Блуменау М.И.
БФ3191

№1.

$\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = f(z)$ $\qquad g(z) = \frac{z-1}{z+1}$

Возможные т. ветвления: $-1,\ 1,\ \infty$

$z_0 \to \infty$

$\eta = \frac{1}{z} \Rightarrow f(\eta) = \log\left(\frac{\frac{1}{\eta}-1}{\frac{1}{\eta}+1}\right) = \log\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)$

Проверка точки $\eta = 0$ и даст ответ (т.к. $\frac{1}{z} \underset{z\to\infty}{\to} 0$) $\qquad \eta_0;\ \hat{z}_0$ – см. рисунки в конце номера

$f(\eta_0 - i0) = \cancel{\ln\left(\left|\frac{g(\eta_0-i0)}{g(\eta_0+i0)}\right|\right)}_{0} + f(\eta_0+i0) + i\Delta\arg g$

$\Delta\arg f = -\Delta\arg(1+\eta) + \Delta\arg(1-\eta) = 0$

$\Downarrow$

$f(\eta_0 - i0) = f(\eta_0 + i0)$ и $\eta = 0$ не т. в. $\Rightarrow z_0 \to \infty$ не точка в.

$z_0 = -1$:

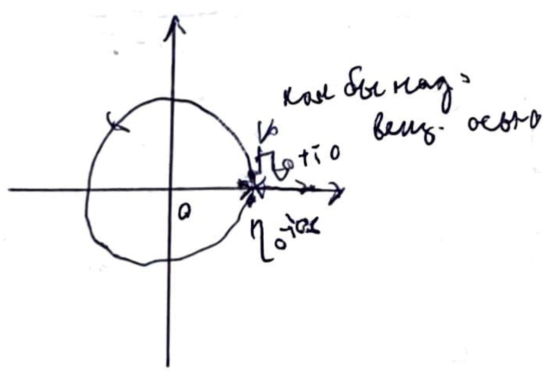
$f(-z_0 - i0) = \ln\left(\left|\frac{g(-\hat{z}_0 - i0)}{g(-\hat{z}_0 + i0)}\right|\right) + f(-z_0 + i0) + i\Delta\arg g$

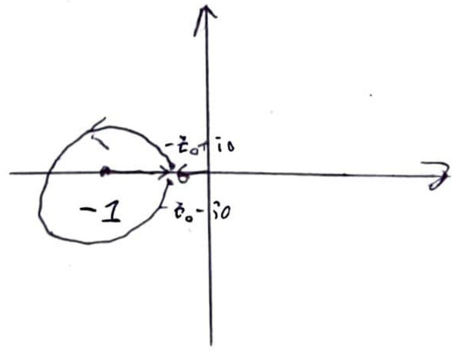
$\Delta\arg g = \Delta\arg(z-1) - \Delta\arg(z+1) = 2\pi$

$f(-z_0 - i0) = f(-z_0 + i0) + i\cdot 2\pi \Rightarrow -1$ будет т. в.

Для 1 всё очевидно по аналогии и ответ:

± 1 – точки ветвления

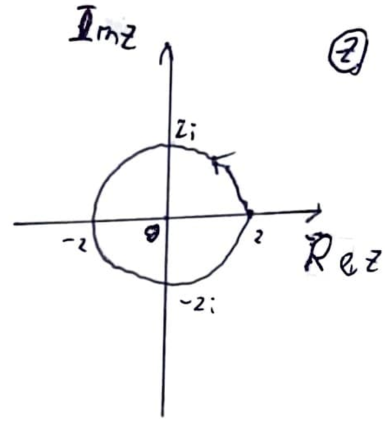




n5.

