HÁSKÓLI ÍSLANDS

VERKFRÆÐI- OG NÁTTÚRUVÍSINDASVIÐ

RAUNVÍSINDADEILD

STÆ104G
Stærðfræðigreining I

2017

Benedikt Steinar Magnússon

Kennarar: Benedikt Steinar Magnússon bsm@hi.is og
Auðunn Skúta Snæbjarnarson audunnskuta@hi.is.

Efnisyfirlit

KAFLI 1

Tölur og föll

1.1 Inngangur

There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable. There is another theory which states that this has already happened.

- Douglas Adams, The Restaurant at the End of the Universe

1.1.1 Grunnhugmyndin

Stærðfræðigreining grundvallast á því að mæla breytingu (oft með tilliti til tíma)

- Eðlisfræði: hraði, hröðun, massi, orka, vinna, afl, þrýstingur
- Rúmfræði: flatarmál, rúmmál, lengd, massamiðja
- Hagnýtingar: hagfræði, stofnstærðir, hámörkun/lágmörkun, hreyfikerfi, hitaflæði
- Stærðfræði: markgildi, hermun, jafnvægisástand

Sett fram samtímis, en óháð, af Isaac Newton og Gottfried Leibniz í lok 17. aldar.

Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

1.1.2 Ítarefni

Fyrir nánari útlistun á hugtökunum sem við fjöllum um þá er hægt að skoða, auk kennslubókarinnar,

- http://edbook.hi.is/undirbuningur
- http://stae.is/hugtakasafn
- http://stae.is/os, íslensk-ensk og ensk-íslensk orðaskrá
- http://planetmath.org
- http://mathworld.wolfram.com
- http://en.wikipedia.org (ath. enska útgáfan)

1.1.3 Forrit

- GeoGebra http://www.geogebra.org
- WolframAlpha http://www.wolframalpha.com
- Matlab http://www.mathworks.com (sjá https://notendur.hi.is/~jonasson/matlab/)
- Octave http://www.gnu.org/software/octave/ (opið og ókeypis, svipað og Matlab)
- Sage http://www.sagemath.org/ (opið og ókeypis, byggt á Python)
- Mathematica http://www.wolfram.com/mathematica/

1.2 Tölur

1.2.1 Skilgreining: Tölur

1. *Náttúrlegu tölurnar* eru tölurnar $1, 2, 3, 4, \ldots$ og mengi þeirra er táknað með $\mathbb{N}$.
2. Mengi *heiltalna* er táknað með $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
3. Mengi *ræðra talna* er táknað með $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$.
4. Mengi *rauntalna* er táknað með $\mathbb{R}$.
5. Mengi *tvinntalna* er táknað með $\mathbb{C}$.

Athugasemd: Margir vilja telja 0 með sem náttúrlega tölu. Það er eðlilegt ef maður lítur á náttúrlegu tölurnar þannig að þær tákni fjölda. Ef maður lítur hins vegar þannig á að þær séu notaðar til að númera hluti þá er 0 ekki með.

Sjá einnig http://edbook.hi.is/undirbuningur/Kafli1.html#talnakerfi.

1.2.2 Smíði rauntalna

Rauntölur eru smíðaðar úr ræðu tölunum með því að fylla upp í götin.

T.d. eru

$$\pi = 3,1415926\ldots, \qquad \text{og}$$
$$\sqrt{2} - 4 = -2,58578\ldots$$

ekki ræðar tölur (það er ekki hægt að skrifa þær sem brot $\frac{a}{b}$, þar sem a og b eru heilar tölur), en þær eru rauntölur. Slíkar tölur kallast *óræðar*.

Sjá einnig Óræðar tölur | stæ.is.

1.2.3 Frumsendan um efra mark

Látum A vera mengi af rauntölum sem er þannig að til er tala x, þannig að fyrir allar tölur $a \in A$ þá er

$$a \leq x.$$

Þá er til rauntala x_0 sem kallast *efra mark* fyrir A, sem er þannig að $a \leq x_0$ fyrir allar tölur $a \in A$ og ef $x < x_0$ þá er til tala $a \in A$ þannig að $a > x$.

Sjá einnig Least-upper-bound property.

1.3 Bil

1.3.1 Skilgreining: Bil

Látum a og b vera rauntölur þannig að $a < b$. Skilgreinum

1. *opið bil* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
2. *lokað bil* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
3. *hálfopið bil* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
4. *hálfopið bil* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

Þessi bil sem er skilgreind hér fyrir ofan eru kölluð endanleg. Til eru fleiri gerðir af bilum:

5. *opið óendanlegt bil* $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$
6. *opið óendanlegt bil* $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$
7. *lokað óendanlegt bil* $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$

8. *lokað óendanlegt bil* $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$
9. *allur rauntalnaásinn* $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

1.3.2 Skilgreining: Bil

Mengi A af rauntölum kallast *bil* ef um allar tölur $a < b$ sem eru í menginu A gildir að ef $a < x < b$ þá er x líka í menginu A. Þ.e. bil innihalda engin göt.

Athugasemd: Sérhvert bil á rauntalnaásnum er af einni þeirra gerða sem talin er upp í *Skilgreining 1.3.1*. Þessi staðhæfing er jafngild frumsendunni um efra mark.

Athugasemd: Það er jafngilt að segja

$$x \in (a - \eta, a + \eta)$$

og

$$|x - a| < \eta.$$

1.4 Föll

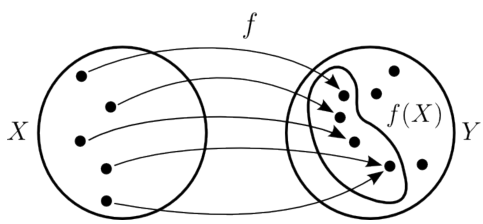
1.4.1 Skilgreining: Vörpun

Vörpun frá mengi X yfir í mengi Y er regla sem úthlutar sérhverju staki x í X nákvæmlega einu staki $f(x)$ í Y. Táknum þetta með $f : X \to Y$.

Stakið $f(x)$ kallast *gildi* vörpunarinnar (í punktinum x).

1.4.2 Skilgreining

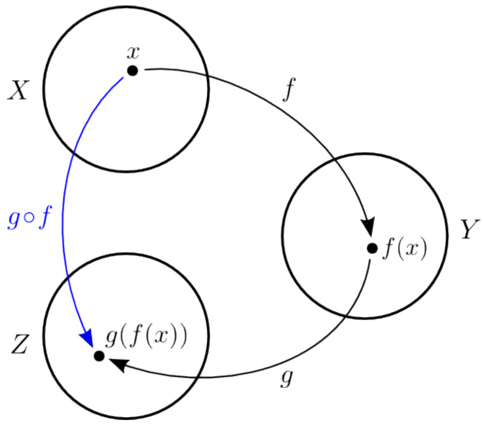
Mengið X kallast *skilgreiningarmengi* f, mengið Y kallast *bakmengi* f og mengið $f(X) = \{f(x); x \in X\}$ kallast *myndmengi* f.



Aðvörun: Það er ekki víst að öll gildin í Y séu tekin (það er $f(X)$ getur verið minna en Y). Eins þá er mögulegt að f taki sama gildið oftar en einu sinni.

1.4.3 Skilgreining: Samskeyting

Látum $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ vera varpanir. Vörpunin $g \circ f : X \to Z$ sem skilgreind er með $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ kallast *samskeyting* f og g. Stakið $g(f(x)) \in Z$ fæst með því að beita fyrst vörpuninni f á stakið x og síðan vörpuninni g á stakið $f(x)$.



1.4.4 Dæmi

Skoðum föllin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Þá er samskeytingin $g \circ f$

$$g(f(x) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

Athugið að samskeytingin $f \circ g$ er ekki sama fallið

$$f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 - 1$$

1.4.5 Skilgreining: Átækni og eintækni

Við segjum að vörpunin f sé *átæk* ef $f(X) = Y$, það þýðir að fyrir sérhvert stak y í Y þá er til (amk. eitt) stak x í X þannig að $f(x) = y$.

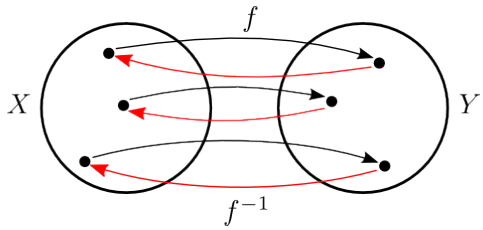
Segjum að vörpunin f sé *eintæk* ef $f(x_1) = f(x_2)$ hefur í för með sér að $x_1 = x_2$, það er sérhvert gildi sem vörpunin tekur er bara tekið einu sinni.

1.4.6 Skilgreining: Gagntækni

Vörpun sem er bæði eintæk og átæk kallast *gagntæk*.

1.4.7 Skilgreining: Andhverfa

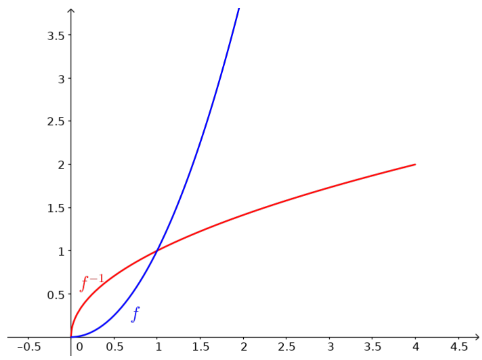
Látum $f : X \to Y$ vera vörpun. Sagt er að f sé *andhverfanleg* ef til er vörpun $f^{-1} : Y \to X$ þannig að samskeyting varpananna f og f^{-1} annars vegar og f^{-1} og f hins vegar sé viðeigandi *samsemdarvörpun*, þ.e. $f^{-1} \circ f = id_X$ og $f \circ f^{-1} = id_Y$.



Athugasemd: Venjulega hjá okkur þá eru mengin X og Y mengi af rauntölum. Þegar Y er mengi af tölum þá er notast við orðið *fall* í stað orðsins *vörpun*.

1.4.8 Dæmi

Látum $X = [0, 2]$, $Y = [0, 4]$ og $f : X \to Y, f(x) = x^2$. Þá er f gagntæk vörpun og andhverfan er gefin með $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

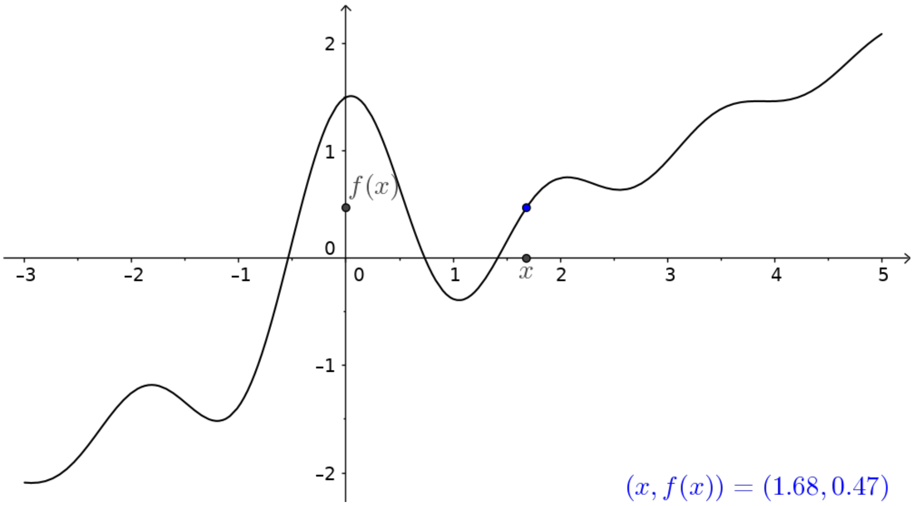


Athugasemd: Hér má velja X sem önnur mengi en $[0, 2]$ svo lengi sem X inniheldur ekki bæði a og $-a$, $a \neq 0$, því þá er f ekki lengur eintæk.

Mengið Y er svo valið sem myndmengið $f(Y)$.

1.4.9 Skilgreining: Graf

Látum $f : X \to Y$ vera fall þannig að X og Y eru mengi af rauntölum. *Graf* fallsins f er þá mengi allra punkta í planinu $\mathbb{R}^2$ af gerðinni $(x, f(x))$ þar sem $x \in X$. Hér notum við oft y í stað $f(x)$.



1.4.10 Skilgreining: Jafnstætt og oddstætt

Við segjum að fall f sé *jafnstætt* ef

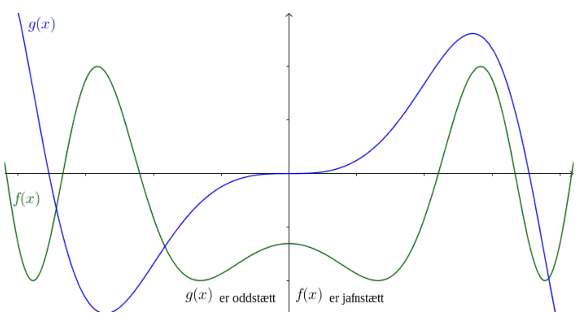
$$f(x) = f(-x)$$

fyrir öll x í skilgreiningarmengi f.

Við segjum að fall f sé *oddstætt* ef

$$f(x) = -f(-x)$$

fyrir öll x í skilgreiningarmengi f.



Markgildi og samfelldni

Athugasemd: Nauðsynleg undirstaða

- Jafna línu, P.2
- Jafna hrings, P.3
- Hliðrun og skölun grafs, P.3
- (Stranglega) minnkandi og (stranglega) vaxandi föll, 2.8
- Jafnstæð og oddstæð föll, P.4
- Margliður; deiling, þáttun og rætur, P.6
- Tölugildisfallið, P.1
- Þríhyrningsójafnan, P.1
- Formerkjafallið, $sgn(x)$, P.5

Aðvörun: Þessi kafli fjallar um tvö afskaplega mikilvæg og nátengd hugtök, markgildi og samfelldni. Það er nauðsynlegt fyrir nemendur að ná góðum tökum á þeim því mörg hugtök í stærðfræði og hagnýtingum á stærðfræði sem verða á vegi ykkar í framtíðinni byggja á þessum hugtökum.

I'd take the awe of understanding over the awe of ignorance any day.

\- Douglas Adams, The Salmon of Doubt

2.1 Markgildi

2.1.1 Óformleg skilgreining á markgildi

Segjum að fall $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé eins nálægt L og við viljum bara með því að velja x nógu nálægt a.

