Матан, дз – 3

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

1 февраля 2022 г.

Номер 1

1. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx$$

$$a)\ p \in (0, +\infty), \quad b)\ p \in [p_0, +\infty),\ p_0 > 0$$

a)

Воспользуемся методом граничной точки, подставим $p = 0$ и получим:

$$\int_0^\infty e^{-0x} \sin x dx = \int_0^\infty \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\infty$$

Этот интеграл расходится, значит по методу граничной точки несобственный интеграл не может сходиться равномерно

b)

Воспользуемся методом Вейерштрасса, начнем зажимать нашу функцию. Во первых $|\sin x| \leq 1$, во вторых e^{-px} убывает, значит можем зажать левой границей для p, т.е p_0:

$$\left|e^{-px} \sin x\right| \leq \left|e^{-px} \cdot 1\right| \leq e^{-px} \leq e^{-p_0 x}$$

Смогли ограничить, теперь посмотрим на интеграл от этой функции:

$$\int_0^\infty e^{-p_0 x} dx = \left(-\frac{e^{-p_0 x}}{p}\right)\Bigg|_0^\infty = 0 + \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_0}$$

Интеграл сходится, значит по признаку Вейерштрасса наш несобственный интеграл сходится равномерно

Ответ: а) расходится, б) сходится

Номер 2

2. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^p} dx$$

$$a)\ p \in (0, +\infty), \quad b)\ p \in [p_0, +\infty),\ p_0 > 0$$

a)

Делаем аналогично первому номеру, берем граничную точку $p = 0$ и получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{2}$$

Интеграл расходится, значит несобственный интеграл не может сходиться равномерно

b)

Тут хорошо можно разбить на две функции, пусть:

$$f = \cos x, g = \frac{1}{1+x^p}$$

Теперь анализируем функции, попробуем по Дирихле посмотреть:

$$\forall A > 0\ :\ \left|\int_0^A \cos x dx\right| = \left|\sin x\Big|_0^A\right| = |\sin A - 0| = |\sin A| \leq 1$$

Теперь проверяем условия для g, для проверки монотонности посмотрим на производную:

$$g' = -\frac{p \cdot x^{p-1}}{(1+x^p)^2}$$

Производная отрицательная, значит g монотонно убывает. Далее смотрим $\rightrightarrows$ (супремум будет в p_0 (слева) из-за убывания функции):

$$\sup_{[p_0,+\infty]} \left|\frac{1}{1+x^p}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{?} 0$$

$$\sup_{[p_0,+\infty]} \left|\frac{1}{1+x^p}\right| = \lim_{x\to+\infty} \left|\frac{1}{1+x^{p_0}}\right| = 0$$

Отсюда:

$$g \overset{[p_0,+\infty]}{\rightrightarrows} 0, x \to +\infty$$

Выполняются все условия для признака Дирихле, а значит есть равномерная сходимость

Ответ: а) расходится, б) сходится

Номер 3

3. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(p^2 x)}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{arctg}(px)dx, \quad p \in [1, +\infty)$$

Опять разбиваем на две функции, пусть:

$$f = \frac{\sin(p^2x)}{\sqrt[3]{x^2}}, g = \operatorname{arctg}(px)$$

f достаточно сложная, попробуем по Абелю, сначала разберемся с более простой функцией g, g ограничена (ибо это арктангенс), ну и монотонна (ибо это арктангенс). Теперь будем смотреть на f, её тоже разобьем на две функции:

$$f_1 = \sin(p^2x), f_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\forall A > 1 \ : \ \left|\int_1^A \sin(p^2x) \cdot \frac{1}{p^2}\right| = \big[p \in [1, +\infty)\big] = \left|-\cos(p^2x)\Big|_1^A\right| \leq |1+1| = 2$$

f_2 монотонно убывает по x. В пределе имеем 0, значит есть равномерная сходимость. По итогу f сходится равномерно по признаку Дирихле. Теперь суммируем все полученное и по признаку Абеля получаем, что наш исходный несобственный интеграл сходится равномерно

Ответ: сходится

Номер 4

4. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+(x-p)^4}, \quad p \in [0, +\infty)$$

Колесниченко сказала, что в дз где-то будет признак Коши, значит юзаем признак Коши:

Критерий Коши

Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = F(y)$ сходится. Тогда этот НИЗП сходится равномерно на $[c,d]$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A \geq a \; \forall A_1, A_2 > A, \; \forall y \in [c,d] \quad \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Делаем аналогично 3му номеру с сема. Хотим сделать числитель минимальным, знаменатель максимальным. Тогда в числитель нужно подставлять A_1, а в знаменатель что подставлять непонятно. Тогда условимся, что $(A_1 - p)^4 > (A_2 - p)^4$, чтобы не рассматривать два аналогичных случая (в силу возможности выбора p, A_1, A_2 там всё будет также):

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{xdx}{1+(x-p)^4} \right| \geq \frac{A_1}{1+(A_1-p)^4} \int_{A_1}^{A_2} dx = \frac{A_1}{1+(A_1-p)^4}(A_2 - A_1) =$$

Аналогично сему берем $A_2 = 2A_1$:

$$= \frac{A_1}{1+(A_1-p)^4} A_1 =$$

Теперь берем $p = A_1$:

$$= \frac{A_1^2}{1+(A_1-A_1)^4} = \frac{A_1^2}{1} = A_1^2$$

Тогда берем отрицание Коши:

$$\forall A_0 > 0 \; \exists \; A_1, A_2 = 2A_1 > A_0 \; \exists \; p = A_1 : \left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{xdx}{1+(x-p)^4} \right| \longrightarrow \infty$$

А значит нет равномерной сходимости

Ответ: расходится