Матан, дз – 13

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

14 декабря 2021 г.

Номер 1

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p},\ p>0$$

Номер почти как 1й с семинаров, функция все также неотрицательная, а значит предел не зависит от выбора D_n. Проблема теперь не с точкой (0, 0), а с бесконечностью. Тогда для исчерпания (чтобы прижиматься к бесконечности) кладем D_n как:

$$D_n : 1 \leq x^2+y^2 \leq n^2$$

Теперь переходим к пределу:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{1\leq x^2+y^2\leq n^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} =$$

Для удобства переходим в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_1^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{n^2}} \frac{1}{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^p} rdr = \lim_{n\to\infty} \int_1^{2\pi} d\varphi \int_1^n \frac{1}{(r^2\cdot 1)^p} rdr =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_1^{2\pi} d\varphi \int_1^n \frac{r}{r^{2p}} dr = 2\pi \cdot \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{r^{2p-1}} dr = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{2p-1}} dr$$

Привели к понятному виду, $\frac{1}{r^{2p-1}}$ сходится при степени больше 1, т.е $2p-1>1 \to p>1$, теперь вычислим интеграл:

$$2\pi \frac{r^{2-2n}}{2-2p}\Bigg|_1^{\infty} = \pi \cdot \frac{1}{p-1},\ p>1$$

Ну а при $p\leq 1$ имеем расходимость

Номер 2

$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}},\ D: x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1$$

Функция неотрицательная, проблема здесь при $z = 0$, потому что в знаменателе получается ноль. Тогда введем D_n:

$$D_n : D \cap \left\{ (x,y,z) \Big| \frac{1}{n} \le z \le 1 \right\}$$

Теперь переходим к пределу:

$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{D_n} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}}$$

Теперь можем перейти к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$D : r^2 \le h^2, 0 \le h \le 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{D_n} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{n}}^1 dh \int_0^h \frac{1}{(r^2+h^2)^{\frac{4}{3}}} rdr =$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 dh \int_0^h \frac{1}{(r^2+h^2)^{\frac{4}{3}}} rdr = (\times)$$

Посчитаем отдельно:

$$\int \frac{1}{(r^2+h^2)^{\frac{4}{3}}} rdr = \begin{vmatrix} u = r^2 + h^2 \\ du = 2rdr \\ dr = \frac{du}{2r} \end{vmatrix} = \int \frac{r}{2\cdot r \cdot u^{\frac{4}{3}}} du = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{4}{3}} du = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{u}} \right) =$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt[3]{u^2}} = -\frac{3}{2\sqrt[3]{r^2+h^2}}$$

$$-\frac{3}{2\sqrt[3]{r^2+h^2}}\Bigg|_0^h = -\frac{3}{2\sqrt[3]{2h^2}} - \left(-\frac{3}{2\sqrt[3]{h^2}} \right) = \frac{-3+3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2h^2}}$$

Берем еще раз интеграл:

$$\int \frac{-3+3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2h^2}}dh = -\frac{1}{2}\int \frac{3(1-\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{h^2}}dh = -\frac{3(1-\sqrt[3]{2})}{2\sqrt[3]{2}}\int \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}dh = -\frac{3(1-\sqrt[3]{2})}{2\sqrt[3]{2}}\cdot 3\sqrt[3]{h} =$$

$$= -\frac{9(1-\sqrt[3]{2})}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{h} = -\frac{9(1-\sqrt[3]{2})}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}\cdot\sqrt[3]{h} = -\frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4}\sqrt[3]{h}$$

$$-\frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4}\sqrt[3]{h}\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{1} = -\frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4}+\frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{n}} = \frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}-1\right)$$

Теперь возвращаемся к пределу:

$$(\times) = 2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}-1\right) = 2\pi\frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}-1\right) = -2\pi\frac{9\sqrt[3]{4}-18}{4} =$$

$$= -\pi\cdot\frac{9(\sqrt[3]{4}-2)}{2}$$

Ответ:

$$-\pi\cdot\frac{9(\sqrt[3]{4}-2)}{2}$$