Дифференциальные уравнения, дз – 1

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

17 февраля 2022 г.

Номер 1

а)

$$(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$$

Начинаем решать стандартно

$$(2xy^2 - y)dx = -xdy$$

Теперь поделим обе части на xdx. Проверим случай $x = 0$, при таком x получаем $0 = 0$, значит это решение

$$2y^2 - \frac{y}{x} = -\frac{dy}{dx}$$

$$y' - \frac{y}{x} = -2y^2$$

Получили уравнение Бернулли с $n = 2$. Делим на y^2. Проверим случай $y = 0$, при таком y получаем $0 = 0$, значит это решение

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} = -2$$

Делаем замену $z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y}$. Тогда $dz = -\frac{dy}{y^2} = -z^2dy$, отсюда $dy = -\frac{dz}{z^2}$. Подставляем замену

$$-\frac{z^2}{z^2} \cdot \frac{dz}{dz} - \frac{z}{x} = -2$$

Меняем знак

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 2$$

Получили понятное нам уравнение, решаем его с помощью метода вариации постоянной

Шаг 1

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = -(\ln|x| + C_0)$$

$$-\ln|z| = \ln|x| + C_0$$

$$|z| = \frac{1}{|x| \cdot C_1}$$

$$z = \frac{C}{x}$$

Шаг 2 (вариация переменной)

$$z = \frac{C(x)}{x}$$

$$z' = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

Подставляем

$$\frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 2$$

$$\frac{xC'(x)}{x^2} = 2$$
$$C'(x) = 2x$$
$$C(x) = x^2 + D$$

Возвращаемся к z

$$z = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + D}{x}$$

Избавляемся от замены

$$y = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + D}$$

Ответ:

$$x = 0$$

$$y = 0$$
$$y = \frac{x}{x^2 + D}$$

b)

$$y + y' \ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$$

$$y + \frac{dy}{dx}\ln^2 y = (x + 2\ln y)\frac{dy}{dx}$$

Домножим на dx

$$ydx + dy\ln^2 y = (x + 2\ln y)dy$$

$$ydx + (\ln^2 y - x - 2\ln y)dy = 0$$

Получили вид УПД. Проверяем производные:

$$(y)'_y = 1$$

$$(\ln^2 y - x - 2\ln y)'_x = -1$$

$$1 \neq -1$$

Равенства нет, тогда подберем $m(x, y)$ для общей теоремы. Нам подходит $\frac{1}{y^2}$.

$$\frac{1}{y}dx + \frac{\ln^2 y - x - 2\ln y}{y^2}dy = 0$$

Снова проверяем производные

$$\left(\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{1}{y^2}$$

$$\left(\frac{\ln^2 y - x - 2\ln y}{y^2}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}$$

Получили равенство, теперь ищем такую функцию, что

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = \frac{1}{y} \\ F'_y(x, y) = \frac{\ln^2 y - x - 2\ln y}{y^2} \end{cases}$$

Для этого проинтегрируем пока только одно соотношение, например первое

$$F_x(x, y) = \int \frac{1}{y}dx = \frac{1}{y}\int dx = \frac{x}{y} + C(y)$$

Теперь из второго найдем, чему равно это $C(y)$

$$\left(\frac{x}{y} + C(y)\right)'_y = \frac{\ln^2 y - x - 2\ln y}{y^2}$$

$$C'(y) - \frac{x}{y^2} = \frac{\ln^2 y - x - 2\ln y}{y^2}$$

$$C'(y) = \frac{\ln^2 y - 2\ln y}{y^2}$$

$$C(y) = \int \frac{\ln^2 y - 2\ln y}{y^2} = \int \frac{\ln^2 y}{y^2}dy - 2\int \frac{\ln y}{y^2}dy = -\frac{\ln^2 y + 2\ln y + 2}{y} - 2\cdot\left(-\frac{\ln y + 1}{y}\right) = -\frac{\ln^2 y}{y}$$

