Бурмашев Григорий. Дискра – 10

Номер 2

Пусть у нас множества A и B – это множество натуральных чисел (1, 2, 3, ...) заданы такие функции f и g:

$$f : x \to x + 1$$

$$g : x \to x - 1$$

Функция g не определена в точке x = 1, т.к переводит нас в 0, что выходит за рамки натуральных чисел. При этом все еще $g \circ f = id$

Ответ: нет, неверно

Номер 3

Наша функция f x_1 переводит в x_2, а x_2 переводит в x_1. А значит у нас образуются пары (чтобы получилась id). А значит элементов, которые переходят сами в себя, может быть 1, 3, 5 или все 7 (чтобы была возможность оставшимся образовать пары). Рассмотрим все возможные случаи:

- Если 1 элемент неподвижен:

  Тогда оставшиеся 6 элементов образуют пары, подсчитаем все возможные случаи:

  $$\frac{\frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{2\cdot1}{2}}{3!} = 15$$

  Итого:

  $$15 \cdot 7 = 105$$

- Если 3 элемента неподвижны:

  Тогда оставшиеся 4 элемента разбиваются на пары:

  $$C_7^3 \cdot 3 = \frac{7!}{3!4!} \cdot 3 = 35 \cdot 3 = 105$$

- Если 5 элементов неподвижны:

  Тогда оставшиеся 2 элемента разбиваются на пары:

  $$C_7^5 \cdot 1 = 7 \cdot 3 = 21$$

- Если у нас все 7 элементов неподвижны:

  Тогда всего 1 возможный случай.

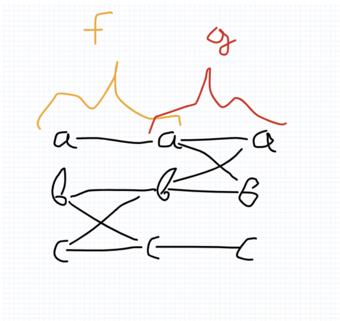
  В таком случае итого:

$$105 + 105 + 21 + 1 = 232$$

Ответ: 232 варианта

Номер 4

Можно привести пример:



Рассмотрим f:

$$a \sim a$$
$$b \sim c$$
$$c \sim b$$
$$b \sim b$$
$$c \sim c$$

Рассмотрим g:

$$a \sim a$$
$$a \sim b$$
$$b \sim a$$
$$b \sim b$$
$$c \sim c$$

Значит f и g – отношения эквивалентности.

При этом в композиции (это видно на рисунке):

$c \sim a$. Но $a \nsim c$. А значит композиция отношений эквивалентности не всегда есть отношение эквивалентности.

Ответ: нет

Номер 5

У нас множество $\{1, 2, 3, 4\}$. Переберем все возможные случаи, чтобы сохранялось отношение эквивалентности.

- Нет пар (биекция $a \sim a \ \forall a \in \{1, 2, 3, 4\}$)

  Всего 1 единственный случай

- 1 пара эквивалентности ($a \sim b$).

  Ее можно выбрать:
  $$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ способами}$$

- 2 пары эквивалентности, которые не пересекаются ($a \sim b, a' \sim b'$).

  Их можно выбрать:
  $$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ способами}$$

- 3 пары эквивалентности, но с пересечениями (например $a \sim b, b \sim c, c \sim a$)

  Их всего у нас:
  $$4 \cdot 3 = 12 \text{ способами}$$

- Если все эквивалентны друг другу:

  Всего 1 единственный случай

- Итого:
  $$1 + 6 + 6 + 12 + 1 = 26$$

Ответ: 26

Номер 6

а) По определению симметричности:

если $a \sim b$, то $b \sim a$. Очевидно, что у нас должно быть четное число таких пар (иначе какого-то $b \sim a$ будет не хватать). Но у нас 33 пары. А поскольку 33 нечетно, то такого быть не может

Ответ: нет

Номер 7

а) У чисел x и y одинаковая последняя цифра.

Проверяем условия отношения эквивалентности:

1) $a \sim a$ очевидно (a и a заканчиваются на одно и тоже число a')

2) Пусть число a заканчивается на a', а число b заканчивается на b'. Если $a \sim b$. Из этого автоматически следует, что $a' = b'$. А значит $b \sim a$.

3) Пусть число a заканчивается на a', число b заканчивается на b', а число c заканчивается на c'. Если $a \sim b$, то $a' = b'$. А если при этом $b \sim c$, то значит $b' = c'$. Ну а отсюда мы тогда получаем, что $a' = c'$ и $a \sim c$.

Ответ: да

б) Числа x и y отличаются ровно в одном месте.

Можно привести контрпример:

Пусть есть числа a = 12 и b = 13. Они различатся ровно в одном месте (2 и 3). А значит $a \sim b$. Введем еще одно число c = 43. Оно отличается от b ровно в одном месте (1 и 4), т.е $b \sim c$. Но при этом a отличается от c в обоих позициях, т.е $a \nsim c$. А значит транзитивность не выполнена и они не являются отношениями эквивалентности.

Ответ: нет

в) Разность между суммами цифр чисел x и y четна.

Проверяем услвоия отношения эквивалентности:

1) Разность суммы чисел двух одинаковых цифр равна нулю (a - a = 0), значит $a \sim a$

2) Разность суммы чисел двух цифр в любом порядке по модулю одинакова (|a - b| = |b - a|), значит $a \sim b \to b \sim a$.

3) Пусть есть три числа a, b и c. Пусть разность a - b = 2x. А разность b - c = 2x'. Т.е $a \sim b$ и $b \sim c$. Тогда a - c = a - b + b - c = 2x - 2x' = 2(x - x'). Это тоже является четным числом, а значит $a \sim c$.

Ответ: да

Номер 8

Рассмотрим всевозможные случаи удаления ребер:

- Пусть мы удалили ребро между вершинами степеней 3 и 4. Тогда у нас появилась 1 вершина степени 2 и 1 новая вершина степени 4. Но вершин степени 2 у нас вообще не было $\to$ изоморфности не будет

- Пусть мы удалили ребро между вершинами степени 3. Тогда у нас останется 8 - 2 = 6 вершин степени три. И в каждой из компонент связности будет по 3 вершины степени три. Ну а значит сумма степеней вершин будет нечетна и изоморфности не будет.

- Пусть мы удалили ребро между вершинами степени 4. Тогда у нас будет $8 + 2 = 10$ вершин степени три. И в каждой из компонент связности будет по 5 вершин степени три. Ну а значит сумма степеней вершин будет нечетна и изомфорности не будет

  Других случаев удаления ребер у нас нет.

Ответ: Ч.Т.Д