Бурмашев Григорий. 208. Алгебра – 4

Номер 1

- Обратимые элементы:

$$\text{Пусть } X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R.$$

По определению X будет называться обратимым, если для него будет существовать обратный элемент X^{-1} такой, что

$$XX^{-1} = X^{-1}X = E$$

Из курса линала знаем, что условие обратимости матрицы эквивалентно условию её невырожденности.

А значит $\det X \neq 0 \to ac \neq 0 \to \begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$.

При таком условии X^{-1} будет иметь вид:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in R$$

И тогда:

$$XX^{-1} = X^{-1}X = E$$

Обобщая, обратимыми будут все элементы в R, определитель которых не равен нулю. Никаких других обратимых элементов очев быть не может.

- Делители нуля:

Найдем все левые делители нуля:

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R, A \neq 0 \text{ – левый делитель.}$$

$$\text{Тогда } \exists\ B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R, B \neq 0, \text{ причем } AB = 0, \text{ т.е:}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ad & bf + ae \\ 0 & cf \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} ad = 0 \\ bf + ae = 0 \\ cf = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим возможные случаи:

1) Если $a = 0$, то $bf = 0$, $cf = 0 \to bf = cf$.

b и c одновременно не могут быть равны нулю, т.к в таком случае нарушается условие $A \neq 0$, а значит $f = 0$. По итогу:

$$\begin{cases} a = 0 \\ f = 0 \\ A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \\ B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \end{cases}$$

2) Если $a \neq 0$, тогда $d = 0$, $ae = -bf$, т.е $e = \frac{bf}{a}$.

Пусть $c \neq 0$, тогда $f = 0$, отсюда $e = 0$, т.е нарушается условие $B \neq 0$, а значит получаем противоречие и $c = 0$ (на самом деле следует из замечания 4 из конспекта о необратимости делителей нуля, но я чет только во время проверки это заметил). По итогу получаем:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ d = 0 \\ c = 0 \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \\ B = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R \end{cases}$$

Других случаев быть не может (ибо я тупо перебрал все возможные виды матриц, которые нам подходят и не противоречат условию). Получили две системы, т.е A (левый делитель) имеет вид либо матрицы с нулями в первом столбце, либо матрицы с нулями во второй строчке. Отсюда определитель такой матрицы будет равен нулю. А значит левыми делителями будут все **вырожденные** ненулевые матрицы в R.

Абсолютно тоже самое получаем для правых делителей, только в тех же системах мы будем фиксировать B как правый делитель и для него уже подбирать А (система уравнений для АВ будет такой же). В любом случае, B будет также вырожденной ненулевой матрицей.

- Нильпотентные элементы:

$$\text{Такие } A \in R, A \neq 0, \text{ что } \exists\, n \in \mathbb{N}, A^n = 0$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, A \neq 0$.

Попробуем ручками возводить в степени:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b + bc^2 + abc \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

Видно, что на диагонали стоят a^n и c^n. Покажем это строго методом математической индукции:

База : показана выше

Переход: пусть верно для $< n$, тогда:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & \text{пофиг что тут} \\ 0 & c^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} a^{n-1} & \text{пофиг что тут} \\ 0 & c^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & \text{пофиг что тут} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Получаем условие $a = c = 0$, без которого не найдется ни одного n, при котором $A^n = 0$ (из доказанного выше). Тогда получаем ограничение на $b \neq 0$, чтобы выполнялось неравенство $A \neq 0$.

Теперь остается заметить, что $\forall b \in \{\mathbb{Q} \setminus 0\}$ равенство $A^n = 0$ выполняется уже при $n = 2$:

$$ab + bc = 0 \cdot b + b \cdot 0 = 0$$

А значит b мы можем брать произвольно (кроме нуля), основное условие у нас на $a = c = 0$.

Ответ:

- Обратимые:

  Все **невырожденные** матрицы.

- Делители нуля:

  Все **вырожденные** ненулевые матрицы.

- Нильпотентные:

  Матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $b \neq 0$.

Номер 2

Решим от противного (да и вообще 1 в 1 как на семинаре):

Пусть $(x+2, y)$ – главный идеал. Если предположить, что $(x+2, y) = (f)$, то мы получим, что все многочлены внутри идеала делятся на f, но:

$$x + 2 \in (x + 2, y)$$

$$y \in (x + 2, y)$$

А значит:

$$x + 2 \vdots f$$

$$y \vdots f$$

Тогда deg $f \leq 1$.

