Бурмашев Григорий. Алгебра – 3. 208

Номер 1

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$

Ну собственно делаем 1 в 1 как на семинаре. Рассмотрим все варианты:

- Порядок 2:

  $$\begin{cases} (2a, 2b, 2c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \end{cases}$$

  $2a = 0 \rightarrow$ 2 варианта (0, 1)

  $2b = 0 \rightarrow$ 2 варианта (0, 5)

  $2c = 0 \rightarrow$ 1 вариант (0)

  Всего 4 варианта 2x = 0, но вариант x = 0 не подходит, остается 3 элемента порядка 2

- Порядок 5:

  $$\begin{cases} (5a, 5b, 5c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \end{cases}$$

  $5a = 0 \rightarrow$ 1 вариант (0)

  $5b = 0 \rightarrow$ 5 вариантов (0, 2, 4, 6, 8)

  $5c = 0 \rightarrow$ 5 вариантов (0, 5, 10, 15, 20)

  Всего 25 вариантов, но вариант x = 0 не подходит, остается 24 элемента порядка 5

- Порядок 10:

  $$\begin{cases} (10a, 10b, 10c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \end{cases}$$

  $10a = 0 \rightarrow$ 2 варианта (0, 1)

  $10b = 0 \rightarrow$ 10 вариантов (0, 1, 2, . . . ,9)

  $10c = 0 \rightarrow$ 5 вариантов (0, 5, 10, 15, 20)

  Всего 100 вариантов, нам не подходят $x = 0, x = 3$ и $x = 5$, т.е остается $100 - 3 - 24 - 1 = 72$ элементов порядка 10

- Порядок 25:

$$\begin{cases} (25a, 25b, 25c) = 0 \\ (5a, 5b, 5c) \neq 0 \end{cases}$$

$25a = 0 \to$ 1 вариант (0)

$25b = 0 \to$ 5 вариантов (0, 2, 4, 6, 8)

$25c = 0 \to$ 25 вариантов (0, 1, ..., 24)

Всего 125 вариантов, нам не подходят $x = 0$ и $x = 5$, т.е остается $125 - 24 - 1 = 100$ элементов порядка 25

Ответ: $3, 24, 72, 100$

Номер 2

Заметим, что $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, тогда делаем точь в точь аналогично семинару:

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = A \leftarrow$ подходит нам

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{90} \leftarrow$ циклическая группа

Теперь смотрим на подгруппы:

- Порядок 3, т.е $\mathbb{Z}_3$. Интересуют циклические подгруппы порядка 3, такие подгруппы порождаются элементами порядка 6, найдем число элементов:

$x = (a, b, c, d)$

$3a = 0 \to$ 1 вариант (0)

$3b = 0 \to$ 3 варианта (0, 1, 2)

$3c = 0 \to$ 3 варианта (0, 1, 2)

$3d = 0 \to$ 1 вариант (0)

Всего 9 вариантов, нам не подходит $x = 0$, значит остается $9 - 1 = 8$ элементов порядка 3.

Подгруппа порядка $3 \approx \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$.

ord : 1, 3, 3 (по порядку как записаны в множестве). Два элемента имеют порядок 3. Итого число подгрупп порядка 3 будет $\frac{8}{2} = 4$

- Порядок 15, $15 = 5 \cdot 3$, т.е $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{15}$. Интересуют циклические подгруппы порядка 15, такие подгруппы порождаются элементами порядка 16, найдем число элементов:

  $x = (a, b, c, d)$

  $15a = 0 \to$ 1 вариант (0)

  $15b = 0 \to$ 3 варианта (0, 1, 2)

  $15c = 0 \to$ 3 вариант (0, 1, 2)

  $15d = 0 \to$ 5 вариантов (0, 1, 2, 3)

  Всего 45 вариантов, нам не подходит $x = 0$, а также варианты $x = 3$ и $x = 5$, посмотрим для $x = 5$:

  $5a = 0 \to$ 1 вариант (0)

  $5b = 0 \to$ 1 вариант (0)

  $5c = 0 \to$ 1 вариант (0)

  $5d = 0 \to$ 5 вариантов (0, 1, 2, 3)

  Значит остается $45 - 5 - 8 = 32$ элемента

  Подгруппа порядка $15 \approx \mathbb{Z}_{15} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

  ord : 1, 15, 15, 5, 15, 3, 5, 15, 15, 5, 3, 15, 5, 15, 15 (по порядку как записаны в множестве). 8 элементов имеют порядок 15. Итого число подгрупп порядка 15 будет $\frac{32}{8} = 4$

Ответ: 4, 4

Номер 3

Кажется, что стоит в тупую порасписывать прямое произведение по следствию Лагранжа (точнее теоремы 4) с лекции, чтобы хоть какие-то оценки на ответ увидеть:

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$$

Чтобы минимизировать n, нужно объединить 5, 3, 2 в 30, а 9, 5, 4 в 180 и получить $n = 2$, т.е:

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{180}$$

Получили ответ 2, большие n нас очев уже не интересуют, из меньших остается только 1. Поэтому нужно найти строгое док-во невозможности $n = 1$. Для этого может пригодится предложение 6 из лекции, т.е критерий цикличности.

Пойдем от обратного, пусть $n = 1$ – ответ. Тогда наша группа должна быть изоморфна какой-то **одной** циклической группе, а значит и она сама должна являться циклической. Проверим по предложению 6 цикличность, должно выполняться следующее (пусть наша группа есть A):

$$\exp A = |A|$$

Считаем:

$$\exp A = \text{НОК}\{\ ord(a) \mid a \in A\} = \text{НОК}(15, 18, 20) = 180$$

$$|A| = \Big|\text{по замечанию 7.2 с лекции}\Big| = 15 \cdot 18 \cdot 20 = 5400$$

Получили, что $\exp A \neq |A| \to$ группа не циклична, а значит мы приходим к **противоречию** и ответ действительно 2.

Ответ: $n = 2$