Бурмашев Григорий. Матан – какой-то там не помню какой

Макс 2:21

бля боже

он тупо просит учить доказательства всего

что ни разу не употребляли

ни в семах ни в дз

я просто нихуя не понимаю

он меня заебал

я почти любое его доказательство открываю

и нихуя не понимаю

мне не то что выучить

мне понять хотя бы блять

Номер 7

2)

$$\int \frac{dx}{2\sin +3\cos +5}$$

Универсальная триг.подстановка:

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Тогда получаем:

$$\int \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{\left(\frac{4t+3-3t^2+5(1+t^2)}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{1}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{2t^2+4t+8} = \int \frac{dt}{t^2+2+4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+3} = \frac{\arctan\frac{t+1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C$$

Ответ:

$$\frac{\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C$$

3)

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$$

Вынесем $\sin^2 x + \cos^2 x$ за скобки:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot 2+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{2+\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\frac{2}{\cos^2 x}+1} =$$

$$= \int \frac{\tan^2 x + 1}{2\tan^2 x + 3}\,dx$$

Сделаем замену:

$$u = \tan x$$

$$du = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$dx = \frac{du}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

Тогда:

$$\int \frac{1}{2u^2+3}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\arctan(\sqrt{\frac{2}{3}}u)+C = \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tan x\right)}{\sqrt{6}}+$$

Ответ:

$$\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tan x\right)}{\sqrt{6}}+$$

4)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 5\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x}}\,dx =$$

Сделаем замену:

$$u = \tan x$$

$$du = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$dx = \frac{du}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

Тогда:

$$\int \frac{du}{u^3-u^2+u-5} = \int \frac{du}{(u-5)(u^2+1)}$$

Согласно степеням в знаменателе:

$$\frac{1}{(u-5)(u^2+1)} = \frac{a}{u-5} + \frac{bu+c}{u^2+1}$$

$$1 = a(u^2+1) + (bu+c)(u-5) = au^2 + a + bu^2 - 5bu + cu - 5c$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c - 5b = 0 \\ a - 5c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ c = 5b \\ -b - 25b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ c = 5b \\ b = -\frac{1}{26} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{26} \\ b = -\frac{5}{26} \\ c = -\frac{5}{26} \end{cases}$$

Значит:

$$\frac{1}{(u-5)(u^2+1)} = \frac{\frac{1}{26}}{u-5} + \frac{-\frac{1}{26}u - \frac{5}{26}}{u^2+1}$$

Тогда:

$$\frac{1}{26} \int \frac{u+5}{u^2+1} - \frac{1}{u-5}\, du = \frac{1}{26} \left(\int \frac{du}{u-5} - \int \frac{u+5}{u^2+1}\, du \right) =$$

Посчитаем второй интеграл отдельно:

$$\int \frac{u+5}{u^2+1}\, du = \int \frac{u}{u^2+1}\, du + 5 \cdot \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{1}{2} \ln|u^2+1| + 5 \arctan u + C$$

Тогда:

$$= \frac{1}{26} \left(\ln|u-5| - \frac{1}{2} \ln|u^2+1| - 5 \arctan u \right) = \frac{\ln|u-5| - 5\arctan u}{26} - \frac{\ln|u^2+1|}{52} + C =$$

$$= \frac{\ln|\tan x - 5| - 5x}{26} - \frac{\ln|\tan^2 x + 1|}{52} + C$$

Ответ:

$$\frac{\ln|\tan x - 5| - 5x}{26} - \frac{\ln|\tan^2 x + 1|}{52} + C$$

5)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}} = \int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{7}{3}}} =$$

$p+q = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3 \in \mathbb{Z} \to$ интегрируется.

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^2 \cdot \sqrt{(x+1)^2(x-1)}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} =$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}\, dx}{(x+1)(x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{x-1}} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

Делаем замену (по аналогии с семинаром):

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$x+1 = t^2(x-1)$$

$$x = -\frac{1+t^3}{1-t^3}$$

$$dx = -\frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\, dt$$

Тогда получаем:

$$\int \frac{-6t^2\, dt}{(1-t^3)^2 \cdot \left(-\frac{1+t^3}{1-t^3}+1\right)\left(-\frac{1+t^3}{1-t^3}-1\right)^2} \cdot t = \int \frac{-6t^3\, dt}{(1-t^3)^2 \cdot \left(-\frac{2t^3}{1-t^3}\right)\left(-\frac{2}{1-t^3}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{3t^3-3}{4}\, dt = \frac{3}{4}\int \frac{t^3-1}{1}\, dt = \frac{3}{4}\int (t^3-1)\, dt =$$

$$= \frac{3}{4}\int t^3\, dt - \frac{3}{4}\int dt = \frac{3t^4}{16} - \frac{3t}{4} + C =$$

$$= \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4 - \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C$$

Ответ:

$$\frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4 - \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C$$

Номер 8

$$I_n = \int \sin^{-n}\ dx = \int \sin^{-n-1} \cdot \sin x \, dx =$$

Воспользуемся интегрированием по частям:

$$v = \sin^{-n-1} x$$

$$u' = \sin x$$

Тогда:

$$= -\cos x \sin^{-n-1} \cdot x - \int (-\cos x)(-n-1) \sin^{-n-2} \cos x \, dx =$$

$$= -\cos x \sin^{-n-1} x - (n+1)(I_{n-2} - I_n) =$$
$$= -\cos x \sin^{-n-1} x - (n+1)I_{n-2} + (n+1)I_n$$

Тогда выражаем I_n:

$$I_n - (n+1)I_n = -\cos x \sin^{-n-1} x - (n+1) \cdot I_{n-2}$$

$$I_n - nI_n - I_n = -\cos x \sin^{-n-1} x - (n+1) \cdot I_{n-2}$$
$$nI_n = \cos x \sin^{-n-1} x + (n+1)I_{n-2}$$
$$I_n = \frac{\cos x \sin^{-n-1} x + (n+1)I_{n-2}}{n}$$

Если n – четное:

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sin^0 x} = \int dx = x + c$$

Если n – нечетное:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x}$$

Универсальная триг.подстановка:

$$\tan \frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \ln|t| + C = \ln|\tan \frac{x}{2}| + C$$