ТВиМС, дз – 9

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

7 декабря 2021 г.

Номер 8

Знаем:

$$\varrho_X(x) = Cx^{-4}, x \geq 1$$

$$\varrho_X(x) = 0, x < 1$$

Из плотности сразу получаем (просто по определению):

$$F_X(x) = \begin{cases} \int\limits_1^x Cx^{-4}, x \geq 1 \\ 0, x < 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{C}{3x^3}, x \geq 1 \\ 0, x < 1 \end{cases}$$

Теперь ищем:

а)

Мы знаем, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_X(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} \varrho_X(x)dx + \int_{1}^{\infty} \varrho_X(x)dx = 1$$

$$0 + \int_{1}^{\infty} \varrho_X(x)dx = 1$$

Отсюда:

$$\left(\frac{-C}{3x^3}\right)\Bigg|_1^a \overset{a\to\infty}{=} 1$$

$$\frac{-C}{3a^3} + \frac{C}{3} = 1 \overset{a\to\infty}{=} \frac{C}{3}$$
$$\frac{C}{3} = 1$$
$$C = 3$$

b)

$$Y = \frac{1}{X}, \varrho_Y(x) - ?$$

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(\frac{1}{X} \le x) = \begin{cases} P(X \ge \frac{1}{x}), x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - P(X < \frac{1}{x}), x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - P(X \le \frac{1}{x}), x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 1 - P(X \le 1), x \ge 10 \\ 1 - P(X \le \frac{1}{x}), x \in (0,1) \\ 0, x < 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} 1, x \ge 1 \\ 0, x \le 0 \\ 1 - F_X(\frac{1}{x}), x \in (0,1) \end{cases} \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} 1, x \ge 1 \\ 0, x \le 0 \\ x^3, x \in (0,1) \end{cases}$$

Отсюда получаем определение для плотности:

$$\varrho_Y(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \cup [1, \infty) \\ (x^3)', x \in (0,1) \end{cases}$$

$$\varrho_Y(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \cup [1, \infty) \\ 3x^2, x \in (0,1) \end{cases}$$

c)

$$P(0.1 < Y < 0.3) - ?$$

$$P(0.1 < Y < 0.3) = \int_{0.1}^{0.3} \varrho_Y(x)dx = \int_{0.1}^{0.3} 3x^2 dx = 3\int_{0.1}^{0.3} x^2 dx$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{0.1}^{0.3} = 3 \cdot \left(\frac{0.3^3 - 0.1^3}{3}\right) = \frac{13}{500}$$

Ответ:

$$C = 1$$

$$\varrho_Y(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 0] \cup [1, \infty) \\ 3x^2, x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$P(0.1 < Y < 0.3) = \frac{13}{500}$$

Номер 9

X имеет равномерное распределение на $[0, 3]$, найти функцию распределения и плотность распределения:

Знаем:

(I) **Равномерное распределение**

Случайная величина имеет *равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$, если ее распределение задано плотностью

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Такая случайная величина описывает случайное бросание точки в отрезок $[a, b]$. Вероятность того, что точка попадёт в отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ равна $\frac{d-c}{b-a}$.

У нас отрезок $[0, 3]$, в таком случае мы хотим

$$\varrho_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-0}, x \in [0, 3] \\ 0, x \notin [0, 3] \end{cases}$$

Отсюда сразу получаем:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, x \in [0, 3] \\ 0, x \notin [0, 3] \end{cases}$$

Ну а теперь ищем:

a) $Y_1 = X^2$

$$F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leq x) = P(X^2 \leq x) = \begin{cases} P(X \leq \sqrt{x}, x \geq 0) \\ 0, x < 0 \end{cases} = \begin{cases} F_X(\sqrt{x}), x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{3}, \sqrt{x} \in [0, 3] \\ 0, \sqrt{x} \notin [0, 3] \end{cases}$$

Ну а отсюда:

$$\varrho_{Y_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}}, x \in [0, 9] \\ 0, x \notin [0, 9] \end{cases}$$

b) $Y_2 = \sqrt{X}$

Аналогично пункту **a)** получаем:

$$P(Y_2 \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = \begin{cases} P(X \leq x^2), x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} = \begin{cases} F_X(x^2), x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, x^2 \in [0,3] \\ 0, x \notin [0,3] \end{cases}$$

Отсюда:

$$\varrho_{Y_2}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, x \in [0, \sqrt{3}] \\ 0, x \notin [0, \sqrt{3}] \end{cases}$$

Ответ:

$$\varrho_{Y_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}}, x \in [0, 9] \\ 0, x \notin [0, 9] \end{cases}$$