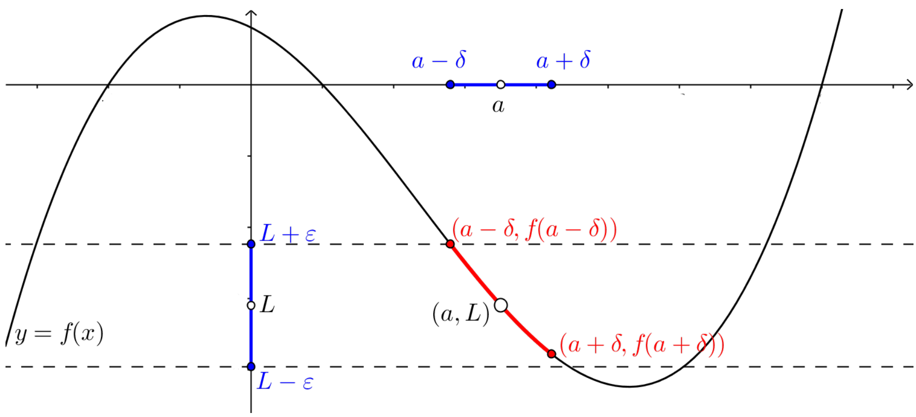
2.1.2 Skilgreining: Markgildi

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x sem eru þannig að

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \text{þá gildir} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Við segjum að talan L sé *markgildi* $f(x)$ þegar x stefnir á a.



Athugasemd: Þegar athugað er hvort markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ er til, og þá hvert gildi þess er, þá skiptir ekki máli hvort $f(a)$ er skilgreint eða ekki.

2.1.3 Dæmi

1. $\lim_{x\to a} c = c$, c fasti
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} |x| = |a|$

Hér er fallið sem um ræðir $f(x) = x$ og $L = a$. Látum $\epsilon > 0$ vera gefið. Við viljum finna $\delta > 0$ þannig að $|x - a| < \delta$ hafi í för með sér $|f(x) - a| < \epsilon$. Þar sem $f(x) = x$ þá er seinni ójafnan jafngild $|x - a| < \epsilon$. Þetta er sama ójafnan og δ þarf að uppfylla þannig að okkur nægir að velja $\delta = \epsilon$. Þá hefur

$$|x - a| < \delta$$

í för með sér að

$$|f(x) - a| < \epsilon.$$

Ábendingar fyrir sannanir á liðum 1 og 3

Til að sanna þetta þá er best að teikna mynd til að átta sig á því hvernig föllin haga sér. Svo má velja

1. δ sem hvað sem er.
3. $\delta = \epsilon$.

2.2 Markgildi frá hægri og vinstri

2.2.1 Óformleg skilgreining

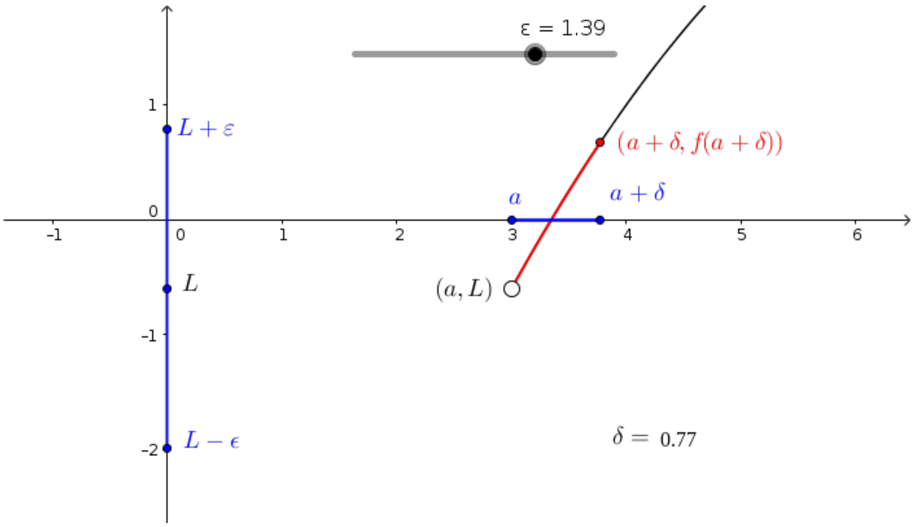
Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (a, b). Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a *frá hægri*, og ritum $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé eins nálægt L og við viljum bara með því að velja $x > a$ nógu nálægt a.

2.2.2 Skilgreining: Markgildi frá hægri

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (a, b). Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a *frá hægri*, og ritum $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x sem eru þannig að

$$a < x < a + \delta, \quad \text{þá er} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$



2.2.3 Óformleg skilgreining

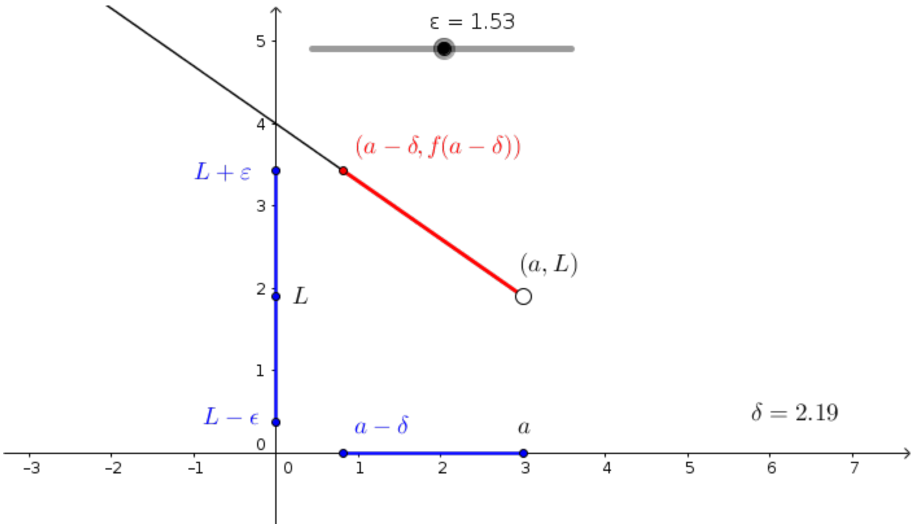
Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (b, a). Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a *frá vinstri*, og ritum $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé eins nálægt L og við viljum bara með því að velja $x < a$ nógu nálægt a.

2.2.4 Skilgreining: Markgildi frá vinstri

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili (b, a). Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* a *frá vinstri*, og ritum $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x sem eru þannig að

$$a - \delta < x < a, \quad \text{þá er} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$



2.2.5 Setning

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Þá er

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ef og aðeins ef

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

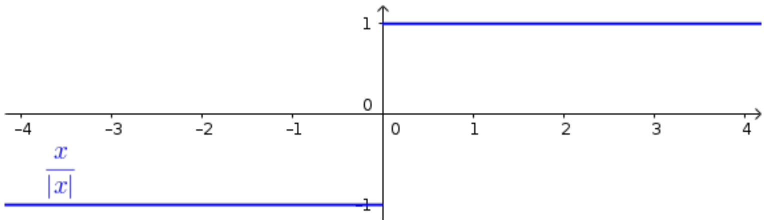
2.2.6 Dæmi: Tölugildisfallið

Tölugildisfallið $|x|$ er skilgreint sem x ef $x \geq 0$ en $-x$ ef $x < 0$. Um tölugildisfallið gildir

1. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

2. $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{er ekki til}$$



1. Hér skoðum við eingöngu $x > 0$ og þá gildir að $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$. Þar sem $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ samkvæmt *Dæmi 2.1.3* þá gildir einni að $\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$ samkvæmt *setningunni* hér á undan. Þannig að
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$
2. Eins og liður 1 nema ef $x < 0$ þá er $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$
3. Af liðum 1 og 2 sést að hægri og vinstri markgildin eru ekki þau sömu þannig að samkvæmt *setningunni* hér á undan þá er markgildið ekki til.

2.3 Reiknireglur fyrir markgildi

2.3.1 Setning

Gerum ráð fyrir að $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og að $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Þá gildir

1. $\lim_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big) = L + M$.
2. $\lim_{x\to a} \Big(f(x) - g(x)\Big) = L - M$.
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.
4. $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$, þar sem k fasti.
5. $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/M$, að því gefnu að $M \neq 0$.
6. Gerum ráð fyrir að m og n séu heiltölur þannig að $f(x)^{m/n}$ sé skilgreint fyrir öll x á bili (b, c) umhverfis a (en ekki endilega fyrir $x = a$) og að $L^{m/n}$ sé skilgreint. Þá er $\lim_{x\to a} f(x)^{m/n} = L^{m/n}$.
7. Ef til er bil (b, c) sem inniheldur a þannig að $f(x) \leq g(x)$ fyrir öll $x \in (b, c)$, nema kannski $x = a$, þá er $\lim_{x\to a} f(x) = L \leq M = \lim_{x\to a} g(x)$.

Aðvörun: Liður (i) í setningunni á undan segir að ef markgildin $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ eru til þá sé markgildið $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ einnig til.
En hún segir **ekki** að ef f og g eru föll þannig að markgildið $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ er til, að þá séu markgildin $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ einnig til.

Sönnun á lið 1

Við viljum sýna að fyrir $\epsilon > 0$ þá sé til $\delta > 0$ þannig að ef $|x - a| < \delta$ þá sé $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$. Látum nú $\epsilon > 0$ vera gefið, þá fæst af $\lim_{x\to a} f(x) = L$ að til er $\delta_1 > 0$ þannig að

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

ef $|x - a| < \delta_1$. Eins fæst af $\lim_{x\to a} g(x) = M$ að til er δ_2 þannig að

$$|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

ef $|x - a| < \delta_2$.

Ef við setjum $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ þá þýðir það að öll x sem uppfylla $|x - a| < \delta$ uppfylla einnig $|x - a| < \delta_1$ og $|x - a| < \delta_2$. Þá gefur þríhyrningsójafnan okkur að fyrir slíkt x þá er

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |f(x) - L + g(x) - M| \\ &< |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

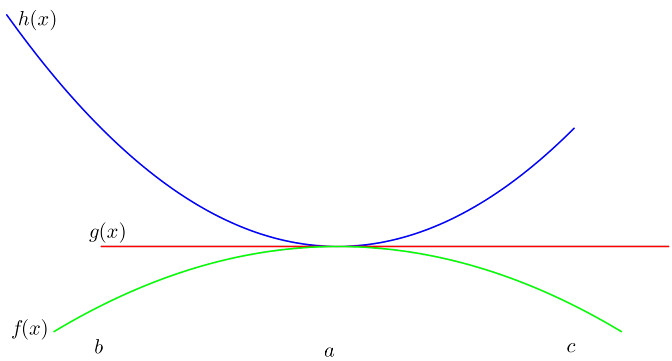
sem er það sem við vildum sýna.

2.3.2 Setning: Klemmureglan

Gerum ráð fyrir að $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ fyrir öll x á bili (b, c) sem inniheldur a, nema kannski $x = a$. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Þá er $\lim_{x\to a} g(x) = L$.



Sönnun

Látum $\epsilon > 0$ vera gefið. Við viljum sýna að þá sé til $\delta > 0$ þannig að $|g(x) - L| < \epsilon$ fyrir öll x sem uppfylla $|x - a| < \delta$.

Þetta má líka skrifa svona: Við viljum sýna að þá sé til $\delta > 0$ þannig að $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$ fyrir öll x sem uppfylla $a - \delta < x < a + \delta$.

Við vitum nú að þar sem $\lim_{x\to a} f(x) = L$ þá er til δ_1 þannig að $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ fyrir öll x sem uppfylla $a - \delta_1 < x < a + \delta_1$.

Eins þá fæst af $\lim_{x\to a} h(x) = L$ að til er δ_2 þannig að $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$ fyrir öll x sem uppfylla $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$.

Setjum nú $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ og athugum að það þýðir að fyrir sérhvert x sem uppfyllir $a - \delta < x < a + \delta$ uppfyllir einnig $a - \delta_1 < x < a + \delta_1$ og $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$. Þá gefur $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ að

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon.$$

Þar með er $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$ og þá höfum við sýnt að $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

2.3.3 Dæmi: Markgildi með sínus

1.
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{er ekki til}$$

2.
$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Sönnum þetta með mótsögn. Gerum ráð fyrir að til sé markgildi L þannig að fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að $|x - 0| < \delta$ hefur í för með sér að $|\sin(1/x) - L| < \epsilon$. Til þess að þetta leiði til mótsagnar þurfum við að finna $\epsilon > 0$ sem er þannig að sama hversu lítið $\delta > 0$ er valið þá er alltaf til x þannig að $|x - 0| < \delta$ og

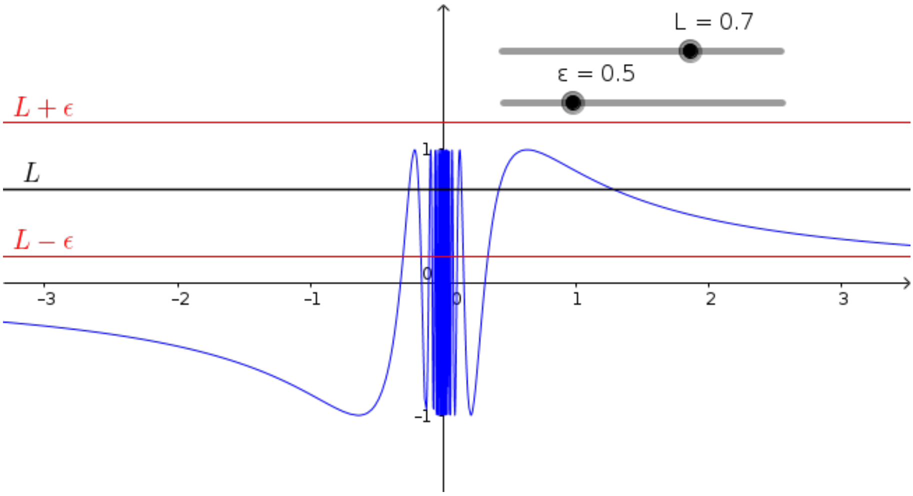
$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - L\right| \geq \epsilon.$$

Veljum $\epsilon = 0,5$. Ástæðan fyrir þessu vali er sú að þar sem $\sin(1/x)$ sveiflast á milli -1 og 1 þá er nóg að velja tölu sem er þannig að fallið sveiflist út fyrir bilið $[L - \epsilon, L + \epsilon]$. Í þessu tilviki þýðir það að ϵ þarf að vera minna en 1.

