Бурмашев Григорий, 208. Дискра-1

1.

Доказать, что:

$$A \vee B \equiv \neg B \rightarrow A$$

Построим таблицу истинности:

A	B	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg B \rightarrow A$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

Заметим, что при любых A, B выражения эквивалентны.

Ч.Т.Д

2.

Выразить $A \triangleleft B$, которое ложно, если A ложно, а B истинно, в остальных случаях оно истинно:

Это выражение вида:

$$A \vee \neg B$$

Построим таблицу истинности:

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Из таблицы истинности видно, что это выражение полностью соотвествует условию задачи.

Ответ: $A \vee \neg B$

3.

Ассоциативна ли импликация? Другими словами, равносильны ли высказывания:

$$A \to (B \to C) \text{ и } (A \to B) \to C$$

Рассмотрим случай, когда A = 0, B = 0, C = 0. $(0 \to (0 \to 0))$. При указанных значениях A, B, C левое выражение принимает истину. (Из лжи следует истина). А правое - принимает ложь (Из истины следует ложь) $((0 \to 0) \to 0)$. Значит, эти высказывания **не** равносильны

Ответ: **нет**

4.

Выполняется ли дистрибутивность для конъюнкции относительно импликации? Другими словами, равносильны ли высказывания:

$$A \wedge (B \to C) \text{ и } (A \wedge B) \to (A \wedge C)$$

При A = 0, B = 0, C = 0 мы получим, что $A \wedge (B \to C)$ ложно (т.к конъюнкция лжи с чем угодно есть ложь), а $(A \wedge B) \to (A \wedge C)$ истинно (т.к из лжи следует ложь есть истина). Значит, эти высказывания **не** равносильны

Ответ: **нет**

5.

Выполняется ли дистрибутивность для импликации относительно импликации? Другими словами, равносильны ли высказывания:

$$A \to (B \to C) \text{ и } (A \to B) \to (A \to C)$$

Рассмотрим случай, когда высказывания ложны. Чтобы левое высказывание было ложно, нужно, чтобы A = 1, B = 1, C = 0. $(1 \to (1 \to 0)$

Во всех остальных случаях оно будет истинным. При таких значениях A, B, C правое высказывание также принимает ложь $((1 \to 1) \to (1 \to 0)$ Аналогично первому высказыванию, при остальных значениях A, B, C второе высказывание истинно. Значит, эти высказывания равносильны.

Ответ: **да**

6.

Доказать, что:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Рассмотрим все возможные случаи:
Если $x, y \geq 0$:

$$|x| = x$$
$$|y| = y$$
$$x + y \leq x + y$$

Если $x > 0$, $y < 0$:

$$|x| = x$$
$$|y| = -y$$
$$x - y \leq x - y$$

Если $x < 0$, $y > 0$:

$$|x| = -x$$
$$|y| = y$$
$$-x + y \leq -x + y$$

Если $x < 0$, $y > 0$:

$$|x| = -x$$
$$|y| = -y$$
$$-x - y \leq -x - y$$

Ч.Т.Д

7.

Доказать, что $\forall (a, b, n) > 0$:

$$\text{Из } (a \times b = n) \to (a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$$

Воспользуемся законом контрпозиции:

$$(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n}) \to (a \times b \neq n)$$

Если:

$$\begin{cases} a > \sqrt{n} \\ b > \sqrt{n} \end{cases}$$

То:

$$a \times b > n$$

Тогда абсолютно точно:

$$a \times b \neq n$$

Ч.Т.Д

8.

Доказать, что $\forall\ x,y,z,w \in \mathbb{Z}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$$

$A \equiv B$, где:

A - «w чётное» B - «все числа x, y, z чётные»

Рассмотрим случай, когда A = 1, B = 1, тогда:

чётное^2 + чётное^2 + чётное^2 = чётное^2

Это высказывание **истино**. Чётное число в квадрате чётно, сумма трех чётных чисел также чётна.

Рассмотрим случай, когда A = 0, B = 0, тогда:

нечётное^2 + нечётное^2 + нечётное^2 = нечётное^2

Это высказывание также **истино**. Потому что нечётное число в квадрате нечётно, а сумма трех нечётных цифр также нечётна.

Значит, $A \equiv B$

Ч.Т.Д

9.

Пусть $x = \sqrt{10}$, а $y = \log_{\sqrt{10}} 5$

x, y — иррациональные. Тогда по основному логарифмическому тождеству:

$$x^y = \sqrt{10}^{log_{\sqrt{10}} 5} = 5$$

При возведении иррационального числа в иррациональную степень мы получили рациональное число.

Ч.Т.Д