Матан, дз – 4

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

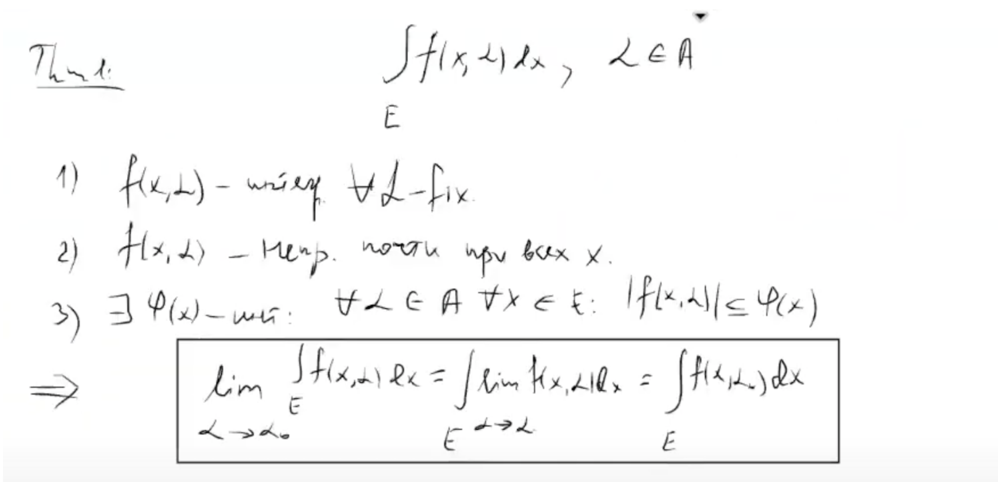
8 февраля 2022 г.

Номер 1

Вычислить:

$$\lim_{p \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2} dx$$

Проверяем условия для теоремы с сема:



Подинтегральная функция непрерывна для любого x. В знаменателе нет проблем, так как там везде квадраты. Из непрерывности получаем интегрируемость. Осталось подобрать мажорантную функцию для 3 пункта. Заметим, что у нас $p \to 0+$, а также $x \geq 0$, значит при таком p $e^{-px} \leq 1$, пробуем:

$$\left| \frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2} \right| \leq \frac{x \cdot 1}{(x^2+1)^2}$$

Ну а эта функция тем более интегрируема. Все 3 условия выполняются, значит можем пользоваться теоремой:

$$\lim_{p \to 0+} \int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \lim_{p \to 0+} \frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$= -\left(\frac{1}{2(x^2+1)} \right) \Bigg|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Ответ:

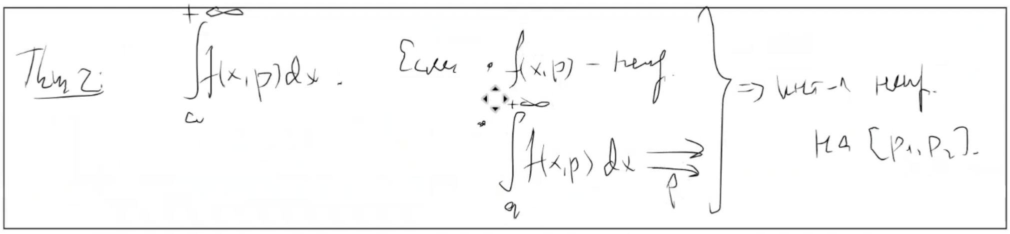
$$\frac{1}{2}$$

Номер 2

Найти область определения функции, заданной интегралом, и исследовать эту функцию на непрерывность:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

Номер аналогичен 6 с семинара. Проверяем условия для теоремы с сема:



Разберемся для начала с областью определения. Попробуем по признаку Дирихле доказать, что интеграл сходится. Для начала разберемся с косинусом. Заметим, что при любых пределах интегрирования мы можем сказать:

$$\left| \int \cos(pt)dt \right| \leq \frac{2}{p} - \text{ ограниченно}$$

Но здесь возникает проблемный случай $p = 0$, так что рассмотрим его отдельно позже, пока что скажем, что $p \neq 0$. Теперь посмотрим на вторую функцию $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \to 0 \text{ монотонно}$$

Из этих двух пунктов по обычному признаку Дирихле получаем, что наш интеграл сходится. Нужно вспомнить про $p = 0$, при нем:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

