Матан, дз – 6

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

26 октября 2021 г.

Номер 1

Разложить функцию в степенной ряд с центром в **нуле**:

$$f(x) = (1-x)\sin^2 x \cos x$$

$$(1-x)\sin^2 x\cos x = (1-x)(1-\cos^2 x)\cos x = (1-x)(\cos x - \cos^3 x) =$$

$$= (1-x)\left(\cos x - \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right) = \cos x - \frac{3\cos x + \cos 3x}{4} - x\cdot\cos x + \frac{x(3\cos x + \cos 3x)}{4} =$$

$$= \cos x - \frac{1}{4}3\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x - x\cos x + \frac{1}{4}3x\cos x + \frac{1}{4}x\cos 3x =$$

$$= \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x\cos 3x = \frac{1}{4}(\cos x - \cos 3x) - \frac{1}{4}x(\cos x - \cos 3x)$$

Теперь используем ряд Тейлора для $\cos x$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$$

Тогда:

$$\cos x - \cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} - (-1)^n\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\left(\frac{x^{2n} - 3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\left(\frac{x^{2n}(1-3^{2n})}{(2n)!}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}(1-3^{2n})}{(2n)!} \right)$$

Подставляем в $f(x)$:

$$\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}(1-3^{2n})}{(2n)!} - \frac{1}{4} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}(1-3^{2n})}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}(1-3^{2n})}{(2n)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}(1-3^{2n})}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}(1-3^{2n})}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}(1-3^{2n})}{(2n)!} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-3^{2n})}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-3^{2n})}{(2n)!} x^{2n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-3^{2n})}{(2n)!} x^{2n} \cdot (1-x) \right)$$

Ответ:

$$\frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-3^{2n})}{(2n)!} x^{2n} \cdot (1-x) \right)$$

Номер 2

Разложить функцию в степенной ряд с центром в **нуле**:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^2}}$$

Умеем раскладывать $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n \ \ \forall x : |x| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+t^2}} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{3}}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{3}}$$

Пусть $|t| < 1$, тогда:

$$f(x) = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)\ldots(-\frac{1}{3}-n+1)}{n!} \cdot t^{2n}\right) dt =$$

$$= x + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)\ldots(-\frac{1}{3}-n+1)}{n!} \cdot t^{2n} dt =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)\ldots(-\frac{1}{3}-n+1)}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2))}{3^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}} =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2)!}{3^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$$

Ответ:

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2)!}{3^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$$