Бурмашев Григорий, БПМИ-208

5 апреля 2022 г.

# Номер 10 [листок 4]

Считаем по аналогии с семинаром:

$$2X_1 \sim (0, 4)$$
$$-3X_2 \sim (3, 9)$$
$$X_3 \sim (0, 4)$$
$$-X_4 \sim (-1, 4)$$

Тогда:

$$2X_1 - 3X_2 + X_3 - X_4 \sim (0 + 3 + 0 - 1, 4 + 9 + 4 + 4)$$
$$Z = 2X_1 - 3X_2 + X_3 - X_4 \sim (2, 21)$$

Теперь:

$$P(|Z| < 13) = P(-13 < Z < 13) = \Phi\left(\frac{13-2}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-13-2}{\sqrt{21}}\right) = \Phi\left(\frac{11}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{21}}\right) = (\times$$

Посчитаем примерно:

$$\frac{11}{\sqrt{21}} \sim 2.4$$
$$\frac{-15}{\sqrt{21}} \sim -3.27$$
$$\Phi\left(\frac{11}{\sqrt{21}}\right) \sim \Phi(2.4) = 0.9918$$
$$\Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{21}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{21}}\right) \sim 1 - \Phi(3.27) = 1 - 0.9995 = 0.0005$$

Тогда:

$$(\times) \sim 0.9918 - 0.0005 = 0.9913$$

**Ответ:**

0.9913

# Номер 12 [листок 4]

**Задача 12 (ДЗ).** Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2)$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Найдите значение параметра $a$ при котором случайные величины $X_1 + aX_2$ и $X_2$ независимы.
2) Найдите такую матрицу $A$, что $X = AZ$, где $Z = (Z_1, Z_2)$, $Z_j \sim \mathcal{N}(0,1)$ и независимы;
3) Найдите плотность случайного вектора $(X_2, X_1 + X_2)$.

## a)

Заметим, что можем найти такую матрицу A, что вектор для наших условий будет нормальным, тобишь:

$$Z = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Где:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Хотим (по свойствам)

$$\operatorname{cov}(X_1 + aX_2, X_2) = 0$$

Проверяем:

$$\operatorname{cov}(X_1 + aX_2, X_2) = \operatorname{cov}(X_1, X_2) + a \cdot \operatorname{cov}\ (X_2, X_2) = 1 + a \cdot 2$$

Тогда:

$$1 + a \cdot 2 = 0$$

**Ответ:**

$$a = -\frac{1}{2}$$

## b)

Аналогично семинару:

$$Z_1 = \frac{X_1}{\sqrt{\mathbb{D}X_1}} = \frac{X_1}{\sqrt{3}}$$

$$\tilde{Z}_2 = X_2 - \operatorname{cov}(X_2, Z_1) \cdot Z_1 = X_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \frac{X_1}{\sqrt{3}} = X_2 - \frac{X_1}{3}$$

$$\mathbb{D}\tilde{Z}_2 = \mathbb{D}\left(X_2 - \frac{X_1}{3}\right) = \mathbb{D}X_2 + \mathbb{D}\left(-\frac{X_1}{3}\right) + 2\mathrm{cov}\left(X_2, -\frac{X_1}{3}\right) = 2 + \frac{1}{9}\cdot 3 - 2\cdot\frac{1}{3}\mathrm{cov}\left(X_1, X_2\right) = \frac{5}{3}$$

$$Z_2 = \frac{\tilde{Z}_2}{\sqrt{\mathbb{D}\tilde{Z}_2}} = \frac{X_2 - \frac{X_1}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}X_2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{X_1}{3} = -\frac{\sqrt{15}}{15}X_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}X_2$$

Тогда:

$$X_1 = Z_1\sqrt{3}$$

$$X_2 = Z_1\sqrt{\frac{1}{3}} + Z_2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

А матрица:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{5}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

**Ответ:**

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{5}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