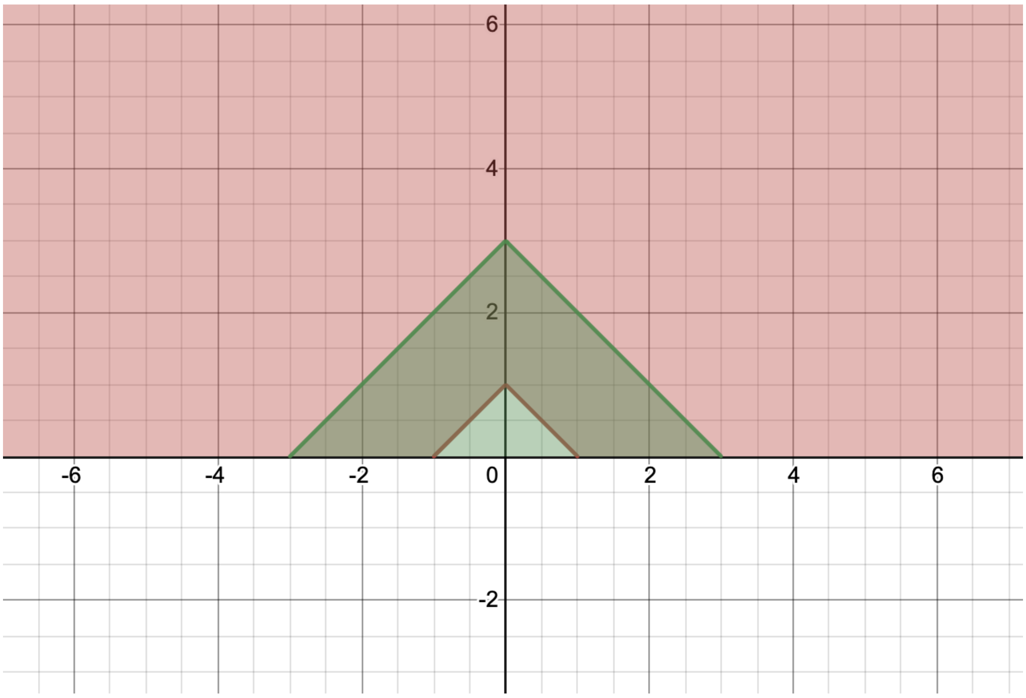
$$\varrho_{Y_2}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, x \in [0, \sqrt{3}] \\ 0, x \notin [0, \sqrt{3}] \end{cases}$$

Номер 10

$$1 \leq |x| + |y| \leq 3, y > 0$$

Найти функцию распределения и плотность случайной величины $X(x, y) = x$ и нарисовать график функции распределения

Для начала посмотрим на график, нас интересует пересечение красного и зеленого участков:



Разобьем наш график на промежутки и будем смотреть на них, заметим что площадь нашей фигуры равна 8, так что везде будем делить на 8 для подсчета вероятности:

1. $x \in (-\infty, -3)$:

   Вероятность равна нулю, очевидно

2. $x \in [-3, 1]$:

$$\frac{1}{8} \cdot \left(\int_{-3}^{x} (t+3)dt \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{t^2}{2} + 3t \right) \Big|_{-3}^{x} = \frac{(x+3)^2}{16}$$

$$\varrho_x = \frac{x+3}{8}$$

3. $x \in [-1, 0]$:

$$\frac{1}{8}\int_{-1}^{x}(t+3)-(t+1)dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{x}2dt = \frac{1}{8}\cdot(2t)\Big|_{-1}^{x} = \frac{2x+2}{8}$$

$$\varrho_x = \frac{1}{4}$$

4. $x \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{8}\int_{0}^{x}((3-t)-(1-t))dt = \frac{1}{8}\int_{0}^{x}2dt = \frac{1}{8}(2t)\Big|_{0}^{x} = \frac{x}{4}$$

$$\varrho_x = \frac{1}{4}$$

5. $x \in [1, 3]$:

$$\frac{1}{8}\int_{1}^{x}(3-t)dt = \frac{1}{8}(3t-\frac{t^2}{2})\Big|_{1}^{x} = \frac{1}{8}\left(3x-\frac{x^2+5}{2}\right)$$

$$\varrho_x = \frac{3-x}{8}$$

6. $x \in (3, \infty)$:

   Вероятность равна единице, очевидно

Терь считаем функцию распределения, когда будем переходить через каждую точку нужно прибавлять вероятность попадания в предыдущий промежуток. Всего у нас 4 промежутка, площади у них равны, а общая площадь 8, поэтому получаем:

$$F(-1) = \text{как было}$$

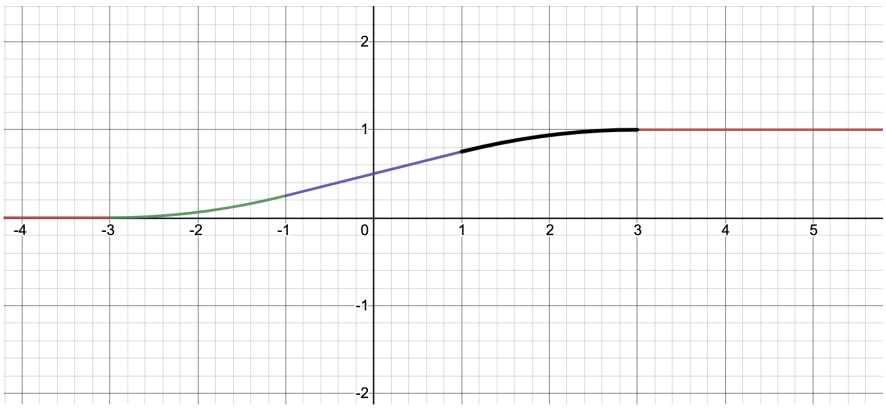
$$F(0) = \frac{2}{8}+\frac{2x+2}{8} = \frac{2+x}{4}$$
$$F(1) = \frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{x}{4} = \frac{2+x}{4}$$
$$F(3) = \frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\left(3x-\frac{x^2+5}{2}\right) = \frac{-x^2+6x+7}{16}$$

По итогу получаем:

$$F_x(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, -3] \\ \frac{(t+3)^2}{16}, t \in (-3, -1] \\ \frac{2+t}{4}, t \in (-1, 1] \\ \frac{-x^2+6x+7}{16}, t \in (1, 3) \\ 1, t \in [3, \infty) \end{cases}$$

$$\varrho_x(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty) \\ \frac{1}{4}, t \in [-1, 1] \\ \frac{t+3}{8}, t \in [-3, -1] \\ \frac{3-t}{8}, t \in [1, 3] \end{cases}$$

В таком случае график функции распределения:



Где: