Номер 1

Собственно проверяем все свойства:

Состоятельность:

Воспользуемся ЗБЧ (аналогично семинарской таске). Для этого нужно найти мат.ожидание, можем это сделать, зная плотность:

$$\mathbb{E}X_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{3x^2}{\theta^3} \cdot I_{x\in[0,\theta]} = \int\limits_{0}^{\theta} \frac{3x^3}{\theta^3} dx = \frac{3}{\theta^3} \cdot \int\limits_{0}^{\theta} x^3 dx = \frac{3}{4} \cdot \theta$$

Теперь по ЗБЧ:

$$\frac{4}{3} \cdot \overline{X} \xrightarrow{P} \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\theta = \theta$$

Ответ: состоятельность сть

Сильная состоятельность:

Тут будем использовать уЗБЧ, по нему:

$$\frac{4}{3}\overline{X} \xrightarrow{\text{п.н}} \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\theta = \theta$$

Ответ: сильная состоятельность сть

Несмещенность:

$$\mathbb{E}\left[\frac{4}{3}\overline{X}\right] = \frac{4}{3} \cdot \mathbb{E}\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right] = \frac{4}{3n} \cdot n \cdot \frac{3}{4} \cdot \theta = \theta$$

Получили:

$$\mathbb{E}\left[\frac{4}{3}\overline{X}\right] = \theta$$

Ответ: несмещенность есть

Номер 10 [листок 6]

Положим оценку:

$$\overset{\wedge}{\theta} = X_{(n)} - X_{(1)}$$

Где $X_{(n)}$ – максимальное значение из выборки, $X_{(1)}$ – минимальное значение из выборки. Ну а теперь проверим её на несмещенность и состоятельность. Почти аналогичная семинару задача, будем опираться на него.

Состоятельность:

По определению хотим проверить:

$$X_{(n)} - X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta \ ?$$

Делаем аналогично семинару:

$$P\left(|X_{(1)} - a| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_{(1)} - a \leq -\varepsilon\right) + P\left(X_{(1)} - a \geq \varepsilon\right) = P\left(X_{(1)} - a \geq \varepsilon\right) =$$

$$= 1 - P\left(X_{(1)} - a \leq \varepsilon\right) = 1 - P\left(X_{(1)} \leq \varepsilon + a\right) = \begin{cases} 0, b - \varepsilon < a \\ \left(\frac{-\varepsilon - a + b}{b - a}\right)^n, \ a \leq b - \varepsilon \end{cases}$$

Оба в системе стремятся к нулю, значит по определению:

$$X_{(1)} \xrightarrow{P} a$$

Теперь проделываем аналогичную операцию, только с $X_{(n)}$ иb:

$$P\left(|X_{(n)} - b| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_{(n)} \leq b - \varepsilon\right) = \begin{cases} 0, \ b - \varepsilon < a \\ \left(\frac{b - a - \varepsilon}{b - a}\right)^n, \ b - \varepsilon \geq a \end{cases}$$

Тут также все к нулю, получаем:

$$X_{(n)} \xrightarrow{P} b$$

Суммируем и получаем:

$$\overset{\wedge}{\theta} = X_{(n)} - X_{(1)} \xrightarrow{P} b - a = \theta$$

А значит есть состоятельность!

Несмещенность:

По определению хотим проверить:

$$\mathbb{E}\left[X_{(n)} - X_{(1)}\right] = \theta?$$

Ну, нужно найти мат.ожидания, так что ищем их, для этого надо выразить плотности, выражаем (берем с сема, хех):

$$\rho_{X_{(n)}}(t) = I_{[a,b]} \cdot \frac{n \cdot (t-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

$$\rho_{X_{(1)}}(t) = I_{[a,b]} \cdot \frac{n \cdot (b-t)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

Тогда:

$$\mathbb{E}\left[X_{(n)}\right] = \int\limits_a^b t \cdot \frac{n \cdot (t-a)^{n-1}}{(b-a)^n} dt = \frac{n}{(b-a)^n} \int\limits_a^b (t-a)^n dt + \frac{na}{(b-a)^n} \int\limits_a^b (t-a)^{n-1} dt = \frac{a+bn}{n+1}$$

А для $X_{(1)}$:

$$\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = \int\limits_a^b t \cdot \frac{n \cdot (b-t)^{n-1}}{(b-a)^n} dt = n \cdot \int\limits_a^b \frac{(t-b)(b-t)^{n-1}}{(b-a)^n} dt + nb \int\limits_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(b-a)^n} dt = \frac{an+b}{n+1}$$

Тогда нужное нам матожидание:

$$\mathbb{E}\left[X_{(n)} - X_{(1)}\right] = \mathbb{E}\left[X_{(n)}\right] - \mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = \frac{a+bn}{n+1} - \frac{an+b}{n+1} = \frac{(n-1)(b-a)}{n+1} \neq b - a = \theta$$

Нужного нам равенства никак не получаем, значит нет несмещенности

Ответ: есть состоятельность, нет несмещенности