Матан, дз – 7

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

5 марта 2022 г.

Номер 1

Доказываем неортонормированность системы:

$$\langle 1, x^2 \rangle = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Так что система не ортонормирована. Теперь ищем первые четыре элемента:

$$f_1 = 1$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int\limits_{-1}^{1} 1 dx = 1 + 1 = 2$$

Нормируем:

$$\widetilde{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Второй элемент:

$$f_2 = x - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, x \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x dx = 0$$

$$f_2 = x$$

Тогда:

$$\langle x, x \rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Нормируем:

$$\widetilde{f}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

Третий элемент:

$$f_3 = x^2 - \left\langle x^2, \widetilde{f}_1 \right\rangle \widetilde{f}_1 - \left\langle x^2, \widetilde{f}_2 \right\rangle \widetilde{f}_2 = x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$\left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\frac{3}{2}} dx = 0$$

$$f_3 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$$

Тогда:

$$\left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x^4 dx - \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{1}{9}\int\limits_{-1}^{1} dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{45}$$

Нормируем:

$$\widetilde{f}_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Четвертый элемент:

$$f_4 = x^3 - \left\langle x^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^3, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x - \left\langle x^3, \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\left\langle x^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0$$

$$\left\langle x^3, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x^4 \sqrt{\frac{3}{2}} dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\left\langle x^3, \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^3 \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right) dx = 0$$

$$f_4 = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

Тогда:

$$\left\langle x^3 - \frac{3}{5}x, x^3 - \frac{3}{5}x \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^6 - \frac{6x^4}{5} + \frac{9x^2}{25} \right) dx = \left(\frac{x^7}{7} - \frac{6x^5}{25} + \frac{3x^3}{25} \right) \Bigg|_{-1}^{1} =$$

Нормируем:

$$\widetilde{f}_4 = \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3x}{5} \right)$$

Ответ:

$$\widetilde{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\widetilde{f}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

$$\widetilde{f}_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\widetilde{f}_4 = \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3x}{5} \right)$$

Номер 2

$$f(x) = x\sin x,\ [-\pi, \pi]$$

Сразу посчитаем интеграл от функции:

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x$$

Функция четная, раскладываем по константе и косинусу:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = \frac{1}{\pi}\left(-x\cos x + \sin x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}2\pi = 2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos(kx)dx$$

Посчитаем этот интеграл отдельно:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos(kx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\left(\sin(kx+x) - \sin(kx-x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx+x)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx-x)dx = (\times)$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx+x)dx = \left(-\frac{x\cos(kx+x)}{k+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos(kx+x)dx =$$

$$= \left(-\frac{x\cos(kx+x)}{k+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(kx+x)}{(k+1)^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi(k+1)\cos\pi k - 2\sin\pi k}{(k+1)^2}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx-x)dx = \left(-\frac{x\cos(kx-x)}{k-1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(kx-x)}{(k-1)^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2(\sin\pi k - \pi(k-1)\cos\pi k))}{(k-1)^2}$$

Заметим проблемную точку $k = 1$, значит подставлять сумму для всех k нельзя, посмотрим на эту точку отдельно позже. Возвращаемся к интегралу:

$$(\times) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi(k+1)\cos\pi k - 2\sin\pi k}{(k+1)^2} + \frac{2(\sin\pi k - \pi(k-1)\cos\pi k))}{(k-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi(k+1)\cos\pi k}{(k+1)^2} + \frac{2(-\pi(k-1)\cos\pi k))}{(k-1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi(k+1)(-1)^k}{(k+1)^2} + \frac{2(-\pi(k-1)(-1)^k))}{(k-1)^2}\right)$$

Возвращаемся к a_k:

$$a_k = \left(\frac{(k+1)(-1)^k}{(k+1)^2} - \frac{(k-1)(-1)^k)}{(k-1)^2}\right) = \left(\frac{(-1)^k}{(k+1)} - \frac{(-1)^k)}{(k-1)}\right)$$

Теперь вспоминаем про $k = 1$ и смотрим:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x dx = \frac{1}{2\pi}\cdot(-\pi) = -\frac{1}{2}$$

Ну и наконец получаем ряд Фурье:

$$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(k+1)} - \frac{(-1)^k)}{(k-1)}\right)\cos kx$$

Ответ:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(k+1)} - \frac{(-1)^k)}{(k-1)}\right)\cos kx$$

Номер 3

$$f(x) = \sin x,\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Функция нечетная, так что сразу говорим что:

$$a_0 = 0 = a_k$$

И будем считать только:

$$b_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin\left(\frac{kx \cdot \pi}{\frac{\pi}{2}}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin\left(2k \cdot x\right) dx$$

Считаем отдельно интеграл:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin\left(2k \cdot x\right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2kx - x) - \cos(2kx + x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx - x)dx - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx + x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\sin(2kx - x)}{2k - 1}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{\sin(2kx + x)}{2k + 1}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos \pi k}{1 - 2k} - \frac{2\cos \pi k}{2k + 1}\right) = \left(\frac{(-1)^k}{1 - 2k} - \frac{(-1)^k}{2k + 1}\right)$$

Возвращаемся к b_k:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{1 - 2k} - \frac{(-1)^k}{2k + 1}\right)$$

А значит ряд Фурье:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{1 - 2k} - \frac{(-1)^k}{2k + 1}\right) \sin(2k \cdot x)$$

Ответ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{1 - 2k} - \frac{(-1)^k}{2k + 1}\right) \sin(2k \cdot x)$$