Ef markgildið er til þá er ætti að vera til $\delta > 0$ þannig að $|\sin(1/x) - L| < 0.5$ fyrir x sem uppfylla $|x - 0| < \delta$. Byrjum á að skoða tilvikið $L \leq 0$. Finnum nógu stóra náttúrlega tölu k þannig að $\frac{1}{2\pi k + \pi/2} < \delta$. Ef við setjum $x = \frac{1}{2\pi k + \pi/2}$ þá fæst að $|x - 0| < \delta$ en

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - L\right| = |\sin(2\pi k + \pi/2) - L| = |1 - L| > 0,5$$

Tilvikið þegar $L > 0$ er eins nema þá veljum við $x = \frac{1}{2\pi k - \pi/2}$ sem þýðir að $\sin(x) = -1$.



2.4 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

2.4.1 Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili (a, ∞). Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* ∞, og ritum $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé eins nálægt L og við viljum bara með því að velja x nógu stórt.

2.4.2 Skilgreining: Markgildi þegar $x \to \infty$

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili (a, ∞). Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* ∞, og ritum $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala R þannig að um öll $x > R$ gildir að

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

2.4.3 Óformleg skilgreining

Fyrir $-\infty$ er þetta gert með sama sniði.

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili $(-\infty, a)$. Segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* $-\infty$, og ritum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé eins nálægt L og við viljum bara með því að velja x sem nógu stóra neikvæða tölu.

2.4.4 Skilgreining: Markgildi þegar $x \to -\infty$

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á bili $(-\infty, a)$. Við segjum að $f(x)$ *stefni á tölu* L *þegar* x *stefnir á* $-\infty$, og ritum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt:

Fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ er til tala R þannig að um öll $x < R$ gildir að

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

2.5 Óendanlegt sem markgildi

2.5.1 Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Segjum að $f(x)$ *stefni á* ∞ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé *hversu stórt sem við viljum* bara með því að velja x *nógu nálægt* a.

2.5.2 Skilgreining: Markgildið ∞

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Við segjum að $f(x)$ *stefni á* ∞ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu B er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x sem eru þannig að

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{gildir að} \quad f(x) > B.$$

Aðvörun: Athugið að ∞ er **ekki** tala. Þó að $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ þá er samt sagt að markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ sé ekki til.

2.5.3 Óformleg skilgreining

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Segjum að $f(x)$ *stefni á* $-\infty$ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, ef við getum tryggt að $f(x)$ sé hversu lítið sem við viljum bara með því að velja x nógu nálægt a.

2.5.4 Skilgreining: Markgildið $-\infty$

Gerum ráð fyrir að fall f sé skilgreint á opnu bili umhverfis punktinn a, nema hvað hugsanlega er $f(a)$ ekki skilgreint. Við segjum að $f(x)$ *stefni á* $-\infty$ *þegar* x *stefnir á* a, og ritum $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, ef eftirfarandi skilyrði er uppfyllt.

Fyrir sérhverja tölu B er til tala $\delta > 0$ þannig að um öll x sem eru þannig að

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{gildir að} \quad f(x) < B.$$

Aðvörun: Athugið að $-\infty$ er **ekki** tala. Þó að $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ þá er samt sagt að markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ sé ekki til.

2.6 Samfelldni

Hér skilgreinum við og skoðum seinna grundvallarhugtakið í þessum kafla, sem er *samfelldni*.

2.6.1 Skilgreining: Innri punktur

Látum $A \subseteq \mathbb{R}$ og $x \in A$. Við segjum að x sé *innri punktur* A ef A inniheldur opið bil umhverfis x, það er að segja til er tala $\delta > 0$ þannig að $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A$.

Ef x er ekki innri punktur A og $x \in A$ þá segjum við að x sé *jaðarpunktur* A.

2.6.2 Skilgreining: Samfelldni í punkti

Látum f vera fall og c innri punkt skilgreiningarsvæðis f. Sagt er að f sé *samfellt í punktinum* c ef

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

2.6.3 Setning

Látum f og g vera föll. Gerum ráð fyrir að c sé innri punktur skilgreiningarsvæðis beggja fallanna og að bæði föllin séu samfelld í punktinum c. Þá eru eftirfarandi föll samfelld í c:

1. $f+g$
2. $f-g$
3. fg
4. kf, þar sem k er fasti
5. f/g, ef $g(c) \neq 0$
6. $\big(f(x)\big)^{1/n}$, að því gefnu að $f(c)>0$ ef n er slétt tala og $f(c) \neq 0$ ef $n<0$.

Þessi setning er bein afleiðing af *Setningu 2.3.1*.

2.6.4 Setning: Samskeyting samfelldra falla

Látum g vera fall sem er skilgreint á opnu bili umhverfis c og samfellt í c og látum f vera fall sem er skilgreint á opnu bili umhverfis $g(c)$ og samfellt í $g(c)$. Þá er fallið $f \circ g$ skilgreint á opnu bili umhverfis c og er samfellt í c.

Athugasemd: Ef fall er skilgreint með formúlu og skilgreingamengið er ekki tilgreint sérstaklega, þá er venjan að líta alla þá punkta þar sem formúlan gildir sem skilgreingarmengi fallsins

---

2.6.5 Skilgreining: Samfellt fall

Við segjum að fall f sé *samfellt* ef það er samfellt í sérhverjum punkti skilgreingarmengisins.

Óformlega þýðir þetta að hægt er að teikna graf f án þess að lyfta pennanum frá blaðinu.

2.6.6 Dæmi

Eftirfarandi föll eru samfelld

1. margliður
2. ræð föll
3. ræð veldi
4. hornaföll; $\sin$, $\cos$, $\tan$

5. tölugildisfallið $|x|$

2.6.7 Að búa til samfelld föll

Með því að nota föllin úr dæminu á undan sem efnivið þá getum við búið til fjölda samfelldra fall með því að beita aðgerðunum úr Setningu 2.6.4 og Setningu 2.6.3.

2.6.8 Dæmi

Fallið $\cos(3x+5)$ er samfellt. Margliðan $g(x) = 3x + 5$ og $f(x) = \cos(x)$ eru samfelld föll og þá er samskeytingin $f \circ g(x) = \cos(3x + 5)$ einnig samfellt fall.

2.7 Hægri/vinstri samfelldni

Rifjum upp skilgreininguna á samfelldni.

2.7.1 Skilgreining

Látum f vera fall og c innri punkt skilgreiningarsvæðis f. Sagt er að f sé *samfellt í punktinum* c ef

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

2.7.2 Athugasemd

Þessi skilgreining virkar aðeins fyrir innri punkta skilgreiningarsvæðisins. Þannig að ef ætlunin er að rannsaka samfelldni í jaðarpunktum þá gengur þessi skilgreining ekki. Hins vegar getum við útvíkkað skilgreininguna á samfelldni fyrir hægri og vinstri endapunkta bila með því að einskorða okkur við markgildi frá vinstri og hægri.

2.7.3 Skilgreining: Hægri/vinstri samfelldni

1. Fall f er *samfellt frá hægri í punkti* c ef $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$.

   Hér er gert ráð fyrir að fallið f sé amk. skilgreint á bili $[c, a)$.

2. Fall f er *samfellt frá vinstri í punkti* c ef $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$.

   Hér er gert ráð fyrir að fallið f sé amk. skilgreint á bili $(a, c]$.

Uppfærum nú skilgreininguna á *samfelldu falli*.

2.7.4 Uppfærð skilgreining: Samfellt fall

Gerum ráð fyrir að f sé fall sem er skilgreint á mengi A, þar sem A er sammengi endanlega margra bila. Við segjum að fallið f sé *samfellt* ef það er samfellt í öllum innri punktum skilgreingarmengisins og ef það er samfellt frá hægri/vinstri í jaðarpunktum skilgreingarmengisins, eftir því sem við á.

Athugasemd: Ef fall er samfellt á opnu bili (a, b), og ef $a < c < d < b$, þá er fallið einnig samfellt á bilinu $[c, d]$.

2.8 Eiginleikar samfelldra falla

2.8.1 Setning – Há- og lággildislögmálið

Látum f vera samfellt fall skilgreint á **lokuðu takmörkuðu bili** $[a, b]$. Þá eru til tölur x_1 og x_2 í $[a, b]$ þannig að fyrir allar tölur x í $[a, b]$ er

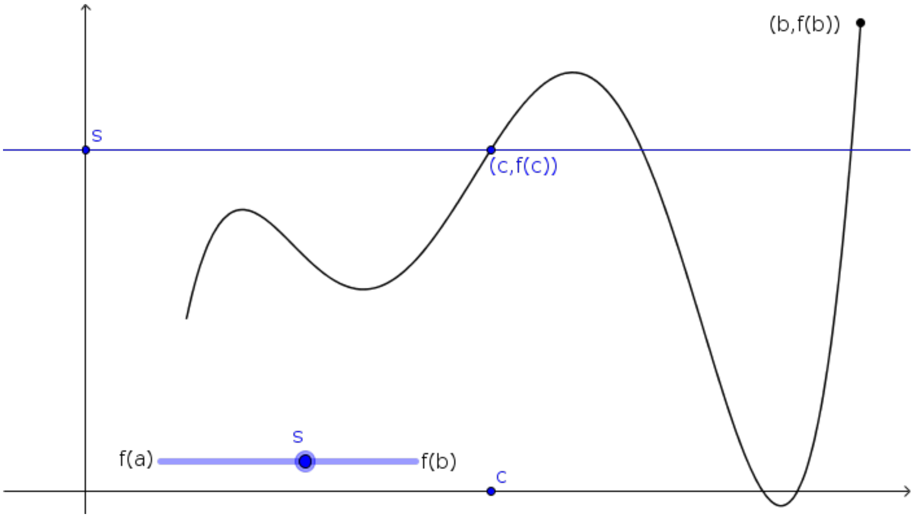
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Þetta þýðir að samfellt fall f á lokuðu og takmörkuðu bili $[a, b]$ tekur bæði hæsta og lægsta gildi á bilinu. Hæsta gildið er þá $f(x_2)$ og lægsta gildið er $f(x_1)$.

Athugasemd: Það er mögulegt að fallið taki há/lággildi sitt í fleiri en einum punkti.

2.8.2 Setning: Milligildissetningin

Látum f vera samfellt fall skilgreint á lokuðu takmörkuðu bili $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að s sé tala sem liggur á milli $f(a)$ og $f(b)$. Þá er til tala c sem liggur á milli a og b þannig að $f(c) = s$.



Sönnun

Í setningunni þá gerum við ráð fyrir að s liggi á milli $f(a)$ og $f(b)$. Til að svona s sé til þá þarf $f(a) \neq f(b)$.

Skoðum tilvikið þegar $f(a) < f(b)$, en þá er $f(a) < s < f(b)$. Tilvikið $f(a) > f(b)$ er nánast eins.

Skilgreinum mengið $S = \{x \in [a, b]; f(x) < s\}$. Þetta mengi er ekki tómt því a er í því og það er takmarkað að ofan af b. Samkvæmt *Frumsendunni um efra mark* þá er til efra mark $c \in [a, b]$ fyrir S. Við viljum sýna að $f(c) = s$.

Ef $f(c) > s$ þá segir samfelldni f okkur að til sé lítið bil kringum c þar sem fallið er stærra en s. Sér í lagi er til tala minni en c sem er ekki í menginu A. Þetta þýðir að c er ekki minnsta efra mark A. Orðum þetta aðeins nákvæmar.

Veljum $0 < \epsilon < f(c)-s$ þá er til $\delta > 0$ þannig að ef $x \in]c-\delta, c+\delta[$ þá er $|f(c)-f(x)| < \epsilon < f(c) - s$. Þetta hefur í för með sér að $f(c) - f(x) < f(c) - s$, það er $f(x) > s$. Þetta þýðir að öll $x \in]c - \delta, c[$ eru "minni" efri mörk fyrir A en c sem gengur ekki og er því mótsögn.

Ef $f(c) < s$ þá segir samfelldni f okkur að til sé lítið bil kringum c þar sem fallið er minna en s. Sér í lagi er til tala stærri en c sem er í menginu A. Þetta þýðir að c er ekki efra mark, því efra mark á að vera stærra eða jafnt og öll stök í A. Þetta er einnig mótsögn.

Þá er bara eftir möguleikinn $f(c) = s$, sem nákvæmlega það sem við vildum.

Athugasemd: Það er möguleiki að það séu fleiri en einn punktur á bilinu þar sem fallið tekur gildið s. Sönnunin hér á undan finnur þann stærsta.

2.8.3 Fylgisetning

Ef $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ er margliða af oddatölu stigi n, þá er til rauntala c þannig að $P(c) = 0$.

Sönnun

Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$. Þá er $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$. Það þýðir að til eru tölur a og b þannig að $P(a) < 0$ og $P(b) > 0$. Með því að beita Milligildissetningunni á fallið P á bilinu $[a, b]$ og með $s = 0$ þá fæst að til er núllstöð á bilinu $[a, b]$.

Ef $a_n < 0$ þá víxlast formerkin á markgildunum hér að ofan en röksemdafærslan er að öðru leyti eins.

KAFLI 3

Afleiður

Athugasemd: Nauðsynleg undirstaða

- *Markgildi*
- *Samfelldni*
- *samskeyting falla*
- *andhverfur falla*
- hornaföll, P7

He felt that his whole life was some kind of dream and he sometimes wondered whose it was and whether they were enjoying it.

– Douglas Adams, The Hitchhiker's Guide to the Galaxy

3.1 Skilgreining á afleiðu

3.1.1 Skilgreining: Afleiða

Látum a vera innri punkt skilgreiningarsvæðis falls f. *Afleiða falls f í punkti a* er skilgreind sem

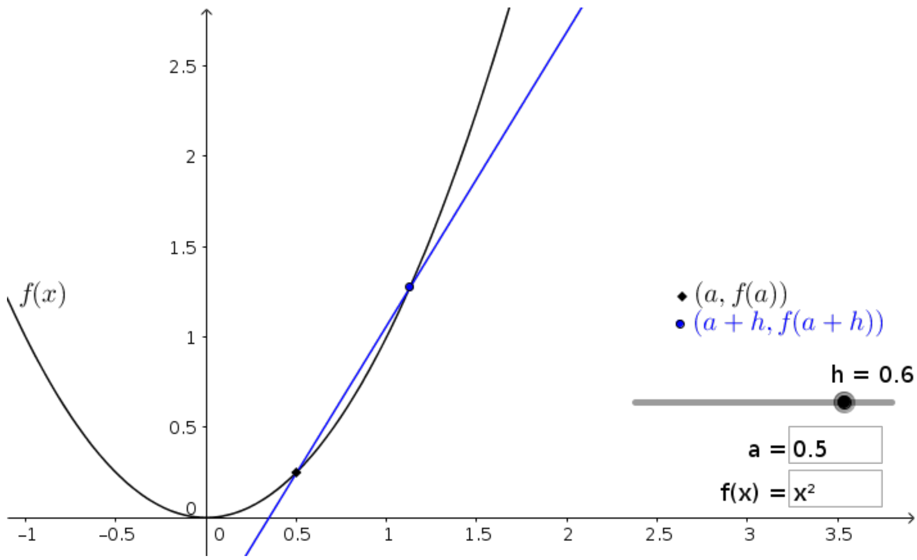
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Ef markgildið er til þá er sagt að fallið f sé *diffranlegt í punktinum a*, en annars er sagt að fallið sé *ekki diffranlegt í punktinum a*.

