Бурмашев, матан – 8

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

9 ноября 2021 г.

Номер 1

Имеем:

множество D с разбиением $r = \{D_i\}$, причем $\Delta(r) < \delta$.

Хотим:

каждое из $D_i \in r$ содержится внутри координатного куба с ребром δ

По определению:

$$\Delta(r) = \max_j \sup_{D_i} |x - y| < \delta$$

Отсюда:

$$\sup_{D_i} |x - y| \leq \max_j \sup_{D_i} |x - y| < \delta \to D_i < \delta$$

Предположим, что все таки не содержится в кубе с ребром δ. Тогда сторона координатного куба будет $\geq \delta$. $|x - y|$ из формулы для $\Delta(r)$ будет диагональю куба, т.к это самое большое расстояние внутри куба (если сторона куба равна a, то диагональ $a\sqrt{3} > a$). Т.е если существует сторона с длиной $\geq \delta$, тогда диагональ тоже будет $\geq \delta$, тогда $\Delta(r) \geq \delta$, что есть **противоречие** изначальному условию про $\Delta(r) < \delta$ (т.е мы хотим, чтобы максимальное расстояние между двумя точками в нашей фигуре не превышало δ, но при попытке рассмотреть случай с фигурой со стороной больше, чем δ, все ломается, потому что $\Delta(r)$ будет $\geq \delta$, т.к максимальное расстояние между двумя точками будет еще больше, чем сама сторона), а значит каждое из множеств D_i содержится внутри координатного куба с ребром δ

Ч.Т.Д

Номер 2

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Хотим отсутствие равномерной непрерывности на $(0, 1]$, и при этом интегрируемость на этом же множестве.

- Для интегрирумости нужно показать ограниченость и непрерывность на множестве:

  1. Сразу заметим, что наша функция ограничена, т.к сам синус (очевидно) принимает значения от -1 до 1.
  2. Функция также непрерывна, потому что наша функция является композицией функций $\sin x$ и $\frac{1}{x}$, а они, очевидно, непрерывны, отсюда получаем непрерывность $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

  Отсюда получаем, что функция интегрируема по Риману

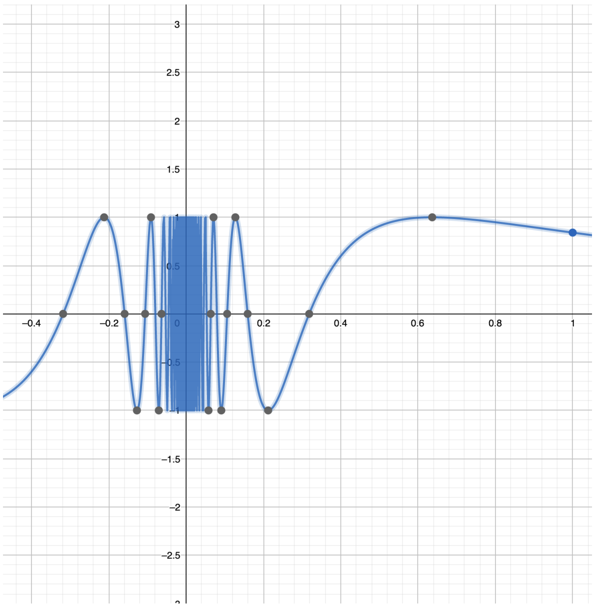
- Разберемся с равномерной непрерывностью, по определению:

  > Числовая функция вещественного переменного $f\colon M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, только когда[1]:
  >
  > $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x_1, x_2 \in M\colon \left(|x_1 - x_2| < \delta\right) \Rightarrow \left(|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right),$

  Покажем ее отсутствие, для этого посмотрим на отрицание для нашего случая ($M = (0, 1]$):

  $$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists\, x_1, x_2 \in M : |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Теперь посмотрим на график функции $\sin(\frac{1}{x})$:



Не сложно заметить, что на $(0, 1]$ график функции достаточно сильно "мотает". Возьмем такие точки, в которых функция принимает значения 0, 1 и -1, мы можем это сделать удобно в рамках функции синуса (потому что знаем, что $\sin(\pi k) = 0, \sin(\frac{(2k+1)\pi}{2}) = \pm 1$)

$$\frac{1}{x_1} = \pi k \to x_1 = \frac{1}{\pi k} \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{(2k+1)\pi}{2} \to x_2 = \frac{2}{(2k+1)\pi} \forall k \in \mathbb{N}$$

Заметим, что $x_1, x_2 \in (0, 1]$

Теперь пытаемся выполнить условия для отрицания равномерной непрерывности:

$$x_1 = \frac{1}{\pi k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$x_2 = \frac{2}{(2k+1)\pi} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Отсюда получаем:

$$|x_1 - x_2| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Т.е, взяв достаточно большой k, получаем, что:

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

Теперь посмотрим на значения функций:

$$\sin(x_1) = 0$$

$$\sin(x_2) = \pm 1$$

Отсюда:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin(x_1) - \sin(x_2)| = |\pm 1| = 1$$

Теперь кладем ε меньше единицы, и получаем выполнение отрицание равномерной непрерывности, другими словами, функция **не** является равномерно непрерывной

Ч.Т.Д