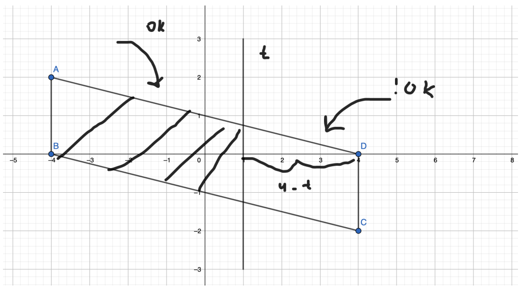
ТВиМС, дз – 8

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

25 ноября 2021 г.

Номер 1

Решим сначала отдельно для x_q, а потом для y_q, т.к вероятности различаются.



Разобьем на случаи, как обычно:

1. $t < -4$:

   Очевидный случай
   $$P(x_q \le t) = 0$$

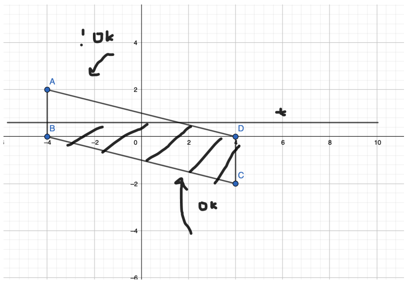
2. $t \in [-4, 4)$:

   Выберем точку t, все что справа от нее нам подходит, все что слева – нет (в рамках нашего параллелограмма), т.к стороны одинаковые, влияет лишь высота, у правого будет $4 - t$, а высота всего параллелограмма 8
   $$P(x_q \le t) = 1 - P(x_q > t) = 1 - \frac{S_{!ok}}{S_{ABCD}} = 1 - \frac{4-t}{8} = \frac{t+4}{8}$$

3. $t \ge 4$:

   Очевидный случай
   $$P(x_q \le t) = 1$$

Теперь решим для y_q аналогичным образом:



1. $t < -2$:

   Очевидный случай
   $$P(y_q \le t) = 0$$

2. $t \in [0, 2)$:

   Все аналогично ситуации с x, только теперь отделяем t по оси y. Нам подходит все, что не попадет в верхний треугольник. Тогда нашу вероятность можно посчитать как 1 минус вероятность того, что попало в верхний треугольник. А она в свою очередь равна вероятности попасть в треугольник ABD (а это ровно $\frac{1}{2}$), умноженной на отношение площадей верхнего треугольника к треугольнику ABD, т.е:

   $$P(y_q \le t) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{!ok}}{S_{ABD}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h_{!ok}}{h_{ABD}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 = 1 - \frac{(2-t)^2}{8}$$

3. $t \in [-2, 0)$:

   Задача зеркальная предыдущей, только теперь треугольник будет снизу, а мы хотим быть выше него, вероятность попасть в нижнюю часть параллелограмма также равна $\frac{1}{2}$, поэтому ответом будет просто дополнение предыдущей вероятности:

   $$P(y_q \le t) = \frac{(2-t)^2}{8}$$

4. $t \ge 2$:

   Очевидный случай
   $$P(y_q \le t) = 1$$

Номер 2

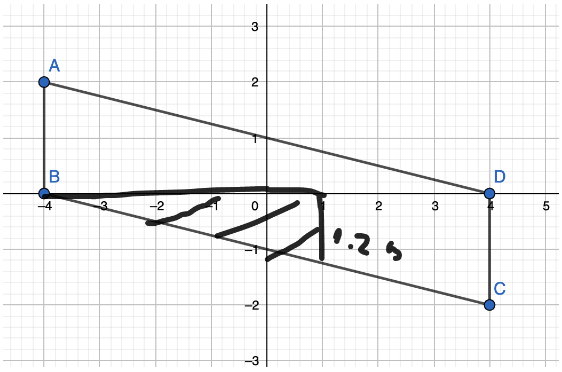
Для независимости по определению хотим $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

a) $P(x_q \leq 1), P(y_q \leq 0)$

$$P(x_q \leq 1) = \frac{1+4}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(y_q \leq 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(x_q \leq 1) \cdot P(y_q \leq 0) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$



$$P(x_q \leq 1 \cap y_q \leq 0) = \frac{S_{\text{треуг}}}{S_{ABCD}} = \frac{5 \cdot 1.25 \cdot \frac{1}{2}}{8 \cdot 2} = \frac{25}{128}$$

$$P(x_q \leq 1) \cdot P(y_q \leq 0) \neq P(x_q \leq 1 \cap y_q \leq 0)$$

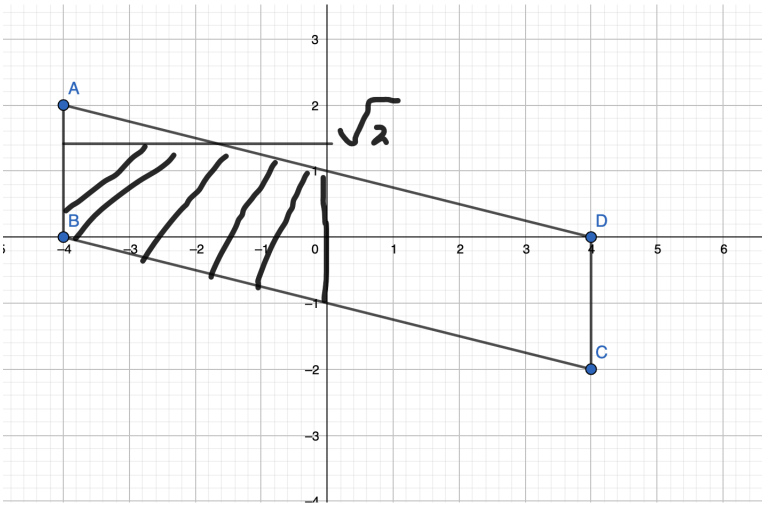
$\rightarrow$ **события зависимы**

b) $P(x_q \leq 0), P(y_q \leq \sqrt{2})$

$$P(x_q \leq 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(y_q \leq \sqrt{2}) = 1 - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{8} = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2\sqrt{2})$$

