Матан, дз – какое-то там

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

19 апреля 2022 г.

Номер 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Ответ:

0

b)

$$\lim_{z\to 0} \frac{z \cdot Re(z)}{|z|}$$

$$\frac{Re(z)}{|z|} \in [-1;1] \to \lim_{z\to 0} \frac{z \cdot Re(z)}{|z|} = \lim_{z\to 0} z = 0$$

Ответ: 0

Номер 2

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} = \frac{-e^{-y}\cos x \cdot i + e^{-y}\sin x + e^{y}\cos x \cdot i + e^{y}\sin x}{2} =$$

$$= \frac{e^{-y} sinx + e^{y}\sin x + (-e^{-y}\cos x + e^{y}\cos x)i}{2}$$

Тогда кладем:

$$\begin{cases} u = \frac{e^{-y} sinx + e^{y}\sin x}{2} \\ v = \frac{(-e^{-y}\cos x + e^{y}\cos x)}{2} \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} (u)'_x = \frac{e^{-y}\cos x + e^{y}\cos x}{2} \\ (u)'_u = \frac{-e^{-y}\sin x + e^{y}\sin x}{2} \end{cases} \sim \begin{cases} (u)'_x = v'_y \\ (u)'_y = (-v)'_x \end{cases}$$

Условие Коши Римана выполнено, значит функция $\mathbb{C}$– дифференцируема и производная равна $w' = \cos z$

Номер 3

Заметим, что:

$$u = \sqrt{|xyv = 0}$$

Смотрим производные в $z = 0$:

$$u'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = 0 = v'_y(0,0)$$

$$u'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = 0 = -v'_x(0,0)$$

Тобишь:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Доказали, что выполнено условия Коши-Римана.

Ч.Т.Д

Теперь покажем, что $f'(0)$ не существует: Смотрим:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{|xy|} - 0}{x + iy} =$$

Переходим к полярным координатам:

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r\sqrt{|\sin\varphi\cos\varphi|}}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \lim_{r \to 0} \frac{\sqrt{|\sin\varphi\cos\varphi|}}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Видим, что предел от r не зависит, значит предела нет, значит производной в точке $f'(0)$ не существует

Ч.Т.Д

Номер 4

$$u = Re(f) = 3x^2 - 4xy - 3y^2$$

Используем Коши-Римана, получаем систему:

$$\begin{cases} u'_x = 6x - 4y = v'_y \\ u'_y = -4x - 6y = -v'_x \end{cases}$$

Так что интегрируем:

$$v = \int (6x - 4y)dy = 6xy - 2y^2 + \varphi(x)$$

$$v'_x = 4x + 6y = 6y + \varphi'(x)$$

Получили:

$$\varphi'(x) = 4x$$

$$\varphi(x) = \int (4x)dx = 2x^2 + C$$

Т.е итого:

$$v = 6xy - 2y^2 + 2x^2 + C$$

А теперь константу находим из условия, что$f(1) = 3 + 2i$:

$$f(1) = u(1) + iv(1) = 3 + 2i \to C = 0$$

Так что:

$$f = 3x^2 - 4xy - 3y^2 + i(6xy - 2y^2 + 2x^2)$$

Ответ:

$$f = 3x^2 - 4xy - 3y^2 + i(6xy - 2y^2 + 2x^2)$$

Номер 5

Делаем аналогично предыдущему номеру:

$$v = \operatorname{Im}(f) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$$

По Коши-Риману:

$$\begin{cases} v'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2 = u'_x \\ -v'_x = -\frac{2x}{x^2+y^2} - 1 = u'_y \end{cases}$$

Так что интегрируем:

$$u = \int \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} - 2 \right) dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2x + \varphi(y)$$

$$u'_y = -\frac{2x}{x^2 + y^2} - 1 = -\frac{2x}{x^2 + y^2} + \varphi'(y)$$

Получили:

$$\varphi'(y) = -1$$

$$\varphi(y) = -y + C$$

Т.е итого:

$$u = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2x - y + C$$

Находим константу:

$$f(i) = 2 \operatorname{arctg} 0 - 1 + C = i(\ln(1) - 2) = -2i \rightarrow C = 1$$

Так что:

$$f = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2x - y + 1 + i(\ln(x^2 + y^2) + x - 2y)$$

Ответ:

$$f = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2x - y + 1 + i(\ln(x^2 + y^2) + x - 2y)$$