## c)

Знаем:

**Теорема 7.** *Если $X \sim N(a, R)$ и $\det R \neq 0$, случайный вектор $X$ имеет плотность*

$$\varrho(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det R}}e^{-\frac{1}{2}\langle R^{-1}(x-a), x-a\rangle}.$$

Введем:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

По свойству нормального распределения ищем матрицу ковариации для Z, если у исходного X матрица была $R_1$, то для $Z$ будет:

$$R_2 = AR_1A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$\det R_2 = 14 - 9 = 5$$

Тогда:

$$R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \left( \frac{7}{5} X_1^2 - \frac{6}{5} X_1 \cdot X_2 + \frac{2}{5} X_2^2 \right)$$

Ну и теперь тупо поставляем:

**Ответ:**

$$\varrho = \frac{1}{2\pi\sqrt{5}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{7}{5} X_1^2 - \frac{6}{5} X_1 \cdot X_2 + \frac{2}{5} X_2^2 \right)}$$

# Номер 9 [листок 5]

**Задача 9 (ДЗ).** Из коробки с 4 красными и 4 белыми шарами извлекают без возвращения 4 шара. Пусть $X$ – число красных среди первых двух шаров, извлеченных из коробки, а $Y$ – общее число красных шаров, извлеченных из коробки. Найдите: $a$) совместное распределение величин $X$ и $Y$, $b$) условное распределение $X$ при условии $Y = 3$, $c$) $\mathbb{E}(X|Y)$ и $\mathbb{E}(Y|X)$.

## a)

Заметим, что $X \in (0, 1, 2)$, $Y \in (0, 1, 2, 3, 4)$, тогда в тупую заполняем табличку совместного распределения, вычисляя всевозможные исходы:

$$P(X = 0; Y = 0) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{70}$$

$$P(X = 0; Y = 1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left( \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 0; Y = 2) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{35}$$

$$P(X = 0; Y = 3) = 0$$

$$P(X = 0; Y = 4) = 0$$

$$P(X = 1; Y = 1) = \left( \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \right) \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 1; Y = 2) = \left( \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \right) \cdot \left( \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \right) = \frac{12}{35}$$

$$P(X=1;Y=3)=\left(\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\right)\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1;Y=4)=0$$

$$P(X=2;Y=0)=0$$

$$P(X=2;Y=1)=0$$

$$P(X=2;Y=2)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{35}$$

$$P(X=2;Y=3)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{35}$$

$$P(X=2;Y=4)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{70}$$

**Ответ:**

| X/Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{70}$ | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{4}{35}$ | $\frac{4}{35}$ | 0 |
| 2 | $\frac{3}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{3}{35}$ |
| 3 | 0 | $\frac{4}{35}$ | $\frac{4}{35}$ |
| 4 | 0 | 0 | $\frac{1}{70}$ |

## b)

Считаем по определению:

$$\frac{P(X=0\cap Y=3)}{P(Y=3)}=0$$

$$\frac{P(X=1\cap Y=3)}{P(Y=3)}=\frac{\frac{4}{35}}{\frac{4}{35}+\frac{4}{35}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{P(X=2\cap Y=3)}{P(Y=3)}=\frac{\frac{4}{35}}{\frac{8}{35}}=\frac{1}{2}$$

А значит:

**Ответ:**

| X/Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

## c)

$$E(X|Y) =?$$

Ищем для всех $Y$ (по аналогии с семинаром):

$$E(X|Y=0) = \frac{1}{\frac{1}{70}+0+0} \cdot \left(\frac{1}{70}\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 2\right) = 0$$

$$E(X|Y=1) = \frac{1}{\frac{4}{35}+\frac{4}{35}} \cdot \left(0\cdot 0 + \frac{4}{35}\cdot 1 + 0\cdot 2\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(X|Y=2) = \frac{1}{\frac{3}{35}+\frac{12}{35}+\frac{3}{35}} \cdot \left(0\cdot 0 + \frac{12}{35}\cdot 1 + \frac{3}{35}\cdot 2\right) = 1$$

$$E(X|Y=3) = \frac{1}{0+\frac{4}{35}+\frac{4}{35}} \cdot \left(0\cdot 0 + \frac{4}{35}\cdot 1 + \frac{4}{35}\cdot 2\right) = \frac{3}{2}$$

$$E(X|Y=4) = \frac{1}{0+0+\frac{1}{70}} \cdot \left(0\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{1}{70}\cdot 2\right) = 2$$

