ТВиМС, дз – 7

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

10 ноября 2021 г.

Номер 8 [листок 5]

По условию величины независимы и:

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{4},\ P(X_k = 0) = \frac{1}{2},\ k \in \{1 \dots n\}$$

Для решения воспользуемся Facts с семинара:

Факты

1) $E(X+Y) = EX + EY$ – всегда!

2) $D(X_1 + \ldots + X_n) = DX_1 + \ldots + DX_n$ – если $X_1, \ldots, X_n$ – независимы хотя бы попарно.

3) $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$ – если X и Y – независ

3') $E(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = EX_1 \cdot EX_2 \cdot \ldots \cdot EX_n$ – если $X_1, \ldots, X_n$ – незав ис в совокуп

Тогда:

$$\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n = \left(1 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot n = 0$$

$$\mathbb{D}S_n = \mathbb{E}S_n^2 - (\mathbb{E}S_n)^2 = \mathbb{E}S_n^2 - 0 = \mathbb{E}S_n^2 = \left(1^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot n = \left(\frac{2}{4}\right) n = \frac{n}{2}$$

$$\mathbb{E}2^{S_n} = \mathbb{E}2^{X_1 + \ldots + X_n} = \mathbb{E}2^{X_1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}2^{X_n} = \left(2^1 \cdot \frac{1}{4} + 2^{-1} \cdot \frac{1}{4} + 2^0 \cdot \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{9}{8}\right)^n$$

Ответ:

$$\mathbb{E}S_n = 0$$

$$\mathbb{D}S_n = \frac{n}{2}$$

$$\mathbb{E}2^{S_n} = \left(\frac{9}{8}\right)^n$$

Номер 9 [листок 5]

Рассмотрим $i-$го человека. У него есть сосед слева и сосед справа. Все кидают кубики независимо друг от друга. Для начала проще будет сказать, когда у **обоих** соседей выпало число, которое не равно числу i-го человека, вероятность этого $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, потому что нас интересует случай, когда соседу выпало любое из 6 чисел, за исключением того 1, которое выпало i-му. В таком случае вероятность того, что **хотя бы** у одного соседа будет число, совпадающее с нашим равна $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Введем мат.ожидание для i-го человека (пусть X_i – индикаторная функция, которая определяет, выполняется ли нужное нам условие для i-го человека или нет)

$$\mathbb{E}X_i = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{36}$$

Тогда из того, что они бросают независимо, получаем:

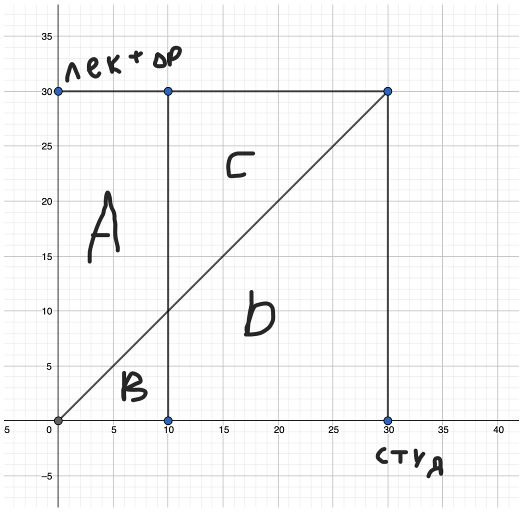
$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_i + \ldots + \mathbb{E}X_n = \left(\frac{11}{36}\right) \cdot n = \frac{11n}{36}$$

Ответ:

$$\mathbb{E}X = \frac{11n}{36}$$

Номер 11 [листок 6]

Электричка может задержаться от 0 до 30 минут, студент едет к 9:50, т.е он может приехать вплоть до 10:20 (как и лектор). Нам подходят 2 случая: когда студент приезжает до 10:00, т.е к началу экзамена, а также когда студент приезжает после 10:00, **но раньше**, чем лектор. В первом случае опоздание должно быть не больше 10 минут, во втором больше 10, но меньше, чем опоздание лектора. Решим с помощью геомы. По оси x будем отсчитывать опоздание студента, по оси y – лектора. Тогда у нас получится квадрат 30 на 30, поделим его на разные площади:



Общая площадь фигуры будет квадрат 30 на 30, его площадь 900

Тогда за случай 1 (когда студент опоздал не более чем на 10 минут и приехал вовремя) будет отвечать фигура $A+B$, её площадь будет $10 \cdot 30 = 300$.

