ТВиМС, ластовый

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

20 декабря 2021 г.

But the very next day you gave it away...

С НОВЫМ ГОДОМ!

Номер 3

Плотности:

$$\rho_X(t) = I_{\{t\in[0,1]\}}$$
$$\rho_Y(t) = I_{\{t\in[0,1]\}}$$
$$\rho_U(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot I_{\{t>0\}}$$
$$\rho_V(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot I_{\{t>0\}}$$

f)

$$\rho_{X+U}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(z)\rho_U(t-z)dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{\{z\in[0,1]\}} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(t-z)} \cdot I_{\{(t-z)>0\}}dz =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{\{z\in[0,1]\}} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda z} \cdot I_{\{(t-z)>0\}}dz = \begin{cases} 0, t<0 \\ a = \min(1,t) \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} \int\limits_0^a e^{\lambda z}dz, t>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, t<0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda \cdot a}-1}{\lambda}, t>0, a=\min(1,t) \end{cases} = \begin{cases} e^{-\lambda t}(e^{\lambda \cdot a}-1), t>0, a=\min(1,t) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Ответ:

$$\rho_{X+U}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}(e^{\lambda \cdot a}-1), t>0, a=\min(1,t) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

e)

По определению:

$$\rho_{\frac{U}{V}}(t) = F'_{\frac{U}{V}}(t)$$

Считаем:

$$F_{\frac{U}{V}}(t) = P\left(\frac{U}{V} \le t\right) = P((U,V)\in A_t), A_t = \left\{x\in X, y\in Y : \frac{x}{y} \le t\right\}$$

$$P((U,V)\in A_t) = \iint\limits_{A_t} \lambda e^{-\lambda x} I_{\{x>0\}} \cdot \lambda e^{-\lambda y} I_{\{y>0\}} dxdy = \iint\limits_{\substack{x \le ty \\ x>0 \\ y>0}} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^{ty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dx \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Посчитаем интеграл отдельно:

$$\int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^{ty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dx = \int\limits_0^\infty \cdot \lambda^2 e^{-\lambda y} \cdot \left(-\frac{e^{-\lambda t y} - 1}{\lambda} \right) dy = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \cdot (-\left(e^{-\lambda t y} - 1\right)) dy =$$

$$= \lambda \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(1+t)y} - e^{-\lambda y} \right) dy = -\lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda(1+t)} - \frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{1}{1+t} + 1$$

Возвращаемся к системе, она теперь будет равна:

$$\begin{cases} -\frac{1}{t+1} + 1, t > 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Это была функция распределения, возьмем производную и получим ответ:

Ответ:

$$\rho_{\frac{U}{V}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t)^2}, t > 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

h)

Аналогично:

$$\rho_{UX}(t) = F'_{UX}(t)$$

$$F_{UX}(t) = P(UX \le t) = \iint\limits_{\substack{u \le \frac{t}{x} \\ x \in [0,1] \\ u > 0}} \lambda e^{-\lambda u} du dx = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{t}{x}} \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - \int_0^1 e^{-\frac{\lambda t}{x}}$$

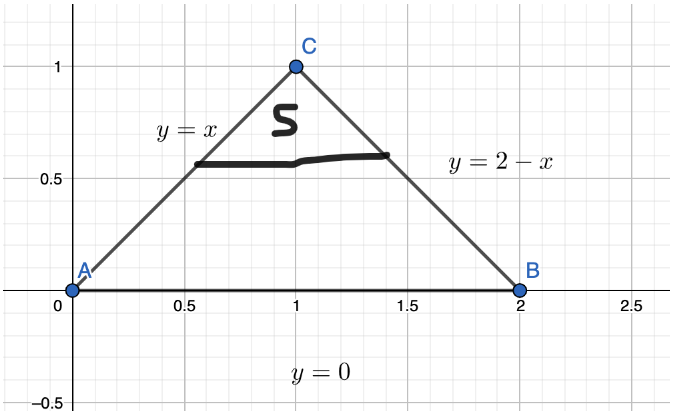
Тогда:

