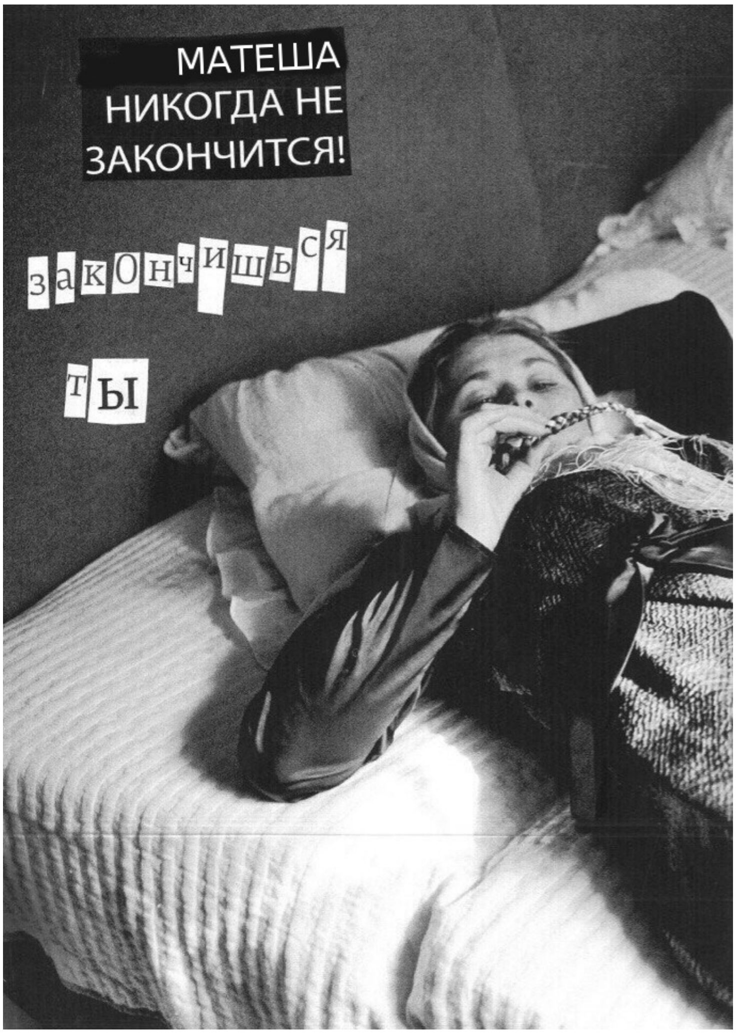
Бурмашев Григорий. 208. Матан. Д/з - 5



Задача № 12

Найти:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

а)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

Пускай n = 2k (т.е четное), тогда:

$$a_n = \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1+(-1)^{2k}}{2} = \frac{1}{2k} + 1$$

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{2k}) = 1$$

А значит:

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1$$

Пускай n = 2k+1 (т.е нечетное), тогда:

$$a_n = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2} = -\frac{1}{2k+1} + \frac{0}{2} = -\frac{1}{2k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_n(-\frac{1}{2k+1}) = 0$$

А значит:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ответ:

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

б)

$$a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$$

Мы знаем, что:

$$\sin^2\frac{n\pi}{4} \in [0,1]$$

Рассмотрим случай, когда $\sin^2\frac{n\pi}{4} = 0$:

$$\frac{n\pi}{4} = \pi k \to n = 4k$$

Тогда:

$$a_n = \frac{4k}{4k+1}\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{4k}{4k+1}\cdot 0 = 0$$

А значит:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\sin^2\frac{n\pi}{4} = 1$:

$$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi k}{2} + \pi k \to n = 4k+2$$

Тогда:

$$a_n = \frac{4k+2}{4k+3}\cdot 1$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{4k+2}{4k+3}\cdot 1 = 1$$

А значит:

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1$$

Ответ:

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

c)

$$a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{n(n-1)}{2}$ четно, тогда n = 4k:

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{4k(4k-1)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2$$

Рассмотрим оставшиеся n, пусть n = 4k + 1:

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+2} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+1)(4k)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

Пусть n = 4k + 2:

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+3} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+1)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -4$$

Пусть n = 4k + 3:

$$1 + 2 \cdot (-1)^{4k+4} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+2)}{2}}$$

$$1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0$$

Мы рассмотрели все возможные значения n.

Ответ:

$$\varlimsup_{n \to \infty} a_n = 6$$

$$\varliminf_{n \to \infty} a_n = -4$$