(2)

$$\int \frac{\bar{z}}{|z|+1}\,dz = I$$



$z = Re^{i\varphi}$; $R = 2$

$|z| = 2$

$dz = iRe^{i\varphi}\,d\varphi$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R\cancel{e^{-i\varphi}} \cdot iR\cancel{e^{i\varphi}}\,d\varphi}{R+1} = \int_0^{2\pi} \frac{iR^2\,d\varphi}{R+1} = \frac{R^2 \cdot 2\pi i}{R+1}$$

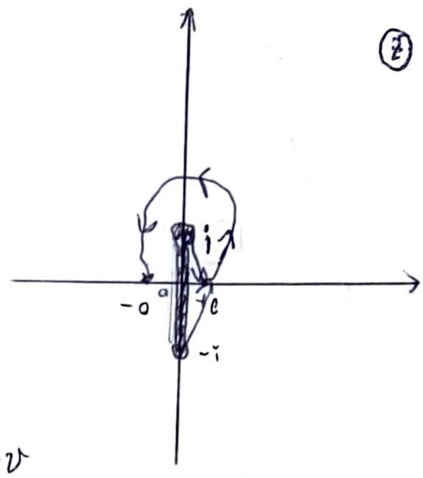
$=$ $R = 2$:

$$\frac{4 \cdot 2\pi i}{2+1} = \frac{8}{3}\pi i$$

$$f(z) = (1+iz)^{\nu}(1-iz)^{1-\nu}$$

$f(+0) = 1$

$f(-0)$ - ? $\underset{z=\infty}{\mathrm{res}}\, f(z)$ - ?



$$f(z) = i^{\nu} i^{1-\nu} (z-i)^{\nu}(-i-z)^{1-\nu} = -i(i-z)^{\nu}(i+z)^{1-\nu}$$

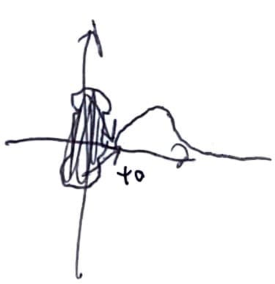
-1 из обоих скобок

$$f(-0) = \left|\frac{f(-0)}{f(+0)}\right| f(+0) e^{i\Delta \arg f}$$

$$\Delta \arg f = 2\pi\nu$$

$$f(-0) = 1 \cdot (-i)(i-0)^{\nu}(i+0)^{1-\nu} \cdot e^{2i\pi\nu} = e^{2i\pi\nu}$$

$\mathrm{res}_{\infty} f(z)$:



$$f(z) = \left|\frac{f(z)}{\cancel{f(+0)}}\right| \cancel{f(+0)}\, e^{i\Delta \arg f} = |f(z)|\, e^{i\Delta \arg f}$$

Иср. симметрии.

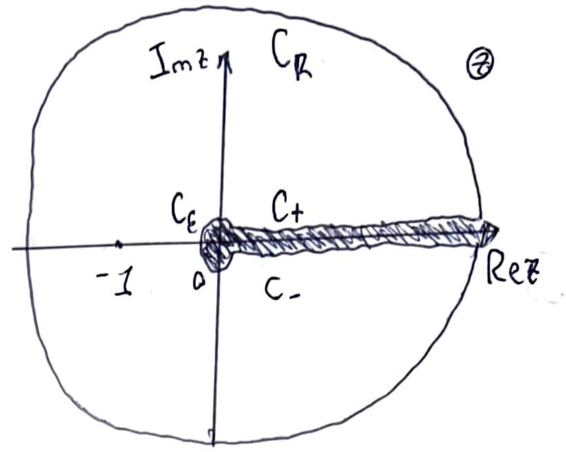
$$\delta\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

$$\Delta \arg = \nu\left(\frac{\pi}{2} - \delta\varphi\right) + (1-\nu)\left(-\frac{\pi}{2} + \delta\varphi\right) =$$

$$= \frac{\nu\pi}{2} - \delta\varphi\nu + \delta\varphi - \frac{\pi}{2} + \frac{\nu\pi}{2} - \nu\delta\varphi =$$

$$2\nu\left(\frac{\pi}{2} - \delta\varphi\right) - 1\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \delta\varphi\right) = (2\nu - 1)\left(\frac{\pi}{2} - \delta\varphi\right)$$

№9.