А за случай 2 будут отвечать все иксы больше 10, при этом опоздание лектора больше опоздания студента, т.е фигура C, ее площадь будет :

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200$$

Общая площадь, которая нам подходит:

$$300 + 200 = 500$$

Тогда ответ:

$$P = \frac{S(\text{подходит нам})}{S(\text{общая})} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$$

Ответ:

$$P = \frac{5}{9}$$

Номер 10

Пусть A – то событие, которого мы хотим добиться в каждом из пунктов задачи

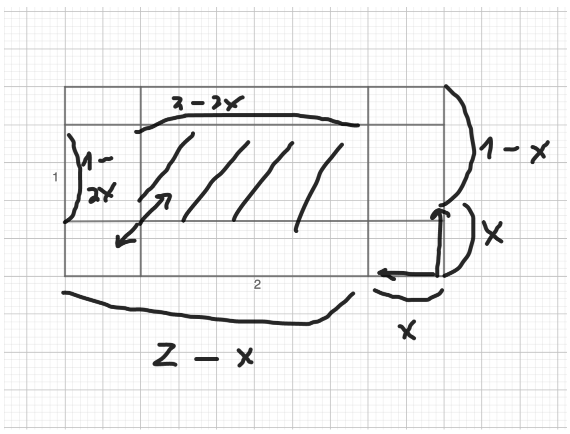
а) [до ближайшей стороны]

Разобьем на случаи:

- $x \geq \frac{1}{2}$:

  Очевидно, что где бы не лежала наша точка, расстояние от нее до ближайшей стороны треугольника будет не больше $\frac{1}{2}$, так что при таком раскладе $P(A) = 1$

- $0 < x < \frac{1}{2}$: Отойдем от каждой стороны внутрь прямоугольника на x соотвественно, получится примерно такая картина:

  Картина не оч красивая, но не суть. От каждой стороны мы отошли на x и получили прямоугольник с параметрическими сторонами $1 - 2x, 2 - 2x$, которые зависят соотвественно от x. Он может увеличиваться и уменьшаться в размере по стрелочке соотвественно, но т.к $x < \frac{1}{2}$, там всегда будет какая-то площадь. Именно в этой площади будут точки, которые на расстоянии больше x, они нам не подходят, т.е:

  $$P(A) = 1 - P(\text{точка лежит внутри прямоугольника})$$

  Найдем эту вероятность:

  $$P(\text{точка лежит внутри прямоугольника}) = \frac{S(\text{подходит нам})}{S(\text{общая})} = \frac{(2-2x)(1-2x)}{2 \cdot 1} =$$

$$= 2x^2 - 3x + 1$$

Тогда **ответ**:

$$P(A) = 1 - (2x^2 - 3x + 1) = 3x - 2x^2$$

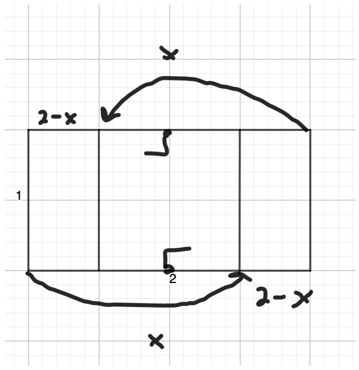
b) [до каждой стороны]

Разобьем на случаи:

- $0 < x \leq 1$:

  Очевидно, что при таком x у нас до хотя бы одной из сторон расстояние для любой точки будет больше x, т.к у нас прямоугольник 2 на 1, т.е $P(A) = 0$

- $1 < x < 2$: При таком x расстояние до верхней и нижней прямой не будет превосходить x (т.к сверху вниз у нас высота 1). А вот для левой и правой стороны нужно ограничить параметрическую фигуру, отойдя слева и справа на x соотвественно, т.е:

  Чтобы точка была не больше x до каждой из сторон, она должна быть внутри центрального прямоугольника, ибо если она будет слева или справа, то до правой(левой соответственно) стороны будет расстояние $> x$ и этот случай нам подходить не будет, итого:

  $$P(A) = \frac{1 \cdot (2 - 2(2 - x))}{2} = \frac{2 - 4 + 2x}{2} = 1 - 2 + x = x - 1$$

- $x \geq 2$: Очевидно, что расстояние никак не может быть больше 2, поэтому тут всегда $P(A) = 1$