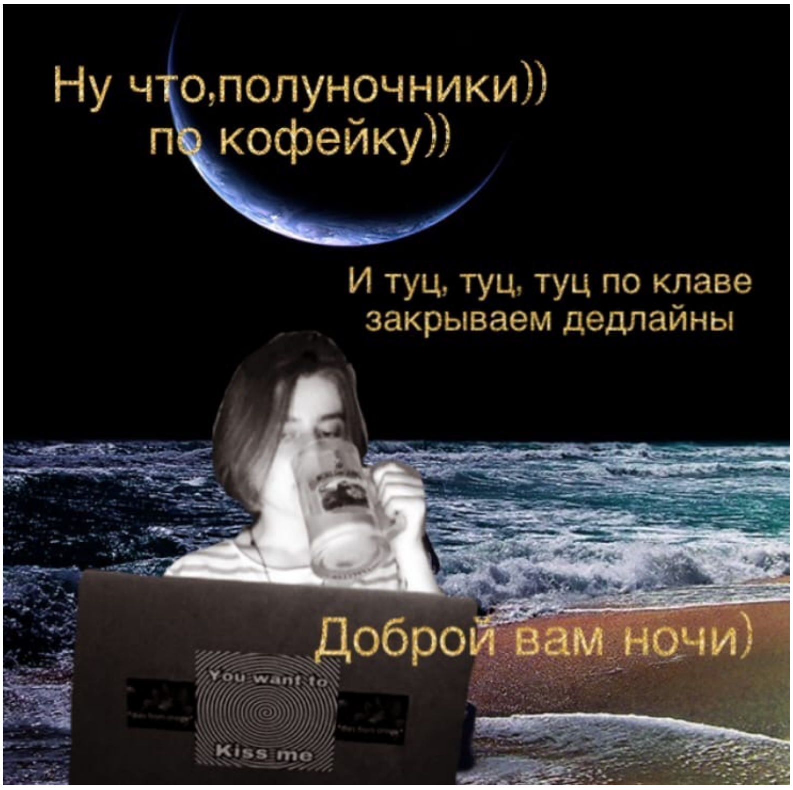
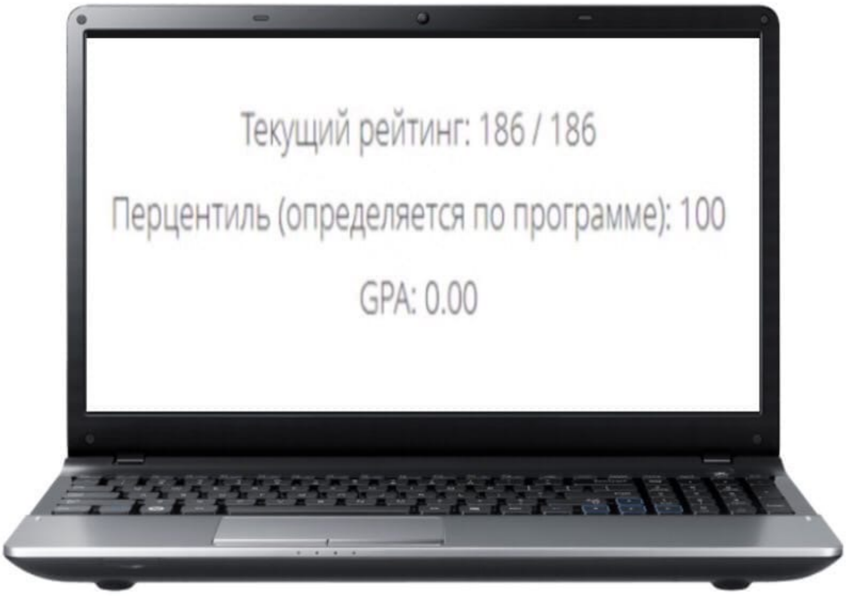
Бурмашев Григорий. 208. Матан. Д/з - 2




