Матан, дз – 7

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

9 ноября 2021 г.

Номер 1

Хотим выразить формулу для:

$$\mu(A \cap B \cap C)$$

Из конспекта знаем:

$\boxed{3}$ Если мера μ определена на кольце, то справедлива *формула включения-исключения*:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

$\Diamond$ Во-первых, $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$, а во-вторых, $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$. $\blacklozenge$

Из этой формулы можно получить формулу включения-исключения для трех множеств в двух вариантах: для объединения и для пересечения.

$\boxed{4}$ Докажите, что

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \\ + \mu(A \cap B \cap C),$$
$$\mu(A \cap B \cap C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cup B) - \mu(A \cup C) - \mu(B \cup C) + \\ + \mu(A \cup B \cup C).$$

Будем идти аналогично док-ву для двух множеств и использовать определение $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$, посмотрим на объединение и воспользуемся формулой включений-исключений для двух множеств:

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu((A \cup B) \sqcup [C \setminus (A \ \cup \ B)]) = \mu(A \cup B) + \mu(C \setminus (A \cup B)) =$$
$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(C \setminus (A \ \cup \ B)) =$$

На семинаре делали $\mu(A \setminus B)$

$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(C) - \mu(C \cap (A \cup B)) =$$
$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(C) - \mu((C \cap A) \cup (C \cap B))$$

Раскроем $\mu((C \cap A) \cup (C \cap B))$ как формулу включений-исключений:

$$\mu((C \cap A) \cup (C \cap B)) = \mu(C \cap A) + \mu(C \cap B) - \mu(C \cap A \cap C \cap B) =$$
$$= \mu(A \cap C) + \mu(C \cap B) - \mu(A \cap B \cap C)$$

Возвращаемся к исходной формуле:

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(C) - \mu(A \cap C) - \mu(C \cap B) + \mu(A \cap B \cap C) =$$
$$= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$$

Получили то, что хотели, теперь выразим пересечения (перенесем на другую сторону:):

$$\mu(A \cap B \cap C) = \mu(A \cup B \cup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C)$$

Теперь можем представить формулу в том виде, который присутствует в конспекте под пунктом 4 (не знаю зачем, но пусть будет), из формулы включений-исключений для 2 элементов знаем:

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B)$$

Тогда:

$$\mu(A \cap B \cap C) = \mu(A \cup B \cup C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) + \mu(A) + \mu(B) -$$
$$-\mu(A \cup B) + \mu(A) + \mu(C) - \mu(A \cup C) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cup C) =$$
$$= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cup B) - \mu(A \cup C) - \mu(B \cup C) + \mu(A \cup B \cup C)$$

Ответ:

$$\mu(A \cap B \cap C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cup B) - \mu(A \cup C) - \mu(B \cup C) + \mu(A \cup B \cup C)$$

Номер 2

Пусть:

$$A_1, A_2 - \text{ измеримы}$$

$$E_1 \supseteq A_1$$

$$E_2 \supseteq A_2$$

$$A_1 \cap A_2 \subseteq E_1 \cap E_2$$

Тогда:

$$(E_1 \cap E_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \subseteq (E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)$$

Пусть:

$$E_1 \cap E_2 = E$$

$$A_1 \cap A_2 = A$$

Получаем:

$$\overline{\mu}(E \setminus A) \leq \overline{\mu}\left((E_1 \backslash A_1) \cup (E_2 \backslash A_2)\right) \leq \overline{\mu}(E_1 \backslash A_1) + \overline{\mu}(E_2 \backslash A_2)$$

Знаем из условия, что A_1 и A_2 измеримы, тогда можем положить:

$$\overline{\mu}(E_1 \backslash A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overline{\mu}(E_2 \backslash A_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Итого:

$$\overline{\mu}(E \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Смогли предоставить ε, тогда по определению множество $A_1 \cap A_2$ является измеримым множеством

Ч.Т.Д