Матан, дз – 6

Бурмашев Григорий, БПМИ-208

22 февраля 2022 г.

Номер 1

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(4+x^2)^5}dx = \frac{1}{4^5}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\frac{x^2}{4})^5}dx = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{4} = t \\ x = 2\sqrt{t} \\ dt = \frac{x}{2}dx \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{t}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4^5}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{t}}}{(1+t)^5}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[6]{t}}{(1+t)^5}\frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\int\limits_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{(1+t)^5}dt = (\times)$$

Получили вид $B(p,q)$, но нужно найти сами p и q:

$$\begin{cases} p - 1 = -\frac{1}{3} \\ p + q = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} p = \frac{2}{3} \\ q = 5 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

Тогда:

$$(\times) = \frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{13}{3}\right)}{(5)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{4!} = \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\cdot\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}}{4!} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\frac{10\cdot 7\cdot 4}{3^4} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{5\cdot 7}{81\cdot 3}$$

Ответ:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{35}{243}$$

Номер 2

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ (a>0)$$

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int\limits_0^a x^2 a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \begin{bmatrix} \left(\frac{x}{a}\right)^2 = t \\ x = a\sqrt{t} \\ dt = \frac{2x}{a^2}dx \\ dx = \frac{a}{2\sqrt{t}}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^a a^3 t\sqrt{1-t}\frac{a}{2\sqrt{t}}dt = \frac{a^4}{2}\int\limits_0^a \sqrt{t}\sqrt{1-t}dt = (\times)$$

Получили опять $B(p,q)$, найдем коэффы:

$$\begin{cases} p-1=\frac{1}{2} \\ q-1=\frac{1}{2} \end{cases} \sim \begin{cases} p=\frac{3}{2} \\ q=\frac{3}{2} \\ p+q=3 \end{cases}$$

$$(\times) = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} = \frac{a^4}{2}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^4}{2^4}\cdot\pi$$

Ответ:

$$\frac{a^4}{16}\cdot\pi$$

Номер 3

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^p e^{-x^q} dx$$

Около нуля экспонента ведет себя как единичка, значит:

$$f \sim x^p = \frac{1}{x^{-p}} \to -p < 1 \to p > -1$$

На бесконечности экспонента все сьест и:

$$|f| \leq e^{\frac{-x^q}{2}}, q > 0$$

Такой интеграл будет сходится. При $q = 0$ получаем интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^p dx$$

Ну а этот интеграл расходится. Заменяем $x^q = t$ и получам:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^p e^{-x^q} dx = \begin{bmatrix} x^q = t \\ x = t^{\frac{1}{q}} \\ dt = qx^{q-1}dx \\ dx = \frac{1}{qx^{q-1}}dt \end{bmatrix} = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{p}{q}} e^{-t} \frac{1}{qt^{\frac{q-1}{q}}} dt = \frac{1}{q} \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{p}{q}} \cdot e^{-t} \cdot q^{\frac{1-q}{q}} dt =$$

$$= \frac{1}{q} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{p-q+1}{q} dt} = \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

Ответ:

$$\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right), \ \ p > -1, \ q > 0$$

Номер 4

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx$$

Тангенс мешает, избавимся от него заменой:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p dx = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\infty} \frac{t^p}{1+t^2} dt$$

Получили номер 1 в 1 аналогичный номеру 5 с семинара, только в знаменателе вместо q двойка. Тогда смотрим. Около нуля:

$$f \sim t^p = \frac{1}{x^{-p}} \to p > -1$$

На бесконечности:

$$f \sim x^{p-2} \to p - 2 < -1 \to p < 1$$

Итого:

$$-1 < p < 1$$

Заменим $x^2 = u$:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^p}{1+t^2} dt = \begin{bmatrix} t^2 = u \\ t = \sqrt{u} \\ 2tdt = du \\ dt = \frac{1}{u} dt \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{\frac{p}{2}}}{1+u} \cdot \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{\frac{p-1}{2}}}{1+u} du = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin\left(\pi \frac{p+1}{2}\right)}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{2 \sin\left(\pi \frac{p+1}{2}\right)}, -1 < p < 1$$