Текущий рейтинг: 186 / 186
Перцентиль (определяется по программе): 100
GPA: 0.00

Номер 8

а)

$$f(x) = \frac{3x-7}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)\cdot 2x(3x-7)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)\left[3(x^2-1) - 4x(3x-7)\right]}{(x^2-1)^4} = \frac{-9x^2+28x-3}{(x^2-1)^3}$$

Найдем точки, в которых производная обращается в ноль:

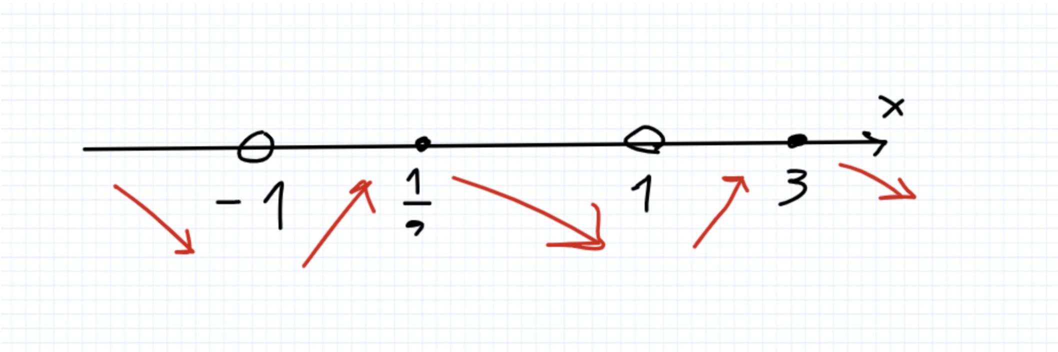
$$-9x^2 + 28x - 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 3$$

Найдем точки разрыва функции:

$$x_3 = -1, x_4 = 1$$

Итого:



А значит:

- Функция убывает на:

$$(-\infty; -1)$$

$$\left(\frac{1}{9}; 1\right)$$

$$(3; \infty)$$

- Функция возрастает на:

$$\left(-1; \frac{1}{9}\right)$$
$$(1; 3)$$

- Точки максимума:

$$\frac{1}{9}; 3$$

- Точки минимума:

$$-1; 1$$

b)

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\ln x \cdot \sqrt{x} - \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\ln x \cdot (4 - \ln x)}{2x \cdot \sqrt{x}}$$

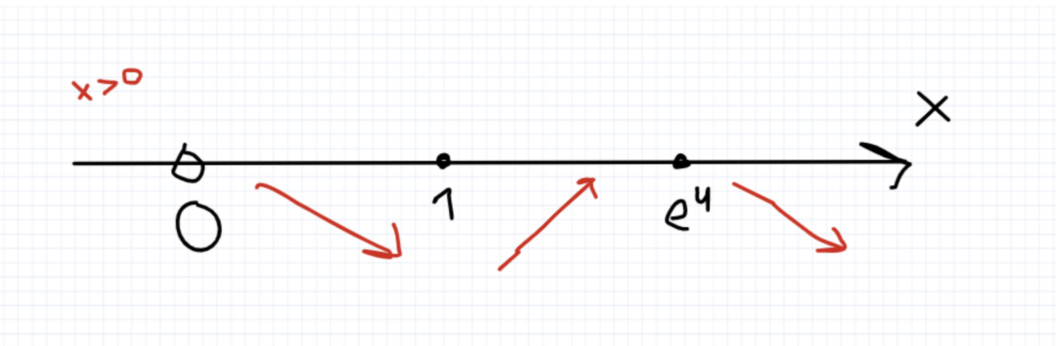
Найдем точки, в которых производная обращается в ноль:

$$x_1 = 1; x_2 = e^4$$

Найдем точки разрыва функции:

$$x_3 = 0$$

Итого:



А значит:

