Бурмашев Григорий. 208. Дискра - 4

1.

Т.к сумма степеней равна 20, то в графе у нас 10 ребер. Если мы возьмем 4 вершины, то максимально будет $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ ребер. Этого недостаточно, значит нужно взять 5 вершин, при этом мы получим $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ребер

Ответ: 5 вершин

2.

У нас есть вершина степени 1, у нее всего 1 ребро. Тогда у нас остается $8 - 1 = 7$ вершин и $23 - 1 = 22$ ребра. Но при 7 вершинах возможно максимум $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ ребро. Мы получили противоречие $\to$ это невозможно

Ответ: нет

3.

Независимое множество – такое множество, в котором вершины не являются попарно смежными. В нашем случае это означает множество, в котором цифры у элементов не совпадают. Например: множество вида

$$A = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$$

Его размер - 10. Никакой другой элемент в A мы добавить не можем, иначе мы используем цифру, которая уже есть в каком-то из элементов A и получим уже не независимое множество. Таким образом, максимальный размер независимого множества – 10

Ответ: 10

4.

Всего двочных слов длины n $= 4$ у нас: $2^4 = 16$. Т.е в Q_4 всего 16 вершин

При первом переходе (т.е при пути длины 1) мы можем инвертировать любую из 4х цифр двоичного слова. А при втором переходе (т.е уже при пути длины 2) мы можем инвертировать только 1 из трех оставшихся цифр (т.к по определению булевого куба можно инвертировать бит только в одной позиции). Всего у нас $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ комбинаций переходов.

Итого для всего куба у нас должно быть $2^4 \cdot 6 = 96$ путей. Но т.к Q_n есть граф неориентированный, то мы должны выкинуть лишние случаи, (т.к путь из А в Б == путь из Б в А). Т.е поделить на два: $\frac{96}{2} = 48$

Ответ: 48

6.

Число делится на три, если сумма его цифр делится на 3 (т.е перестановка цифр местами в числе на делимость не влияет)

В вершину 9 можно попасть только из вершин 6 и 3 (т.к 69 и 39 делятся на три, и аналогично при перестановке цифр местами) Все остальные варианты (19, 29, 49, 59, 79, 89) на три не делятся.

В вершину 6 можно попасть из 9 и 3. (16, 26, 46, 56, 76, 86 на три не делятся).

В вершину 3 можно попасть из 9 и 6 (13, 23, 43, 53, 73, 83 на три не делятся).

Таким образом, вершина 1 **не** соединена ни с 9, ни с 6, ни с 3. А значит из нее попасть в 9 невозможно.

Ответ: нет

7.

От противного:

Пусть есть вершина V, из которой можно добраться не во все оставшиеся вершины. Она соединена минимум с 7-ю вершинами. Пусть ровно с 7-ю. Тогда у нас во 2й компоненте связности остается $15-1-7 = 7$ вершин. Но тогда любая из этих 7-ми вершин соединена максимально с 6-ю вершинами, что противоречит условию задачи. Значит, 2й компонентны связности не существует и каждая из 7-ми вершин соединена как минимум с одной вершиной, которая соединена с V $\rightarrow$ из вершины V можно добраться в любую другую вершину.

Пусть V соединена более чем с 7-ю вершинами. Тогда во 2й компоненте связности у нас остается еще меньше, чем 7 вершин. Аналогично вышенаписанному, любую вершину внутри компоненты связности из менее, чем 7-ми вершин, невозможно соединить с 7-ю вершинами, т.е условие задачи не выполняется и возникает противоречие. Тогда все же из любой вершины можно попасть в каждую

Ч.Т.Д

8.

- Рассмотрим элемент, в котором четное число нулей. Тогда количество единиц в нем тоже будет четно (т.к общая длина слова у нас 1000. Четное - четное = четное) Тогда он связан с вершиной, в которой ровно 400 различий. Тогда в этой вершине также четное количество как нулей, так и единиц. (т.к при изменении четного числа элементов общая четность не меняется)
- Теперь рассмотрим элемент, в котором нечетное число нулей. Тогда количество единиц в нем также будет нечетно (Четное - нечетное = нечетное). Аналогично, он связан с вершиной, в которой ровно 400 различий. Тогда в этой вершине также нечетное количество как нулей, так и единиц.
- Таким образом, если два элемента в этом графе связаны, то у них сохраняется одинаковая четность нулей и единиц. Если $Q_{1000,400}$ связен, тогда из каждой вершины можно попасть в любую другую. Но можно привести пример, когда это не выполняется:

  Возьмем два элемента $Q_{1000,400}$:

  $$000\dots0_{999}1$$

  $$000\dots0_{998}11$$

  В первом нечетное число нулей (999) и нечетное число единиц (1), а во втором четное число нулей (998) и четное число единиц (2).

  Мы уже выяснили, что при переходе из одного элемента в другой четность сохраняется. Но у этих двух элементов четность разная $\rightarrow$ они не могут быть связаны, а тогда и граф $Q_{1000,400}$ - несвязный

Ответ: нет