Матан, дз – 4

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

5 октября 2021 г.

Номер 1

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}$$

Проверяем для начала необходимое условие сходимости:

$$a_n = \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Переходим к рассмотрению обычного ряда:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1} \underset{\text{сход}}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}\right)$$

Приведем к виду $\ln(1+x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\left(-\frac{2n-1}{n^2+3n+1}\right)\right)$$

$\frac{2n-1}{n^2+3n+1} = \frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} \to 0$, поэтому имеем право представить сумму в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n-1}{n^2+3n+1} + o\left(\frac{2n-1}{n^2+3n+1}\right)\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n-1}{n^2+3n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Заметим, что правый элемент в сумме сходится, нам нужно лишь проверить сходимость левой суммы $(-\frac{2n-1}{n^2+3n+1})$, для этого воспользуемся признаком Гаусса (пусть левая сумма будет $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$), тогда:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-\frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2+3(n+1)+1}}{-\frac{2n-1}{n^2+3n+1}} = \frac{(2n+1)\cdot(n^2+3n+1)}{((n+1)^2+3n+4)\cdot(2n-1)} = \frac{2n^3+7n^2+5n+1}{2n^3+9n^2+5n-5} =$$

$$= \frac{2+\frac{7}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{9}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{5}{n^3}} = \frac{1+\frac{7}{2n}+\frac{5}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}}{1+\frac{9}{2n}+\frac{5}{2n^2}-\frac{5}{n^3}} = \frac{1+\frac{7}{2n}+o(\frac{1}{n^2})}{1+\frac{9}{2n}+o(\frac{1}{n^2})} =$$

Привели к виду $\frac{a}{1+x}$, причем в данном случае $x \to 0$, а значит можем раскрыть как $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o\,(x)$

$$= \left(1+\frac{7}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1+1}}\right)$$

Получаем, что $p = 1, \delta = 1$, т.к $p \leq 1$, то по признаку Гаусса ряд **расходится** $\to$ и наше исходное бесконечное произведение **расходится**

Ответ: расходится

Номер 2

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}, D = [1; +\infty)$$

Заметим, что предельная функция f равна нулю, т.е будем смотреть на:

$$\left|\left|\frac{nx}{1+n^3x^2} - 0\right|\right| = \sup_{x\in D}\left|\frac{nx}{1+n^3x^2}\right|$$

Сделаем, как на семинаре, посмотрим на производную:

$$(f_n)' = \frac{n(1+n^3x^2) - 3n^2x^2 \cdot nx}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{n-2n^4x^3}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{n}{(1+n^3x^2)^2} \cdot (1-2n^3x^3)$$

$D = [1; +\infty)$, отсюда получаем, что производная меньше нуля и функция убывает, значит можем взять супремум как значение в точке $x = 1$, тогда:

$$\sup_{x\in D}\left|\frac{nx}{1+n^3x^2}\right| = \frac{n}{1+n^3} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+1} \to 0$$

По определению равномерной сходимости получаем, что последовательность **сходится равномерно**

Ответ: сходится равномерно