Линал. ИДЗ - 1. Вариант 2.

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

5 ноября 2020 г.

1.

Вычислить матрицу (по данным матрицам в условии)

$-2D \cdot A \cdot A^T + tr(B^T \cdot B) \cdot (A - B) \cdot (A^T + B^T) - 6C^2 - 12C \cdot D - 6D^2$

Вычислим по порядку:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-2D = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$-2D \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 104 & -64 \\ -78 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = -2D \cdot A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 104 & -64 \\ -78 & 48 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -678 & -678 \\ -666 & 90 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 & -6 - 3 \cdot 3 & 6 \cdot 4 + 3 \cdot 7 \\ -6 - 3 \cdot 3 & 1 + 3 \cdot 3 & -4 - 3 \cdot 7 \\ 4 \cdot +7 \cdot 3 & -4 - 7 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 45 & -15 & 45 \\ -15 & 10 & -25 \\ 45 & -25 & 65 \end{pmatrix}$$

$$tr(B^T \cdot B) = 45 + 10 + 65 = 120$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5+6 & -6-1 & 1+4 \\ -3-3 & -4+3 & 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 5 \\ -6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 5-6 & -3+3 \\ -6+1 & -4-3 \\ 1-4 & 4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(A - B) \cdot (A^T + B^T) = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 5 \\ -6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 104 \\ 20 & -26 \end{pmatrix}$$

$$Y = tr(B^T \cdot B) \cdot (A - B) \cdot (A^T + B^T) = 120 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 104 \\ 20 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1080 & 12480 \\ 2400 & -3120 \end{pmatrix}$$

$$6C^2 = 6 \cdot \begin{pmatrix} 28 & -54 \\ -18 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168 & -324 \\ -108 & 222 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 46 \\ 22 & -29 \end{pmatrix}$$

$$12C \cdot D = 12 \cdot \begin{pmatrix} -20 & 46 \\ 22 & -29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -240 & 552 \\ 264 & -348 \end{pmatrix}$$

$$6C^2 + 12C \cdot D = \begin{pmatrix} -72 & 228 \\ 156 & -126 \end{pmatrix}$$

$$6D^2 = 6 \cdot \begin{pmatrix} 58 & 7 \\ 6 & 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 348 & 42 \\ 36 & 306 \end{pmatrix}$$

$$Z = 6C^2 + 12C \cdot D + 6D^2 = \begin{pmatrix} 276 & 270 \\ 192 & 180 \end{pmatrix}$$

$$X + Y = \begin{pmatrix} -679 + 1080 & -678 + 12480 \\ -666 + 2400 & 90 - 3120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 402 & 11802 \\ 1734 & -3030 \end{pmatrix}$$

$$X + Y - Z = \begin{pmatrix} 402 - 276 & 11802 - 270 \\ 1734 - 192 & -3030 - 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 & 11532 \\ 1542 & -3210 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 126 & 11532 \\ 1542 & -3210 \end{pmatrix}$

2.

Решите каждую из приведённых ниже систем линейных уравнений методом Гаусса. Если система совместна, то выпишите её общее решение и укажите одно частное решение

(a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 0 & -11 & -5 \\ -8 & 4 & -4 & 16 & 12 \\ 8 & 1 & -21 & -26 & 13 \\ 10 & -7 & 15 & -16 & -25 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 5 & -25 & -10 & 25 \\ 0 & -3 & 15 & 6 & -15 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -25 & -10 & 25 \\ 0 & -3 & 15 & 6 & -15 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Вернемся к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_3 - \text{произвольное} \\ x_4 - \text{произвольное} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = 5 + 5x_3 + 2x_4 \\ x_3 - \text{произвольное} \\ x_4 - \text{произвольное} \end{cases}$$

Ответ:

общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_2 = 5 + 5x_3 + 2x_4 \\ x_3 - \text{произвольное} \\ x_4 - \text{произвольное} \end{cases}$$

одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 14 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

(б)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 0 & -11 & -5 \\ -8 & 4 & -4 & 16 & 0 \\ 8 & 1 & -21 & -26 & -9 \\ 10 & -7 & 15 & -16 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -25 & -10 & -9 \\ 0 & -3 & 15 & 6 & 10 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & -25 & -10 & -9 \\ 0 & -3 & 15 & 6 & 10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41 \\ 0 & -3 & 15 & 6 & 10 \end{array}\right)$$

В третьей строке матрицы:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 41$$

$$0 = 41$$

противоречие, значит система несовместна

Ответ: система несовместна

3.

