ТВиМС, дз – 5

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

20 февраля 2022 г.

Номер 1

Задача 1:
Последовательность случайных величин задана следующим образом

$$X_n = \begin{cases} \frac{n-2}{n} & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ \frac{n+2}{n} & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Покажите, что $X_n \xrightarrow{d} 1$, но при этом $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(t_0) \neq F_1(t_0)$ при $t_0 = 1$.
2) Найдите характеристические функции $\varphi_{X_n}(t)$ и $\varphi_1(t)$, и проверьте, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_1(t)$ справедливо $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

1)

Посмотрим на функцию распределения для нашей последовательности:

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{n-2}{n} \\ 1, & t > \frac{n+2}{n} \\ \frac{1}{2} & \text{иначе, т.е когда внутри отрезка} \end{cases}$$

А для решения первого пункта посмотрим еще и на $F_1(t)$:

$$F_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Теперь проверим сходимость по распределению (по определению). Для этого устремим n в бесконечность. Заметим, что при таких n $\frac{n-2}{n} \to$

$1, \frac{n-2}{n} \to 1$:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Мы видим, что это в точности $F_1(t)$, т.е:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_1(t)$$

А значит:

$$X_n \xrightarrow{d} 1$$

Теперь же посмотрим, что происходит в $t_0 = 1$ (это верно по определению X_n):

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t_0) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

В свою очередь для F_1:

$$F_1(t_0) = P(1 \leq 1) = 1$$

Мы видим, что в этой точке они не равны друг другу, т.е:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t_0) \neq F_1(t_0),\ t_0 = 1$$

Ч.Т.Д

2)

Хотим найти характеристические функции. Сначала для X_n. По определению:

$$\varphi_{X_n}(t) = Ee^{itX_n}$$

Распишем по определению X_n:

$$Ee^{itX_n} = \frac{1}{2} \cdot e^{it\frac{n-2}{n}} + \frac{1}{2} \cdot e^{it\frac{n+2}{n}}$$

А для 1:

$$\varphi_1(t) = Ee^{it1} = e^{it}$$

Функции нашли, теперь посмотрим на предел, как я упоминал ранее, дроби из определения X_n стремятся к единичке, а значит:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \frac{1}{2}e^{it\cdot 1} + \frac{1}{2}e^{it\cdot 1} = e^{it}$$

Ну а это в точности $\varphi_1(t)$, причем при любых t, т.е:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_1(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Ч.Т.Д

Номер 2

Задача 2:
Найдите характеристическую функцию величины X в случаях:
1) Когда X – результат броска игральной кости.
2) Когда X – имеет плотность $\rho_X(x) = \left(e^{2x} + 2e^{4x}\right) \cdot I_{x \le 0}$.
3) Когда X – имеет плотность $\rho_X(x) = |x| \cdot I_{x \in [-1,1]}$.

a)

Пусть X – результат броска игральной кости. У кости 6 граней, вероятность выпадения каждой равна $\frac{1}{6}$, а значит можем расписать характеристическую функцию по определению:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \frac{1}{6}\left(e^{it} + e^{it2} + \ldots + e^{it6}\right)$$

Ответ:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{6}\left(e^{it} + e^{it2} + \ldots + e^{it6}\right)$$

b)

$$\rho_X(x) = (e^{2x} + 2e^{4x}) \cdot I_{x \le 0}$$

Собственно расписываем по определению:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\rho_x(x)dx (=)$$

Теперь расписываем плотность с учетом индикатора

$$(=) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx}(e^{2x} + 2e^{4x}))dx + 0 = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{itx+2x} + 2e^{itx+4x}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx+2x}dx + \int\limits_{-\infty}^{0} 2e^{itx+4x}dx = \frac{e^{(2+it)x}}{2+it}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{2e^{(4+it)x}}{4+it}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{it+2} + \frac{2}{it+4} - 0 - 0 = \frac{1}{it+2} + \frac{2}{it+4}$$

Ответ:

$$\frac{1}{it+2} + \frac{2}{it+4}$$

c)

$$\rho_X(x) = |x| \cdot I_{x\in[-1,1]}$$

Собственно расписываем по определению:

$$\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\rho_x(x)dx = -\int\limits_{-1}^{0} e^{itx}xdx + \int\limits_{0}^{1} e^{itx}xdx (=)$$

Найдем этот интеграл:

$$\int e^{itx}xdx \overset{\text{и.п.ч}}{=} \begin{bmatrix} u = x \\ du = 1 \\ dv = e^{itx} \\ v = \frac{e^{itx}}{it} \end{bmatrix} = \frac{e^{itx}}{it}x - \int \frac{e^{itx}}{it}dx = \frac{e^{itx}}{it}x + \frac{e^{itx}}{i^2t^2} = \frac{e^{itx}}{it}x + \frac{e^{itx}}{t^2}$$

Подставляем:

$$(=) - \left(\frac{e^{itx}}{it}x + \frac{e^{itx}}{t^2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{e^{itx}}{it}x + \frac{e^{itx}}{t^2}\right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= -\left(\frac{1}{t^2} - \left(-\frac{e^{-it}}{it} + \frac{e^{-it}}{t^2}\right)\right) + \frac{e^{it}}{it} + \frac{e^{it}}{t^2} - \left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{-2}{t^2} + \left(-\frac{e^{-it}}{it} + \frac{e^{-it}}{t^2}\right) + \frac{e^{it}}{it} + \frac{e^{it}}{t^2} =$$

$$= \frac{-2}{t^2} - \frac{e^{-it}}{it} + \frac{e^{-it}}{t^2} + \frac{e^{it}}{it} + \frac{e^{it}}{t^2} = \frac{-2}{t^2} + e^{-it} \cdot \left(-\frac{1}{it} + \frac{1}{t^2}\right) + e^{it} \cdot \left(\frac{1}{it} + \frac{1}{t^2}\right)$$

Ответ:

$$\frac{-2}{t^2} + e^{-it} \cdot \left(-\frac{1}{it} + \frac{1}{t^2}\right) + e^{it} \cdot \left(\frac{1}{it} + \frac{1}{t^2}\right)$$