## Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 3.

- 1. (7) Покажите, что:
  - ullet проектор P является ортогональным если и только если  $P=P^T$
  - $\bullet$  если P ортогональный проектор, то матрица I-2P унитарна (дайте геометрическую интерпретацию этого факта).
- 2. (7) Рассмотрите матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $\bullet$  Выпишите ортогональные проекторы на range(A) и range(B).
- $\bullet$  Постройте руками QR разложение матриц A и B.
- 3. (15) Допишите следующий код на Python так, чтобы он генерировал матрицу A (состоящую из 0 и 1) размера  $15 \times 28$ , показанную на Puc. 1 (для визуализации матрицы использована функция plt.imshow(A)):

```
a = np.zeros((15, 28))
a[2:-2,1] = 1; a[2,2:6] = 1
a[2:7,6] = 1; a[7:-2,7] = 1
a[7,2:7] = 1; a[-3,2:7] = 1
a[2:-2, 10] = 1; a[2:-2, 14] = 1;
a[2:-2, 18] = 1; a[-3,10:19] = 1
```

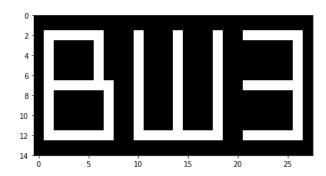


Рис. 1. Матрица A, задача 3.

- Постройте SVD разложение матрицы A. Чему равен  $\operatorname{rank}(A)$ ?
- Для каждого  $i=1,2,...,\mathrm{rank}(A)$ , постройте матрицу  $B_i$  ранга i, которая наилучшим образом (в 2-норме) приближает матрицу A (постройте соответствующее изображение).
- 4. (15) Реализуйте метод наименьших квадратов, следуя инструкциям по ссылке.
- 5. (15) Рассмотрите единичную массу, находящуюся при t=0 в точке x=0 в состоянии покоя v=0 и подверженную силе  $f_i$  при  $i-1 < t \le i$ , где i=1,2,...,10. Пусть a=(x(t=10),v(t=10)) вектор, состоящий из координаты и скорости частицы в момент времени t=10. Постройте матрицу A такую, что a=Af (заметьте, что A имеет размер  $2\times 10$ ). Используя SVD разложение, найдите f минимальной нормы такое, что a=(1,0).

<sup>&</sup>lt;sup>а</sup> Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]