$AX = XA$, пусть:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножим матрицы:

$$\begin{pmatrix} 10a & 0 & 10b + 2f \\ -a - 4c & -4d & -b + 3f - 4e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a & 0 & 2a \\ -10c - d & -4d & 2c + 3d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы эти матрицы были равны, должна быть верна система:

$$\begin{cases} 10b + 2f = 2a \\ 10c - d = -a - 4c \\ 2c + 3d = -b + 3f - 4e \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5b + f = a \\ 14c = d - a \\ 2c + 3d = -b + 3f - 4e \end{cases}$$

Мы знаем, что:

$$a = 5b + f$$

Выразим c:

$$14c = d - 5v - f$$

$$c = \frac{d - 5b - f}{14}$$

Выразим d:

$$\frac{d - 5b - f}{7} + 3d = -b + 3f - 4e$$

$$22d = 22f - 2b - 28e$$

$$d = \frac{11f - b - 14e}{11}$$

Значит матрица X имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 5b + f & 0 & b \\ \frac{d-5b-f}{14} & \frac{11f-b-14e}{11} & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

где b, e, f – произвольные числа

$$\textbf{Ответ:} \begin{pmatrix} 5b + f & 0 & b \\ \frac{d-5b-f}{14} & \frac{11f-b-14e}{11} & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

где b, e, f – произвольные

4.

Определите число решений системы в зависимости от a и b

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & b & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & b & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{9}{2} \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -1-\frac{ab}{2} & 3+\frac{9a}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -1-\frac{ab}{2} & 3+\frac{9a}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-2-ab}{2} & \frac{6+9a}{2} \end{array}\right)$$

- Если $-2-ab=0$:

$$0x+0y+0z=\frac{6+9a}{2}$$

1) Если $\frac{6+9a}{2} \neq 0$, т.е $3a+2 \neq 0$, то мы получаем противоречие (слева ноль, а справа – что-то, не равное нулю)

2) Если $\frac{6+9a}{2} = 0$, т.е $3a+2=0$, то:

$$\begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x=-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\cdot z \\ y=-2-2\cdot z \\ z-\text{произвольное} \end{cases}$$

- Если $-2-ab \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-2-ab}{2} & \frac{6+9a}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6+9a}{-2-ab} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-18+2a-8}{-2-ab} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6+9a}{-2-ab} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9-3b}{-2-ab} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-18+2a-8}{-2-ab} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6+9a}{-2-ab} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{9-3b}{-2-ab} \\ y = \frac{-18+2a-8}{-2-ab} \\ z = \frac{6+9a}{-2-ab} \end{cases}$$

Ответ:

Если $ab \neq -2$, то система совместна и имеет решение:

$$\begin{cases} x = \frac{9-3b}{-2-ab} \\ y = \frac{-18+2a-8}{-2-ab} \\ z = \frac{6+9a}{-2-ab} \end{cases}$$

Если $ab = -2$, то есть два случая:

1) если $a \neq -\frac{2}{3}$, то система несовместна

2) если $a = -\frac{2}{3}$, то система совместна и имеет бесконечно число решений:

$$\begin{cases} x = -\frac{9}{2} - \frac{3}{2} \cdot z \\ y = -2 - 2 \cdot z \\ z - \text{произвольное} \end{cases}$$

5.

Найдите матрицу, обратную данной

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -14 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -16 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 7 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -34 & 3 & 49 & -16 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -16 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 7 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -16 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 & -6 & 11 & -40 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & -11 & 40 \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -18 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 5 & 6 & -11 & 40 \end{pmatrix}$