№1

$$\ddot{\varphi} + \Gamma\dot{\varphi} = K f(\varphi) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (*)$$

а) пусть $x = \varphi$, $y = \dot{\varphi}$ => ур-ние (*) запишется:

$$\begin{cases} \dot{x} = y & (1) \\ \dot{y} + \Gamma y = K f(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) & (2) \end{cases}$$

ф-ция Грина для ур-ния (2): $G(t) = \theta(t) \exp[-\Gamma t]$ =>

=> его решение: ~~$x(t) = x(0)$~~ $y(t) = y(0) \cdot e^{-\Gamma t} + \int_0^t ds \cdot \exp[-\Gamma(t-s)] \cdot \left(K f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(s - nT) \right)$ <=>

<=> $y(t) = y_0 e^{-\Gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} ds \exp[-\Gamma(t-s)] \cdot K f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(s - nT)$

рассмотрим это решение после n-ого такта, т.е. при $t \in (nT - \delta, (n+1)T - \delta)$ => $\delta \to 0$

$$=> y(t) = y_n e^{-\Gamma(t-nT)} + K \sum_{j=0}^{\infty} f(x_j) \cdot \int_{nT-\varepsilon}^{t} ds \cdot \exp[-\Gamma(t-s)]\, \delta(s - jT) =$$

$$= y_n e^{-\Gamma(t-nT)} + K f(x_n) \exp[-\Gamma(t-nT)] = e^{-\Gamma(t-nT)} \cdot (y_n + K f(x_n)) =>$$

$$=> x(t) = x_n - \frac{1}{\Gamma}(y_n + K f(x_n))\, e^{-\Gamma(s-nT)} \Big|_{nT}^{t} = x_n + \frac{1}{\Gamma}\left[1 - e^{-\Gamma(t-nT)}\right](y_n + K f(x_n))$$

отсюда получаем $\begin{matrix} x_{n+1} = x((n+1)T) \\ y_{n+1} = y((n+1)T) \end{matrix} \Big| =>$

$$=> \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{1 - e^{-\Gamma T}}{\Gamma}(y_n + K \cdot f(x_n)) \\ y_{n+1} = e^{-\Gamma T}(y_n + K \cdot f(x_n)) \end{cases}$$

б) при $\Gamma \to \infty$ $y_n = 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{K}{\Gamma} f(x_n)$

пусть $\frac{K}{\Gamma} = 1$, ~~[illegible]~~ =>

=> $x_{n+1} = x_n + f(x_n) = r x_n (1 - x_n)$ => $f(x_n) = -x_n + r x_n (1 - x_n)$ =>

=> $\boxed{x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)}$ (здесь $x_n \in [0; 1]$, а не $[0; 2\pi]$ =>

=> для φ: $\varphi_{n+1} = \tilde{r} \varphi_n (2\pi - \varphi_n)$)

№2

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{1-e^{-\Gamma T}}{\Gamma}\left(y_n + K f(x_n)\right) \\ y_{n+1} = e^{-\Gamma T}\left(y_n + K f(x_n)\right) \end{cases}$$ — отображение при $\Gamma \neq 0$

рассмотрим ур-ние (2) из прошлой задачи при $\Gamma = 0$:

$\dot{y} = K f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ => после $(n+1)$-ого толчка решение имеет вид:

~~$y_{n+1} = y_n + K f(x_n)$~~ ~~$x_{n+1} = [y_n + K f(x_n)]$~~

$y(t) = y_n + K f(x_n)$ => $x(t) = [y_n + K \cdot f(x_n)]^{(t-Tn)} + x_n$ =>

=> при $T=1$, $f(x) = -\sin x$: $\begin{cases} y_{n+1} = y_n - K \sin x_n \\ x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \end{cases}$ — отображение Чирикова

а) фазовый объём: $\iint dx\,dy \longmapsto \iint dX\,dY$,

где $\begin{cases} Y = y - K\sin x \\ X = x + y - K\sin x \end{cases}$, при этом $\iint dX\,dY = \iint J\,dx\,dy$, где $J = \det\left(\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\right)$ =>

=> фазовый объём сохр-ся при $J = 1$, проверим, так ли это:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - K\cos x & -K\cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - K\cos x + K\cos x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\iint dx\,dy = \iint dX\,dY}.$$

б) стационарные точки отр-ся из $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n)$ =>

=> $\begin{cases} \sin x_n = 0 \\ y_n = 0 \end{cases}$ => стац. точки $(0,0)$ и $(\pi, 0)$ (при $x_n \in [0; 2\pi]$)

перепишем отображение в матричном виде (через приращения δx и δy).