3.1.2 Dæmi

Fallið $f(x) = x^2$ er diffranlegt í sérhverjum punkti a. Það sést af því að

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 2a+h = 2a.\end{aligned}$$



3.1.3 Setning

Ef fall f er diffranlegt í punkti c þá er f samfellt í punktinum c.

Sönnun

Skoðum markgildið $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Þar sem $h \to 0$ þá verður teljarinn einnig að stefna á 0. Það er $\lim_{h\to 0} f(c+h) - f(c) = 0$, eða $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Þetta má einnig rita $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, sem þýðir að fallið f er samfellt í $x = c$.

Aðvörun: Fall getur verið samfellt í punkti c án þess að það sé diffranlegt í c.

3.1.4 Dæmi

Fallið $f(x) = |x|$ er samfellt. En það er ekki diffranlegt í punktinum $x = 0$. Það sést af því að

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

en

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Þannig að markgildið $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ er ekki til og því er fallið ekki diffranlegt í $x = 0$.

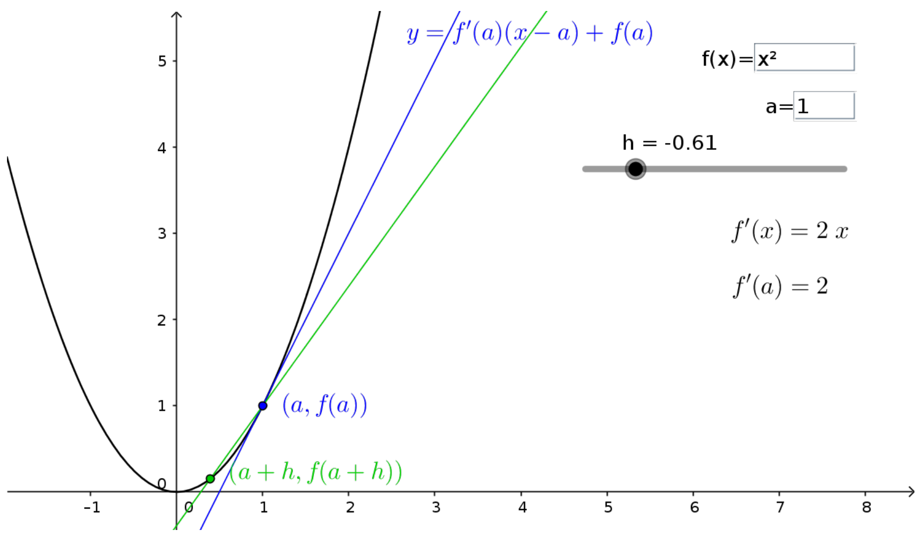
3.1.5 Snertill

Afleiðu falls f í punktinum a fæst með því að taka *sniðil* í gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$, og láta svo h stefna á 0.

Þetta gefur hallatölu *snertilsins* við graf fallsins í punktinum $(a, f(a))$

Jafna snertils við graf fallsins í punktingum a er línan

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

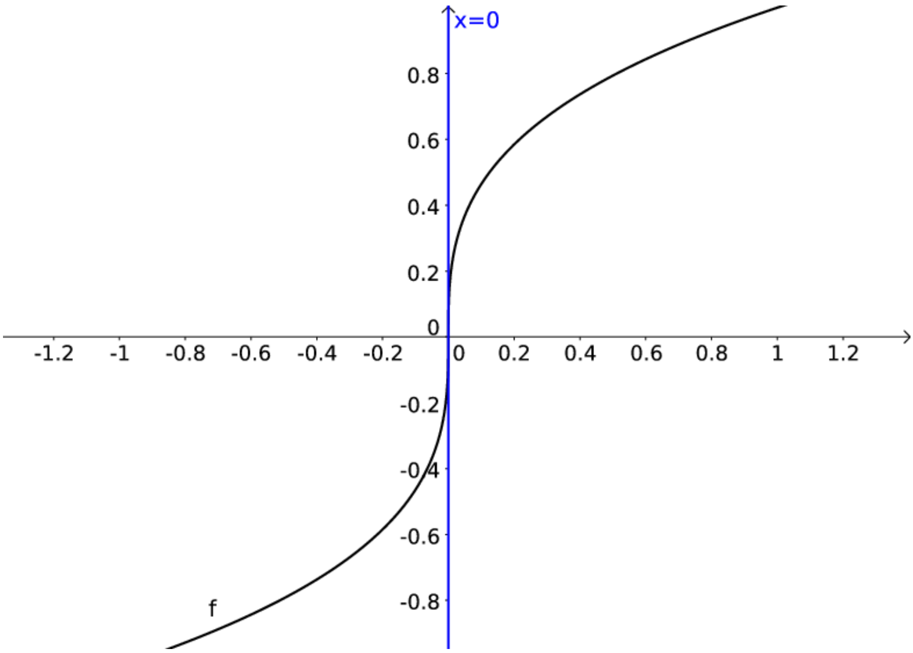


3.1.6 Athugasemd: Hallatalan ∞ er ekki leyfð

Við leyfum ekki $f'(a) = \infty$ eða $f'(a) = -\infty$. Samanber $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ í $a = 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \infty.$$

Hér ætti því jafna snertilsins að vera $x = 0$.



Við viljum að snertillinn sé nálgun við graf fallsins fyrir x nálægt a, lóðrétt lína er gagnslaus nálgun því hún er ekki skilgreind sem fall af x.

3.2 Útvíkkun fyrir lokuð bil

Ef fallið f er skilgreint á lokuðu bili þá getum við skilgreint afleiðuna í endapunktunum með því að taka markgildi frá hægri/vinstri eftir því sem við á.

3.2.1 Skilgreining: Hægri/vinstri afleiða

1. *Hægri afleiða falls f í punkti* x er skilgreind sem

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

2. *Vinstri afleiða falls f í punkti* x er skilgreind sem

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

3.2.2 Setning

Ef x er innri punktur í skilgreiningarsvæði fallsins f þá er f diffranlegt í x þá og því að eins

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

og þá er $f'(x)$ jafnt og markgildin hér fyrir ofan.

Þetta leiðir beint af skilgreiningunum hér á undan og *Setningu 2.2.5*.

3.2.3 Skilgreining: Diffranlegt fall

Látum f vera fall með skilgreiningarsvæði A. Gerum ráð fyrir að A sé sammengi endanlega margra bila. Við segjum að fallið f sé *diffranlegt* ef það er diffranlegt í öllum innri punktum A og diffranlegt frá vinstri/hægri í jaðarpunktum A eftir því sem við á.

3.2.4 Ritháttur

Afleiða falls f er ýmist táknuð með

$$f', \qquad \frac{df}{dx}, \qquad D_x f \qquad \text{eða} \qquad Df.$$

Ef við skrifum $y = f(x)$ þá má einnig tákna hana með

$$y', \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad D_x y \qquad \text{eða} \qquad Dy.$$

3.2.5 Dæmi

Fallið $f(x) = \sqrt{x}$, $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ er diffranlegt á menginu $]0,\infty[$ og afleiðan er gefin með $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ þar. Hins vegar er f ekki diffranlegt í $x = 0$ þrátt fyrir að fallgildið sé vel skilgreint (og fallið samfellt frá hægri) þar.

Ef $x > 0$ þá fæst

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},
\end{aligned}$$

sem segir okkur að $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$.

Í vinstri endapunkti skilgreingarsvæðisins, $x = 0$, þá fæst hins vegar

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,\end{aligned}$$

sem sýnir að fallið er ekki diffranlegt frá hægri í $x = 0$.

3.3 Reiknireglur

3.3.1 Setning

Látum f og g vera föll sem eru diffranleg í punkti x. Þá eru föllin $f+g,\ f-g, kf$ (þar sem k er fasti) og fg diffranleg í punktinum x, og ef $g(x) \neq 0$ þá eru föllin $1/g$ og f/g líka diffranleg í x.

Eftirfarandi formúlur gilda um afleiður fallanna sem talin eru upp hér að framan:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(kf)'(x) = kf'(x)$, þar sem k er fasti
4. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$, ef $g(x) \neq 0$
6. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, ef $g(x) \neq 0$

3.3.2 Nokkrar afleiður

1. $\frac{d}{dx}c = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$

3.3.3 Setning

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Sönnun

Sýnum þetta með þrepun.Tilfellið $n = 1$ er afgreitt hér að ofan (3.3.2 (2)). Gerum ráð fyrir að niðurstaðan gildi fyrir n og sýnum að þá gildi hún einnig fyrir $n+1$,

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = \left(\frac{d}{dx}x\right)x^n + x\frac{d}{dx}x^n = x^n + x\underbrace{n\,x^{n-1}}_{\text{þ.f.}} = (n+1)x^n.$$

3.3.4 Afleiður margliða

Með því að nota setningarnar að ofan þá eigum við ekki í neinum vandræðum með að diffra margliður. *Setning 3.3.1* (i) segir að við getum diffrað hvern lið fyrir sig, liður (iii) í sömu setningu segir að við getum tekið fastana fram fyrir afleiðuna og loks segir *Setning 3.3.3* hvernig við diffrum x^n.

3.3.5 Dæmi: Afleiða margliðu

Finnum afleiðu margliðunnar $p(x) = 4x^3 - 2x + 5$. Nú er

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}p(x) &= \frac{d}{dx}4x^3 - \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}5\\ &= 4\frac{d}{dx}x^3 - 2\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}5 = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 1 + 0 = 12x^2 - 2\end{aligned}$$

3.3.6 Setning: Keðjureglan

Gerum ráð fyrir að f og g séu föll þannig að g er diffranlegt í x og f er diffranlegt í $g(x)$. Þá er samskeytingin $f \circ g$ diffranleg í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

3.3.7 Dæmi

Skoðum föllin $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = 3x^5$. Bæði þessi föll eru diffranleg og afleiðurnar eru $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ og $g'(x) = 15x^4$. Afleiða samskeytingarinnar $f \circ g$ er þá samkvæmt keðjureglunni

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2}(3x^5)^{-1/2} \cdot 15x^4.$$

3.4 Hærri afleiður

3.4.1 Skilgreining

Látum f vera fall. *Afleiðan* f' er fall sem skilgreint er í öllum punktum þar sem f er diffranlegt.

Ef fallið f' er diffranlegt í punkti x þá er afleiða f' í punktinum x táknuð með $f''(x)$ og kölluð *önnur afleiða* f í punktinum x. Líta má á aðra afleiðu f sem fall f'' sem er skilgreint í öllum punktum þar sem f' er diffranlegt.

Almennt má skilgreina n*-tu afleiðu* f, táknaða með $f^{(n)}$, þannig að í þeim punktum x þar sem fallið $f^{(n-1)}$ er diffranlegt þá er $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$.

3.4.2 Dæmi

Ef $f(x) = 3x^2$, þá er

$$f'(x) = 3\frac{d}{dx}x^2 = 3 \cdot 2x = 6x$$

og

$$f''(x) = \frac{d}{dx}6x = 6.$$

3.4.3 Ritháttur

Ritum $y = f(x)$.

Þá má tákna fyrstu afleiðu f með

$$y' = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) \;=\; D_x y = \frac{dy}{dx},$$

aðra afleiðuna með

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = D_x^2 f(x) = D_x^2 y = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

og almennt n-tu afleiðuna

$$\begin{aligned} y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)\right) \\ &= D_x^n f(x) \;=\; D_x^n y = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \end{aligned}$$

Athugasemd: Venja er að rita f''' til að tákna þriðju afleiðu f en afar sjaldgæft að f'''' sé notað til að tákna fjórðu afleiðu f og mun algengara að nota $f^{(4)}$.

3.5 Útgildi

3.5.1 Skilgreining: Útgildi

Við segjum að fall f hafi *staðbundið hágildi* í punktinum x_0 ef til er bil (a, b) umhverfis x_0, sem er þannig að

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \text{fyrir öll } x \in (a, b).$$

Við segjum að fall f hafi *staðbundið lággildi* í punktinum x_0 ef til er bil (a, b) umhverfis x_0, sem er þannig að

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \text{fyrir öll } x \in (a, b).$$

Tölum um að fallið f hafi *staðbundið útgildi* í punktinum x_0 ef það hefur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi þar.

3.5.2 Setning

Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punktinum x_0 og er diffranlegt þá er $f'(x_0) = 0$.

Sönnun

Gerum ráð fyrir að f hafi staðbundið hágildi í punktinum x_0. Þá er $f(x_0) - f(x) \geq 0$ og ef $x < x_0$, þá fæst að $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \geq 0$. Þetta þýðir að

$$\lim_{x \to x_0^-} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0.$$

Eins þá er $f(x_0) - f(x) \geq 0$ og ef $x_0 < x$, þá er $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq 0$. Þetta þýðir að

$$\lim_{x \to x_0^+} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0.$$

Við vitum að markgildið $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ er til þar sem fallið er diffranlegt, það þýðir að markgildin frá hægri og vinstri eru þau sömu. Eina leiðin til þess að það samræmist hægri og vinstri markgildunum hér að ofan er ef

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 0.$$

Aðvörun: Þó að $f'(a) = 0$ þá er ekki víst að a sé staðbundið útgildi.
Til dæmis þá hefur fallið $f(x) = x^3$ ekkert staðbundið útgildi þrátt fyrir að $f'(0) = 0$ ($f'(x) = 3x^2$).

3.6 Hornaföll og afleiður þeirra

3.6.1 Setning

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
3. $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$
4. $\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
5. $\dfrac{d}{dx} \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

3.7 Meðalgildissetningin

3.7.1 Setning Rolle

Látum $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall. Gerum ráð fyrir að g sé diffranlegt í öllum punktum í bilinu (a, b). Ef $g(a) = g(b)$ þá er til punktur c á bilinu (a, b) þannig að $g'(c) = 0$.

