Матан, дз – 9

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

15 марта 2022 г.

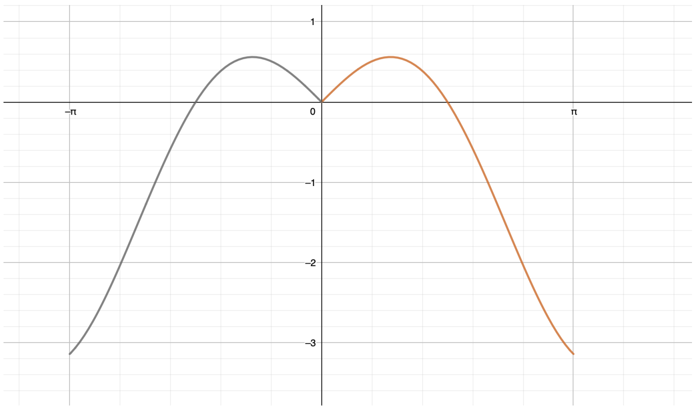
Номер 1

$$f(x) = x\cos x,\ [0, \pi]$$

Хотим четность на $[-\pi, \pi]$, тогда дополним нашу функцию для четности:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\cos x,\ [0, \pi] \\ -x\cos x,\ [-\pi, 0] \end{cases}$$

Тогда получим график вида:



$\tilde{f}$ на $[-\pi, \pi]$ – четная, тогда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \tilde{f}(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos x dx = \frac{2}{\pi}\left(x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\sin x dx \right) = \frac{2}{\pi}\cdot(-2) = -\frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\tilde{f}(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos x\cos(kx)dx = \frac{2}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cdot(\cos(kx+x)+\cos(x-kx))\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos(x+kx)dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos(x-kx)dx = (\times)$$

Посчитаем эти интегралы отдельно:

$$\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos(x+kx)dx = \frac{x\sin(x+kx)}{k+1}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{k+1}\int\limits_0^{\pi}\sin(x+kx)dx = -\frac{\pi\sin(\pi k)}{k+1} + \frac{\cos(x+kx)}{(k+1)^2}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{\pi\sin(\pi k)}{k+1} + \frac{\cos(\pi(k+1))-1}{(k+1)^2} = 0 + \frac{(-1)^{k+1}-1}{(k+1)^2}$$

$$\int_0^\pi x \cdot \cos(x - kx)dx = 0 - \frac{1+\cos(\pi k)}{(k-1)^2} = -\frac{(-1)^k+1}{(k-1)^2}$$

Возвращаемся:

$$(\times) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^{k+1}-1}{(k+1)^2}\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{(-1)^k+1}{(k-1)^2}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^{k+1}-1}{(k+1)^2} - \frac{(-1)^k+1}{(k-1)^2}\right)$$

Видим проблемную точку $k = 1$, где знаменатель уходит в ноль, посмотрим отдельно:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+x\cos(2x))dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi xdx+\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi x\cos(2x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi xdx + \frac{1}{2\pi}x\sin(2x)\Big|_0^\pi - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(2x)dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi xdx = \frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Ну а тогда ряд Фурье для $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^{k+1}-1}{(k+1)^2} - \frac{(-1)^k+1}{(k-1)^2}\right)\cdot\cos(kx)$$

А теперь говорим, что раз мы смогли разложить $\tilde{f}$ на $[-\pi,\pi]$, то сможем и разложить в частности и кусок от $[0,\pi]$ для нашей f, т.е:

$$f = \tilde{f}\Big|_0^\pi$$

Ответ:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^{k+1}-1}{(k+1)^2} - \frac{(-1)^k+1}{(k-1)^2}\right)\cdot\cos(kx)$$

$$f = \tilde{f}\Big|_0^\pi$$

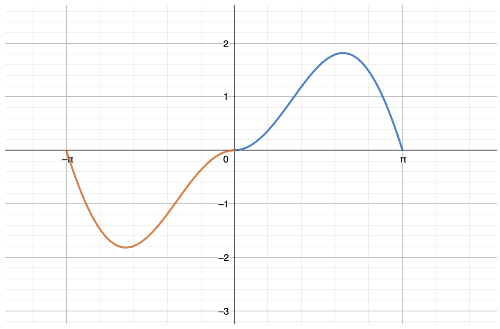
Номер 2

$$f(x) = x \sin x,\ [0, \pi]$$

Номер аналогичный 1му, только теперь функция четная, хотим дополнить до нечетности на $[-pi, \pi]$, дополняем:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin x,\ [0, \pi] \\ -x \sin x,\ [-\pi, 0] \end{cases}$$

Тогда график:



Теперь раскладываем:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x \sin x \sin(kx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x \cos(x - kx) dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x \cos(x + kx) dx = (\times)$$

Чудо, получили те же интегралы из первого номера, тогда:

$$(\times) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{k+1} - 1}{(k+1)^2} + \frac{(-1)^k + 1}{(k-1)^2} \right)$$