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - K\cos x & 1 \\ -K\cos x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}$$

для исследования уст-ти стац. точек достаточно исследовать усть-ть линеаризованной в окр-ти стац. точек системы =>

=> при $(x,y) = (0,0)$: $\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - K & 1 \\ -K & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}$ => $\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)(1-K-\lambda) + K =$

$= \lambda^2 - \lambda(2-K) + 1 = 0$ =>

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{2 - K \pm \sqrt{K^2 - 4K}}{2} \Rightarrow$$

(=>) при $0 \le K \le 4$ $|\mathrm{Re}\,\lambda| \le 1$ => точка $(0;0)$ устойчива при $K \in [0;4]$

при $K \ge 4$ $|\lambda_-| \ge 1$ => точка $(0;0)$ неустойчива при $K \ge 4$

при $(x,y) = (\pi, 0)$: $\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+K & 1 \\ K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}$ => $\chi_m(\lambda) = (1-\lambda)(1+K-\lambda) - K =$

$= \lambda^2 - \lambda(2+K) + 1 = 0$ =>

=> $\lambda_\pm = \dfrac{2+K \pm \sqrt{K^2+4K}}{2}$ =>

=> т.к. $K \ge 0$, то $\lambda_+ \ge 1$ => точка $(\pi;0)$ неустойчива при $\forall K$ =>

=> $\begin{cases} (\pi;0) - \text{неустойчива при } K \ge 0 \\ (0;0) - \text{устойчива при } 0 \le K < 4 \\ \quad \text{и неустойчива при } K \ge 4 \end{cases}$

№3

$g(x) = -\alpha g(g(-\frac{x}{\alpha}))$

пробная ф-ция: $1 + bx^2 + cx^4$ =>

$1 + bx^2 + cx^4 = -\alpha\left(1 + b\left(1 + b\frac{x^2}{\alpha^2} + c\frac{x^4}{\alpha^4}\right)^2 + c\left(1 + b\frac{x^2}{\alpha^2} + c\frac{x^4}{\alpha^4}\right)^4\right)$

раскроем скобки и отсечем все члены выше 4-го порядка:

$1 + bx^2 + cx^4 = -\alpha\left(1 + b\left(1 + 2b\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{b^2x^4}{\alpha^4} + 2c\frac{x^4}{\alpha^4} + \bar{o}(x^4)\right) + c\left(1 + 4b\frac{x^2}{\alpha^2} + 6b^2\frac{x^4}{\alpha^2} + 4c\frac{x^4}{\alpha^4} + \bar{o}(x^4)\right)\right)$ =>

=> т.к. равенство выполняется при $\forall x$, то получим следующую систему:

$$\begin{cases} 1 = -\alpha(1+b+c) & (\text{при } x^0) \\ b = -\alpha\left(2\frac{b^2}{\alpha^2} + 4\frac{bc}{\alpha^2}\right) & (\text{при } x^2) \\ c = -\alpha\left(\frac{b^3}{\alpha^4} + 2\frac{bc}{\alpha^4} + 6\frac{b^2c}{\alpha^2} + 4\frac{c^2}{\alpha^4}\right) & (\text{при } x^4) \end{cases}$$

=> эта система имеет 2 решения, при которых $b \ne 0$, $c \ne 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

