Бурмашев Григорий. 208. Дискра – 7

Номер 1

Можно привести пример, когда это не выполняется:

Построим граф на 3 вершинах и соединим их так, чтобы получился треугольник. Степень каждой вершины этого графа равна двум, при этом он не 2-раскрашиваемый (апример потому что в нем есть цикл длины 3, т.е нечетный).

Ответ: нет

Номер 2

Всего у нас 2n вершин. Граф является 2-раскрашиваемым, если длины всех циклов в нем четные. Но мы знаем, что в дереве вообще нет циклов. Следовательно дерево является 2-раскрашиваемым графом. Раскрасим наше дерево в 2 цвета. Как минимум в один из двух цветов будет покрашено n вершин. Ибо если вершин каждого из цветов меньше n, то и всего у нас меньше 2n вершин, что противоречит условию. Т.е мы выберем n вершин одного цвета, что по определению и является независимым множеством (ни одна пара не соединена ребром) $\rightarrow$ мы сможем выбрать независимое множество из n вершин.

Номер 3

- При n = 2:

  Мы получаем квадрат, который невозможно расскрасить в 3 цвета. 1 из вершин квадрата будет соединена сразу с 3мя другими вершинами (2 соседа и 1 противоположная). При этом соседи тоже соединены друг с другом. Значит какой-то из трех цветов точно пересечется, т.к всего у нас 3 цвета и нам понадобится добавить 4й цвет.

- Если n – нечетно:

  Мы сможем построить такой граф на 2 цветах. Четные вершины раскрасить в цвет A,нечетные – в цвет B. Противоположные вершины будут разной четности и ребра соединят два разных цвета. Значит можно просто взять одну вершину и покрасить ее в цвет

C. Сосед слева будет либо цвета A, либо цвета B. Аналогично с соседом справа и с противоположной вершиной.

- Если n – четное и не равно двум:

  Тогда возможен следующий вариант раскраски. Берем 3 цвета: A, B, C. Первые n вершин красим в цвета A, B по порядку (т.е A, B, A, B ...). n+1 вершину красим в цвет C. Вершины с n+1 по 2n-1 красим аналогично первым n вершинам (A, B, A, B, A, B, ...). Вершину 2n покрасим в C. Тогда первая вершина соединится с вершиной цвета C (n+1). n-1 вершина соединится с вершиной цвета C (2n). А оставшиеся вершины будут соединяться чередованием по аналогии с примером для нечетного n (вершина цвета A соединится с вершиной цвета B и наоборот).

- n = 1 мы не рассматриваем, т.к в таком случае у нас будет всего 2 вершины и раскрасить их в 3 цвета с использованием всех цветов невозможно.

Ответ: при любых n, кроме 2 (и 1)

Номер 6

У нас 10 чисел, значит у нас всего 10 позиций, куда мы их можем поставить. Всего у нас 9 способов поставить два числа рядом (1 и 2 позиции, 2 и 3 позиции, 3 и 4 позиции и т.д). Но мы можем менять минимум и максимум местами, т.к это два разных числа, следовательно количество способов умножается на два. После расстановки этих двух чисел у нас останется еще 8 позиций, на каждую из которых можно расставлять оставшиеся числа без повторений. Всего 8! способов.

Итого:
$8! \cdot 9 \cdot 2 = 9! \cdot 2 = 362880 \cdot 2 = 725760$

Ответ: 725760

Номер 7

С нуля число начинаться не может. А если ноль стоит не на первой позиции, то цифры идут уже не в порядке возрастания. Значит у нас есть последовательность цифр:

$$123456789$$

Нам нужно посчитать все способы выбрать 4 цифры из этой последовательности. Из 9 цифр выбрать 4 можно:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{\cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3024}{24} = 126$$

Ответ: 126

Номер 8

Чтобы четные числа шли в порядке возрастания, их нужно записать единственным способом:

02468

А чтобы нечетные числа шли в порядке убывания, их нужно также записать единственным способом:

97531

Всего у нас 10 чисел, а значит 10 позиций. Расставим наши нечетные числа: это будет число сочетаний из 10 по 5, т.е:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

z Ну а раз мы расставили наши нечетные числа, то для четных чисел остается всего 5 позиций, в которые они встают единственным образом (02468)

Ответ: 252

Номер 9

В n-угольнике у нас $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей. Всего способов выбрать 2 различных диагонали у нас:

$$\left(\frac{n(n-3)}{2} \cdot \left(\frac{n(n-3)}{2} - 1\right)\right) : 2 =$$

$$\frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}$$

Но в условии сказано, что диагонали не должны пересекаться во внутрениих точках. Если 2 диагонали пересекаются, то их вершинки образуют четырехугольник. Значит из всех n вершин нужно удалить случаи сочетаний 4х вершинок, т.е C_n^4:

$$C_n^4 = \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Тогда итого диагоналей у нас:

$$\frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} =$$

$$= \frac{n(n-3)\left(3(n^2-3n-2) - (n-1)(n-2)\right)}{24} =$$

$$= \frac{n(n-3)2(n^2-3n-2)}{24} = \frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{12}$$

Ответ: $\frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{12}$