Диффуры, дз – 6

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

29 мая 2022 г.

[Завал по дедлайнам, на диффуры особо не оставалось времени :(]

Номер 4

$$\begin{cases} x' = xz \\ y' = x + yz \\ z' = -z^2 \end{cases}$$

Решаем по аналогии с семинаром. Поделим 1 и 3 ($z > 0$, все супер):

$$\frac{dx}{dz} = \frac{xz}{-z^2} = -\frac{x}{z}$$

$$dx \cdot z = -dz \cdot x$$

$$dx \cdot z + dz \cdot x = 0$$

$$d(xz) = 0$$

Первый интеграл:

$$xz = C_1$$

На семе решали при $x > 0$, но тут такого ограничения к сожалению нет, поэтому потом отдельно посмотрим случай $x = 0$:

$$x' = C_1$$

$$x = C_1 t + C_2$$

$$z = \frac{C_1}{x} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}$$

Подставим x и z во второе уравнение:

$$y' = C_1 t + C_2 + y \cdot \frac{C_1}{C_1 t + C_2}$$

Ну а это линейное уравнение. Решим его, начнем с однородного:

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot \frac{C_1}{C_1 t + C_2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2} dt$$

Тогда интеграл:

$$\ln |y| = \ln |C_1 t + C_2| + D$$

$$y = D(C_1 t + C_2)$$

Метод вариации постоянной:

$$y' = D(t)'(C_1 t + C_2) + D(t)C_1$$

В уравнении:

$$D(t)'(C_1 t + C_2) + D(t)C_1 = C_1 t + C_2 + \frac{C_1 D(t)(C_1 t + C_2)}{C_1 t + C_2}$$

Отсюда:

$$D(t)'(C_1 t + C_2) = C_1 t + C_2$$

$$D(t)' = 1$$

$$D(t) = t + C_3$$

А решение:

$$y = (t + C_3)(C_1 t + C_2)$$

Терь посмотрим при $x = 0$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = yz \\ z' = -z^2 \end{cases}$$

Пусть $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dz} = -\frac{y}{z}$$

$$d(yz) = 0$$

$$yz = C_1$$

$$z = \frac{C_1}{y}$$

$$y' = y\frac{C_1}{y}$$

$$y' = C_1$$

Отсюда:

$$y = C_1 t + C_2$$

При $y = 0$:

$$z = \frac{1}{C_1 + t}$$

Вроде все.

Ответ:

Если $x = 0, y = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{C_1 + t} \end{cases}$$

Если $x = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = C_1 t + C_2 \\ z = \frac{C_1}{C_1 t + C_2} \end{cases}$$

Иначе:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = (t + C_3)(C_1 t + C_2) \\ z = \frac{C_1}{C_1 t + C_2} \end{cases}$$