① $b \approx -5{,}05$, $c \approx 8{,}38$, $\alpha \approx 0{,}60$

② $b \approx -1{,}40$, $c \approx 0{,}03$, $\alpha \approx 2{,}69$ =>

=> т.к. мы знаем, что наше решение должно слабо отличаться от решения для пробной ф-ции $g = 1 + bx^2$ (для неё $b \approx -1{,}366$, $\alpha \approx 2{,}73$), то берём решение ② => $\boxed{g(x) = 1 - 1{,}3987x^2 + 0{,}0269x^4}$

$\boxed{\alpha = 2{,}6898}$ (точность около 8%) $\approx$ вторая константа Фейгенбаума

первая константа Фейгенбаума находится по формуле:

$$\boxed{\delta \approx \alpha^3 - \alpha \approx 4{,}545}$$

(см. Шустер стр. 60 (3.516) и комментарий к ней, т.к. $g^{(4)}(0) \neq 0$, то максимум 4 порядка $\Rightarrow z = \frac{4}{2} = 2$)

(точность чуть
меньше 3% - хуже
чем в случае $g(x) = 1 + bx^2$,
видимо, стоит использовать другой
способ приближения δ)

task4

16 февраля 2021 г.

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Рассматриваем $r \in [3.5699, 4]$, так как $r_\infty \approx 3.5699$

[2]:
```
length = 1000
r = np.linspace(3.5699, 4, 1000)
eps = 10**(-3)
```

Воспользуемся следующей формулой (см Шустер 3.101):

$\lambda(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \ln |f'[f^i(0)]|$, где

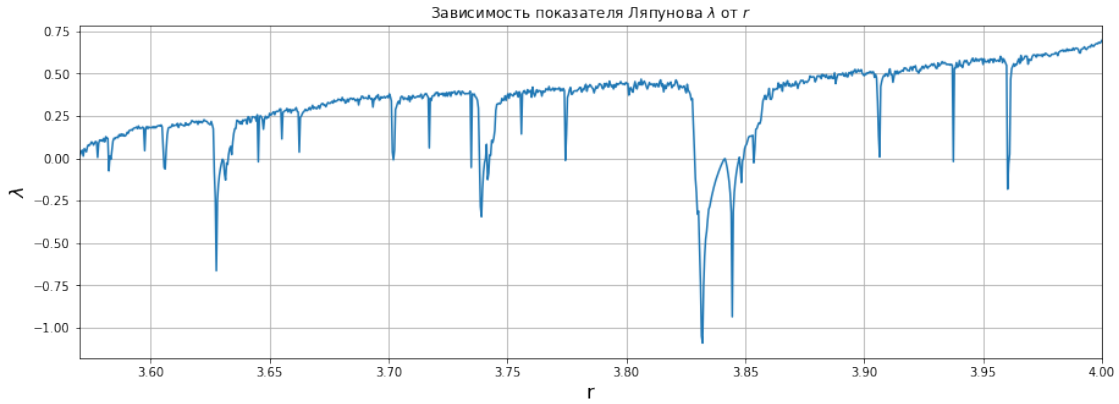
$f(x) = rx(1-x)$

$f'(x) = r - 2xr$

[3]:
```
ll = []
for el in r:
    x0 = np.zeros(length)
    x0[0] = eps
    for i in range(1,len(x0)):
        x0[i] = el*x0[i-1]*(1 - x0[i-1])
    x = el - 2*x0*el
    ll.append(np.sum(np.log(np.abs(x)))/length)
```

[4]:
```
plt.figure(figsize=(15, 5))
plt.rc('axes', labelsize=16)

plt.plot(r,ll)
plt.xlim(3.5699, 4)

plt.grid()

plt.xlabel('r')
plt.ylabel('$\lambda$')

plt.title(r'Зависимость показателя Ляпунова $\lambda$ от $r$')
```

[4]: `Text(0.5, 1.0, 'Зависимость показателя Ляпунова $\\lambda$ от $r$')`



Численно получена зависимость показателя Ляпунова от r для $r > r_\infty$

№5

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = x(r-z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

стационарные точки:

① $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ — конвекция отсутствует, только теплопроводность

② $\begin{cases} x_0 = \pm\sqrt{b(r-1)} \\ y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)} \\ z_0 = r-1 \end{cases}$ — конвективная точка, существование ячеек Бенара

