Диффуры, дз – 7

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

14 июня 2022 г.

Номер 2

$$y_{t+2} + 5(t+1)y_{t+1} + 6(t+1)ty_t = 20(t+1)!2^t$$

Подстановка:

$$y_t = (t-1)!z_t$$

Ну собственно и подставляем:

$$(t+1)!z_{t+2} + 5(t+1)!z_{t+1} + 6(t+1)t \cdot (t-1)!z_t = 20(t+1)!2^t$$

Сокращаем:

$$z_{t+2} + 5z_{t+1} + 6z_t = 20 \cdot 2^t$$

Сначала найдем общее решение:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

Отсюда корни:

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

Ну и получаем решение:

$$C_1(-2)^t + C_2(-3)^5$$

Теперь будем искать частное решение, ищем как:

$$(at + b)2^t$$

Подставляем и находим:

$$(a(t+2) + b)2^{t+2} + 5(a(t+1) + b)2^{t+1} + 6(at + b)2^t = 20 \cdot 2^t$$

$$a(10t+9)+10b=10$$

$$10t\cdot a+9a+10b=10$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} a=0 \\ 9a+10b=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

Тобишь получаем частное решение:

$$(0\cdot t+1)2^t=2^t$$

Итого суммируем:

$$z_t=C_1(-2)^t+C_2(-3)^5+2^t$$

Вспоминаем про подстановку и получаем:

$$y_t=(t-1)!\cdot z_t=(t-1)!\cdot(C_1(-2)^t+C_2(-3)^5+2^t)$$

Ответ:

$$y_t=(t-1)!\cdot(C_1(-2)^t+C_2(-3)^5+2^t)$$

Номер 3

а)

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

Ищем собственные значения для матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5$$

По скобкам:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$$

Получили значения $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, теперь ищем векторы, сначала для $\lambda = 5$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь для второго значения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем два вектора:

$$h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получаем решение:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = C_1 \cdot 5^t \cdot h_1 + C_2 \cdot (-1)^t \cdot h_2 + C_3 \cdot (-1)^t \cdot h_3 =$$

$$= C_1 \cdot 5^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot (-1)^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot (-1)^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = C_1 \cdot 5^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot (-1)^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot (-1)^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

Делаем все тоже самое:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Получили $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, считаем:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для второго:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Для третьего:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot 2^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \cdot 3^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$