Бурмашев Григорий, 208, Дискра – 16

Номер 1

$$\Omega = \{x : 0 < x < 101\}$$
$$|\Omega| = 100$$
$$A = \{x : 0 < x < 101,\ x \vdots 3\}$$
$$|A| = 33$$
$$B = \{x : 0 < x < 101,\ x \vdots 7\}$$
$$|B| = 14$$
$$A \cap B = \{x : 0 < x < 101,\ (x \vdots 3) \cap (x \vdots 7)\}$$
$$|A \cap B| = 4$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{14}{100}} = \frac{2}{7}$$

Ответ: $\frac{2}{7}$

Номер 2

$$\Omega = \{f : \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}\}$$
$$|\Omega| = n^n$$
$$A = \{f : f(1) = 1\}$$
$$|A| = n^{n-1}$$
$$B = \{f : f \text{ является иньекцией}\}$$
$$|B| = n!$$
$$A \cap B = \{f : (f(1) = 1) \cap (f \text{ является иньекцией})\}$$
$$|A \cap B| = (n-1)!$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(n-1)! \cdot n^n}{n^n \cdot n!} = \frac{1}{n}$$
$$P(A) = \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$
$$P(A) = P(A|B) \to \text{ A и B независмы}$$

Номер 3

$$A = \{\text{вероятность вытащить карту из 1 колоды}\}$$
$$B = \{\text{вероятность вытащить 8 червей либо из 1, либо из 2 колоды}\}$$
$$A \cap B = \{\text{вытащить 8 червей из 1 колоды}\}$$
$$P(B) = \frac{2}{36+35}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{71}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{71}}{\frac{2}{71}} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Номер 4

$$\frac{1}{10} -- \text{вероятность наличия ошибки в задаче}$$
$$\frac{4}{5} -- \text{вероятность правильного ответа ассистента}$$
$$\frac{3}{4} -- \text{вероятность правильного ответа лектора}$$
$$A = \{\text{в задаче есть ошибка}\}$$
$$B = \{\text{по ассистенту ошибки нет, по лектору ошибка есть}\}$$
$$A \cap B = \{\text{в задаче точно есть ошибка, при этом ассистент ошибся, а лектор был прав}\}$$

Найдем вероятность B:

если ошибка действительно есть, тогда ассистент был прав, а лектор ошибься. Если же ошибки не было, то ассистат ошибся, а лектор был прав, тогда вероятность:

$$P(B) = \frac{1}{10} \cdot (1 - \frac{4}{5}) \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 - \frac{3}{4}) = \frac{3}{200} + \frac{36}{100} = \frac{39}{100}$$

Тогда найдем вероятность $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{200}$$

Тогда:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{200}}{\frac{39}{200}} = \frac{1}{13}$$

Ответ: $\frac{1}{13}$

Номер 5

Для проверки независимости нужно посмотреть на вероятность:

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

Из попарной независимости событий следует:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A|(B \cap C)) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{Pr(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}{P(B) \cdot P(C)} = P(A)$$

Значит события A и $B \cap C$ независимы

Номер 6

Пускай:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$|\Omega| = 8$$

$$A = \{\text{выбрать } (1, 6, 7, 8) \text{ из } \Omega\}$$

$$B = \{\text{выбрать } (1, 3, 7, 8) \text{ из } \Omega\}$$

$$C = \{\text{выбрать } (1, 2, 4, 5) \text{ из } \Omega\}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$A \cap B \cap C = \{\text{выбрать } (1) \text{ из } \Omega\}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$$

Ч.Т.Д