$$\rho_{UX}(t) = \begin{cases} -\frac{d}{dt} \int_0^1 e^{\frac{\lambda t}{x}} dx, t > 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{\lambda}{x} e^{-\frac{\lambda t}{x}} dx, t > 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Ответ:

$$\rho_{UX}(t) = \begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{\lambda}{x} e^{-\frac{\lambda t}{x}} dx, t > 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Номер 7



$$P(X \leq x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0] \\ \int\limits_0^x t dt, x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} + \int\limits_1^x (2-t) dt, x \in [1, 2) \\ 1, x \in [2, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^2}{2}, x \in (0, 1) \\ -\frac{x^2}{2} + 2(x-1) + 1, x \in [1, 2) \\ 1, x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Отсюда:

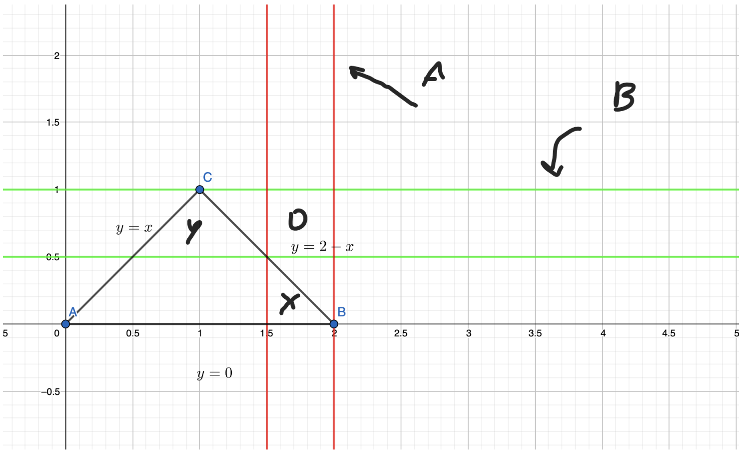
$$\rho_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0) \cup [2, +\infty) \\ x, x \in (0, 1) \\ 2 - x, x \in [1, 2) \end{cases}$$

$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = \begin{cases} 0, y \in (-\infty, 0] \\ \frac{\frac{1}{2} - S}{1}, y \in (0, 1) \\ 1, y \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, y \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{2} - (1-y)^2, y \in (0, 1) \\ 1, y \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, y \in (-\infty, 0] \\ -y^2 + 2y + \frac{1}{2}, y \in (0. \\ 1, y \geq 1 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\rho_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0, y \notin (0, 1) \\ 2 - 2y, y \in (0, 1) \end{cases}$$

Теперь посмотрим на зависимость/независимость:



Положим A как все, что внутри области, ограниченной красными лучами на графике, а B как все, что внутри зеленой области, тогда очевидно, что $P(X \in A) \neq 0$, ибо есть область, названная на графике X, где вероятность отлична от нуля. Аналогично $P(Y \in B) \neq 0$, но при этом всегда $P(X \in A \cap Y \in B) = 0$. Тобишь:

$$P(X \in A \cap Y \in B) = 0 \neq P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

Отсюда делаем вывод, что случайные величины являются **зависимыми**

Ответ: нет, не являются независимыми.

$$F_X = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^2}{2}, x \in (0, 1) \\ -\frac{x^2}{2} + 2(x-1) + 1, x \in [1, 2) \\ 1, x \in [2, \infty) \end{cases}$$

$$\rho_X(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0) \cup [2, +\infty) \\ x, x \in (0, 1) \\ 2 - x, x \in [1, 2) \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, y \in (-\infty, 0] \\ -y^2 + 2y + \frac{1}{2}, y \in (0, 1) \\ 1, y \geq 1 \end{cases}$$

$$\rho_Y(y) = \begin{cases} 0, y \notin (0, 1) \\ 2 - 2y, y \in (0, 1) \end{cases}$$