Бурмашев Григорий. Дискра – 13

Номер 1

От противного:

Пусть НОД$(a, bc) \neq 1$. Тогда найдется такое простое $q \neq 1$, что:
a делится на q
b или c тоже делится на q
Оно найдется, потому что либо q это и есть сам НОД (в случае если НОД простой), либо это один из простых множителей НОД.

Тогда либо общий делитель$(a, b) = q$, либо общий делитель$(a, c) = q$, а значит один из двух НОД уже точно не будет равен 1 и мы получаем противоречие.

Номер 2

НОД$(74, 47) =$ НОД$(27, 47) =$ НОД$(27, 20) =$ НОД$(7, 20) =$ НОД$(7, 6) =$ НОД$(1, 6) = 1$

Тогда воспользуемся расширенным алгоритмом евклида:

$$74x + 47y = 1$$

$$1 = 1\cdot1+0\cdot6 = (7-6)\cdot1+0\cdot6 = 7\cdot1-6\cdot1 = 7\cdot1-20\cdot1-7\cdot2 = 7\cdot3-20\cdot1 =$$

$$= 27\cdot3-20\cdot3-20\cdot1 = 27\cdot3-20\cdot4 = 27\cdot3-47\cdot4-27\cdot4 = 27\cdot7-47\cdot4 =$$

$$= 74\cdot7-47\cdot7-47\cdot4 = 74\cdot7-47\cdot11$$

Получается:

$$74\cdot7+47\cdot(-11) = 1$$

Тогда для (учитывая НОД $= 1$):

$$74x + 47y = 0$$

$$x = 47t$$

$$y = -74t$$

Тогда общее решение:

$$x = 2900\cdot7+47t,\ y = 2900\cdot(-11)-74t,\ t \in \mathbb{Z}$$

Но нужно учитывать, что у нас спрашивают существование решения в неотрицательных целых числах.

x и y находятся в зависимости: при увеличении икса игрик уменьшается. Но при x = 0 игрик получается нецелым ($t = -431{,}9$, $y = 2900 \cdot (-11) - 74 \cdot (-431{,}9)$), а значит решений в целых неотрицательных числах не существует.

Ответ: не существует

Номер 3

Поскольку а четно и при этом не делится на 4, то его можно представить как $a = 2 \cdot x$. Причем x – обязательно нечетное число. Можно рассмотреть множество всех делителей числа x. Пусть их n штук, тогдаOF это множество $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Причем x_i – нечетное(т.к x – нечетное). Они же и являются всеми нечетными делителями числа a (т.к второй множитель в разложении числа a – это четное число 2 и соотвественно других нечетных делителей мы не найдем). В таком случае всеми четными делителями числа а будут числа $2 \cdot x_1, 2 \cdot x_2, \dots 2 \cdot x_n$. Их тоже n штук и они все четные. Итого мы получили, что четных делителей столько же, сколько и нечетных.

Номер 4

Степень тройки должна оканчиваться на 0001. Другими словами, остаток от деления на 10000 должен быть равен 1. Мы знаем теорему Эйлера, применим её для $n = 10000$:

$$3^{\varphi(10000)} \equiv 1 \pmod{10000}$$

Условие про взаимную простоту соблюдается, т.к 3 и 10000 – взаимно простые.

Ответ: да, существует

Номер 5

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

p – простое $\to$ $p-1$ и $p+1$ являются четными. Поскольку числа идут друг за другом, то одно из них делится на 4, по итогу $(p-1)(p+1)$ делится на 8 $(4 \cdot 2)$.

Из трех чисел идущих подряд друг за другом одно делится на 3. У нас это числа $p-1, p, p+1$. p точно не делится на три, т.к оно простое, значит либо $p-1$, либо $p+1$ делится на три, но тогда и $(p-1)(p+1)$ тоже делится на три.

Суммируя эти два факта, мы получаем, что $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ делится на 24, т.к $24 = 3 \cdot 8$)

Номер 6

Если $2^{n!}-1$ делится на n, то его остаток при делении на n должен быть равен нулю, т.е:

$$2^{n!}-1 \equiv 0 (\bmod n)$$

А тогда:

$$2^{n!} \equiv 1 (\bmod n)$$

Это очень похоже внешне на использование теоремы Эйлера. Поскольку n – целое, то n! будет делится на $\varphi(n)$, ведь $\varphi(n)$ есть количество остатков по модулю n, взаимно простых с n, что точно меньше чем n. Тогда можно представить его как $\varphi(n) \cdot z$, где z – какое-то целое число. Тогда можно использовать теорему Эйлера. Пусть $2^k = x$, тогда:

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$$

Условие про взаимную простоту выполняется, т.к НОД$(x, n) = 1$, что следует из нечетности n. Таким образом, доказано то, что от нас требовалось.

Номер 7

Можно сложить дроби следующим образом:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}=\frac{1+p-1}{1\cdot(p-1)}=\frac{p}{1\cdot(p-1)}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}=\frac{2+p-2}{2(p-2)}=\frac{p}{2(p-2)}$$

Т.е первую дробь с последней, вторую с предпоследней и так далее до конца. Это возможно сделать, поскольку p есть простое число, а значит p-1 четное и всего слагаемых будет четное количество штук. Дроби попарно сложатся в вид (где n точно меньше,чем p и n – целое):

$$\frac{p}{n(p-n)}$$

Если сложить все эти дроби, то числитель в итоге будет кратен p (т.к при приведении к общему знаменателю мы все еще сможем вынести p за одну большую скобку), при этом знаменатель не будет кратен p (т.к все они меньше чем p) и p не сократится. А значит по итогу вся дробь будет кратна p, что и требовалось доказать.

Номер 8

Нужно доказать, что a, b, c, d, e,f по отдельности делятся на 11, тогда их произведение будет делиться на 11^6.

Если предположить, что а не делится на 11, тогда по малой теореме Ферма (т.к 11 – простое число):

$$a^{11-1} \equiv 1(\text{mod } 11)$$

Аналогично для b, c, d, e, f.

Тогда в случае, если хотя бы одно из них не делится на 11, их сумма не будет давать остаток 0 при делении на 11 (он уже будет как минимум 1), что противоречит условию задачи $\rightarrow a, b, c, d, e, f$ делятся на 11. А значит их произведение делится на 11^6