Матан, дз – 2

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

25 января 2022 г.

Номер 1

Исследовать семейство функций $f(x,y)$ на равномерную по y сходимость на указанном множестве:

$$f(x,y) = \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1}, y \in (0,+\infty), x \to 0+$$

Заметим:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} = 0$$

Предположим, что сходится к $g(y) = 0$, рассмотрим:

$$\sup_{(0,+\infty)} |f-g| \xrightarrow[x\to 0+]{?} 0$$

Берем частную производную:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2y^2+1)}$$

Частная производная больше нуля, функция возрастает, значит супремум будет при $y \to \infty$. Получаем:

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to+\infty}} \sup_{y\in(0,+\infty)} \left|\frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} - 0\right| = \lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to+\infty}} \left(\frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}(xy) \text{ ограничен} \\ \frac{x}{x+1} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0 \end{bmatrix} = 0$$

Предел равен нулю, а значит равномерная сходимость есть.

Ответ: равномерная сходимость есть

Номер 2

Исследовать семейство функций $f(x, y)$ на равномерную по y сходимость на указанном множестве:

$$f(x, y) = \frac{x \operatorname{arctg}(xy)}{x+1}, y \in (0, +\infty), x \to +\infty$$

Заметим:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \operatorname{arctg}(xy)}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{xy}{x^2y^2+1} + \operatorname{arctg}(xy)}{0+1} = \frac{\pi}{2}$$

Всё аналогично первому номеру, только теперь $g(y) = \frac{\pi}{2}$ и супремум работает по другому. Функция у нас возрастает (выяснили в первом номере). При устремлении $x \to \infty, y \to \infty$ мы получаем в пределе $\frac{\pi}{2}$. Тогда $|f(x, y) - \frac{\pi}{2}|$ будет минимален (а мы хотим его максимизировать по определению). Из-за этого понимаем, что супремум будет слева (т.е при $y \to 0$). Смотрим:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} \sup_{y \in (0, +\infty)} \left| \frac{x \operatorname{arctg}(xy)}{x+1} - \frac{\pi}{2} \right| = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} \left| \frac{x \operatorname{arctg}(xy)}{x+1} - \frac{\pi}{2} \right| =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}(xy) \underset{y \to 0}{\to} 0 \\ \frac{x}{x+1} \underset{x \to +\infty}{\to} 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Получили **не** ноль, значит равномерной сходимости нет

Ответ: равномерной сходимости нет

Номер 3

Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость (по определению):

$$\int_1^{+\infty} \frac{pdx}{1+p^2x^2}, p \in [1, p_0], p_0 > 1$$

Нас интересует предел:

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{[1,p_0]} \left| \int_A^{+\infty} \frac{pdx}{1+p^2x^2} \right| = 0?$$

Считаем:

$$\int_A^{+\infty} \frac{pdx}{1+p^2x^2} = \operatorname{arctg}(px)\Big|_A^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(pA)$$

Функция убывает, супремум будет достигаться слева. Теперь смотрим предел:

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{[1,p_0]} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(pA) \right| = \lim_{A\to+\infty} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(A) \right| = 0$$

Получили 0, значит есть равномерная сходимость

Ответ: равномерная сходимость есть

Номер 4

Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость (по определению):

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{pdx}{1+p^2x^2}, p \in [0, p_0], p_0 > 0$$

Аналогично предыдущему номеру нас интересует предел:

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{[0,p_0]} \left| \int\limits_A^{+\infty} \frac{pdx}{1+p^2x^2} \right| = 0?$$

Интеграл все тот же, считаем сразу:

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{[0,p_0]} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(pA) \right| = \lim_{\substack{A \to +\infty \\ p \to 0}} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(pA) \right| = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Получили **не** ноль, значит равномерной сходимости нет

Ответ: равномерной сходимости нет