- Предположим, что deg $f = 1$:

  Тогда $f = c \cdot (x + 2)$, но y не делится на $c \cdot (x + 2)$, **противоречие**.

- Предположим, что deg $f = 0$:

  Тогда $f = c_0$ – константа, причем $c_0 \neq 0$. А значит:

  $$(x + 2, y) = (c_0)$$

  Но c_0 – обратимый элемент, тогда из упражнения 2 из конспекта Авдеева получаем, что $(x + 2, y) = \mathbb{R}[x, y]$. Теперь можем заметить что $1 \notin (x + 2, y)$. Иначе в точке (x, y) = (-2, 0), получаем, что $1 = f_1 \cdot (x + 2) + f_2 \cdot y = 0$, а это **противоречие** (аналогично семинару Авдеева) и 1 не лежит в (x + 2, y).

По итогу получаем противоречие с упражнением 2 из конспекта и (x + 2, y) не является главным идеалом

Номер 3

Чтобы применить теорему о гомоморфизме, надо выбрать какое-то хорошее отображение ϕ, чтобы потом показать, что его ядром будет $(x^2 - x)$. У данного многочлена два различных корня, кольцо у нас является парами из двух чисел. Значит достаточно удобно будет взять такое отображение, которое переводит нас в корни. Т.е в $x(x-1) = 0$, в 1 и в 0. Назовем такое отображение $\phi : \mathbb{C}[x] \to C \oplus C$. Тогда оно будет многочлен P(x) переводить в $(P(1), P(0))$

Теперь покажем, что оно будет гомоморфизмом (пусть P и Q многочлены собственно):

- Сложение:

$$\phi\left(P(x) + Q(x)\right) = \phi\left((P+Q)x\right) = [(P+Q)(1), (P+Q)(0)] =$$

$$= [P(1) + Q(1), P(0) + Q(0)] = \phi\left(P(x)\right) + \phi\left(Q(x)\right)$$

- Умножение:

$$\phi\left(P(x) \cdot Q(x)\right) = \phi\left(PQ(x)\right) = [PQ(1), PQ(0)] = [P(1) \cdot Q(1), P(0) \cdot Q(0)] =$$

$$= \phi\left(P(x)\right) \cdot \phi\left(Q(x)\right)$$

А значит это действительно гомоморфизм.

1) Теперь нужно показать, что ядро будет (x^2-x), т.е $\operatorname{Ker} \phi = (x^2-x)$. [Ты попросил поподробнее делать такое и показывать включение в обе стороны, поэтому делаю так]

В одну сторону:

$$P(x) \in \operatorname{Ker}\phi$$

Т.е:

$$\phi(P(x)) = (0,0)$$
$$(P(1), P(0)) = (0,0)$$

Из следствия теоремы Безу (спс конспекту, вообще забыл про это) получаем, что многочлен делится на $(x-1)$ и на $(x-0)=x$, а значит делится и на $x(x-1) = x^2-x$. Отсюда:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2-x)$$

Таким образом:

$$P(x) \in (x^2-x)$$
$$\operatorname{Ker}\phi \subseteq (x^2-x)$$

В другую сторону:

$$\text{Пускай } P(x) \in (x^2-x)$$

Тогда:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2-x)$$
$$\phi(P(x)) = (P(1), P(0)) = (Q(1)\cdot(1-1), Q(0)\cdot(0-0)) = (0,0)$$

Т.е:

$$P(x) \in \operatorname{Ker}\phi$$
$$(x^2-x) \subseteq \operatorname{Ker}\phi$$

По итогу доказали в две стороны, а значит:

$$\operatorname{Ker}\phi = (x^2-x)$$

2) Теперь покажем, что Im $\phi = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

В одну сторону по определению образа (Im $\phi \subseteq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$)

В другую:

$$\text{Пускай } (a, b) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

Найдется такой многочлен P, который перейдет в (a, b). a есть значение многочлена в единице, b есть значение многочлена в нуле. Тогда многочлен будет иметь вид $(a - b) \cdot x + b$. В нуле он равен b, в единице $a - b + b = a$.

Значит:

$$(a, b) \in \text{Im}\phi$$

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \subseteq \text{Im}\phi$$

$$\text{Im } \phi = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

Теперь применяем теорему о гомоморфизме и получаем:

$$C[x] \ / \ \text{Ker } \phi \cong \text{Im } \phi$$

$$C[x] \ / \ (x^2 - x) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

Ч.Т.Д