$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{\log(x)}{x^{1/8}(x+1)}}_{f(x)}dx = I$$

$$\oint = I + \int_{C_-} + \int_{C_\varepsilon}\!\!\!\!\!\!/_{\,0} + \int_{C_R}\!\!\!\!\!\!/_{\,0}$$

$$g(z) = \frac{1}{z^{1/8}}$$

$$\varphi(z) = \log(z)$$

$\int_{C_-}$:

$$g(z_0 - i0) = \cancel{\left|\frac{g(z_0-i0)}{g(z_0+i0)}\right|} g(z_0+i0)e^{i\Delta\arg g} = g(z_0+i0)e^{-i\pi/4}$$

$$\Delta\arg g = -\frac{1}{8}\Delta\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\varphi(z_0 - i0) = \varphi(z_0+i0) + i\Delta\arg z = \varphi(z_0+i0) + 2\pi i$$

$$\Delta\arg z = 2\pi$$

$$\int_{C_-} = -Ie^{-i\pi/4} - 2\pi i e^{-i\pi/4}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/8}(x+1)}$$

$$\oint = I(1-e^{-i\pi/4}) - 2\pi i e^{-i\pi/4}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/8}(x+1)} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_0=-1} f(z) \quad (*)$$

$$\operatorname*{res}_{z_0=-1} f(z) = \frac{\ln(z)}{\frac{z^{-7/8}}{8}(z+1) - z^{1/8}}\Bigg|_{z_0=-1} = \frac{\ln(-1)}{\sqrt[8]{-1}} = \frac{i\pi}{e^{i\pi/8}}$$

было до боли похоже в дз.

$$\oint = -2\pi^2 e^{-i\pi/8}$$

Умн. обе части * на $e^{i\pi/8}$

$$I(e^{i\pi/8} - e^{-i\pi/8}) - 2\pi i e^{-i\pi/8}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/8}(x+1)} = -2\pi^2$$

$$I\sin\pi/8 - \pi e^{-i\pi/8}\int_0^\infty \cdots = \pi^2 i \quad \text{(сократил всё на } 2i)$$

см 1

1:

Im = Im (приравниваю мнимые части слева и справа)

$$\operatorname{Im}\left(-\pi e^{-i\pi/8}\int_0^\infty \cdots\right) = \operatorname{Im}(\pi^2 i)$$

$$\pi\sin(\pi/8)\left(\int_0^\infty \cdots\right) = \pi^2 \Rightarrow \int_0^\infty \cdots = \frac{\pi}{\sin\pi/8}$$

$\Downarrow$

Re = Re

$$I\sin\frac{\pi}{8} - \pi\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 0$$

$$I = \frac{\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{8}}$$

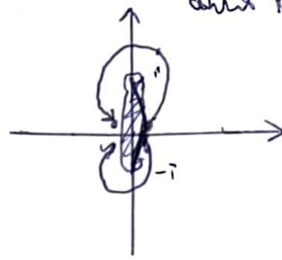
Ответ: $I = \dfrac{\pi^2\cos\pi/8}{\sin^2\pi/8} = \pi^2\operatorname{ctg}\pi/8/\sin\pi/8$

$\log \sqrt{z^2+1}$ №2.

$z=0$

В наличии две беды: корень и логарифм
и обе источник многозн.

У корня $z=\pm i$



$g(z)=\sqrt{z^2+1}$

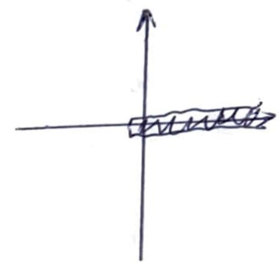
$g_1(-0)=g(+0)\cdot\left|\frac{g(-0)}{g(+0)}\right|e^{\Delta \arg g}=e^{i\pi}$

$\Delta \arg g=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$

$g_2(-0)=g(+0)\left|\frac{g(-0)}{g(+0)}\right|e^{\Delta \arg g}=e^{-i\pi}$

$\Delta \arg g=\frac{1}{2}\cdot(-2\pi)=-\pi$

Для логарифма где в нач. арг,
$\eta=\sqrt{1+z^2}$



$f_1(0)=\ln(g_1)=i\pi$

$f_2(0)=\ln(g_2)=-i\pi$

Ответ: $i\pi;-i\pi$

И я ещё забыл $f(0)=0$

т.е.

