Математические структуры, контрольная работа, вариант H

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

3 ноября 2022 г.

Номер 1

Пускай:

- a – счастливый билет
- b – хорошо подготовился
- c – экзамен успешно сдал

Тогда наше выражение в таком языке будет иметь вид:

$$(((a \vee b) \to c) \wedge (\neg b \to \neg c)) \to (\neg c \to \neg a)$$

Проверим, может ли следствие быть ложным, это единственный случай, когда вся формула станет ложной, т.е мы хотим:

$$\begin{cases} ((a \vee b) \to c) \wedge (\neg b \to \neg c)) = 1 \\ (\neg c \to \neg a) = 0 \end{cases}$$

Из правой части однозначно получаем:

$$\begin{cases} ((a \vee b) \to c) \wedge (\neg b \to \neg c)) = 1 \\ (c \vee \neg a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((a \vee b) \to c) \wedge (\neg b \to \neg c)) = 1 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Теперь подставим значения в первое выражение:

$$((1 \vee b) \to 0) \wedge (\neg b \to \neg 0)) = 1$$

$$(1 \to 0) \wedge (\neg b \to 1) = 1$$

В левой скобке однозначно 0, значит получаем:

$$0 = 1$$

Что неверно, приходим к противоречию, значит случая $1 \to 0$ не может быть, следовательно заключение является логическим следствием конъюнкции посылок

Ответ: да, является

Номер 2

$$((q \land r) \to p) \to \neg(p \land q)$$

$$\neg(\neg(q \land r) \lor p)) \lor \neg(p \land q)$$

$$\neg(\neg q \lor \neg r \lor p) \lor (\neg p \lor \neg q)$$

$$(q \land r \land \neg p) \lor \neg p \lor \neg q$$

Ответ: $(q \land r \land \neg p) \lor \neg p \lor \neg q$

Номер 3

$$
\dfrac{
  \dfrac{\overbrace{p, q \Rightarrow q}^{\text{аксиома}}}{p, \neg q, q \Rightarrow}\,(\neg L)
  \quad ; \quad
  \dfrac{\dfrac{\overbrace{p \Rightarrow p, q}^{\text{знаем, что можно + аксиома}}}{p \Rightarrow q, p}}{p, \neg q \Rightarrow p}\,(\neg L)
}{
  \dfrac{p \to q, p, \neg q \Rightarrow}{
    \dfrac{p \wedge \neg q, p \to q \Rightarrow}{p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \to q)}\,(\neg R)
  }\,(\wedge L)
}\,(\to L)
$$

Номер 4

Докажем, что не является:

Пусть:

$$M, x \not\models \neg(p \to q) \to (p \land \neg q)$$

Т.е хотим $\exists y : x \preceq y$

$$\begin{cases} y \models \neg(p \to q) \\ y \not\models (p \land \neg q) \end{cases}$$

Разберемся сначала со вторым выражением, хотим $\exists y' : y' \preceq y$, что $y' \not\models p$ или $y' \not\models \neg q \equiv y' \models q$.

Теперь для первого выражения хотим: $\exists z : y \preceq z$, что:

$$\begin{cases} z \models p \\ z \not\models q \end{cases}$$

Построили опровергающаю модель Крипке, но **не** получили в ней противоречий, следовательно формула **не** является интуиционисткой тавтологией.

Ч.Т.Д

Номер 5

$$\neg\neg\neg p \to \neg p$$

Пусть:

$$M, x \not\models \neg\neg\neg p \to \neg p$$

Тогда: $\exists y : x \preceq y$, что:

$$\begin{cases} y \models \neg\neg\neg p \\ y \not\models p \to \bot \end{cases}$$

Для второго: $\exists z : y \preceq z$:

$$z \models p$$

Для первого:

$$y \models \neg\neg p \to \bot$$

$$y \not\models \neg\neg p$$

$$y \not\models \neg p \to \bot$$

Тобишь $\exists s : y \preceq s$:

$$s \models \neg p$$

Для $z : z \models p$, для $s : s \models \neg p$, посмотрим, будет ли противоречие.

Заметим, что :

$$p \models \neg\neg p \text{ есть и-тавтология}$$

Следовательно замечаем:

$$z \models \neg\neg p$$

Но в y:

$$y \not\models \neg\neg p$$

Тогда:

$$z \models \bot$$

Получили **противоречие**, значит исходная формула является и-тавтологией

Ч.Т.Д