ТВиМС, дз – 1

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

28 января 2022 г.

Номер 3б)

$$X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$$

По определению:

$$X_n \xrightarrow{P} X \longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$$

$$Y_n \xrightarrow{P} Y \longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P\left(|Y_n - Y| \geq \varepsilon\right) = 0$$

А хотим мы доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P\left(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Для этого заметим:

$$|(X_n + Y_n) - (X + Y)| = |(X_n - X) + (Y_n - Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y| \to$$

$$\to P(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon) \leq P\left[\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \leq$$

$$\leq P\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0 = 0$$

Отсюда:

$$P(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Что по определению:

$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$$

Ч.Т.Д

Номер 10

$$m_n = \min\{X_1, \dots X_n\}$$

Ищем распределение:

$$F_{m_n}(t) = P(m_n \le t) = 1 - P(m_n > t)$$

Теперь можем вернуться к определению m_n. Каждое из X_i в нем имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а такое считать мы умеем:

$$\forall i : F_{X_i}(t) = P(X_i \le t) = t$$

Отсюда:

$$P(X_i > t) = 1 - P(X_i \le t) = 1 - t$$

Мы хотим узнать $P(m_n > t)$. Т.к m_n это минимум, то эта вероятность означает, что каждая из величин X_i должна быть больше t, отсюда просто получаем произведение вероятностей: $P(m_n > t) = (1 - t)^n$. Теперь возвращаемся:

$$F_{m_n}(t) = 1 - P(m_n > t) = 1 - (1 - t)^n$$

Ответ:

$$F_{m_n}(t) = 1 - (1 - t)^n$$

Распределение получили, теперь доказываем сходимость почти наверное к нулю. По определению хотим получить:

$$P(\lim_{n\to\infty} m_n = 0) = 1?$$

Т.к $\forall i \ : \ X_i \in [0, 1]$, то $m_n \in [0, 1]$. Тогда получаем:

$$P(\lim_{n\to\infty} m_n = 0) = \int_0^1 \rho_{m_n} dt$$

Считаем:

$$\rho_{m_n} = (F_{m_n})' = (1 - (1 - t)^n)' = n(1 - t)^{n-1}$$

Тогда:

$$\int_0^1 \rho_{m_n} dt = \int_0^1 n(1-t)^{n-1} = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} = -(1-t)^n \Big|_0^1 = -(1-1)^n + (1-0)^n = 1$$

Т.е:

$$P(\lim_{n\to\infty} m_n = 0) = \int_0^1 \rho_{m_n} dt = 1$$

Ч.Т.Д