Снова смотрим на $k = 1$:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

Итого ряд Фурье:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{k+1} - 1}{(k+1)^2} + \frac{(-1)^k + 1}{(k-1)^2} \right) \sin(kx)$$

Ответ:

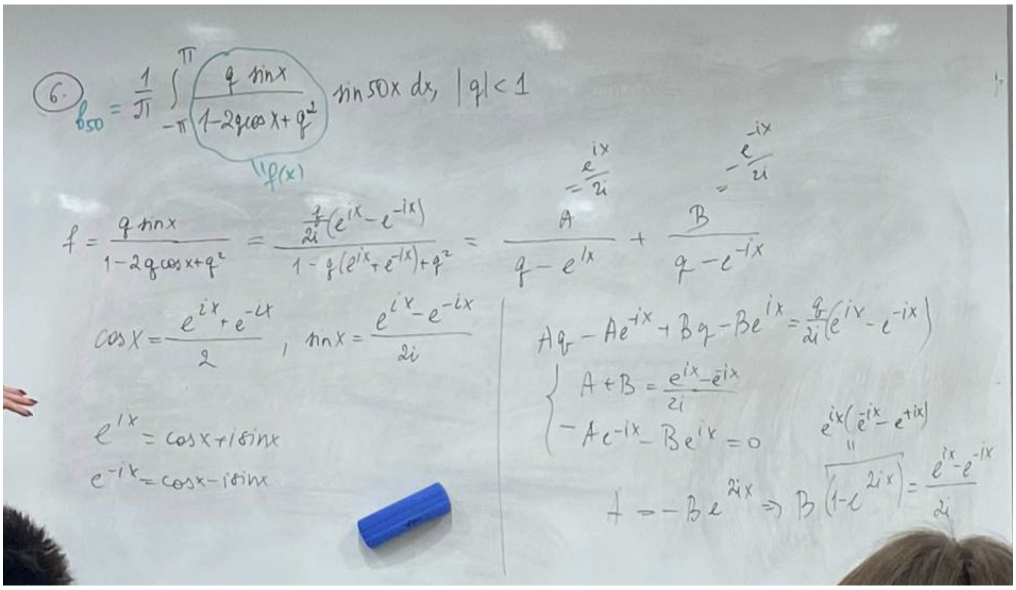
$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{k+1} - 1}{(k+1)^2} + \frac{(-1)^k + 1}{(k-1)^2} \right) \sin(kx)$$

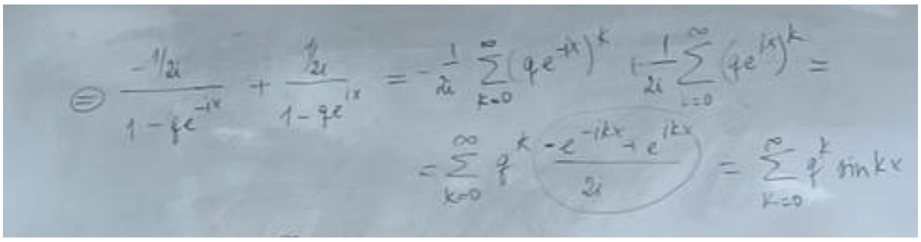
$$f = \tilde{f}\Big|_0^{\pi}$$

Номер 3

$$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2},\ |q|<1$$

На семе было:





Очень хочется получить что-то аналогичное в числителе, добавим и вычтем сверху до знаменателя (чтобы вынести отдельно 1), чтобы там был косинус:

$$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-q^2+2q\cos x-2q\cos x+(-1)-(-1)}{1-2q\cos x+q^2}=$$

$$=\frac{-(1-2q\cos x+q^2)-2q\cos x+1-(-1)}{1-2q\cos x+q^2}=-1+\frac{-2q\cos x+2}{1-2q\cos x+q^2}=$$

А теперь делаем как в 6м номере с семинара:

$$=-1+\frac{-q(e^{ix}+e^{-ix})+2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}=-1+\left(\frac{A}{q-e^{ix}}+\frac{B}{q-e^{-ix}}\right)=(\times)$$

Ищем коэффы:

$$Aq - Ae^{-ix} + Bq - Be^{ix} = -q(e^{ix} + e^{-ix}) + 2$$

$$\begin{cases} A + B = -(e^{ix} + e^{-ix}) \\ -Ae^{-ix} - Be^{ix} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -e^{ix} \\ B = -e^{-ix} \end{cases}$$

Возвращаемся:

$$(\times) = -1 + \frac{-e^{ix}}{q - e^{ix}} + \frac{-e^{-ix}}{q - e^{-ix}} = -1 + \frac{1}{1 - qe^{-ix}} + \frac{1}{1 - qe^{ix}} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(qe^{-ix}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(qe^{ix}\right)^k =$$

$$= -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2q^k \cdot \cos(kx)$$

Функцию разложили, теперь вычисляем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - q^2}{1 - 2q\cos x + q^2} \cos(2022x)dx = a_{2022} = 2q^{2022}$$

Ответ:

ряд фурье:

$$-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \cos(kx)$$

интеграл:

$$2q^{2022}$$