- Функция убывает на:
$$(0; 1)$$
$$\left(e^4; \infty\right)$$
- Функция возрастает на:
$$\left(1; e^4\right)$$
- Точки максимума:
$$e^4$$
- Точки минимума:
$$1$$

c)

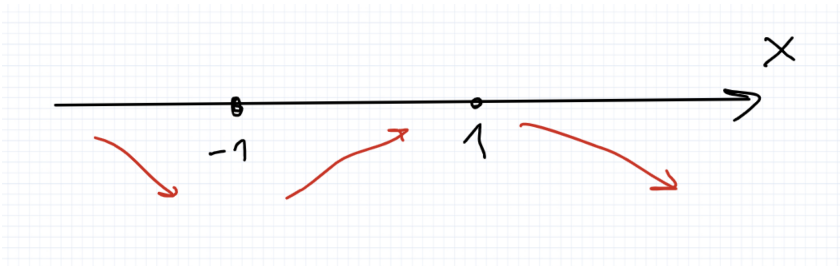
$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Найдем точки, в которых производная обращается в ноль:

$$2 - 2x^2 = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

Итого:



А значит:

- Функция убывает на:
$$(-\infty; -1)$$
$$(1; \infty)$$

- Функция возрастает на:
$$(-1;1)$$
- Точки максимума:
$$1$$
- Точки минимума:
$$-1$$

Номер 9

а)

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leq\sqrt{1+x}\leq1+\frac{x}{2},\ x>0$$

1.
$$f=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leq g=\sqrt{1+x}$$
$$f(0)=g(0)=1;$$
$$f'=\frac{1}{2}-\frac{x}{4},\ g'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$
$$f'(0)=g'(0)=\frac{1}{2}$$
$$f''=-\frac{1}{4}$$
$$g''=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}}$$
Т.к $x\geq0$, то:
$$g''\geq f''\to g'\geq f'\to g\geq f$$

2.
$$f(x)=\sqrt{1+x}\leq g(x)=1+\frac{x}{2}$$
$$f(0)=g(0)=1$$
$$f'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},\ g'=\frac{1}{2}$$
$$g'\geq f'\to g\geq f$$

Ч.Т.Д

b)

$$e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 \geq 0,\ x \geq 1$$

$$f(x) = e^{x-1} + 1 \geq g(x) = 2x - \ln x$$

$$f(1) = g(1) = 2$$

$$f' = e^{x-1},\ g' = 2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = g'(1) = 1$$

$$f'' = e^{x-1}, g'' = \frac{1}{x^2}$$

$$f''(1) = g''(1) = 1$$

$$f''' = e^{x-1}, g''' = -\frac{2}{x^3}$$

Т.к $x \geq 1$, то $e^{x-1} \geq -\frac{2}{x^3}$, а значит:

$$f''' \geq g''' \rightarrow f'' \geq g'' \rightarrow f' \geq g' \rightarrow f \geq g$$

Ч.Т.Д

c)

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a},\ 0 < a < b$$

Т.к a > 0, то сделаем замену $\frac{b}{a} = t$, тогда:

$$1 - \frac{1}{t} < \ln t < t - 1$$

1.
$$f(t) = 1 - \frac{1}{t} < g(t) = \ln t$$

$$f(1) = g(1) = 0$$

$$f' = \frac{1}{t^2},\ g' = \frac{1}{t}$$

Поскольку $t = \frac{b}{a}$ и $b > a > 0$, то $t > 1$ и $t^2 > t$, а значит:

$$g' > f' \rightarrow g > f$$

2.

$$f(t) = \ln t < g(t) = t - 1$$

$$f(1) = g(1) = 0$$

$$f' = \frac{1}{t},\ g' = 1$$

Поскольку $b > a$, то $t \neq 1$, а значит $\frac{1}{t} < 1$:

$$g' > f' \to g > f$$

Ч.Т.Д