№1

$z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{2021}$ $z = a + ib$

Блуменау М.И.
БФЗ191

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1$

$a^2 + b^2$

$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ф. Муавра

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$z^{2021} = 1^{2021}\left(\cos 2021\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin 2021\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$\cos\left(-\frac{4042\pi}{3}\right) = \cos\left(-1347\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{4042\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z^{2021} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ Ответ: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1346π кратно $2\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно выбрасывать и останется $-\frac{4\pi}{3}$, а это уже школьное значение

№2.

$$\frac{e^z - \sin(z) - 1}{z^2(\cos(z)-1)^2} \approx \frac{1 + \cancel{z} + z^2/2 + z^3/6 + \frac{z^4}{4!} + \cancel{\frac{z^5}{5!}} - \cancel{z} + \frac{z^3}{6} - \cancel{\frac{z^5}{5!}}}{z^2\left(\cancel{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \cancel{1}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 + z^2/2 + z^3/3 + \frac{z^4}{4!}}{\frac{z^2\cdot z^4}{4}\left(1 - \frac{z^2}{12}\right)^2} = \frac{4\left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4!}\right)}{z^6}\cdot\left(1 + \frac{z^2}{6}\ldots\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нужен порядок z^{-1} $\frac{\cancel{4}^2\cdot \cancel{z^3}}{3}\cdot\frac{\cancel{z^2}}{\cancel{6}_3\,\cancel{z^6}\,z} = \frac{2}{9z} \Rightarrow$ ответ: $\frac{2}{9}$

Ответ: $\frac{2}{9}$

$z=0$

№3.

$$\frac{z^3}{\sin^8(z)} = \frac{z^3}{\left(z-\frac{z^3}{3!}\right)^8} = \frac{z^3}{z^8\left(1-\frac{z^2}{3!}\right)^8} = \frac{z^3}{z^8}\left(1+\frac{\overset{4}{\cancel{8}}z^2}{\underset{3}{\cancel{6}}}\right) = \frac{1}{z^5}+\frac{4}{3z^3}$$

Ответ: $\frac{1}{z^5}+\frac{4}{3z^3}$

№4.

$$\frac{e^{\frac{2}{z}}e^{z}}{(z-1)^2}$$

Особые точки: $z=1$; $z=0$

В т. $z=1$ – полюс 2 порядка (знаменатель в квадрате) это очевидно

В т. $z=0$: существенно особая точка:

$$e^{2/z} = 1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{2}{z}\right)^3\frac{1}{3!}\ \dots\dots$$

а в разложении

(на неё можно умножить все)

$e^{z} = 1+z\ \dots\dots$ есть 1, т.е. у меня будет бесконечное число отличных от нуля членов у главной части.

[Это и говорит о наличии сущ. особенной точки]

(Ну и $\frac{1}{(1-z)^2} \approx (1+2z\dots)$)

тоже 1

№5.

$$\int (|z|+1)^2\, \bar z\, dz = \int_0^{2\pi} (r+1)^2 \cancel{e^{-i\varphi}} \cdot r \cdot r i \cancel{e^{i\varphi}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \overset{9}{(r+1)^2} \cdot \overset{4}{r^2}\, i\, d\varphi =$$

$$= 36 i \cdot 2\pi = 72\pi i$$

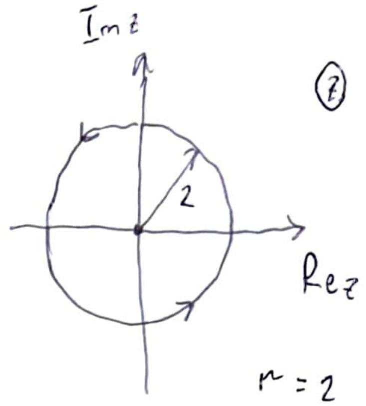
$z = re^{i\varphi}$

$|z| = r$

$\bar z = re^{-i\varphi}$

$dz = r\, d e^{i\varphi} = r i e^{i\varphi} d\varphi$

7



$r = 2$

Ответ: $72\pi i$

№6.

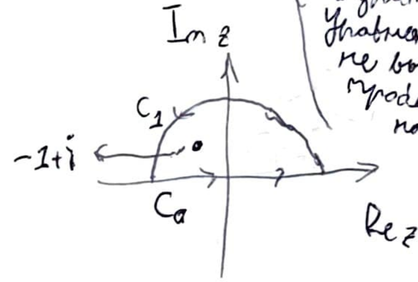
$x^2+2x+2 = (x+(1-i))(x+(1+i))$

(Надеюсь понятно, что квадратное уравнение не вызывает проблем на 2 курсе)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{((x+(1-i))(x+(1+i)))^2}dx =$$

$$= \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{((x+(1-i))(x+(1+i)))^2}dx \ominus$$ ∮ с уч.

$\oint \ominus$



$\oint = \int_{C_0} + \int_{C_1}$

$\int_{C_1} \to 0$ при $R\to\infty$

$\oint = 2\pi i \sum_j \operatorname{res}_j (f(z))\big|_{z=z_j}$ z_j особые т.