линеаризуем систему в окр-ти (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} \approx rx - y - (x_0+x)(z_0+z) = (r-z_0)x - y - x_0 z - \cancel{x_0 z} \\ \dot{z} \approx (x_0+x)(y_0+y) - bz = y_0 x + x_0 y - bz + \cancel{x_0 y_0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad \dot{\vec{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}}_{\hat{M}} \vec{a} + \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -x_0 z_0 \\ x_0 y_0 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ устойчивая точка (x_0, y_0, z_0) при $\operatorname{Re}\lambda_M < 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \chi_{\hat{M}}(\lambda) = -(\lambda+\sigma)(\lambda+1)(\lambda+b) - \sigma x_0 y_0 + \sigma(\lambda+b)(r-z_0) - x_0^2(\lambda+\sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } \begin{matrix} x_0 = \pm\sqrt{b(r-1)} \\ y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)} \\ z_0 = r-1 \end{matrix} : \quad \chi_{\hat{M}}(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2(1+b+\sigma) - \lambda b(r+\sigma) - 2b\sigma(r-1) \Rightarrow$$

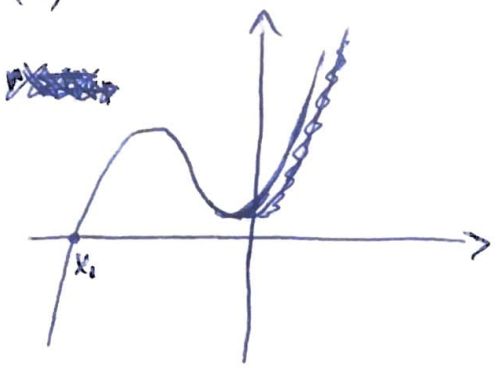
$\Rightarrow$ переход от устойчивости к неустойчивости происходит при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ (*) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пусть $\lambda = i\omega$: $i\omega^3 + \omega^2(1+b+\sigma) - i\omega b(r+\sigma) - 2b\sigma(r-1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^3 - \omega b(r+\sigma) = 0 \\ \omega^2(1+b+\sigma) - 2b\sigma(r-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{b(r+\sigma)} \\ b(r+\sigma)(1+b+\sigma) = 2b\sigma(r-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r_{кр} = \frac{\sigma(3+b+\sigma)}{\sigma-1-b}}$$

откуда берётся (*):

$$f(x) = x^3 + x^2(1+b+\sigma) + x b (r+\sigma) + 2b\sigma(r-1)$$



один из корней (x_1) всегда действительный и отрицательный;

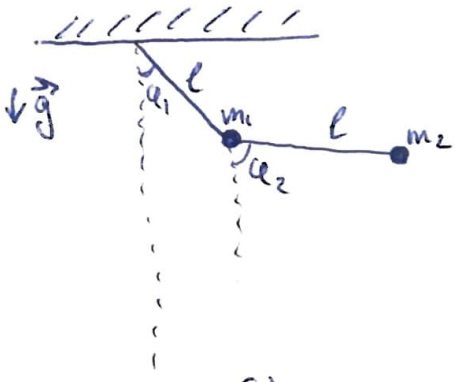
два других $x_2 = \bar{x}_3$ - комплексно-сопряженные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для устойчивости $\mathrm{Re}\, x_2 = \mathrm{Re}\, x_3 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ переход к неустойчивости при $\mathrm{Re}\, x_2 = \mathrm{Re}\, x_3 = 0$

для $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$: $r_{кр} \approx 24{,}74$

№6



лагранжиан двойного маятника:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{m_1+m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{T} +$$

$$+ \underbrace{(m_1+m_2) g l \cos\varphi_1 + m_2 g l \cos\varphi_2}_{-U}$$

а) $m_2 \ll m_1 \Rightarrow$ $\mathcal{L} \approx \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$

$+ m_1 g l \cos\varphi_1 + m_2 g l \cos\varphi_2$

при $\dot{\varphi}_2 \ll \frac{m_1}{m_2}$ $\mathcal{L} \approx \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 g l \cos\varphi_1$