Sönnun

Ef $g(x) = c$ er fasti, þá er $g'(x) = 0$. Ef hins vegar g er ekki fasti þá er til $x \in (a, b)$ þannig að $g(x) \neq g(a)$, gerum ráð fyrir að $g(x) > g(a)$ (tilfellið ef $g(x) < g(a)$ gengur nánast eins fyrir sig). Samkvæmt Há- og lággildislögmálinu þá tekur fallið g sitt hæsta gildi í punkti c á bilinu $[a, b]$.Þar sem $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b)$ þá getur c hvorki verið a né b. Þar sem c er útgildi þá segir *Setning 3.5.2* að $g'(c) = 0$.

3.7.2 Meðalgildissetningin

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall. Gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í öllum punktum í bilinu (a, b). Þá er til punktur c í bilinu (a, b) þannig að

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Sönnun

Skilgreinum nýtt fall

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Athugið að h er bara f mínus línan sem liggur í gegnum $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Þetta þýðir að h er diffranlegt og að $h(a) = h(b) = 0$. Þá gefur Setning Rolle að til er c þannig að $h'(c) = 0$.

Nú er

$$h'(x) = f'(x) - \left(0 + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(1 - 0) \right) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

þannig að

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

eða

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Athugasemd: Niðurstöðuna úr *meðalgildissetningunni* má orða svona:

Í einhverjum punkti á bilinu er stundarbreytingin jöfn meðalbreytingunni yfir allt bilið.

3.7.3 Alhæfða meðalgildissetningin

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á lokaða bilinu $[a, b]$ og diffranleg á opna bilinu (a, b). Gerum auk þess ráð fyrir að fyrir allar tölur x í (a, b) sé $g'(x) \neq 0$. Þá er til tala $c \in (a, b)$ þannig að

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3.8 Vaxandi og minnkandi föll

3.8.1 Skilgreining: Vaxandi/minnkandi

Fall f er *vaxandi* á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$ gildir að

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Fall f er *stranglega vaxandi* á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$ gildir að

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Fall f er *minnkandi* á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$ gildir að

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Fall f er *stranglega minnkandi* á bili (a, b) ef um alla punkta x_1 og x_2 á (a, b) þannig að $x_1 < x_2$ gildir að

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Athugasemd: Kennslubókin notar *nondecreasing/nonincreasing* fyrir vaxandi/minnkandi og *increasing/decreasing* fyrir stranglega vaxandi/minnkandi.

Einnig þekkist að nota *increasing/decreasing* og *strictly increasing/decreasing*. Til dæmis er það gert á Wikipedia: Monotonic functions.

3.8.2 Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Þá er f vaxandi þá og því aðeins að $f' \geq 0$.

Sönnun

Byrjum á að gera ráð fyrir að fallið sé vaxandi. Festum punkt x og sýnum að $f'(x) \geq 0$. Þar sem f er vaxandi þá gildir fyrir sérhvert $h > 0$ að

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Þá gildir einnig um markgildið $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$.

Ef hins vegar $h < 0$ þá er $x + h < x$ og því $f(x + h) < f(x)$. Þetta gefur að

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

sem þýðir að $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Og þar af leiðandi er $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$.

Gerum nú ráð fyrir $f' \geq 0$ og sýnum að þá sé fallið vaxandi. Festum tvo punkta $x_1 < x_2$. Ef $f(x_1) > f(x_2)$, það er $f(x_2) - f(x_1) < 0$ þá er

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Samkvæmt meðalgildissetningunni þá er til punktur á bilinu $[x_1, x_2]$ þar sem afleiðan tekur þetta gildi, en það er í mótsögn við að $f'(c) \geq 0$.

3.8.3 Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Þá er f minnkandi þá og því aðeins að $f' \leq 0$.

3.8.4 Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Ef $f' > 0$ þá er f stranglega vaxandi.

3.8.5 Setning

Látum f vera diffranlegt fall. Ef $f' < 0$ þá er f stranglega minnkandi.

Aðvörun: Diffranlegt fall getur verið stranglega vaxandi/minnkandi án þess að afleiðan sé alls staðar stærri/minni en 0. Til dæmis er afleiða $f(x) = x^3$ jöfn 0 í $x = 0$ en fallið er stranglega vaxandi á öllum rauntalnaásnum.

3.8.6 Afleiður fastafalla

Við vitum að ef f er fasti, það er $f(x) = c$, þá er $f'(x) = 0$ fyrir öll x.

Nú fáum við einnig eftirfarandi út frá Setningum *3.8.2* og *3.8.3*:

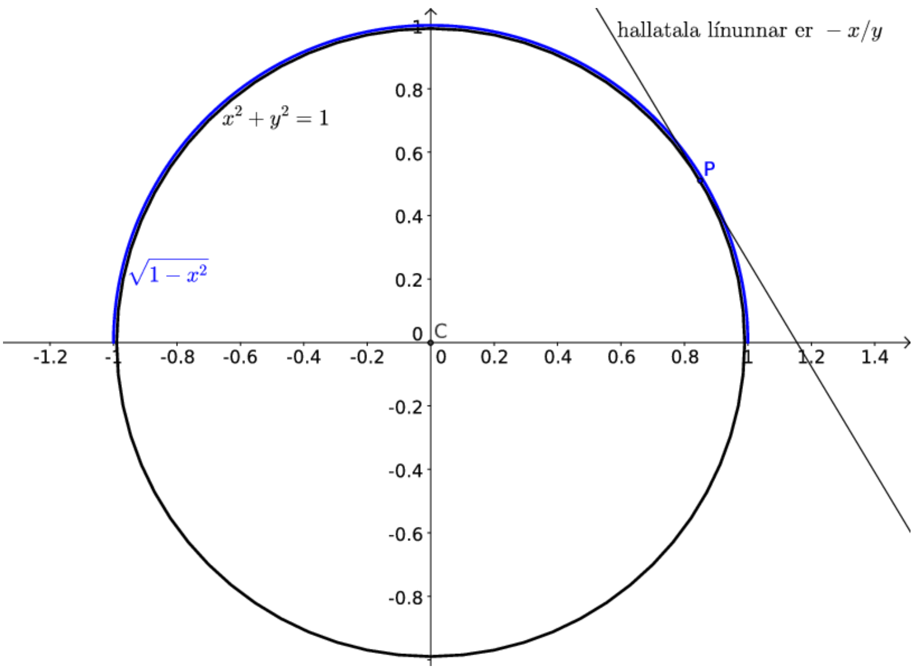
Ef f er diffranlegt fall á bili I sem er þannig að $f'(x) = 0$ á I, þá er f fasti, þ.e. $f(x) = c$ fyrir öll $x \in I$.

3.9 Fólgin diffrun

3.9.1 Dæmi

Jafna hrings með geisla 1 er $x^2 + y^2 = 1$. Við vitum að hægt er að skrifa efri og neðri helminga hans sem föll af y, annars vegar $y = \sqrt{1-x^2}$ og hins vegar $y = -\sqrt{1-x^2}$. Ef við viljum finna snertil við hringinn getum við notað þessi föll. En þar sem við vitum að hægt er að skrifa y sem fall af x þá getum við einnig diffrað jöfnu hringsins beint með aðstoð keðjureglunnar,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2+y^2) &= \frac{d}{dx}1 \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ y\frac{dy}{dx} &= -x \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$



3.9.2 Setning: Andhverfusetningin

Látum feril vera gefinn með $F(x,y) = 0$, þar sem F er diffranlegt í bæði x og y. Í punktum þar sem ferillinn er ekki lóðréttur (þ.e. $\frac{d}{dy}F \neq 0$) þá er hægt að skrifa y sem fall af x og þá fæst af keðjureglunni að

$$\frac{d}{dx}F(x,y) + \frac{d}{dy}F(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

þ.e.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}F(x,y)}{\frac{d}{dy}F(x,y)}.$$

Sjá https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_function_theorem

3.9.3 Með öðrum orðum

Það kemur á sama stað niður að einangra $y = f(x)$, ef það er mögulegt, og finna y' með því að diffra, eins og að diffra $F(x,y) = 0$ og einangra svo $y' = \frac{dy}{dx}$.

3.9.4 Vinnulag

1. Diffrum beggja vegna jöfnuna með tilliti til x, og lítum á y sem fall af x sem við diffrum með aðstoð keðjureglunnar (og gleymum ekki y')
2. Einangrum y'
3. Skiptum y út fyrir $f(x)$.

3.9.5 Setning: Hagnýting á fólginni diffrun

Ef n og m eru heilar tölur þá er

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$

Sönnun

Punktar á grafi fallsins $x^{n/m}$ ákvarðast af jöfnunni $y = x^{n/m}$, það er $y^m = x^n$. Skilgreinum því

$$F(x,y) = x^n - y^m$$

Þar sem $\frac{d}{dx}F(x,y) = nx^{n-1}$ og $\frac{d}{dy}F(x,y) = -my^{m-1}$ þá fæst að

$$\begin{aligned} y' = \frac{d}{dx}y = -\frac{nx^{n-1}}{-my^{m-1}} &= \frac{nx^{n-1}}{m(x^{\frac{n}{m}})^{m-1}} \\ = \frac{n}{m}x^{(n-1)-\frac{n}{m}(m-1)} = \frac{n}{m}x^{n-1-n+\frac{n}{m}} &= \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}. \end{aligned}$$

3.10 Andhverf föll

Rifjum upp að gagntæk vörpun $f : X \to Y$ hefur andhverfu $f^{-1} : Y \to X$ sem uppfyllir að

$$y = f(x) \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad x = f^{-1}(y).$$

Sjá *kafla 1.4*.

3.10.1 Athugasemd

Látum $f : X \to Y$ vera fall sem skilgreint er á mengi X. Gerum ráð fyrir að f sé eintækt. Með því að einskorða bakmengi f við myndmengið $\tilde{Y} = f(X)$ þá verður $f : X \to \tilde{Y}$ gagntækt fall. Þá er til andhverfa $f^{-1} : \tilde{Y} \to X$ sem uppfyllir

$$y = f(x) \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad x = f^{-1}(y).$$

3.10.2 Setning

Fall sem er strangt vaxandi eða strangt minnkandi er eintækt og á sér því andhverfu.

3.10.3 Eiginleikar

1. $y = f^{-1}(x)$ þá og því aðeins að $x = f(y)$.
2. Skilgreingarsvæði f er myndmengi f^{-1}.
3. Myndmengi f^{-1} er jafnt skilgreiningarsvæði f.
4. $f^{-1}(f(x)) = x$ fyrir öll x í skilgreiningarsvæði f.
5. $f(f^{-1}(x)) = x$ fyrir öll x í skilgreiningarsvæði f^{-1}.
6. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarsvæði f, alltsvo $(f^{-1})^{-1} = f$.
7. Graf f^{-1} er speglun á grafi f um línuna $y = x$.

3.10.4 Setning: Afleiða andhverfunnar

Gerum ráð fyrir að fall f hafi andhverfu f^{-1}. Látum x vera á skilgreiningarsvæði f og gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í punktinum $f^{-1}(x)$ og að $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Þá er f^{-1} diffranlegt í punktinum x og

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Athugasemd: Setningin segir okkur sér í lagi að láréttur snertill við f svarar til lóðrétts snertils við f^{-1}.

3.11 Línulegar nálganir

3.11.1 Staðbundnar nálganir

Skoðum diffranlegt fall f í grennd um fastann punkt a. Látum x vera punkt í grennd um a Ef graf fallsins er ekki „mjög sveigt" þá er snertillinn við $(a, f(a))$ næstum samsíða sniðlinum gegnum $(a, f(a))$ og $(x, f(x))$. Það þýðir að

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &\approx f'(a),\\ f(x)-f(a) &\approx f'(a)(x-a),\\ f(x) &\approx f'(a)(x-a)+f(a).\end{aligned}$$

Aðvörun: Athugið að hér er a fast en x breytist.

Athugasemd: Einnig er hægt að skrifa þetta á eftirfarandi hátt. Skilgreinum x = a + Delta x' og $\Delta y = f(x) - f(a)$ þá þýðir þetta að $\Delta y \approx \Delta x f'(a)$.

Það er, breytingin á fallgildinum er um það bil breytingin í breytunni margfaldað við afleiðuna í punktinum.

3.11.2 Skilgreining: Línuleg nálgun

Línuleg nálgun á falli f nálægt a, eða 1. stigs Taylor margliða f í a, er gefin með $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

3.11.3 Setning: Skekkjumat

Skekkjan í nálguninni $E_1(x) = f(x) - P_1(x)$ uppfyllir að til er tala $X \in (a, x)$ þannig að

$$E_1(x) = \frac{f''(X)}{2}(x-a)^2.$$

3.11.4 Skekkjumat fyrir línulegar nálganir

Gerum ráð fyrir að $f''(t)$ sé skilgreint fyrir öll t í opnu bili sem inniheldur bæði a og x. Gerum enn fremur ráð fyrir að m og M séu tölur þannig að fyrir öll $t \in (a, x)$ gildi að $m \leq f''(t) \leq M$. Þá er

$$\frac{m}{2}(x-a)^2 \leq E_1(x) = \frac{f''(X)}{2}(x-a)^2 \leq \frac{M}{2}(x-a)^2,$$

sem gefur að

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{m}{2}(x-a)^2 \leq f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{M}{2}(x-a)^2.$$

3.12 Taylormargliður

Línuleg nálgun á falli er ekkert annað en nálgun með fyrsta stigs margliðu.

Spurningin er því hvort hægt sé að nota margliður af hærra stigi og fá þá betri nálgun?

Hvernig er 0. stigs nálgun á falli?

3.12.1 Skilgreining: Taylormargliða

Gerum ráð fyrir að fall f sé diffranlegt n sinnum í punkti a, þ.e.a.s. við gerum ráð fyrir að n-ta afleiðan $f^{(n)}(a)$ sé skilgreind. *Taylor margliða* af n-ta stigi fyrir f um $x = a$ (oft líka sagt með *miðju* í a) er margliðan

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \\ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Talað er um n-ta stigs Taylor nálgun þegar gildið $P_n(x)$ er notað sem nálgun fyrir $f(x)$.

Skekkjan í nálguninni (munurinn á réttu fallgildi og nálgunargildi) er táknaður með

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

3.12.2 Skekkjumat fyrir Taylor margliður

Gerum ráð fyrir að $n+1$-afleiðan $f^{(n+1)}(t)$ sé skilgreind fyrir öll t í opnu bili sem inniheldur bæði a og x. Þá er til tala X á milli a og x þannig að

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Því má rita

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \\ & \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + E_n(x) \\ =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \\ & \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Aðvörun: Yfirleitt er engin leið til þess að finna X. Hins vegar getum við haft gagn af skekkjumatinu ef við höfum mat á $f^{(n+1)}$.