Итак

$$F(x, y) = \frac{x}{y} + C(y) = \frac{x - \ln^2 y}{y}$$

Ответ:

$$C = \frac{x - \ln^2 y}{y}$$

c)

$$\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$$
$$y - xy' - 2x - 2yy' = 0$$
$$y - 2x = (x + 2y)y'$$

Делим на $x + 2y$. Проверим случай $x + 2y = 0, x = -2y$. При таком получаем $5y = 0$, значит это не решение

$$\frac{y - 2x}{x + 2y} = y'$$

Пусть $y = tx$, тогда $y' = x\frac{dt}{dx} + t$

$$\frac{tx - 2x}{x + 2tx} = x\frac{dt}{dx} + t$$

Делим на x числитель и знаменатель левой части. Проверим случай $x = 0$, при таком получаем $0 = t$, значит это не решение

$$\frac{t - 2}{1 + 2t} = x\frac{dt}{dx} + t$$
$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t - 2}{1 + 2t} - t$$
$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t - 2 - t - 2t^2}{1 + 2t}$$
$$x\frac{dt}{dx} = \frac{-2 - 2t^2}{1 + 2t}$$

Делим на x

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-2(1 + t^2)}{(1 + 2t)x}$$

Делим на $\frac{1+t^2}{1+2t}$

$$\frac{dt}{dx} \cdot \frac{1 + 2t}{1 + t^2} = \frac{-2}{x}$$

Домножим на dx

$$dt \cdot \frac{1 + 2t}{1 + t^2} = -\frac{2}{x}dx$$

Теперь интегрируем

$$\int \frac{1 + 2t}{1 + t^2}dt = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| + C_0$$

Посчитаем отдельно интеграл слева

$$\int \frac{1 + 2t}{1 + t^2}dt = \int \frac{dt}{1 + t^2} + 2\int \frac{t}{1 + t^2}dt = \operatorname{arctg}(t) + \ln(1 + t^2) + C_1$$

Итого

$$\operatorname{arctg}(t) + \ln(1 + t^2) + C_1 = -2\ln|x| + C_0$$

Вспоминаем про $y = tx$, отсюда $t = \frac{y}{x}$, также перенесим все налево

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2\ln|x| + C = 0$$

Ответ:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2\ln|x| + C = 0$$

d)

$$(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$$

Видим вид УПД. Проверяяем производные

$$(\sin x + y)'_x = \cos x$$

$$\left(y\cos x - x^2\right)'_y = \cos x$$

Получили равенство, теперь ищем такую функцию, что

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = y\cos x - x^2 \\ F'_y(x,y) = \sin x + y \end{cases}$$

Для этого проинтегрируем пока только одно соотношение, например первое

$$F_x(x,y) = \int (y\cos x - x^2)dx = y\sin x - \frac{x^3}{3} + C(y)$$

Теперь из второго найдем, чему равно это $C(y)$

$$\left(y\sin x - \frac{x^3}{3} + C(y)\right)'_y = \sin x + y$$

$$\sin x + C'(y) = \sin x + y$$

$$C'(y) = y$$

Отсюда

$$C(y) = \frac{y^2}{2}$$

Итак

$$F(x,y) = y\sin x - \frac{x^3}{3} + C(y) = y\sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}$$

Ответ:

$$C = y\sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}$$

e)

$$y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$$

$$y' - y = \frac{x}{y}e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} - y = xe^{2x}\frac{1}{y}$$

Получили уравнение Бернулли с $n = -1$. Домножим уравнение на y

$$\frac{ydy}{dx} - y^2 = xe^{2x}$$

Делаем замену $z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^{-2}} = y^2$. Тогда $dz = 2ydy$, отсюда $dy = \frac{dz}{2y}$. Подставляем замену