Этот интеграл сходится, а значит мы получаем область определения $\mathbb{R}$, т.е:

$$p \in \mathbb{R}$$

Теперь надо проверить непрерывность, проверяем:

$$fix\, \forall p \neq 0 \ : \ \exists\, p_0 > 0 : \ p \in [p_0, +\infty)$$

Если p отрицательное, то будет:

$$fix\ \forall p \neq 0\ :\ \exists\, p_0 > 0:\ p \in [-\infty, -p_0)$$

Но поскольку все симметрично, будем рассматривать случай для положительных, проверяем:

$$\left|\int \cos(pt)dt\right| \leq \frac{2}{p} \leq \frac{2}{p_0} \text{ равномерно ограниченно}$$

В знаменателе вообще нет параметра, поэтому там всё просто, он равномерно и монотонно стремится к нулю:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \rightrightarrows 0 \text{ монотонно}$$

Теперь снова проверяем случай $p = 0$, при нем:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx \text{ непрерывно}$$

По признаку Дирихле для интегралов с параметром получаем равномерную сходимость на промежутке $[p_0, +\infty)$, следовательно функция непрерывна в любой фиксированной точке p, значит есть непрерывность везде, а значит есть непрерывность на $\mathbb{R}$

Ответ: область определения $p \in \mathbb{R}$, там непрерывность есть

Номер 3

Найти область определения функции, заданной интегралом, и исследовать эту функцию на непрерывность:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$$

Номер аналогичен 3 с семинара. Имеем проблемную точку $x = 0$, в остальном всё хорошо. Посмотрим, что происходит в окрестности нуля. Там $\sin x \sim x$, а значит:

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{\sin x}{x^p} dx \sim \int\limits_0^\varepsilon \frac{x}{x^p} dx = \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{x^{p-1}} dx$$

Ну а мы знаем, что такой интеграл сходится при $p - 1 < 1$, т.е $p < 2$. Получили область определения. Теперь будем проверять непрерывность при таких p. Проверяем аналогично предыдущему номеру:

$$\forall\, fix\, p < 2 \;:\; \exists\, p_0 :\; p < p_0 < 2 \;:\; \text{область } (0, 1) \times (-\infty, p_0)$$

На этой области докажем равномерную сходимость:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx < \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^{p_0}} dx$$

Ну а этот интеграл сходится, т.к $p_0 < 2$. А значит исходный интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса на области $p \in (-\infty, p_0)$. Значит непрерывна в выбранной фиксированной точке $p < 2$, а следовательно непрерывно $\forall p < 2$.

Ответ: область определения $p < 2$, там непрерывность есть

Номер 4

Вычислить интегралы

a)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx$$

Нужно свести к интегралу Дирихле, поэтому введем замену:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx = \begin{bmatrix} t = x^3 \\ x = \sqrt[3]{t} \\ dt = 3x^2 dx \\ dx = \frac{dt}{3x^2} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}} \frac{dt}{3\sqrt[3]{t^2}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t^3}} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{6}$$

b)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{9 + x^2} dx$$

Похоже на интеграл Лапласа, только вместо 1 имеем 9, это, в свою очередь, похоже на 9 номер с семинара.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{9 + x^2} dx = \frac{1}{9} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx$$

Понизим степень у косинуса, чтобы избавиться от квадрата:

$$= \frac{1}{9} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{1 + \cos 2x}{2}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{18} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 + \cos 2x}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{18}\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx\right)$$

Разберемся по отдельности, левый интеграл очевный:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx = 3\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = 3\,\mathrm{arctg}\,(t)\Big|_0^{+\infty} = 3\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{3\pi}{2}$$

Правый интеграл есть интеграл из 9 номера из семинара, на всякий случай прикладываю:

$$(9)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{b^2+x^2}dx = \frac{1}{b^2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}dx = \left[t = \frac{x}{b}\right] = \frac{1}{b^2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(abt)}{1+t^2}d(bt) =$$
$$= \frac{1}{b}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-|ab|}$$

Так что получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+\left(\frac{x}{9}\right)^2}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{9\cos 2x}{9+x^2}dx = 9\cdot\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{9+x^2}dx = 9\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{-|2\cdot 3|} = \frac{3\pi}{2}\cdot e^{-6}\right)$$

Возвращаемся к исходному интегралу и подставляем:

$$\frac{1}{18}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\cdot e^{-6}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\cdot e^{-6} = \frac{\pi}{12}\cdot(1+e^{-6})$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{12}\cdot(1+e^{-6})$$