3.12.3 Fylgisetning

Gerum ráð fyrir að f sé $n+1$ diffranlegt á bili sem inniheldur bæði a og x. Gerum enn fremur ráð fyrir að m og M séu tölur þannig að fyrir öll $t \in (a, x)$ gildi að $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$. Þá er

$$P_n(x) + \frac{m}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \leq f(x) \leq P_n(x) + \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

3.12.4 Skilgreining: O

Við ritum

$$f(x) = O(u(x)) \text{ þegar } x \to a$$

ef til er fasti K og tala $\delta > 0$ þannig að

$$|f(x)| < K|u(x)| \quad \text{fyrir öll} \quad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Einnig ritað

$$f(x) = g(x) + O(u(x)) \text{ þegar } x \to a$$

ef $f(x) - g(x) = O(u(x))$ þegar $x \to a$.

Tilgangur þessa ritháttar er að skilgreina tól sem getur sagt okkur hversu hratt f stefnir á markgildið þegar $x \to a$.

3.12.5 Athugasemd

Við sjáum að

$$f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1}) \text{ þegar } x \to a,$$

því hægt er að nota $K = \frac{\max\{-m, M\}}{(n+1)!}$ í skilgreiningunni hér á undan.

3.12.6 Setning

Gerum ráð fyrir að $Q_n(x)$ sé margliða af stigi ekki hærra en n. Ef $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ þegar $x \to a$ þá er $Q_n(x) = P_n(x)$ þar sem $P_n(x)$ er n-ta stigs Taylor margliða f með miðju í a.

Með öðrum orðum, P_n er sú margliða af stigi $\leq n$ sem nálgar f best.

3.13 Regla l'Hôpital

3.13.1 Regla l'Hôpital, einhliða útgáfa

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á opnu bili (a, b) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in (a, b)$. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Eins má skoða markgildi frá vinstri $x \to a^-$.

Þar sem $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ þá getum við gert ráð fyrir að f og g séu samfelld á bilinu $[a, b)$ og taki gildið 0 í a.

Þá fæst af alhæfðu meðalgildissetningunni fyrir sérhvert $x \in (a, b)$ að til er $c \in (a, x)$ þannig að

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Þegar $x \to a^+$ þá gildir einnig að $c \to a^+$ því c er klemmt á milli a og x. Þar sem markgildið

$$\lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(x)} = L$$

er til, þá er markgildið $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ einnig til og er jafnt og L.

3.13.2 Regla l'Hôpital

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á bilum (x_1, a) og (a, x_2) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll x í þessum bilum. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

3.13.3 Dæmi

Við höfum áður séð að $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$. Skoðum hvernig hægt er að sýna þetta með lítilli fyrirhöfn og reglu l'Hôpital.

Sjáum að $f(x) = \sin(x)$ og $g(x)$ eru diffranleg í grennd um 0 og að $g'(x) = 1 \neq 0$. Þá fæst að

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

3.13.4 Regla l'Hôpital, ∞-útgáfa

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á bilum (x_1, ∞) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in (x_1, \infty)$. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to \infty} g(x) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

3.13.5 Regla l'Hôpital, útgáfa 4

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu diffranleg á bilum (x_1, a) og (a, x_2) og að $g'(x) \neq 0$ fyrir öll x í þessum bilum. Gerum enn fremur ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(Hér má L vera rauntala, ∞ eða $-\infty$.)

Þá er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

KAFLI 4

Torræð föll

Athugasemd: Nauðsynleg undirstaða

- hornaföll
- *andhverfur falla*

We are stuck with technology when what we really want is just stuff that works.

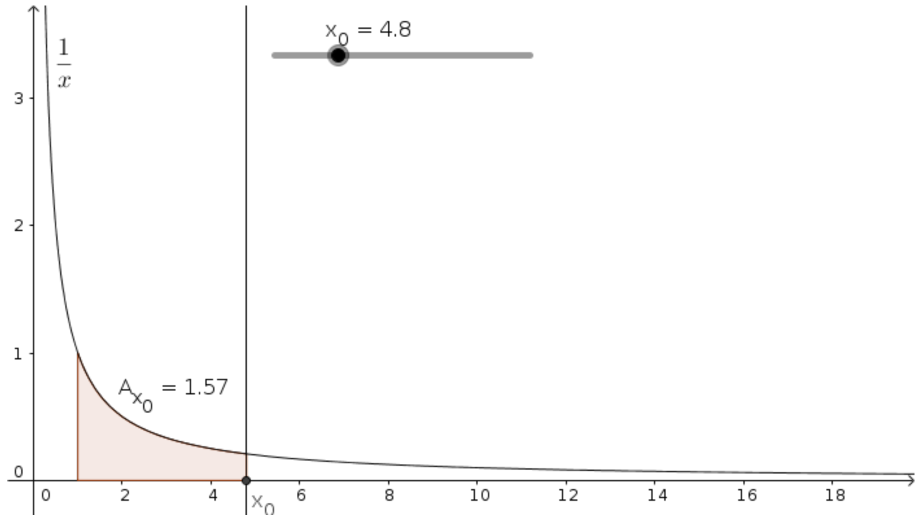
- Douglas Adams, The Salmon of Doubt

4.1 Náttúrlegi logrinn

4.1.1 Skilgreining: Náttúrlegi logrinn

Látum A_{x_0} tákna flatarmál svæðisins sem afmarkast af x-ás, grafinu $y = \frac{1}{x}$ og línunum $x = 1$ og $x = x_0$. Þá skilgreinum við *náttúrlega lograrm* með formúlunni

$$\ln x_0 = \begin{cases} A_{x_0} & \text{ef } x_0 \geq 1, \\ -A_{x_0} & \text{ef } 0 < x_0 < 1. \end{cases}$$



Aðvörun: Fallið $\ln$ er bara skilgreint fyrir jákvæðar rauntölur

4.1.2 Setning

Náttúrlegi logrinn er diffranlegur og afleiðan uppfyllir

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Af þessu fylgir að logrinn er samfellt fall.

4.1.3 Setning

Fyrir allar tölur $x, y > 0$ gildir að:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
3. $\ln(1/x) = -\ln x$
4. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
5. $\ln(x^r) = r\ln x$.

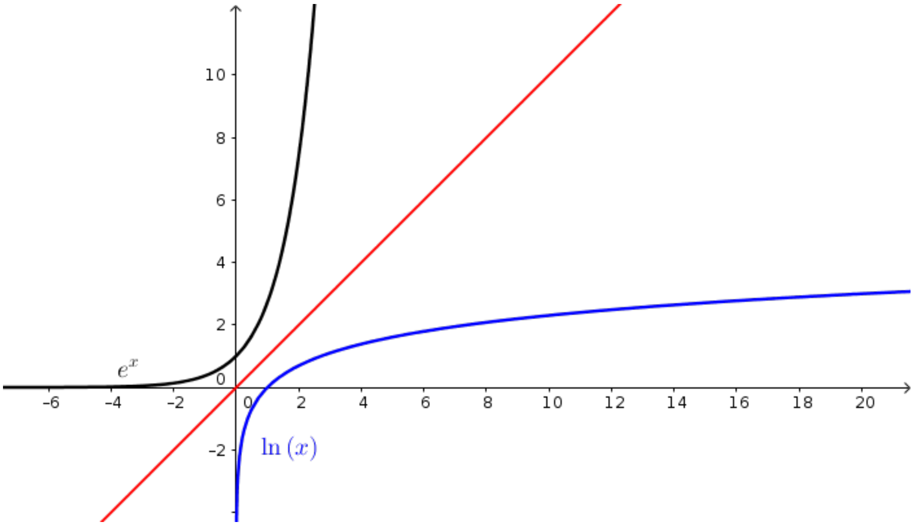
4.2 Veldisvísisfallið

4.2.1 Setning

Fallið $\ln x$ er strangt vaxandi og þar með eintækt.

4.2.2 Skilgreining: Veldisvísisfallið

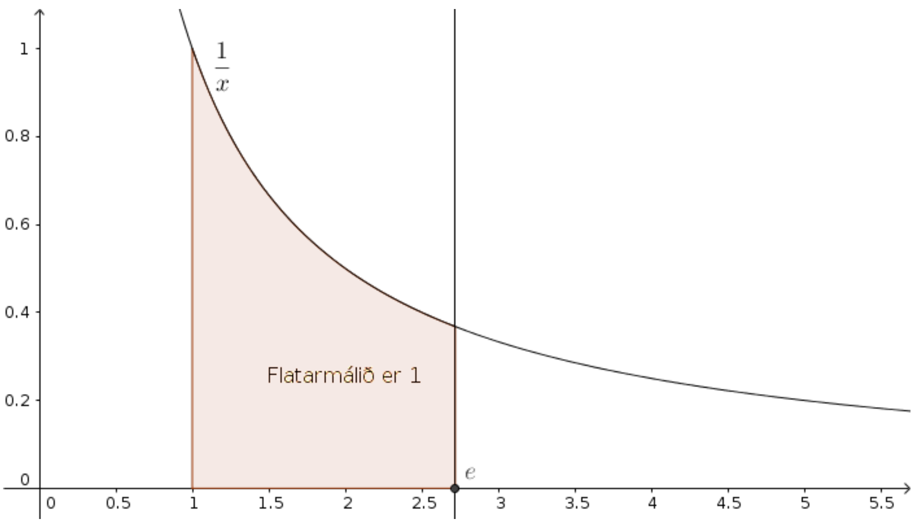
Veldisvísisfallið, $\exp x$, er skilgreint sem andhverfa fallsins $\ln x$. Skilgreiningarsvæði $\exp x$ er jafnt myndmengi $\ln x$ sem er $\mathbb{R}$. Myndmengi $\exp x$ er jafnt skilgreiningarsvæði $\ln x$ sem er bilið $(0, \infty)$.



4.2.3 Skilgreining: Talan e

Skilgreinum töluna með $e = \exp 1$.

Það þýðir að $\ln(e) = 1$, og talan e ákvarðast þess vegna af því að flatarmál svæðisins milli x-ás og grafs $\frac{1}{x}$ á bilinu $[1, e]$ sé 1.



Athugasemd: Hver er munurinn á e^x og $\exp(x)$?

e^x er aðeins skilgreint þegar x er ræð tala, en $\exp(x)$ er skilgreint fyrir allar rauntölur því logrinn, $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, er átækur.

Það er hins vegar hægt að sýna að

$$\exp(x) = \lim_{r \to x, r \text{ ræð tala}} e^r.$$

Því er eðlilegt að rita fyrir rauntölu x, hvort sem hún er ræð eða óræð, að $e^x = \exp x$. Þannig að héðan í frá gerum við engan greinarmun á e^x og $\exp x$, við notum bara það sem lítur betur út fagurfræðilega.

Athugasemd: Athugið að

$$e^{\ln x} = x \text{ fyrir allar tölur } x > 0 \qquad \text{og} \qquad \ln(e^x) = x \text{ fyrir allar tölur } x.$$

4.2.4 Eiginleikar veldisvísisfallsins

Út frá eiginleikum lograns fáum við svo eftirfarandi

1. $e^0 = 1$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$
3. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
4. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
5. $(e^x)^y = e^{xy}$

Athugasemd: Hænan eða eggið? Hér höfum við nálgast $\ln$ og $\exp$ þannig að við byrjum á að skilgreina $\ln$ með heildi (flatarmáli) og finnum svo andhverfu lograns, $\exp$.

Einnig væri mögulegt að byrja á því að sýna að e^x sé vel skilgreint, ekki bara fyrir ræð x heldur einnig óræð. Það myndum við gera með því að nota markgildið $\exp(x) = \lim_{r \to x, r \text{ ræð tala}} e^r$ hér að ofan, og taka þá e^x sem skilgreiningu á $\exp x$ og finna svo andhverfuna, $\ln$.

Báðar þessar aðferðir hafa kosti og galla, en við notum þá fyrri vegna þess að hún gefur myndræna framsetningu á logranum.

4.3 Önnur veldisvísisföll og lograr

4.3.1 Skilgreining

Fyrir tölu $a > 0$ og rauntölu x skilgreinum við

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

4.3.2 Skilgreining

Andhverfa fallsins a^x er kölluð *logri með grunntölu* a og táknuð með $\log_a x$. Fallið $\log_a x$ er skilgreint fyrir öll $x > 0$.

4.3.3 Athugasemd

$$y = \log_a(x) \qquad \text{þá og því aðeins að} \qquad x = a^y.$$

4.3.4 Setning

Fyrir rauntölu $a > 0$ og allar rauntölur x, y gildir að:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{x+y} = a^x a^y$
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
5. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
6. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
7. $(ab)^x = a^x b^x$ (hér er forsenda að $b > 0$).

Fyrir rauntölu $a > 0$ og allar rauntölur x, y gildir að:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a(1/x) = -\log_a x$
5. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a(x^y) = y \log_a x$

7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (hér er forsenda að $b > 0$).

4.4 Eiginleikar veldisvísisfalla og logra

4.4.1 Setning

1. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
2. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
3. $\frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x$
4. $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{(\ln a) x}$

4.4.2 Setning

Ef $a > 0$ þá er

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$
3. $\lim_{x \to -\infty} |x|^a e^x = 0$
4. $\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x) = 0$

Athugasemd: Athugið að setningin að ofan gildir óháð því hversu stórt a er (liðir 1 og 3) eða hversu lítið a er (liðir 2 og 4).

Með öðrum orðum:

- Veldisvísisföll vaxa hraðar en allar margliður.
- Lograr vaxa hægar en allar margliður.

4.5 Andhverfur hornafalla

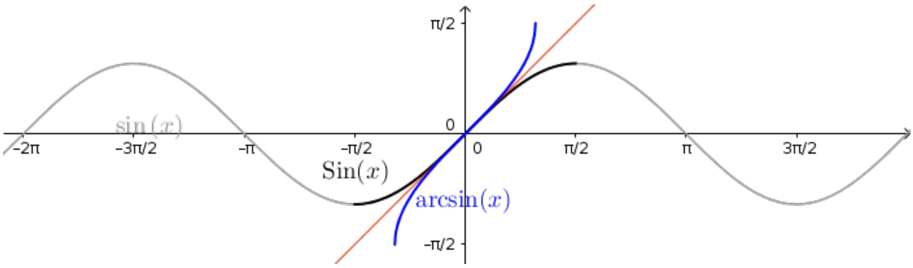
4.5.1 Andhverfa sínus

Fallið $\sin(x)$ skilgreint á öllum rauntalnaásnum er ekki eintækt og á sér því ekki andhverfu.

