Матан, дз – 2

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

21 сентября 2021 г.

Номер 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$$

Пытаемся решить по Даламберу/Гауссу, аналогично таскам с сема (смотря что пойдет):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2(n+1)+3)!!}{(n+1)^3(2(n+1))!!}}{\frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}} = \frac{(2n+5)!!}{(n+1)^3(2n+2)!!} \cdot \frac{n^3(2n)!!}{(2n+3)!!}$$

Избавляемся от факториалов путем сокращения:

$$\frac{(2n+5)}{(n+1)^3 \cdot (2n+2)} \cdot \frac{n^3}{1} = \frac{2n^4+5n^3}{(n^3+3n^2+3n+1)(2n+2)} = \frac{2n^4+5n^3}{2n^4+8n^3+12n^2+8n+2} =$$

$$= \frac{2+\frac{5}{n}}{2+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{8}{n^3}+\frac{2}{n^4}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{2} = 1 \to \text{Даламбер не работает}$$

Тогда будем пытаться по Гауссу:

$$\frac{2+\frac{5}{n}}{2+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{8}{n^3}+\frac{2}{n^4}} = \frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}} =$$

Загоняем лишнее под O (ряд вида $(1+x)^\alpha, x = \frac{1}{n}, \alpha = 4$)

$$= \frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{4}{n}+O(\frac{1}{n^2})}$$

Приводим к норм.виду (знаем, что при $x \to 0 : \frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2) \to \frac{a}{1+x} = a(1-x+O(x^2))$):

$$\left(1+\frac{5}{2n}\right)\left(1-\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{5}{2n} = 1-\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Привели к виду $1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$, причем $\delta = 1, p = \frac{3}{2} > 1$

Т.к $p > 1$, то по признаку Гаусса ряд **сходится**

Ответ: сходится

Номер 2

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Будем действовать аналогично семинару, используя теорему Штольца.
Для начала поделим обе части выражения на $\frac{1}{n}$, получим:

$$n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+o\left(1\right)$$

Нам нужно проверить, что:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)=1$$

Для этого воспользуемся теоремой Штольца, заметим, что:

1. $$\sum\frac{1}{k^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$
2. $$\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$
3. $$\frac{1}{n}\downarrow$$

Теперь посмотрим, существует ли предел:

$$\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=-\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=-\frac{1}{n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}=-\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}-n}=-\frac{1}{\frac{n^2-n^2-n}{n+1}}=\frac{1}{\frac{n}{n+1}}=$$

$$=\frac{n+1}{n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

Предел существует, тогда применяем теорему Штольца и получаем, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=1\to n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+o\left(1\right)\to\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ч.Т.Д