Бурмашев Григорий. 208. Матан. Д/з – 8

Номер 10

Вычислить пределы:

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+\cos\frac{\pi x}{2})}{\sqrt{x}-1}$$

Сделаем замену:

$$x = y + 1$$

$$x \to 1 \equiv y \to 0$$

Тогда:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y^2+2y+1+\cos\frac{\pi y+\pi}{2})}{\sqrt{y+1}-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})\cdot(\sqrt{y+1}+1)}{y+1-1} =$$

Домножим так, чтобы получилось следствие первого замечательного предела:

$$\#\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})\cdot(\sqrt{y+1}+1)}{y}\cdot\frac{(y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})}{(y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})} =$$

$$= \lim_{y\to 0} 1\cdot\frac{(y^2+2y-\sin\frac{\pi y}{2})(\sqrt{y+1}+1)}{y} = \lim_{y\to 0}(\frac{y}{1}+\frac{2}{1}-\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{y})\cdot(\sqrt{y+1}+1) =$$

$$= \lim_{y\to 0}(0+2-\frac{\frac{\pi y}{2}}{y}\cdot\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}})\cdot(\sqrt{1}+1) = (0+2-\frac{\pi}{2}\cdot 1)\cdot 2 = 4-\pi$$

Ответ: $4-\pi$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{e^{-x}-1}{-x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x}}}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}}}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1}-\sqrt{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{\sqrt{1}} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Ответ: 1

c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$$

Сделаем замену:

$$x=y+1$$

$$x\to 1\equiv y\to 0$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(2(y+1)^2-y-1)}{\ln((y+1)^4+(y+1)^2-y-1)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+2y^2+3y)}{\ln(y^4+4y^3+6y^2+4y+1+y^2+2y+1-y-1)}\cdot\frac{2y^2+3y}{2y^2+3y}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}(1\cdot\frac{2y^2+3y}{\ln(1+y^4+4y^3+7y^2+5y)}\cdot$$

$$\cdot\frac{y^4+4y^3+7y^2+5y}{y^4+4y^3+7y^2+5y})=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(1\cdot 1\cdot\frac{2y^2+3y}{y^4+4y^3+7y^2+5y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2y+3}{y^3+4y^2+7y+5}=\frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$

d)

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a},\quad a>0$$

Сделаем замену:

$$x=y+a$$

$$x\to a\equiv y\to 0$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{a^{y+a}-(y+a)^a}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{a^a\cdot e^{y\ln a}-(\frac{y}{a}+1)^a\cdot a^a}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{a^a\cdot(e^{y\ln a}-1+1)-a^a\cdot(\frac{y}{a}+1)^a+a^a-a^a}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(a^a\cdot\frac{e^{y\ln a}-1}{y\ln a}\cdot\ln a+\frac{a^a}{y}-a^{a-1}\cdot\frac{(1+\frac{y}{a})^a-1}{\frac{y}{a}\cdot a}\cdot a-\frac{a^a}{y}\right)=$$

$$=a^a\cdot 1\cdot\ln a+0-a^{a-1}\cdot a-0=a^a\cdot 1\cdot\ln a-a^a=a^a\cdot\ln a-a^a$$

Ответ: $a^a\cdot\ln a-a^a$

e)

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$$

Сделаем замену:

$$x = y + a$$

$$x \to a \equiv y \to 0$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+a) - \ln a}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(\frac{y+a}{a})}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{y}{a})}{y \cdot \frac{a}{a}} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{y}{a})}{a \cdot \frac{y}{a}} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

Ответ: $\frac{1}{a}$

f)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1 + x^2 + e^x - 1)}{\ln(x^4 + e^{2x})} \cdot \frac{x^2 + e^x - 1}{x^2 + e^x - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + e^x - 1}{\ln(1 + x^4 + e^{2x} - 1)} \cdot \frac{x^4 + e^{2x} - 1}{x^4 + e^{2x} - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + e^x - 1}{x^4 + e^{2x} - 1} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x + \frac{e^x - 1}{x}}{x^3 + 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{x^3 + 2} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$