Við getum hins vegar takmarkað okkur við hálfa lotu, þ.e. skoðum bara $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\sin(x)$ takmarkað við þetta bil táknum við með $\text{Sin}(x)$. Sin er strangt vaxandi og því eintækt á þessu bili, og hefur þar af leiðandi andhverfu.

4.5.2 Skilgreining: arcsin

Andhverfa sínussins, táknuð $\arcsin(x)$ (eða $\sin^{-1}(x)$), er andhverfa Sin og hefur því myndmengið $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ og skilgreiningarmengið $[-1, 1]$.



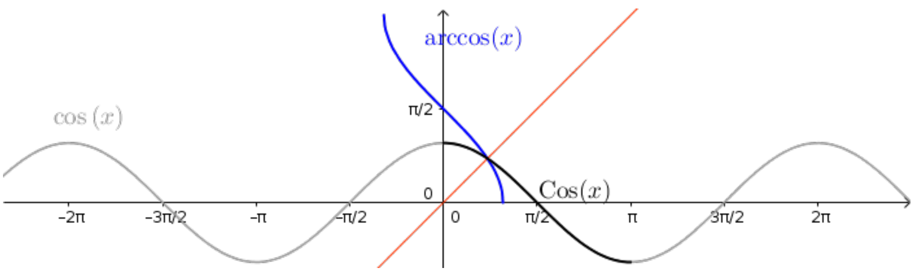
4.5.3 Andhverfa kósínus

Fallið $\cos(x)$ skilgreint á öllum rauntalnaásnum er ekki eintækt og á sér því ekki andhverfu.

Við getum hins vegar takmarkað okkur við hálfa lotu, þ.e. skoðum bara $x \in [0, \pi]$. $\cos(x)$ takmarkað við þetta bil táknum við með Cos(x). Cos er strangt minnkandi og því eintækt á þessu bili, og hefur þar af leiðandi andhverfu.

4.5.4 Skilgreining: arccos

Andhverfa kósínussins, táknuð $\arccos(x)$ (eða $\cos^{-1}(x)$), er andhverfa Cos og hefur því myndmengið $[0, \pi]$ og skilgreiningarmengið $[-1, 1]$.



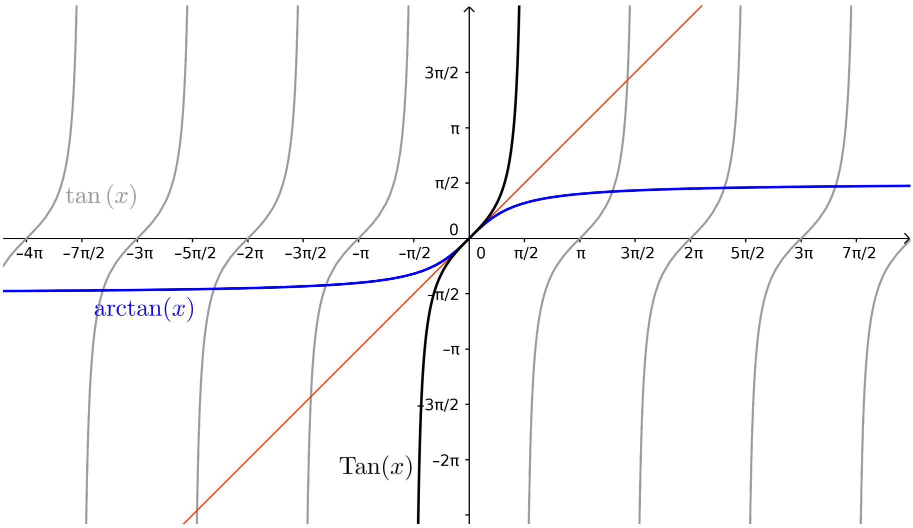
4.5.5 Andhverfa tangens

Fallið $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ skilgreint á $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ er ekki eintækt og á sér því ekki andhverfu.

Við getum hins vegar takmarkað okkur við eina lotu, þ.e. skoðum bara $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Athugið að hér eru endapunktar bilsins ekki með. $\tan(x)$ takmarkað við þetta bil táknum við með $\mathrm{Tan}(x)$. Tan er strangt vaxandi og því eintækt á þessu bili, og hefur þar af leiðandi andhverfu.

4.5.6 Skilgreining: arctan

Andhverfa tangensins, táknuð $\arctan(x)$ (eða $\tan^{-1}(x)$), er andhverfa Tan og hefur því myndmengið $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ og skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$. Þar að auki þá er $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ og $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.



4.5.7 Setning

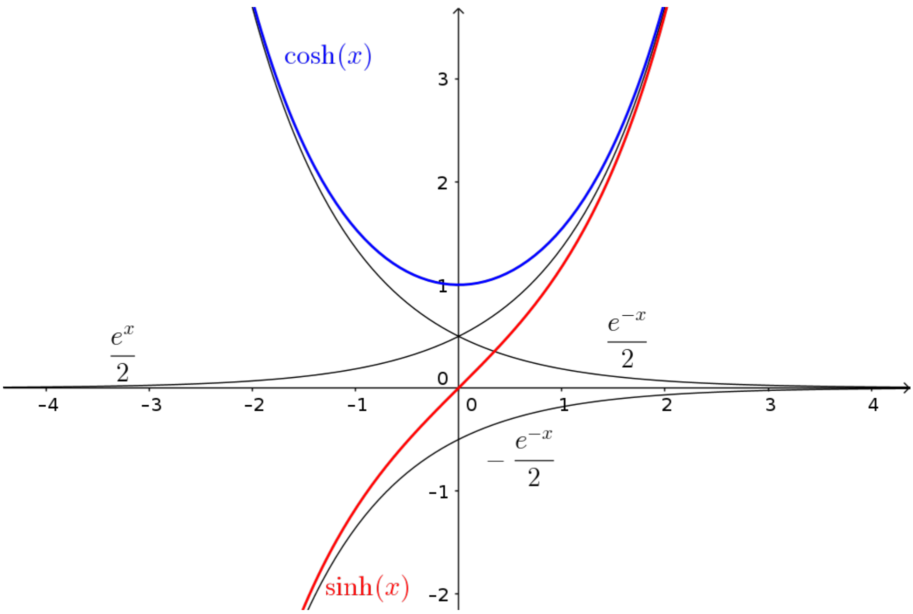
1. $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

4.6 Breiðbogaföll

4.6.1 Skilgreining: cosh og sinh

Við skilgreinum *breiðbogasínus*, sinh, og *breiðbogakósínus*, cosh, með eftirfarandi formúlum

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



4.6.2 Setning

1. $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$
2. $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$

Aðvörun: Það er enginn mínus í afleiðu cosh eins og í afleiðu cos.

4.6.3 Setning

1. $\sinh(0) = 0$ og $\cosh(0) = 1$
2. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

3. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
4. $\cosh(-x) = \cosh(x)$
5. $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
6. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
7. $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1$
8. $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

4.6.4 Skilgreining: tanh

Við skilgreinum *breiðbogatangens* með

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

4.6.5 Setning

1. $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
2. $\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
3. $\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = 1$
4. $\lim_{x\to-\infty}\tanh(x) = -1$

4.7 Andhverfur breiðbogafalla

4.7.1 Andhverfa breiðbogasínussins og breiðbogatangensins

Af Setningum 4.6.1 (2) og 4.6.5 (2) sjáum við að afleiður $\sinh$ og $\tanh$ eru jákvæðar og föllin því stranglega vaxandi. Þau eru þar með eintæk og eiga sér andhverfur.

4.7.2 Skilgreining

Andhverfa breiðbogasínussins, táknuð arsinh(x) (eða $\sinh^{-1}(x)$), er andhverfa $\sinh$ og hefur myndmengið $(-\infty, \infty)$ og skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$. Þar að auki þá er

$$\text{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Andhverfa breiðbogatangensins, táknuð $\operatorname{artanh}(x)$ (eða $\tanh^{-1}(x)$), er andhverfa $\tanh$ og hefur myndmengið $(-\infty, \infty)$ og skilgreiningarmengið $(-1, 1)$. Þar að auki þá er

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

4.7.3 Andhverfa breiðbogakósínussins

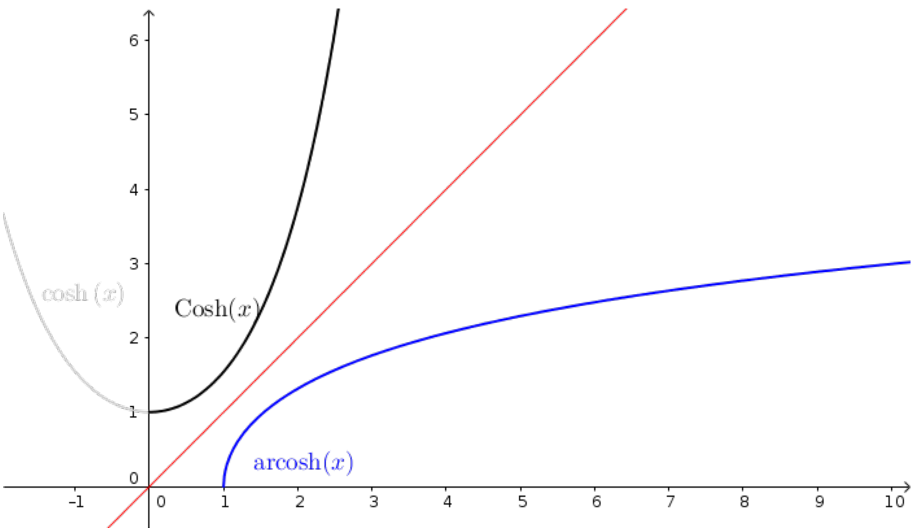
Þar sem $\cosh$ er ekki eintækt fall þá verðum við að beita svipuðum aðferðum eins og þegar við fundum $\arcsin$ til þess að finna andhverfu þess. Það er, við þurfum að takmarka skilgreiningarmengi þess.

Táknum $\cosh(x)$ takmarkað við bilið $[0, \infty)$ með $\operatorname{Cosh}(x)$. Fallið Cosh er strangt vaxandi og því eintækt á þessu bili, og á sér þar með andhverfu.

4.7.4 Skilgreining

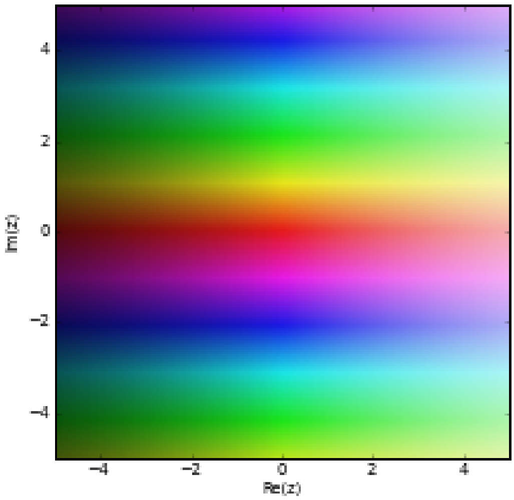
Andhverfa breiðbogakósínussins, táknuð $\operatorname{arcosh}(x)$ (eða $\cosh^{-1}(x)$), er andhverfa Cosh og hefur því myndmengið $[0, \infty)$ og skilgreiningarmengið $[1, \infty)$. Þar að auki þá er

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$



4.7.5 Í framtíðinni

Við höfum séð að veldisvísisfallið og logrinn tengjast breiðbogaföllunum töluvert og það sama á við um hornaföllin. Seinna, nánar tiltekið í Stærðfræðigreiningu III, þá sjáið þið að hornaföllin og breiðbogaföllin eru bara mismunandi hliðar á veldisvísisfallinu.


4
2
0
−2
−4
Im(z)
−4
−2
0
2
4
Re(z)

KAFLI 5

Könnun falla

Athugasemd: Nauðsynleg undirstaða

- *vaxandi/minnkandi föll*
- *afleiður*
- *útgildi*
- ójöfnur

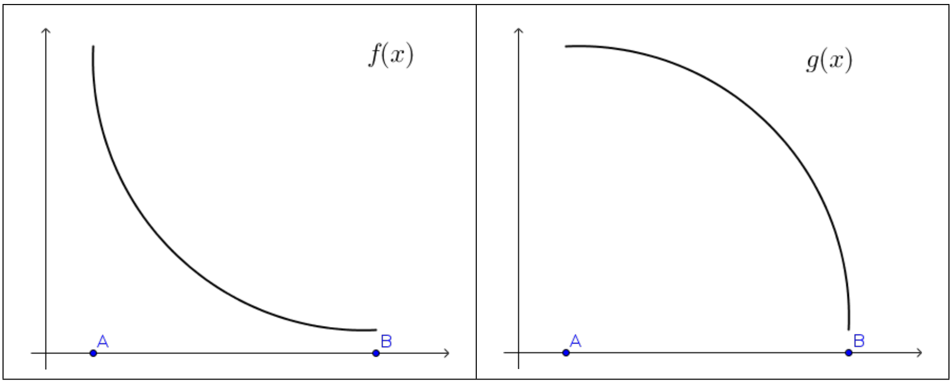
"The Guide says there is an art to flying", said Ford, "or rather a knack. The knack lies in learning how to throw yourself at the ground and miss."

- Douglas Adams, Life, the Universe and Everything

5.1 Inngangur

Aðvörun: Frávik frá bókinni
Það sem á eftir kemur er eitt af fáum atriðum þar sem mín nálgun og skilgreiningar eru frábrugðnar þeim í kennslubókinni eftir Adams.

5.1.1 Hver er munurinn?

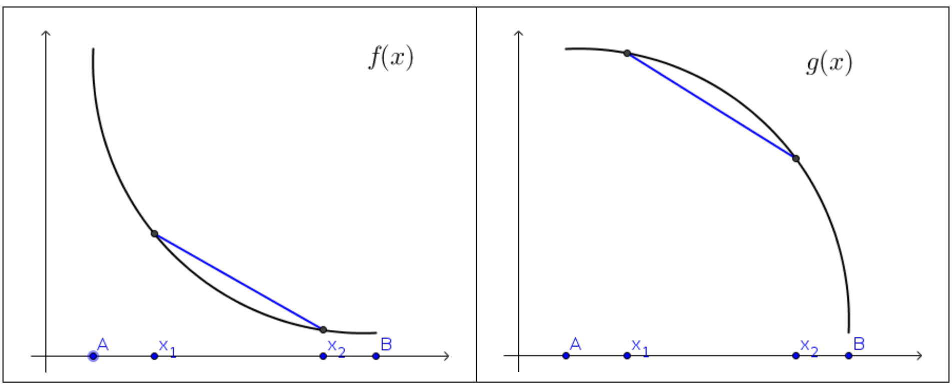


Skoðum föllin tvö að ofan, þau eru augljóslega ekki eins, þannig að spurningin er hvernig getum við lýst muninum á þeim?