$$P(x_q \leq 0) \cdot P(y_q \leq \sqrt{2}) = \frac{1}{8} \cdot (1 + 2\sqrt{2})$$



$$P(x_q \leq 0 \cap y_q \leq \sqrt{2}) = 1 - \frac{S(\text{треугольник сверху})}{S_{ABCD}} - \frac{S(\text{половина параллел.})}{S_{ABCD}} =$$

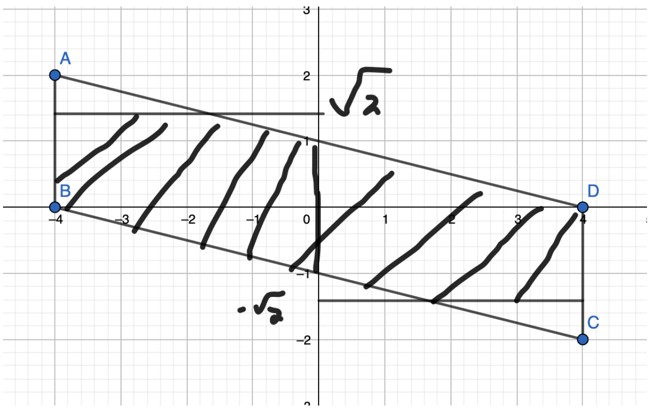
$$1 - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{8} - \frac{8}{16} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$= P(x_q \leq 0) \cdot P(y_q \leq \sqrt{2}) \neq P(x_q \leq 0 \ \cap \ y_q \leq \sqrt{2})$$

$\rightarrow$ **события зависимы**

c) $P(x_q \leq 0), P(|y_q| \leq 0)$

$$P(x_q \leq 0) = \frac{1}{2}$$



$$P(|y_q| \leq \sqrt{2}) = 1 - 2 \cdot \frac{(2-\sqrt{2})^2}{8} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}-1)$$

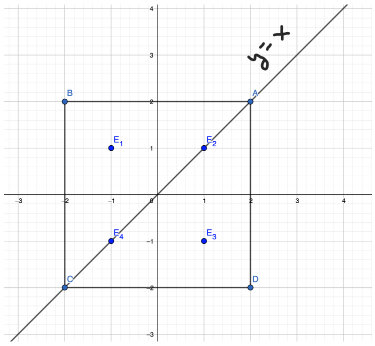
$$P(x_q \leq 0) \cdot P(|y_q| \leq \sqrt{2}) = \frac{1}{4}(2\sqrt{2}-1)$$

$$P(x_q \leq 0 \cap |y_q| \leq \sqrt{2}) = P(\text{аналогичная вероятность из пункта b}) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

$$P(x_q \leq 0) \cdot P(|y_q| \leq \sqrt{2}) = P(x_q \leq 0 \ \cap \ |y_q| \leq \sqrt{2})$$

$\rightarrow$ **события НЕзависимы**

Номер 3



a) $P(x_Q \leq y_Q | K = k)\ \forall\ k \in \{0, \dots 6\}$

Ну собственно считаем:

При $K = 1, 2, 4$ попадет в точки E_1, E_2, E_4 соотвественно ну и в треугольник ABC, при $K = 3$ попадет в E_3 и не попадет в треугольник ABC

$$P(x_Q \leq y_Q | K = 1) = 1$$
$$P(x_Q \leq y_Q | K = 2) = 1$$
$$P(x_Q \leq y_Q | K = 3) = 0$$
$$P(x_Q \leq y_Q | K = 4) = 1$$

При $K = 5$ попадем в случайную точку квадрата, а нам подходит ровно его верхняя половина

$$P(x_Q \leq y_Q | K = 5) = \frac{1}{2}$$

При $K = 6$ попадем в случайную точку отрезка E_1E_2, любая из точек этого отрезка будет в ABC

$$P(x_Q \leq y_Q | K = 6) = 1$$

b) $P(x_Q \leq y_Q), P(x_Q < y_Q)$

По формуле полной вероятности:

$$P(x_Q \leq y_Q) = \sum_{k=1}^{6} P(x_Q \leq y_Q | K = k) \cdot P(K = k) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^{6} P(x_Q \leq y_Q | K = k) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1 + 1 + 0 + 1 + \frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$$

Для $x_Q < y_Q$ нужно всего лишь исключить случаи попадания в крайние точки (E_2 и E_3), поэтому вероятности при $K = 2, K = 3$, будут равны нулю, вероятность при $K = 6$ не меняется, т.к у нас отрезок, получаем:

$$P(x_Q < y_Q) = \sum_{k=1}^{6} P(x_Q < y_Q | K = k) \cdot P(K = k) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^{6} P(x_Q < y_Q | K = k) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} + 1) = \frac{5}{12}$$