$$\frac{y\frac{dz}{2y}}{dx} - z = xe^{2x}$$

$$\frac{dz}{2dx} - z = xe^{2x}$$

Делим на e^{2x}

$$\frac{dz}{2e^{2x}dx} - \frac{z}{e^{2x}} = x$$

Домножим на 2

$$\frac{dz}{e^{2x}dx} - 2\frac{z}{e^{2x}} = 2x$$

$$e^{-2x}\frac{dz}{dx} - 2e^{-2x}z = 2x$$

Заметим, что $-2e^{-2x}$ есть $(e^{-2x})'$

$$e^{-2x}\frac{dz}{dx} - (e^{-2x})'z = 2x$$

$$e^{-2x}\frac{dz}{dx} + z\frac{d(e^{-2x})}{dx} = 2x$$

$$e^{-2x}(z)' + (e^{-2x})'z = 2x$$

Имеем вид $fg' + f'g = (fg)'$. Получаем

$$\frac{d(e^{-2x}z)}{dx} = 2x$$

Интегрируем с двух сторон

$$\int \left(\frac{d(e^{-2x}z}{dx})\right) dx = \int 2xdx$$

$$e^{-2x}z = x^2 + C_0$$

Вспоминаем про замену

$$e^{-2x}y^2 = x^2 + C_0$$

$$y^2 = e^{2x} \cdot (x^2 + C_0)$$

$$y = \pm e^x \cdot \sqrt{x^2 + C}$$

Ответ:

$$y = \pm e^x \cdot \sqrt{x^2 + C}$$

f)

$$xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$$

Пусть $y = tx^2, y' = 2xt + x^2t'$. Проверим случай $x = 0$, при таком получаем $0 = 2y$, значит это не решение

$$x(2xt + x^2t') = x\sqrt{tx^2 - x^2} + 2x^2t$$
$$x(2xt + x^2t') = x\sqrt{tx^2 - x^2} + 2x^2t$$
$$2x^2t + x^3t' = x\sqrt{x^2(t-1)} + 2x^2t$$
$$x^3t' = x^2\sqrt{(t-1)}$$

Делим на x^3

$$xt' = \sqrt{t-1}$$
$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{t-1}}{x}$$

Делим на $\sqrt{t-1}$. Проверим случай $t = 1, y = x^2$, при таком получаем $0 = 0$, значит это решение

$$\frac{dt}{\sqrt{t-1}dx} = \frac{1}{x}$$

Берем интеграл

$$\int \left(\frac{dt}{\sqrt{t-1}dx}\right) dx = \int \frac{1}{x}dx$$
$$2\sqrt{t-1} = \ln|x| + C$$

Вытаскиваем t из под корня

$$4(t-1) = (\ln|x| + C)^2$$
$$4t - 4 = \ln|x|^2 + 2\ln|x| \cdot C + C^2$$
$$t = \frac{\ln|x|^2 + 2\ln|x| \cdot C + C^2 + 4}{4}$$

Вспоминаем про нашу замену, $y = tx^2$, отсюда $t = \frac{y}{x^2}$

$$\frac{y}{x^2} = \frac{\ln^2|x| + 2\ln|x| \cdot C + C^2 + 4}{4}$$
$$y = \frac{x^2(\ln^2|x| + 2\ln|x| \cdot C + C^2 + 4)}{4}$$

Ответ:

$$y = x^2$$
$$y = \frac{x^2(\ln^2|x| + 2\ln|x| \cdot C + C^2 + 4)}{4}$$

g)

$$xy'(\ln y - \ln x) = y$$

Поделим на x.

$$y'(\ln \frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{(\ln \frac{y}{x})}$$

Введем замену $y = tx, y' = t'x + t$

$$t'x + t = \frac{t}{\ln t}$$

Перекинем все с x налево

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{t}{\ln t} - t$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t - t\ln t}{x\ln t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x\ln t}{t - t\ln t}$$

$$dx = \frac{xdt\ln t}{t - t\ln t}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\ln t dt}{t - t\ln t}$$

Интегрируем

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C = \int \frac{\ln t dt}{t - t\ln t}$$

Считаем интеграл справа отдельно

$$\int \frac{\ln t dt}{t - t\ln t} = \begin{bmatrix} u = t - t\ln(t) \\ du = -\ln t dt \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{u}du = -\ln(u) = -\ln(t - \ln t)$$