$-i\pi \quad i\pi \quad 0$

№8.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{n+2}}{n}=z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}=z^2\log(1+z)$$

Окрестность $z=0$

$\log\equiv\ln$

Как найти радиус сходимости? Это расстояние до ближ. т. сингулярности (воспоминания с матана).

Как говорил В. Богачёв: Не нужно быть Эйлером, чтобы заметить...

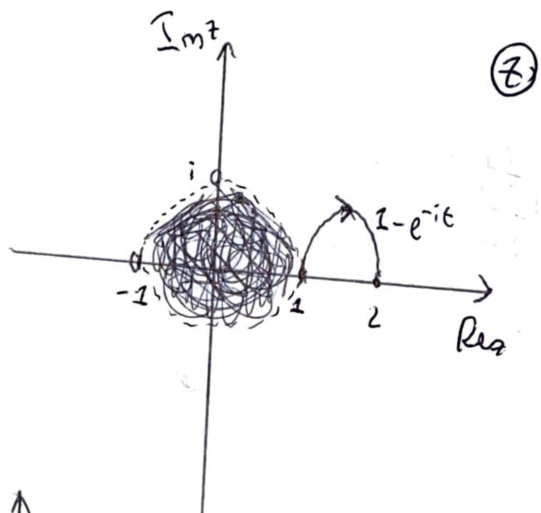
Так и тут $\ln(1+z)$ очевидно имеет т. синг. в $z=-1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходится при $|z|<1 \vee z=1$ (но не в $z=-1$)

$f(2)$ - ?

$1-e^{-it}$ $\quad t\in[0;\pi]$

$e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$

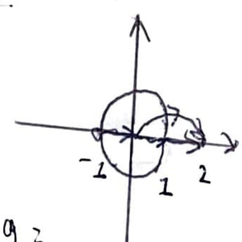


$f(2)$:

$g(z)=1+z$

$\Delta\arg g=0.$

$\psi(z)=\ln(1+z)$



$\psi(2)=\psi(0)+\ln\left(\left|\frac{g(2)}{g(0)}\right|\right)+i\Delta\arg g=$

$=0+\ln 3+0=\ln 3$

$f(2)=2^2\cdot\ln 3=4\ln 3$

№3.

$$\frac{(z+1)^{7/2}}{z}=f(z)$$

$\eta=\frac{1}{z}$

$$f(\eta)=\frac{\left(\frac{1}{\eta}+1\right)^{7/2}}{1/\eta}=\eta^{1-7/2}(1+\eta)^{7/2}=\eta^{-5/2}(1+\eta)^{7/2}$$

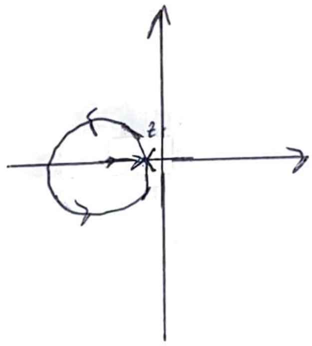
$\eta_0=0$ и $\eta_0=-1$ — подозрение на т. ветвления

g много 3:

т.к. $\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1$ $\eta_0=0$ — не т. ветвл.

$\eta_0=-1$ — т. ветвл.

Итого: точка ветвления только $\eta_0=-1$ (и $z=-1$)



$\Delta\arg f=\frac{7}{2}\cdot 2\pi-0=$

$=7\pi$

Отв.: 7π; $z=-1$