А значит:

$$E(X|Y=y) = \frac{1}{2}\cdot y$$

$$E(X|Y) = \frac{1}{2}\cdot Y$$

Теперь наоборот:

$$E(Y|X) =?$$

$$E(Y|X=0) = \frac{1}{\frac{1}{70}+\frac{4}{35}+\frac{3}{35}+0+0} \cdot \left(\frac{1}{70}\cdot 0 + \frac{4}{35}\cdot 1 + \frac{3}{35}\cdot 2 + 0\cdot 3 + 0\cdot 4\right) = \frac{4}{3}$$

$$E(Y|X=1) = \frac{1}{0+\frac{4}{35}+\frac{12}{35}+\frac{4}{35}+0} \cdot \left(0\cdot 0 + \frac{4}{35}\cdot 1 + \frac{12}{35}\cdot 2 + \frac{4}{35}\cdot 3 + 0\cdot 4\right) = 2$$

$$E(Y|X=2) = \frac{1}{0+0+\frac{3}{35}+\frac{4}{35}+\frac{1}{70}} \cdot \left(0\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{3}{35}\cdot 2 + \frac{4}{35}\cdot 3 + \frac{1}{70}\cdot 4\right) = \frac{8}{3}$$

А значит:

$$E(Y|X=x) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\cdot x$$

$$E(Y|X) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}X$$

**Ответ:**

$$E(X|Y) = \frac{1}{2}\cdot Y$$

$$E(Y|X) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}X$$

# Номер 10 [листок 5]

**Задача 10 (ДЗ).** Случайные величины $X$ и $Y$ имеют совместную плотность распределения $\varrho(x, y) = x + y$ при $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ и $\varrho(x, y) = 0$ для остальных $(x, y)$. Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$.

Знаем:

$$E(X|Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varrho_{X|Y}(x, y)dx$$

По определению:

$$\varrho_{X|Y}(x, y) = \frac{\varrho_{X,Y}(x, y)}{\varrho_Y(y)}$$

Распишем плотность из условия через индикаторы:

$$\varrho_{X,Y}(x, y) = I_{x\in[0,1]} \cdot I_{y\in[0,1]} \cdot (x + y)$$

Еще надо найти плотность для $Y$:

$$\varrho_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{X,Y}(x, y)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{x\in[0,1]} \cdot I_{y\in[0,1]} \cdot (x + y)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} x \cdot I_{y\in[0,1]}dx + \int\limits_{0}^{1} y \cdot I_{y\in[0,1]}dx = I_{y\in[0,1]} \cdot \left(\frac{1}{2} + y\right)$$

Подставляем:

$$\varrho_{X|Y}(x, y) = \frac{I_{x\in[0,1]} \cdot I_{y\in[0,1]} \cdot (x + y)}{I_{y\in[0,1]} \cdot \left(\frac{1}{2} + y\right)} = \frac{I_{x\in[0,1]}(x + y)}{\frac{1}{2} + y}$$

Берем интеграл:

$$E(X|Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{I_{x\in[0,1]}(x + y)}{\frac{1}{2} + y}dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot I_{x\in[0,1]}(x + y)dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + y} \int\limits_{0}^{1} x \cdot (x + y)dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + y} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot (3y + 2)\right)$$

**Ответ:**

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot (3y + 2)}{\frac{1}{2} + y}$$