Внутри контура только $z=-1+i$ особая

$$\ominus \operatorname{Im} 2\pi i \operatorname{res} \frac{e^{iz}}{(z+(1-i))^2(z+(1+i))^2}\Bigg|_{z=-1+i} \boxed{=}$$

Для полюса 2 порядка исп. формулу

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z)\right)$$

Тогда:

$$\lim_{z\to -1+i}\frac{d}{dz}\left(\cancel{(z+1-i)^2}\frac{e^{iz}}{\cancel{(z+(1-i))^2}(z+(1+i))^2}\right) = \lim_{z\to -1+i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+(1+i))^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to -1+i}\left(\frac{ie^{iz}(z+(1+3i))}{(z+(1+i))^3}\right) = \frac{ie^{-i-1}(-\cancel{1}+i+\cancel{1}+3i)}{(-\cancel{1}+i+\cancel{1}+i)^3} = -\frac{4e^{-i-1}}{-8i} =$$

$$= \frac{e^{-i-1}}{2i}$$

$$\boxed{=} \operatorname{Im} e^{-i-1}\cancel{\pi} = \pi \sin(-1)\cdot e^{-1} = -\frac{\pi\sin(1)}{e}$$

Ответ: $-\frac{\pi \sin(1)}{e}$

№7.

$$\int_0^\infty \frac{4\sin(2x)-2\sin(4x)}{x^3}\,dx = \int_0^\infty \frac{4\sin(2x)-2\sin(4x)}{x^3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{4e^{2ix}-4e^{-2ix}-2e^{4ix}+2e^{-4ix}}{x^3} = \frac{1}{2i}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{4e^{2ix}-2e^{4ix}}{x^3}\,dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{4e^{-2ix}-2e^{-4ix}}{x^3}\,dx\right)$$

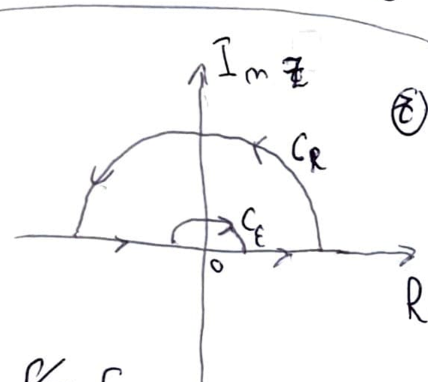
$\varepsilon\to 0$

$x \to -x$ (один минус при замене дифф, другой от x^3)

$$= \frac{1}{2i}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{4e^{2ix}-2e^{4ix}}{x^3}\,dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{4e^{2ix}-2e^{4ix}}{x^3}\,dx\right) =$$

поменяли местами пределы

$$= \frac{1}{2i}\left(\fint \frac{4e^{2ix}-2e^{4ix}}{x^3}\right)$$



$$\cancel{\oint} = \int_{C_\varepsilon} + \cancel{\int_{C_R}} + \fint \Rightarrow \fint = -\int_{C_\varepsilon}$$

0, т.к. нет особых

$\to 0$ при $R\to\infty$

$$-\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{2i}\,\frac{4e^{2iz}-2e^{4iz}}{z^3} =$$

$$4e^{2iz}-2e^{4iz} = 4\left(1+\frac{2iz}{1!}+\frac{(2iz)^2}{2!}\right) - 2\left(1+4iz+\frac{(4iz)^2}{2}\right) = 4+\cancel{8iz}-8z^2-2-\cancel{8iz}+16z^2 = 2+8z^2$$

$$= -\frac{1}{2i}\int_{C_\varepsilon}\left[\frac{2}{z^3}+\frac{8}{z}\right]dz = \left\{\begin{array}{l} z=e^{i\varphi}\varepsilon \\ dz = ie^{i\varphi}\varepsilon\,d\varphi \end{array}\right\} =$$

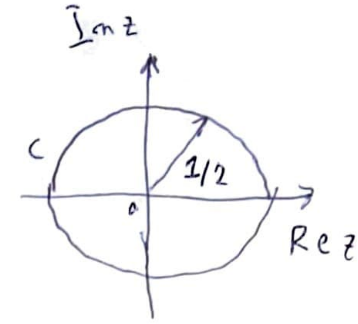
$$= -\frac{1}{2\cancel{i}}\int_\pi^0\left[\frac{2}{\varepsilon^3e^{3i\varphi}}+\frac{8}{\varepsilon e^{i\varphi}}\right]\varepsilon e^{i\varphi}\cancel{i}\,d\varphi = -\frac12\int_\pi^0\left[\frac{2e^{-2i\varphi}}{\varepsilon^2}+8\right]d\varphi =$$

$$= -\frac12\left[\frac{\cancel{2}e^{-2i\varphi}}{-\cancel{2}i\varepsilon^2}\Big|_\pi^0 + 8\varphi\Big|_\pi^0\right] = -\frac12\left[\frac{1}{-i\varepsilon^2}-\frac{1}{-i\varepsilon^2}+0-8\pi\right] = 4\pi$$

Ответ: 4π

$\fint$ – в смысле главного значения

№8.



$$\int\limits_C \frac{e^{1/z}}{z^2-1}\,dz = I \qquad z^2-1=(z-1)(z+1)$$

Особые точки внутри контура: $z=0$

(всего $z=0$; $z=\pm i$)

Но, гораздо удобнее исп.

$$I = -2\pi i \sum_j \underset{z=z_j}{\operatorname{res}} f(z)$$

↗ снаружи; ↑ особые т.

Тогда снаружи $z=\infty$; $z=\pm 1$

$z=1$: $\operatorname{res} f(z) = \left.\frac{e^{1/z}}{2z}\right|_{z=1} = \frac{e}{2}$

$z=-1$: $\operatorname{res} f(z) = \left.\frac{e^{1/z}}{2z}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{2e}$

$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, if $\begin{cases} h(z_0)=0 \\ h'(z_0)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

$z=\infty$:

$$\frac{e^{1/z}}{z^2-1} = \frac{e^{1/z}}{z^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} \simeq \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}\ldots\right)\cdot\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}\ldots\right) = \{\text{см. только } \tfrac{1}{z}\}$$

$\Rightarrow 0$ на inf

Итог:

$$I = -2\pi i\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\right) = -2\pi i\left(\frac{e^2-1}{2e}\right) = \frac{\pi i(1-e^2)}{e}$$

Ответ: $\frac{\pi i(1-e^2)}{e}$