всех получившихся матрицах лежат в $\mathbb{Q}$

Убедились в том, что такие матрицы будут подгруппой, теперь докажем нормальность, для этого проверим свойство:

$$H \triangleleft G, \text{ если } \forall g \in G, \forall h \in H \rightarrow ghg^{-1} \in H$$

Возьмем $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G, x \neq 0, z \neq 0.$

Тогда $g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{xz} \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$

А также пусть $h = \begin{pmatrix} a^3 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \in H, a \neq 0$

Теперь смотрим:

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^3 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{xz} \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \cdot x & b \cdot x + a^2 \cdot y \\ 0 & a^2 \cdot z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{xz} \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 & \frac{b \cdot x + a^2 \cdot y - a^3 \cdot y \cdot z^2}{z} \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Все коэффициенты в ghg^{-1} лежат в $\mathbb{Q}$, $\det\,(ghg^{-1}) = a^5 \neq 0$, а значит $ghg^{-1} \in H$, следовательно $H \triangleleft G$

Ч.Т.Д

Номер 2

Всего отображений у нас 12^{20}

$$\phi : Z_{20} \to Z_{12} \text{ гоморфизм} \leftrightarrow \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \ \forall x, y \in Z_{20}$$

$$\phi(1) = a$$
$$\phi(2) = \phi(1+1) = \phi(1) + \phi(1) = 2a$$
$$\phi(k) = ka$$

Для определения гомоморфизма нам достаточно знать, куда перейдет единица, тогда мы автоматически будем знать куда переходят остальные элементы, а значит количество подходящих отображений сокращается до 20 штук. Для корректности отображения ϕ должно выполняться:

$$\phi(x) = \phi(x + 20k) \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$x \cdot a = \phi(x) + \phi(20k) = x \cdot a + 20k \cdot a$$

Что эквивалентно условию:

$$20k \cdot a = 0 \pmod{12} \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Возьмем $k = 1$:

$$20a = 0 \pmod{12} \leftrightarrow 20a \,\vdots\, 12 \leftrightarrow 5a \,\vdots\, 3 \leftrightarrow a \,\vdots\, 3$$

А значит у нас будет всего 4 гомоморфизма, а конкретно:

$$\phi(x) = 0 \ \forall x$$

$$\phi(x) = 3x \ \forall x$$
$$\phi(x) = 6x \ \forall x$$
$$\phi(x) = 9x \ \forall x$$

Номер 3

Пусть G – группа по $\mathbb{Q}$, а $F := \{\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times\}$. Тогда рассмотрим такое отображение:

$$\phi : G \to F, a \to e^{2\pi i a} = \cos(2\pi a) + i\sin(2\pi a)$$

Видим, что ϕ - гомоморфизм, т.к:

$$\phi(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y} = \phi(x) \cdot \phi(y)$$

Тогда по определению:

1. $$\ker \phi = \{a \in G \ : \ \phi(a) = e_F\}$$

   Заметим, что $e_F = 1$. Т.е мы ищем все такие a из G, что $\cos(2\pi a) + i\sin(2\pi a) = 1$. Т.к в аргументах sin и cos есть 2π, нам подходят любые a из $\mathbb{Z}$, а значит:
   $$\ker \phi = Z$$

2. $$\text{Im } \phi = \{z : |z| = 1, \text{ord } z < \infty\} = H$$

   Это верно, т.к при возведении числа в степень k по формуле Муавра мы получим $1^k \cdot (\cos(2\pi ak) + i\sin(2\pi ak))$. Т.к $a \in \mathbb{Q}$, то найдется такое k, что $ak \in \mathbb{Z}$ ($a = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, положим $k = q$). А значит $M(z) \neq \emptyset$ и порядок элемента будет конечным

По теореме о гоморфизме для групп:

$$G/\ker \phi \cong \text{ Im } \phi$$

А значит:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong H$$

Ч.Т.Д

Номер 4

$m, n \in \mathbb{N}$
G – группа
A – подгруппа порядка m
B – подгруппа порядка n

- $1 \to 2$

  Пускай gcd $(m, n) = 1$. Посмотрим на $A \cap B$. Пусть там лежит элемент g, тогда получаем, что:

  $$g^m = g^n = e$$

  Из этого следует, что $g = e$. Это будет верно из-за того, что мы можем получить $\frac{g^m}{g^n} = g^{m-n} = \frac{e}{e} = e$ (или $g^{n-m} = e$ соотвественно). Если мы будем делать эти шаги как в алгоритме Евклида для нахождения gcd, то упремся в конце концов в gcd (m, n). А поскольку он равен 1, то $g^1 = e$

- $2 \to 1$

  Попробуем от обратного. Пусть НОД$(m, n) > 1$ и выполняется пункт 2. Возьмем $F = \langle f \rangle, |F| = mn$. И тогда положим подгруппы $A = \langle f^m \rangle, B = \langle f^n \rangle$. Пересекаться они будут по образующему элементу $f^{\text{НОК}(n,m)}$, т.е $A \cap B = \langle f^{\text{НОК}(n,m)} \rangle$. Мы знаем, что НОК $= \frac{mn}{\text{НОД}}$. А также $f^{mn} = e$ (из F). Т.е $f^{\text{НОД}(m,n) \cdot \text{НОК}(m,n)} = e$, получается что НОД задает порядок для пересечения. При НОД(m, n) $>$ 1 внутри $A \cap B$ может содержаться что-то кроме e и мы придем к противоречию. А значит НОД$(m, n) = 1$

Ч.Т.Д