Получаем

$$\ln(x) + C = -\ln(t - \ln t)$$

$$C = -\ln(t - \ln t) - \ln x$$

Вспоминаем про замену $y = tx$, $t = \frac{y}{x}$

$$C = -\ln\left(\frac{y}{x} - \ln\frac{y}{x}\right) - \ln x$$

Ответ:

$$C = -\ln\left(\frac{y}{x} - \ln\frac{y}{x}\right) - \ln x$$

i)

$$y' - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2 - 1}$$

Пусть $z = \sqrt{y}$, тогда $dz = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$. Подставим замену

$$\frac{dy}{dx} - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2 - 1}$$

$$\frac{2\sqrt{y}dz}{dx} - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2 - 1}$$

$$\frac{2\sqrt{y}dz}{dx} = \frac{4xy}{x^2 - 1} + 8x\sqrt{y}$$

Поделим на $\sqrt{y}$. Проверим случай $y = 0$, при таком y получаем $0 = 0$, значит это решение

$$\frac{2dz}{dx} = 8x + \frac{4xz}{x^2 - 1}$$

Избавимся от двойки, поделим на 2

$$\frac{dz}{dx} = 4x + \frac{2xz}{x^2 - 1}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2xz}{x^2 - 1} = 4x$$

Получили понятное нам уравнение, решаем его с помощью метода вариации постоянной

Шаг 1

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2xz}{x^2 - 1} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2 - 1}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2 - 1}$$

Интегрируем

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{xdx}{x^2 - 1}$$

$$\ln|z| = \ln|x^2 - 1| + C_0$$

$$\ln|z| = \ln|C_1(x^2 - 1)|$$

$$|z| = |C_1(x^2 - 1)|$$

$$z = C \cdot (x^2 - 1)$$

Шаг 2 (вариация переменной)

$$z = C(x) \cdot (x^2 - 1)$$

$$z' = C'(x)(x^2 - 1) + C(x)2x$$

Подставляем

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2xz}{x^2 - 1} = 4x = C'(x)(x^2 - 1) + C(x)2x - \frac{2x\,(C(x) \cdot (x^2 - 1))}{x^2 - 1} = 4x$$

$$C'(x)(x^2-1) = 4x$$
$$C'(x) = \frac{4x}{x^2-1}$$
$$C(x) = 2\ln|x^2-1| + D$$

Возвращаемся к z

$$z = (2\ln|x^2-1| + D)(x^2-1)$$

Избавляемся от замены

$$\sqrt{y} = (2\ln|x^2-1| + D)(x^2-1)$$
$$y = \big((2\ln|x^2-1| + D)(x^2-1)\big)^2$$

Ответ:

$$y = 0$$

$$y = \big((2\ln|x^2-1| + D)(x^2-1)\big)^2$$

Номер 2

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

Известно частное решение $y = e^x$, проверим

$$e^x = e^{2x} - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x$$

$$0 = 0$$

Введем новую неизвестную функцию z, чтобы

$$y = z + e^x$$

$$dy = dz + e^x dx$$

Подставляем в исходное уравнение

$$\frac{dz + e^x dx}{dx} = (z + e^x)^2 - 2e^x(z + e^x) + e^{2x} + e^x$$

$$\frac{dz}{dx} + e^x = (z + e^x)^2 - 2e^x(z + e^x) + e^{2x} + e^x$$

$$\frac{dz}{dx} = (z + e^x)^2 - 2e^x(z + e^x) + e^{2x}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2ze^x + e^{2x} - 2e^x z - 2e^{2x} + e^{2x}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$dz = z^2 dx$$

Поделим на z^2. Решение $z = 0$ это $y = e^x$, мы уже на него смотрели и его знаем

$$\frac{dz}{z^2} = dx$$

Интегрируем

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} = x + C$$

$$-z = \frac{1}{x + C}$$

$$z = -\frac{1}{x + C}$$

Вспоминаем про замену $y = z + e^x$, отсюда $z = y - e^x$

$$y - e^x = -\frac{1}{x + C}$$

$$y = e^x - \frac{1}{x + C}$$

Ответ:

$$y = e^x - \frac{1}{x + C}$$

$$y = e^x$$