Матан, дз – 11

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

30 ноября 2021 г.

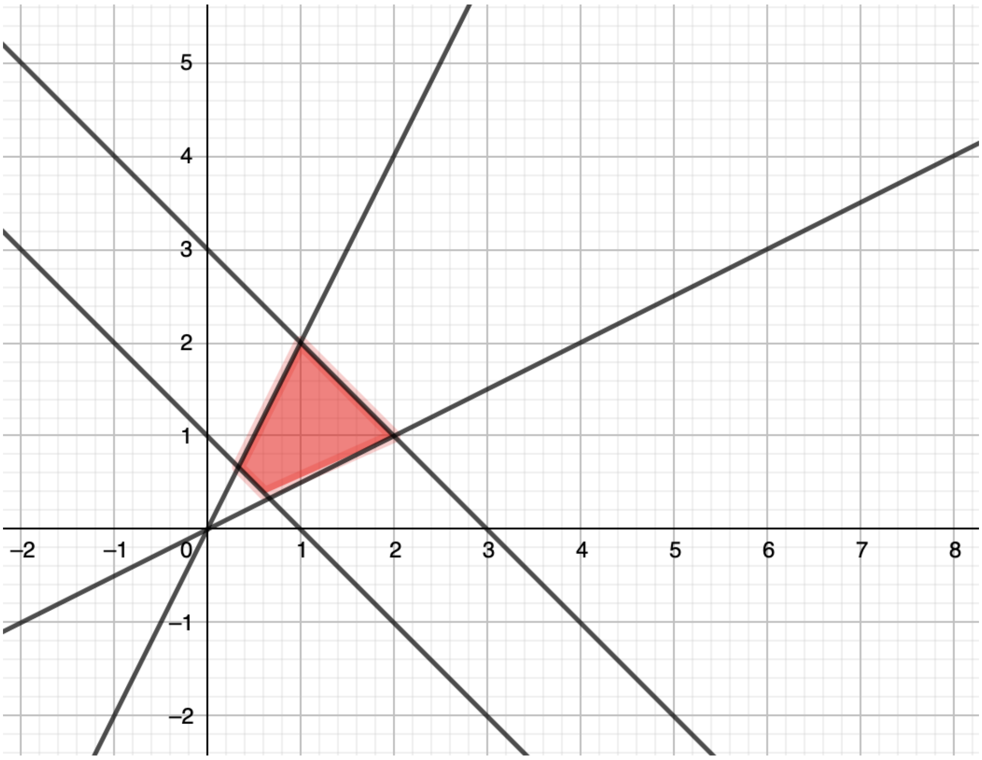
С НОВЫМ ГОДОМ!!!!!!!!!!!!!

А это мой кот, пусть будет тут

Номер 1

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x} dxdy, \quad D = \left\{(x,y) \middle| 1-x \leq y \leq 3-x, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \right\}$$

Рисуем графичек по неравенствам:



Посмотрим на множество D:

Смотрим на первое неравенство:

$$1 - x \leq y \leq 3 - x$$

$$1 \leq x + y \leq 3$$

Пусть $u = x + y$, тогда:

$$1 \leq u \leq 3$$

Смотрим на второе неравенство:

$$\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2$$

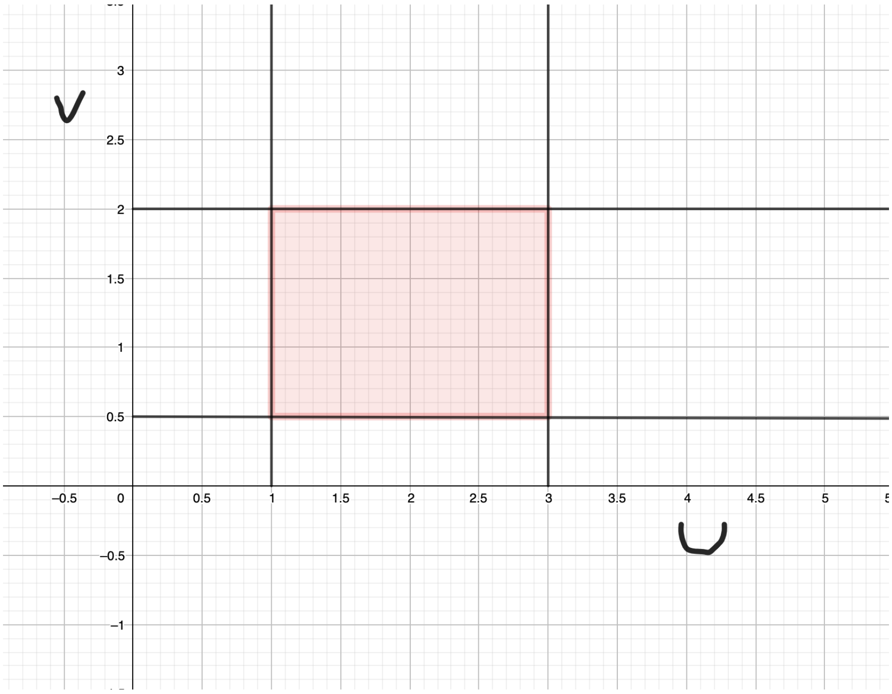
Пусть $v = \frac{y}{x}$, тогда:

$$\frac{1}{2} \leq v \leq 2$$

Итого:

$$\begin{cases} u = x + y, u \in [1, 3] \\ v = \frac{y}{x}, v \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases}$$

А на графике в новых координатах получаем прямоугольник:



Теперь считаем интеграл:

В числителе просто u^2, а вот в знаменателе у нас x, нужно его как-то выразить через новые координаты:

$$y = vx$$

$$u = x + vx$$

$$\begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

Тогда определитель матрицы Якоби:

$$\det \mathbb{J} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u(1+v)}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

Теперь наконец считаем исходный интеграл в новых координатах:

$$\iint\limits_{\substack{u \in [1,3] \\ v \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]}} \left(\frac{u^2}{\frac{u}{1+v}} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} \right) dudv =$$

$$= \int_1^3 du \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{u^2(1+v)}{u} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} dv = \int_1^3 du \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{u^2}{1} \cdot \frac{1}{(1+v)} dv = \int_1^3 u^2 du \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{(1+v)} dv =$$

$$= \frac{26}{3} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{(1+v)} dv = \frac{26}{3} \ln|1+v| \Bigg|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{26}{3} \left(\ln(3) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right) =$$

$$= \frac{26}{3} \ln 2$$

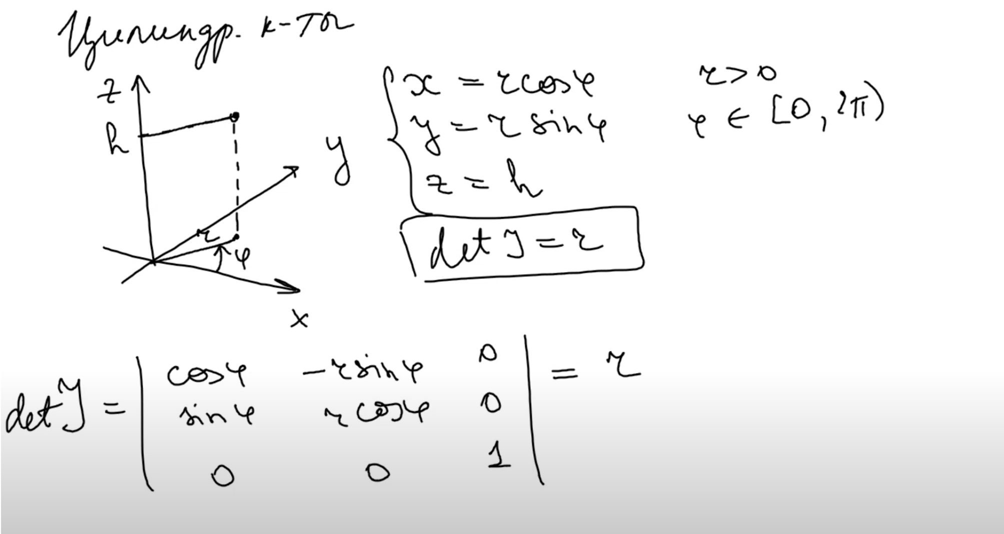
Ответ:

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x} dxdy = \frac{26}{3} \ln 2$$

Номер 2

$$\iiint\limits_D z^2 dxdydz,\ D = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2 \geq 1, x^2+y^2+z^2 \leq 2z\right\}$$

Теория с семинара:



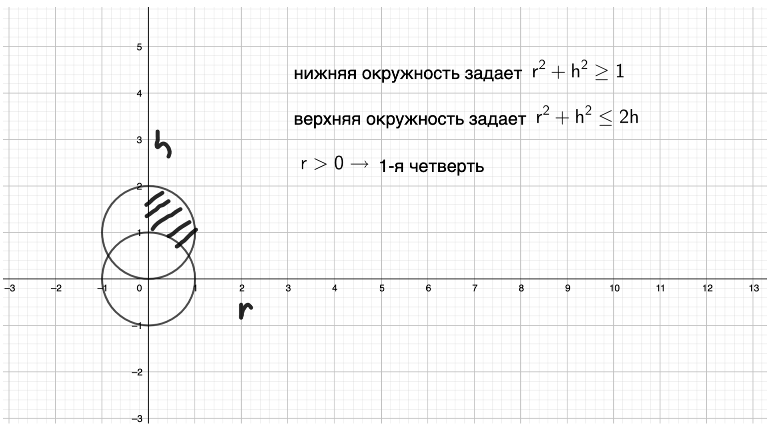
Тогда вводим цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} r^2+h^2 \geq 1 \\ r^2+h^2 \leq 2h \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Для удобства рисования графика преобразуем второе неравенство:

$$r^2+h^2 \leq 2h \equiv r^2+(h-1)^2 \leq 1$$

На графике имеем:



Из $r^2+h^2 = 1$ получаем $h = \sqrt{1-r^2}$, для верхней окружности соответственно $h = \sqrt{1-r^2}+1$

Теперь считаем интеграл в новых координатах:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}+1} h^2 dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \cdot \frac{h^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}+1} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \cdot \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{1-r^2}+1\right)^3 - \left(\sqrt{1-r^2}\right)^3\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\left(\sqrt{1-r^2}+1\right)^3 - \left(\sqrt{1-r^2}\right)^3\right) dr =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(4r - 3r^3 + 3r\sqrt{1-r^2}\right) dr = A$$

Посчитаем внутренний интеграл отдельно:

$$\int_0^1 4rdr = 4\int_0^1 rdr = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$
$$\int_0^1 -3r^3 dr = -3\int_0^1 r^3 dr = -3 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$
$$\int_0^1 3r \cdot \sqrt{1-r^2}dr = 3\int_0^1 r \cdot \sqrt{1-r^2}dr = \begin{bmatrix} t = 1-r^2 \\ dt = -2rdr \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$
$$2 - \frac{3}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{9}{4} = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

В этот момент я решил, что это конечный ответ и пошел сверяться с вольфрамом и geogebra. Но при рисовании графиков в новых координатах я понял, что из-за наглого взятия r от 0 до 1 я зацепил лишний кусок справа под верхней окружностью :(. Хорошим вариантом было бы заново посчитать интеграл, разбив его на 2 части, но я не хочу переделывать все с нуля, поэтому просто вычту из интеграла A схожий интеграл, который и отвечает за маленький кусочек площади. По h он пройдет от $\sqrt{1-r^2}$ до $1-\sqrt{1-r^2}$ По r он будет пробегать от точки пересечения окружностей при $r > 0$ и до 1, а точка пересечения:

$$1 - \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-r^2} \ (r > 0)$$
$$\frac{1}{2} = \sqrt{1-r^2}$$
$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Теперь собственно считаем второй интеграл, пусть он будет B:

$$B = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 rdr \int_{\sqrt{1-r^2}}^{1-\sqrt{1-r^2}} h^2 dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 rdr \frac{h^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{1-r^2}}^{1-\sqrt{1-r^2}} =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 rdr \left(\left(1-\sqrt{1-r^2}\right)^3 - \left(\sqrt{1-r^2}\right)^3\right) =$$
$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(4r - 3r^3 - 5r\sqrt{1-r^2} + 2r^3\sqrt{1-r^2}\right) dr =$$

Интегралы получились схожими со случаем для интеграла A, просто немного меняются коэффы и интервал интегрирования, лень техать это, оставлю на бумаге (надеюсь это не считается как необходимая подробность):

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{21}{64} - \frac{5}{24} + \frac{17}{240}\right) d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{11}{320} d\varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{320} \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{480}$$

Теперь (**наконец-то, я умер техать это**) считаем финальный интеграл как разность интегралов A и B:

$$\iiint\limits_D z^2 dxdydz = A - B = \frac{3\pi}{2} - \frac{11\pi}{480} = \frac{709\pi}{480}$$

Ответ:

$$\iiint\limits_D z^2 dxdydz = \frac{709\pi}{480}$$

И еще немного кота!