Бурмашев Григорий, 208. Матан. Д/з - 1

1 Задача 8

Вычислите сумму:

а)

$$S = \frac{1}{1 \times 5} + \frac{1}{5 \times 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

Можно заметить, что:

$$\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4(4n-3)} - \frac{1}{4(4n+1)} = \frac{4n+1-(4n-3)}{4(4n-3)(4n+1)} =$$
$$= \frac{4}{4(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

Представим всю нашу сумму в виде таких разностей, умноженных на $\frac{1}{4}$ Тогда:

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}) \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{9}) \times \frac{1}{4} + \ldots + (\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}) \times \frac{1}{4}$$

Вынесем общий множитель $\frac{1}{4}$ за скобки:

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \ldots - \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

Все множители внутри скобок, кроме первого и последнего, сокращаются:

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4(4n+1)}$$

$$\frac{4n+1-1}{4(4n+1)}$$

$$\frac{n}{4n+1}$$

Ответ: $\frac{n}{4n+1}$

б)

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}$$

Представим сумму в виде $S = 2S - S$, чтобы избавиться от "...":

$$S = 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}) - \\ - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n})$$

$$S = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \\ - \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} - \frac{5}{2^3} - \ldots - \frac{2n-1}{2^n}$$

Вычтем попарно множители (кроме первого и последнего) и получим:

$$S = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

Применим формулу суммы геометрической последовательности для ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots +$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}} :$$

$$S = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$S = 3 - \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$S = 3 - \frac{2n-3}{2^n}$$

$$S = \frac{3 \times 2^n - 2n - 3}{2^n}$$

Ответ: $\frac{3 \times 2^n - 2n - 3}{2^n}$

2 Задача 9

Применяя метод математической индукции, докажите, что:

а)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

База:

Пусть $n = 1$, тогда:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$$

$$1 = \frac{6}{6}$$

$$1 = 1$$

Верно

Переход:

Докажем, что это верно для $n + 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$(n^2+n)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6 = (n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6 = (n^2+3n+2)(2n+3)$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = 2n^3 + 6n^2 + 4n + 3n^2 + 9n + 6$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$$

Ч.Т.Д

б)

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, n \geq 2$$

База:

Пусть n = 2, тогда:

$$\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad | \times \sqrt{2}$$

$$2 < \sqrt{2} + 1 < 4$$

$$1 < \sqrt{2} < 3$$

$$1 < 2 < 9$$

Верно

Переход:

Докажем, что это верно для $n+1$:

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

Сначала докажем нижнюю границу:

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Т.к мы считаем, что неравенство выполняется для n, то прибавим к нему $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Нужно доказать, что:

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{n+1} < \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1}}$$

$$n+1 < \sqrt{n} \times \sqrt{n+1} + 1$$

$$n < \sqrt{n} \times \sqrt{n+1}$$

$$n^2 < n(n+1)$$

$$n^2 < n^2 + n$$

$$0 < n$$

Т.к $n \geq 2$,то неравенство выполняется

ч.т.д

Теперь, аналогично (прибавляя к исходному неравенству) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

докажем верхнюю границу:

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$
$$\frac{2\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

$$2\sqrt{n(n+1)}+1 < 2n+2$$
$$2\sqrt{n^2+n} < 2n+1$$
$$\sqrt{n^2+n} < n+0.5$$
$$n^2+n < n^2+n+0.25$$
$$0 < 0.25$$

ч.т.д

Мы доказали как верхнюю, так и нижнюю границу, значит все неравенство верно.

Ч.Т.Д