Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 8-9.[a]

Скачайте файл, содержащий данные, необходимые для выполнения этого задания и откройте его, используя numpy.

1. **(10)** Вычислите определённый интеграл методом трапеций с вычитанием сингулярности
$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$
Вам могут пригодиться значения следующих определенных интегралов:
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \pi, \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \pi/2.$$

2. **(15)** Рассмотрите функцию, отображающую вектор $\vec{x}$ длины n в скаляр:
$$f(\vec{x}|a) = \frac{1}{\exp(a_0 + x_1 a_1 + ... + x_n a_n) + 1},$$
параметризованную коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$. В столбцах матрицы A2 содержится набор m векторов $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m$, а в векторе y2 – набор m чисел $y_1, ..., y_m$. Найдите коэффициенты a такие, что
$$\sum_i (f(\vec{x}_i|a) - y_i)^2$$
минимально. Для этого используйте метод градиентного спуска с фиксированным γ, в качестве начального приближения выбирая случайный вектор $\vec{a}$. Вычислите градиент двумя способами: разностным приближением и используя пакет autograd.

3. **(15)** Вычислите определённый интеграл
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)\cos(\cos(x))}{x} dx$$
с относительной точностью 10^{-6}. Для упрощения задачи Вы можете использовать scipy.integrate.quad.

4. **(15)** Вычислите следующий интеграл по n–мерному вектору $\vec{x}$ (в бесконечных пределах) методом Монте-Карло:
$$\int \Pi_{i=1}^n dx_i \frac{\exp\left(-\vec{x}^T A \vec{x}\right)}{1 + x_1^2 + ... + x_n^2},$$
где матрица A содержится в A4.

5. **(25)** Рассмотрите интегральное уравнение на функцию $f(s)$, где $-1 \le s \le 1$:
$$\frac{1}{\pi} \fint_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \frac{y(t)}{t-s} = \cos s$$
(здесь интеграл понимается в смысле главного значения), с дополнительным условием
$$\frac{1}{\pi} \fint_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} y(t) = 0.$$
Решите это уравнение, используя квадратуру Чебышева-Гаусса. Постройте график решения как непрерывную функцию на заданном отрезке. Возможно, Вам понадобится следующее равенство:
$$\fint_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}(s-t)}\, dt = 0.$$

---

[a] Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]