Бурмашев Григорий. 208. Дискра-6

Номер 1

Можно заметить, что вершины связаны, если они отличаются друг от друга на 3 или на 5. Тогда мы можем построить цикл вида (или любой другой подобный):

$$8\ 5\ 0\ 3\ 6\ 9\ 5\ 8\ 3\ 0\ 5\ 2\ 7\ 4\ 1\ 6\ 9\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8 \circlearrowleft$$

$\rightarrow$ весь граф является сильно связным и у нас 1 компонентна сильной связности

Ответ: 1 компонентна сильной связности

Номер 2

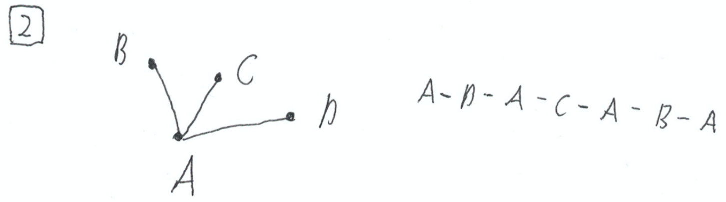
Построим неориентированный граф следующим образом:

Пусть у нас есть вершина A. Соединим её с вершинами B, C и D. При этом эти вершины между собой напрямую не связаны. Тогда у нас есть следующий путь, который проходит через каждое ребро ровно 2 раза:

$$A - D - A - C - A - B - A$$

При этом в этом графе нет эйлерового цикла, т.к в нем есть вершина нечетной степени (A), что противоречит условию существования эйлерового цикла в неориентированном графе.

Изображение:

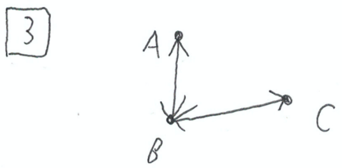


Ответ: нет

Номер 3

Построим граф на трех вершинах A, B и C, в котором из любой вершины в любую другую ведет ровно один простой путь. Но мы видим, что у вершины B, которая является исходящей для A и C, степень вершины равняется 2.

Изображение:



Ответ: нет

Номер 4

а)

Всего у нас 64 строки, в каждую из которых у нас может поместиться 1 слово длины 6. Двоичных слов длины 6 у нас $2^6 = 64$. Т.к на каждой из 6 позиций числа может стоять 2 варианта (0 и 1). $\rightarrow$ мы можем поместить все 64 слова в 64 строки.

Ответ: да

б)

Из пункта а) следует, что таблица состоит из различных двоичных слов длины 6.

Построим таблицу следующим образом:

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	1	1

Т.е расставим сверху вниз все двоичные числа длины 6 в порядке их возрастания. Зафиксируем случайную строку. При удалении любой единицы из любой вышестоящей строки мы уменьшим двоичное число, а следовательно поднимем его еще выше в таблице (т.к числа расставлены в порядке возрастания) $\rightarrow$ получить число из фиксированной строки невозможно и условие пункта б) выполняется

Ответ: да

в)

Рассмотрим случай, когда числа стоят **не** в порядке возрастания. Тогда для для какой-то как минимум одной строки мы сможем найти вышестоящую строчку, где будут стоять единицы на тех же позициях. В ней можно будет заменить все другие единицы на нули и получить число из нижней строки. Тогда условие пункта б) нарушается и значит числа таки стоят в порядке возрастания. В таком случае, на 57й позиции стоит число $11100 \neq 011100$

Ответ: нет

Номер 6

Воспользуемся методом математической индукции:

- База: при n = 2 :

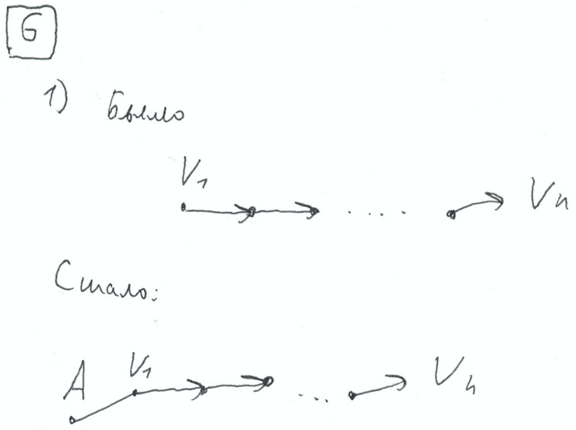
  Очевидно,что есть простой путь, включающий в себя обе вершины

Верно

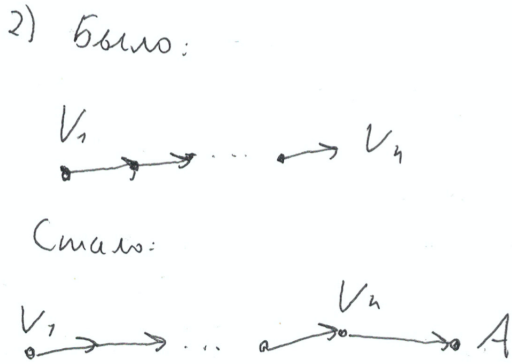
- Переход: пусть верно для n, т.е $\exists$ граф на n вершинах, содержащий в себе простой путь через все вершины. Докажем, что это верно для $n + 1$:

Мы добавляем в граф $n + 1$ вершину A. Пусть первая точка в простом графе на n вершинах есть V_1, а последняя точка в простом пути на n вершинах – V_n Рассмотрим все возможные варианты:

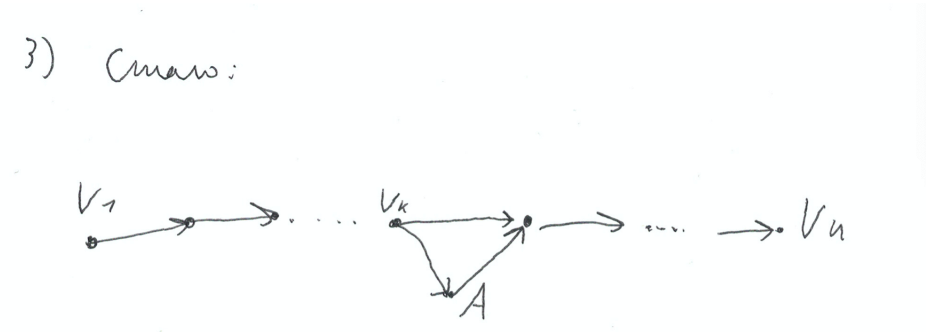
1. Если существует ребро из вершины A в вершину V_1, то мы просто начинаем путь из вершины A и опять получаем простой путь, проходящий через все вершины



2. Если существует ребро из V_n в вершину A, то мы просто заканчиваем путь в вершине A и он опять является простым путем, проходящим через все вершины.



3. Если вершина A находится в графе где-то между V_1 и V_n, т.е есть путь из V_1 в A и из A в V_n, то найдется такая V_k, что из нее будет ребро в A, а из A ребро в следующую вершину в простом цикле на n вершинах $\to$ мы опять получаем простой путь, проходящий через все вершины.



Верно

$\to$ доказано по индукции.

Номер 7

Возьмем граф G на n вершинах из 6го номера.Тогда поменяем в нем ориентацию одного любого ребра и рассмотрим полученный граф, назовем его G'. По условию 7й задачи меняем в G' ориентацию этого же ребра и вновь возвращаемся к графу G. Но мы знаем, по доказанному в 6м номере, что в этом графе есть простой путь, проходящий через все вершины $\to$ он сильно связан.

Ч.Т.Д