

Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 7.^a

Скачайте файл, содержащий данные, необходимые для выполнения этого задания и откройте его, используя numpy.

1. (10) Вектора x_1 и y_1 дают значения некоторой функции $f(x)$. Постройте:
 - (a) Интерполяционный Лагранжев многочлен.
 - (b) Интерполяционный кубический сплайн (CubicSpline).
 - (c) Монотонный кубический интерполянт (PchipInterpolator).
2. (15) Постройте полиномиальный интерполянт, проходящий через точки $x = \text{np.linspace}(-1, 1, n)$ и $y = \text{np.cos}(n*x)$, двумя способами:
 - (a) Используя функции `np.polyfit` и `np.polyval`.
 - (b) Используя явную формулу через многочлены Лагранжа.

Сравните результаты, полученные этими способами и объясните результат (возьмите $n = 16, 32, 64$).

3. (15) Постройте интерполяцию функций

$$y_1(x) = \sin(6x) + \sin(60e^x), \quad y_2(x) = \frac{1}{1 + 1000(x + 0.5)^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + 1000(x - 0.5)^2}}$$

на отрезке $[-1, 1]$ полиномами Чебышева. Постройте зависимость ошибки приближения от количества узлов. Сколько узлов нужно удержать в каждом из этих случаев для получения достаточно точного приближения?

4. (15) Вектора x_4 и y_4 дают значения некоторой функции на равномерной сетке на отрезке $[-0.75, 0.75]$. Используя `scipy.optimize.curve_fit`, постройте интерполяцию функции $y(x)$ функциями вида

$$y_1(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5, \quad y_2(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3}{1 + q_1x + q_2x^2}.$$

Какая из этих формул лучше описывает $y(x)$ на заданном интервале? Постройте график экстраполяции $y(x)$ за пределы исходных данных. Можете ли вы угадать аналитическое выражение для $y(x)$?

5. (20) Вектора x_5 и y_5 задают некоторую функцию на равномерной сетке на отрезке $[-1, 1]$. Составьте соответствующий интерполяционный многочлен и постройте его график. Ожидаемо, получившийся интерполянт демонстрирует явление Рунге. Теперь сделайте замену переменной $x \rightarrow s$ по формуле $x = g(s)$, где

$$g(s) = \frac{1}{53089} (40320s + 6720s^3 + 3024s^5 + 1800s^7 + 1225s^9)$$

– функция, приближённо отображающая равномерную сетку в сетку узлов Чебышева. В новой переменной s , составьте интерполяционный многочлен $P(s)$. Постройте график получившейся интерполяции исходной функции $P(s(x))$. Делает ли такая процедура явление Рунге менее выраженным?

^a Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]