Бурмашев Григорий, БПМИ-208

17 ноября 2022 г.

Номер 1

- Докажите, что существует неперечислимое множество, дополнение которого тоже неперечислимо

Для доказательства воспользуемся фактом существования неперечислимого множества. Возьмем некое неперечислимое подмножество натуральных чисел: $D \subset \mathbb{N}$. Тогда рассмотрим два подмножества $\mathbb{N}$, такие что:

1. $$A = \{2k : k \in D,\ 2k + 1 : k \notin D\}$$

2. $$B = \{2k : k \notin D,\ 2k + 1 : k \in D\}$$

Легко заметить, что $\mathbb{N} \setminus A = B$, поскольку $A \cup B = \mathbb{N}$ и $A \cup B = \emptyset$. Теперь нужно показать, что A и B – неперечислимы.

Предположим, что множество является перечислимым. Тогда будем перебирать все $2k : k \in D$, а оставшиеся элементы пропускать. Поделим эти элементы на два, мы получаем алгоритм перечисления множества D, но оно **неперечислимо**, значит и A также неперечислимо

Предположим, что множество B является перечислимым. Тогда будем перебирать все $2k + 1 : k \in D$, а оставшиеся элементы пропускать. Вычтем из каждого выбранного элемента единицу и после поделим на два, тогда мы снова получим алгорим перечисления множества D, но оно **неперечислимо**, значит и B также неперечислимо

В конце концов получаем, что мы смогли предоставить такое неперечислимое множество A, что его дополнение также является неперечислимым.

Ч.Т.Д

Номер 2