при $\dot{\varphi}_2 \gtrsim \frac{m_1}{m_2}$ представим движение точки m_1 в поле $U = -m_1 g l \cos\varphi_1$ и под действием быстрой периодической силы f:

$$m_1 \ddot{\varphi}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} + f \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ усредняя по периоду T_f ($\ddot{\varphi}_1 \approx \mathrm{const}$, $U \approx \mathrm{const}$ при $\delta t = T_f$) получим: $m_1 \ddot{\varphi}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} + 0$, т.к. f - центростремительная сила, действующая из-за вращения m_2 вокруг m_1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g l \sin\varphi_1$

б) в случае малых колебаний лагранжиан можно разложить до 2-го порядка:

$$\mathcal{L} \approx \frac{m_1+m_2}{2} l^2 \dot\varphi_1^2 + m_2 l^2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot\varphi_2^2 - \frac{m_1+m_2}{2} gl\varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} gl\varphi_2^2,$$

где $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l^2 & m_2 l^2\\ m_2 l^2 & m_2 l^2\end{pmatrix}}_{\hat m}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\end{pmatrix}$, $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix}(m_1+m_2)gl & 0\\ 0 & m_2 gl\end{pmatrix}}_{\hat k}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$

~~и в силу~~ чтобы определить собственные частоты, решим $\det(\omega^2\hat m - \hat k) = 0$ =>

$$\Rightarrow l^2 m_2 \left[m_1\omega^4 - (m_1+m_2)\omega^2 \frac{2g}{l} + (m_1+m_2)\frac{g^2}{l^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{(m_1+m_2)\cdot 2lg}{2m_1 l^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_1 l^2}{(m_1+m_2)4l^2}}\right) = \frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{m_1}{(m_1+m_2)}}\right) \Rightarrow$$

=> при $m_1 \sim m_2 \sim m$: $\omega_{1,2}^2 \approx 2\frac{g}{l}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{g}{l}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

~~при этом ур-ния движения: $\begin{cases}\ddot\varphi_1 + \frac{1}{2}\ddot\varphi_2 + \frac{l}{g}\varphi_1 = 0\\ \ddot\varphi_2 + \ddot\varphi_1 + \frac{l}{g}\varphi_2 = 0\end{cases}$ (после всей арифметики) =>~~

~~$\Rightarrow \frac{1}{2}\ddot\varphi_1 + \frac{l}{g}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}\frac{l}{g}\varphi_2 = 0$~~

при этом ур-ния движения (после всей арифметики и упрощений): $\begin{cases}\ddot\varphi_1 + \frac{1}{2}\ddot\varphi_2 + \frac{g}{l}\varphi_1 = 0\\ \ddot\varphi_2 + \ddot\varphi_1 + \frac{g}{l}\varphi_2 = 0\end{cases}$ (*)

ур-ния на собственные моды: ω_1: $m_2 l^2\omega_1^2 x + m_2 l^2(\omega_1^2 - \frac{g}{l})y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec a_1 \approx \begin{pmatrix}1 - \frac{g}{l\omega_1^2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - \frac{1}{2+\sqrt{1/2}}\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\omega_2: \quad \vec a_2 \approx \begin{pmatrix}1 - \frac{g}{l\omega_2^2}\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - \frac{1}{2-\sqrt{1/2}}\\ 1\end{pmatrix}$$

=> используя эти моды: $\begin{cases}Q_1 = \left(\varphi_1 \cdot \frac{1+1/\sqrt2}{2+1/\sqrt2} + \varphi_2\right)\cdot\alpha\\ Q_2 = \left(\varphi_1 \cdot \frac{1-1/\sqrt2}{2+1/\sqrt2} + \varphi_2\right)\cdot\beta\end{cases}$ — (нормировочные к-ты)

ур-ния (*) распадаются в $\begin{cases}\ddot Q_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0\\ \ddot Q_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0\end{cases}$ =>

=> колебания действительно близки к гармоническим (в квадратичном приближении)