Бурмашев Григорий. 208. Дискра. Д/З – 9

Задание 1

По определению композиции нужно для всех пар (x, y) найти z, что:

$$\frac{z}{y} > 0$$

$$\frac{x}{z} > 0$$

Очевидно, что x, y, z не могут быть равны нулю. Тогда xy > 0 и $\frac{x}{y} > 0$

Поскольку $\frac{x}{y} > 0$, то возможны случаи:

а)

$$\frac{x}{1} > 0$$

$$\frac{1}{y} > 0$$

б)

$$\frac{x}{-1} > 0$$

$$\frac{-1}{y} > 0$$

Значит $(x, y) \in R \circ R$, $R \circ R = R$

Ответ: $R \circ R = R$

Задание 2

Найдем R^T:

$$\{(a, 1), (2, b), (4, c), (8, d), (8, e), (8, f), (8, g), (8, h)\}$$

Найдем $R^T \circ R$:

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g), (h, h)(d, e), (d, f),$$

$$(d, g), (d, g), (d, h), (e, e), (e, d), (e, f), (e, g), (e, h),$$

$$(f, d), (f, e), (f, g), (f, h), (g, d), (g, e), (g, f), (g, h), (h, d), (h, e), (h, f), (h, g)\}$$

Итого 28

Найдем $R \circ R^T$:

$$\{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (8, 8)\}$$

Итого 4

Ответ: В $R^T \circ R$ 28 элементов. В $R \circ R^T$ 4 элемента.

Задание 3

Предположим, что R1 не является функцией. Тогда в множестве пар в R1 может быть несколько значений. Но и в $R1 \cup R2$ будет тоже самое, $\rightarrow$ это не будет функцией. Аналогичная ситуация будет, если R2 – не функция. А значит, в множестве пар как в R1, так и в R2 должны быть различные левые элементы. Т.е R1 и R2 – функции. **Ч.Т.Д**

Задание 4

По условию все элементы множества X переходят в B.

Положим:

X = $\{1, 2\}$. Пусть все элементы переходят в 1. Тогда B = $\{1\}$. При этом пусть Y = $\{1, 10, 11\}$. Все условия задачи сохраняются и выполняются, но при этом B $\neq$ Y.

Ответ: нет

Задание 5

Рассмотрим первый случай:

$$f(A \triangle B) \subseteq f(A) \triangle f(B)$$

Положим:

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{3, 4\}$$

Тогда:

$$A \triangle B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Пускай при этом множество Y задано следующим образом:

$$f(1) = f(3) = 5$$
$$f(2) = f(4) = 6$$

А значит:

$$f(A \triangle B) = \{5, 6\}$$
$$f(A) = \{5, 6\} = f(B)$$

Но при этом:

$$f(A) \triangle f(B) = \emptyset$$
$$\{5, 6\} \subseteq \emptyset$$

противоречие

Рассмотрим второй случай:

$$f(A\triangle B) \supseteq f(A)\triangle f(B)$$

Т.к в условии задачи сказано, что при одном из знаков получается верное утверждение, а в первом случае мы уже получили противоречие, то заведомо предположим, что этот случай истиный. Тогда попробуем доказать от обратного. Пусть найдется такой y, что:

$$y \notin f(A\triangle B) \cap y \in f(A)\triangle f(B).$$

В таком случае $y = f(z)$, что $f(z) \in f(A)$. А также $f(z) \in f(B)$. Отсюда $z \in f(A) \cap f(B)$. Ну и $f(z) \notin f(A)\triangle f(B)$. Мы получили противоречие $\rightarrow$ такого быть не может.

Задание 8

Функция от функции изменяет четность числа. Можно построить следующую биекцию, которая в квадрате будет делать именно то, что нужно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом при взятии функции 2 раза:

1 переведется в 3 и затем в 4
2 переведется в 1 и затем в 3
3 переведется в 4 и затем в 2
4 переведется в 2 и затем в 1

Т.е если мы разобьем наши числа на 4 группы, то сможем менять их четность вызывая эту функцию 2 раза, что и требовалось в условии задачи.