NIS22DSP, Контрольная работа, вариант 3

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

12 ноября 2022 г.

Задача 1

Задача 1

Проверить является ли дискретный сигнал $x[n] = e^{j\pi n/11}$ периодическим. Если сигнал $x[n]$ является периодическим, найти его период (наименьший и положительный).

$$x[n] = e^{j\pi \frac{n}{11}}$$
$$x[n] = x[n+N] = e^{\frac{i\pi(n+N)}{11}} = e^{\frac{i\pi n}{11}} \cdot e^{\frac{i\pi N}{11}}$$

Проверим, равен ли правый знаменатель единице:

$$e^{\frac{i\pi N}{11}} = 1$$
$$\frac{\pi N}{11} = 2\pi k$$
$$\frac{N}{11} = 2k$$
$$N = 22k,\ k \in \mathbb{Z}$$

При $k = 1$ получаем $N = 22$

Ответ:

$x[n]$ – периодический сигнал с периодом $N = 22$

Номер 2

Задача 2

Найти отклик линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $h[n] = 2^n u[-n-3]$ на сигнал $x[n] = u[n-8]$, где $u[n]$ - единичный скачок (сигнал равный 0 для $n < 0$ и 1 для $n \geq 0$)

$$h[n] = 2^n u[-n-3]$$

$$x[n] = u[n-8]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u[-k-3] \cdot u[n-k-8]$$

1.
$$u[-k-3] = \begin{cases} 1, k \leq -3 \\ 0, k > -3 \end{cases}$$

2.
$$u[n-k-8] = \begin{cases} 1, k \leq n-8 \\ 0, k > n-8 \end{cases}$$

Тогда по геометрической прогрессии получаем:

$$\sum_{k=-\infty}^{n-8} 2^k = 2^{n-7}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-3} 2^k = \frac{1}{4}$$

Ответ:

$$\sum_{k=-\infty}^{n-8} 2^k = 2^{n-7}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-3} 2^k = \frac{1}{4}$$

Номер 3

Задача 3

Найти комплексную частотную характеристику $H(e^{j\omega})$ линейной стационарной системы, у которой входной сигнал $x[n]$ и отклик $y[n]$ удовлетворяют разностному уравнению:

$$\frac{1}{5}y[n] + 4y[n-2] = x[n] + \frac{2}{3}x[n-1] + 3x[n-2]$$

$$\frac{1}{5}y[n] + 4y[n-2] = x[n] + \frac{2}{3}x[n-1] + 3x[n-2]$$

Знаем, что:

$$H(e^{jw}) = \mathcal{F}\left(h[k]\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-i\omega k}$$

$$h[k] = \mathcal{S}(\delta[k])$$

Проверяем:

$$\frac{1}{5}h[n] + 4h[n-2] = \delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

$$\frac{1}{5}H(\omega) + 4H(\omega)\cdot e^{-i\omega 2} = 3\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 1\cdot e^{-i\omega 1} + 3\cdot 1\cdot e^{-i\omega 2}$$

$$\frac{1}{5}H(\omega) + 4H(\omega)\cdot e^{-i\omega 2} = 3 + \frac{2}{3}\cdot e^{-i\omega} + 3\cdot e^{-i\omega 2}$$

$$H(\omega) + 20H(\omega)\cdot e^{-i\omega 2} = 15 + \frac{10}{3}\cdot e^{-i\omega} + 15\cdot e^{-i\omega 2}$$

$$H(\omega)\cdot(1 + 20e^{-i\omega 2}) = 15 + \frac{10}{3}\cdot e^{-i\omega} + 15\cdot e^{-i\omega 2}$$

$$H(\omega) = \frac{15 + \frac{10}{3}\cdot e^{-i\omega} + 15\cdot e^{-i\omega 2}}{1 + 20e^{-i\omega 2}}$$

Ответ:

$$H(\omega) = \frac{15 + \frac{10}{3}\cdot e^{-i\omega} + 15\cdot e^{-i\omega 2}}{1 + 20e^{-i\omega 2}}$$

Номер 4

Задача 4

Найти дискретное преобразование Фурье сигнала заданного на отрезке $[0, N-1]$:

$$x[n] = 7^n$$

$$x[n] = 7^n$$

Применяем формулу:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-in\omega_k}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} 7^n e^{-in\frac{2\pi k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(7e^{-i\frac{2\pi k}{N}}\right)^n = \frac{1 - \left(7e^{-i\frac{2\pi k}{N}}\right)^N}{1 - 7e^{-i\frac{2\pi k}{N}}} =$$

$$= \frac{1 - 7^N e^{-i2\pi k}}{1 - 7e^{-i\frac{2\pi k}{N}}} = \frac{1 - 7^N}{1 - 7e^{-i\frac{2\pi k}{N}}}$$

Ответ:

$$\frac{1 - 7^N}{1 - 7e^{-i\frac{2\pi k}{N}}}$$