ТВиМС, дз – 6

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

26 октября 2021 г.

Номер 3

б) геометрическое распределение с параметром p

(III) **Геометрическое распределение**
Распределение случайной величины X задается следующей таблицей:

1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	qp	$\dots$	$q^{k-1}p$	$\dots$

Эта случайная величина моделирует подбрасывание монеты до первого успеха.

Найдем $\mathbb{E}X$, мы работаем с вероятностями, поэтому $q < 1, p < 1$:

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1}k = p + 2pq + 3pq^2 + \ldots = (1-q) + 2(1-q)q + 3(1-q)q^2 + \ldots =$$

$$= 1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 + \ldots = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

Найдем $\mathbb{D}X$:

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1}k^2 = p + 4pq + 9pq^2 + \ldots = (1-q) + 4(1-q)q + 9(1-q)q^2 =$$

$$= 1 - q + 4q - 4q^2 + 9q^2 - 9q^3 + \ldots = 1 + 3q + 5q^2 + \ldots = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots +$$

$$+ 2q + 4q^2 + \ldots = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + 2q(1 + q + q^2 + \ldots) + 2q^2(1 + q + q^2 + \ldots) + \ldots =$$

$$= (1 + 2q + 2q^2 + \ldots) \cdot (1 + q + q^2 + \ldots) = (1 + 2q + 2q^2 + \ldots) \cdot \frac{1}{1-q} = \left(1 + \frac{2q}{1-q}\right) \cdot \frac{1}{1-q} =$$

$$= \frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

Итого:

$$\mathbb{D}X = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2 - 2p + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Найдем $\mathbb{E}e^X$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1}e^k = pe + pqe^2 + pq^2e^3 + pq^3e^4 + \ldots = 1 = \frac{ep}{1 - eq} =$$

$$= \frac{ep}{1 - e(1-p)}$$

Ответ:

$$\mathbb{E}\mathbb{X} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{D}\mathbb{X} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\mathbb{E}e^X = \frac{ep}{1-e(1-p)}$$

Номер 9

Боб:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Алиса:

Y	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Совместное распределение:

Алиса с вероятностью $\frac{1}{2}$ отнимет от числа Боба единичку, и с такой же вероятностью прибавит. Для каждого числа Боба у Алисы будет всего 2 возможных исхода (± 1), а вероятности всех остальных равны 0.

$\frac{X}{Y}$	0	1	2	3	4
0	0	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0	0
2	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0
3	0	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$	0

Номер 10

а)

Пусть $P(X = \alpha) = p$, тогда посмотрим на $P(XY = \alpha)$, у нас возможно 2 случая:

1. $Y = 1$:
$$q_1 = p \cdot \frac{1}{2}$$
2. $Y = -1$:
$$q_2 = p \cdot \frac{1}{2}$$

   Итого:
$$P(XY = \alpha) = q = p \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = p = P(X = \alpha)$$

Ч.Т.Д

б)

Хотим:

$P(XYZ = a \cap XYW = b \cap XW = c) = P(XYZ = a) \cap P(XYW = b) \cap P(XW = c)$

Для начала заметим, что:

$$P(XW = 1) = P(XW = -1) = \frac{1}{2}$$

Это так, потому что и для X, и для Y у нас 2 варианта (± 1), всего 4 варианта, но подходят нам всего 2 из них (только 1, 1 и -1, -1 для единички, например), остальные варианты дают другой знак.

Также нужно заметить, что:

$$P(XYZ = 1) = P(XYZ = -1) = P(XYW = 1) = P(XYW = -1) = \frac{1}{2}$$

Аналогично предыдущему случаю, но уже для случая из 3 позиций, всего у нас 8 вариантов, а подходят нам ровно 4 (для единички это например 1,1,1; -1, -1, 1; 1, -1, -1; -1, 1, -1, аналогично для -1)

Чтобы ответ на задачу был утвердительным, нам нужно, чтобы равенство из самого начала задачи выполнялось, т.е $P(XYZ = a \cap XYW = b \cap XW = c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Заметим, что, чтобы получить $XW = c$, мы должны рассматривать всего 2 варианта (показали выше, например 1,1 и -1, -1 для единички и -1, 1, 1, -1 для минус единички), при таком раскладе из XYW мы можем однозначно определить, какой у нас будет Y (ибо в пересечении будет X^2 и W^2 и мы сможем однозначно сказать об Y), а после этого мы сможем однозначно определить Z (из пересечения всех трех, т.е XYZ, XYW, и XW, т.к при таком раскладе будут X^2, W^2, Y^2) Итого у нас будет $(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ Таким образом мы получили, что:

$$P(XYZ = a \ \cap \ XYW = b \ \cap \ XW = c) = \frac{1}{8}$$

$$P(XYZ = a) \ \cap \ P(XYW = b) \ \cap \ P(XW = c) = \frac{1}{8}$$

$$\longrightarrow$$

$$P(XYZ = a \cap XYW = b \cap XW = c) = P(XYZ = a) \cap P(XYW = b) \cap P(XW = c)$$

$\longrightarrow$ величины являются независимыми в совокупности

Ответ: величины **являются** независимыми в совокупности