Þau hugtök sem við höfum skoðað hingað til geta ekki greint á milli þessara falla:

1. Þau hafa sama skilgreiningarmengið $[A, B]$
2. Þau taka sömu gildin í endapunktunum
3. Þau hafa bæði hágildi í A og lággildi í B
4. Þau eru bæði samfelld og diffranleg
5. Þau eru bæði minnkandi (neikvæð afleiða)

5.1.2 Drögum sniðil



Ef við veljum nú tvo punkta á $[A, B]$ af handahófi, köllum þá x_1 og x_2, og drögum línu (sniðil) í gegnum punktana á gröfum f og g þá sjáum við að sniðillinn lendir fyrir neðan g en ofan f.

Athugum nú að sérhvern punkt á milli x_1 og x_2 getum við skrifað á forminu $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, þar sem $\alpha \in [0, 1]$. En $\alpha = 0$ gefur x_2 og $\alpha = 1$ gefur x_1.

Þá er y-hnit punktsins á sniðlinum með þetta x-hnit gefið með

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2), \qquad \alpha \in [0,1],$$

á fyrri myndinni og

$$\alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2), \qquad \alpha \in [0,1],$$

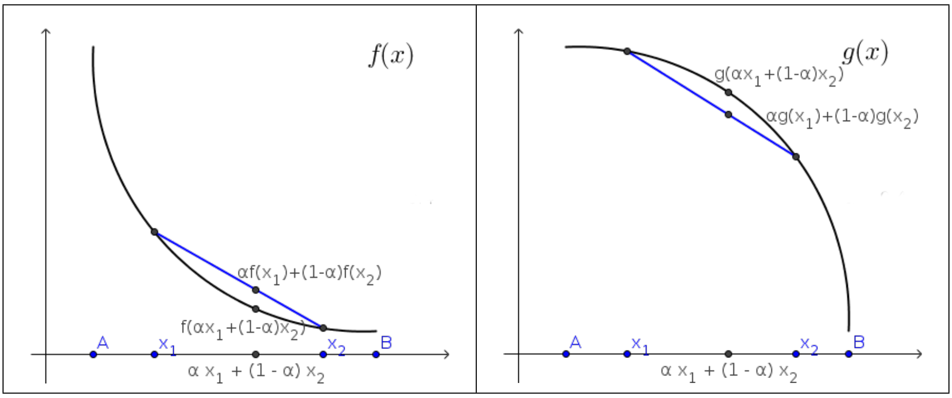
á myndinni fyrir g.

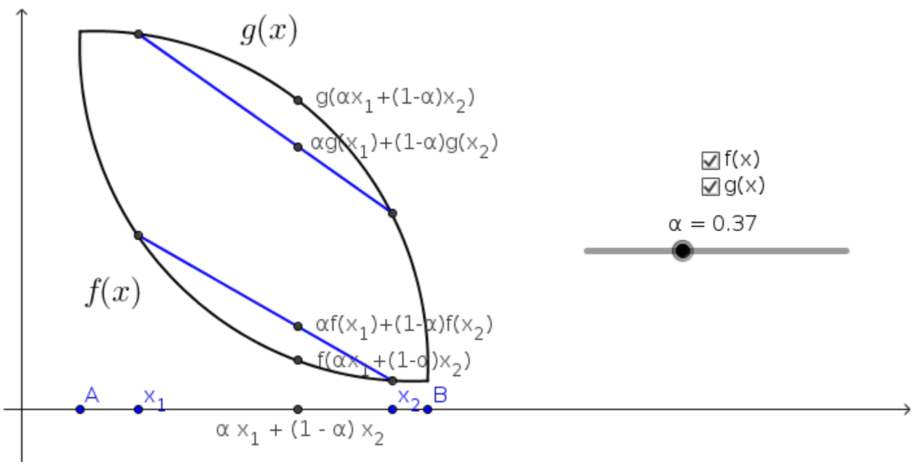
Ef graf f liggur fyrir neðan sniðilinn þá þýðir það að fallgildi f í punktunum $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ liggur fyrir neðan punktinum á sniðlinum, það er

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Eins, ef graf g liggur fyrir ofan sniðilinn þá gildir að

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2).$$





5.2 Kúpni

5.2.1 Skilgreining: Kúpt/hvelft

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera fall.

1. Segjum að fallið f sé *kúpt** ef um alla punkta $x_1, x_2 \in [a, b]$ og sérhverja tölu $0 \le \alpha \le 1$ gildir að

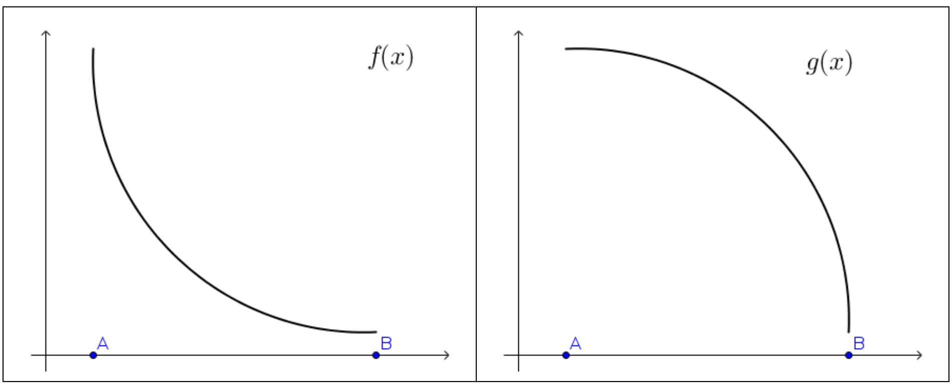
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

2. Segjum að fallið f sé *hvelft* ef um alla punkta $x_1, x_2 \in [a, b]$ og sérhverja tölu $0 \le \alpha \le 1$ gildir að

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \ge \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Athugasemd: Hér erum við komin með hugtak sem getur útskýrt muninn á myndunum í byrjun kaflans, f er kúpt og g er hvelft.

5.3 Auðkenning á kúpni með afleiðum



5.3.1 Athugasemd

Ef við skoðum afleiður fallanna f og g betur þá sjáum við að:

1. Afleiða f er mjög neikvæð nálægt A og nálgast svo 0 í B, það er afleiðan er vaxandi.
2. Afleiða g er u.þ.b. 0 í A og minnkar svo þegar við nálgumst B, það er afleiðan er minnkandi.

Með öðrum orðum

$$(f')' = f'' \geq 0 \qquad \text{og} \qquad (g')' = g'' \leq 0.$$

5.3.2 Setning

Fyrir tvídiffranlegt fall f þá er eftirfarandi jafngilt

1. f er kúpt
2. f' er vaxandi
3. $f'' \geq 0$

5.3.3 Setning

Fyrir tvídiffranlegt fall g þá er eftirfarandi jafngilt

1. g er hvelft
2. g' er minnkandi
3. $g'' \leq 0$

Aðvörun: Hvort fall er kúpt eða hvelft er **algjörlega óháð** því hvort það er vaxandi eða minnkandi. Til dæmis er $f(x) = x^2$ kúpt en það er vaxandi þegar $x > 0$ og minnkandi þegar $x < 0$.

Aðvörun: Föll eru ekki alltaf annað hvort kúpt eða hvelft alls staðar. Alveg eins og það eru til föll sem eru sums staðar vaxandi og sums staðar minnkandi, þá eru mörg föll sums staðar kúpt og sums staðar hveld. Þetta á til dæmis við um hornaföllin.

5.4 Beygjuskilapunktar

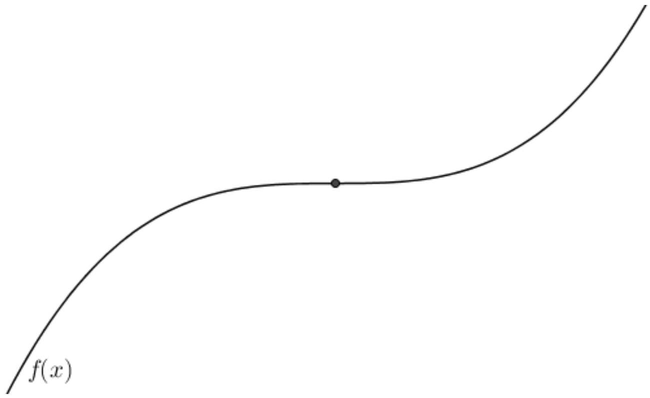
5.4.1 Skilgreining

Punktur $(x_0, f(x_0))$ er sagður vera *beygjuskilapunktur* grafsins $y = f(x)$ ef

1. grafið hefur snertilínu í x_0, og
2. grafið er kúpt öðru megin við x_0 og hvelft hinum megin við x_0.

5.4.2 Setning

Ef fallið f er tvídiffranlegt þá er punkturinn x_0 beygjuskilapunktur fallsins f ef og aðeins ef $f''(x_0) = 0$ og f'' skiptir um formerki í x_0.



5.5 Útgildi

5.5.1 Hvar á að leita útgilda

Útgildi skoðuðum við í kafla 3.5, en nú ætlum við að skoða hvernig önnur afleiðan nýtist til að finna og flokka útgildi.

Punktar sem koma til greina fyrir staðbundin útgildi falls f eru

1. punktar x_0 þar sem $f'(x_0) = 0$,
2. punktar x_0 þar sem $f'(x_0)$ er ekki skilgreint,
3. þeir endapunktar skilgreiningarmengisins þar sem fallið er skilgreint.

5.5.2 Hágildi/lágildi út frá formerki afleiðu

Látum x_0 vera innri punkt á skilgreiningarsvæði f. Gerum ráð fyrir að f sé diffranlegt í öllum punktum í einhverju bili utan um x_0 og að $f'(x_0) = 0$.

1. Ef formerki f' breytist úr plús í mínus í x_0 (farið frá vinstri til hægri eftir rauntalnaásnum) þá er staðbundið hágildi í x_0.
2. Ef formerki f' breytist úr mínus í plús í x_0 þá er staðbundið lággildi í x_0.
3. Ef formerki f' breytist ekki í x_0 þá er hvorki há- né lággildi í x_0.

5.5.3 Útgildi og önnur afleiðan

1. Ef $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) < 0$ þá er x_0 staðbundið hágildi.
2. Ef $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) > 0$ þá er x_0 staðbundið lággildi.

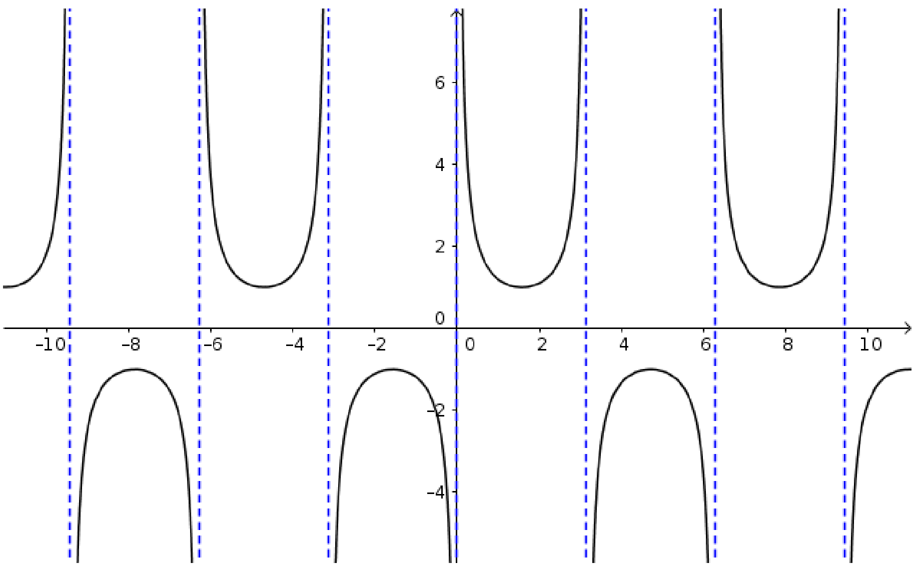
Aðvörun: Athugið að ef $f''(x_0) = 0$ þá getur x_0 verið hvort sem er staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða beygjuskilapunktur.

5.6 Aðfellur

5.6.1 Skilgreining: Lóðrétt aðfella

Fallið f hefur *lóðrétta aðfellu* í punktinum a ef $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ og/eða $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Aðfellan er þá línan $x = a$.

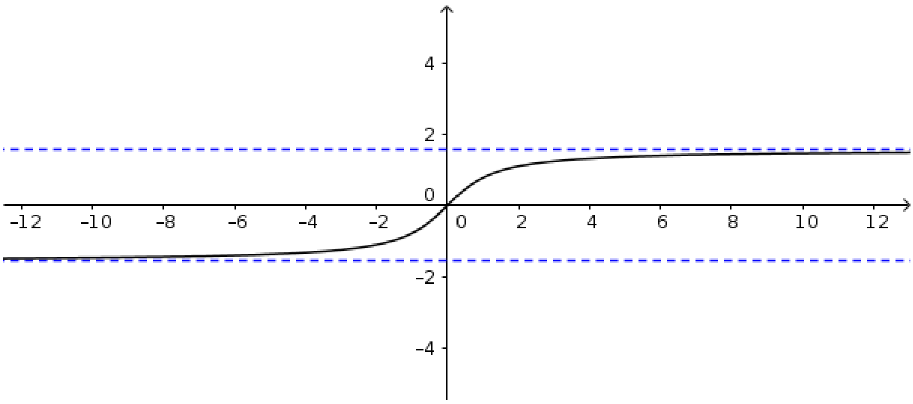


Fallið $\frac{1}{\sin(x)}$ *hefur lóðréttar aðfellur í öllum punktum þar sem* $\sin(x) = 0$.

5.6.2 Skilgreining: Lárétt aðfella

Fallið f hefur *lárétta aðfellu* ef $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ og/eða $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Aðfellan er þá línan $y = L$.

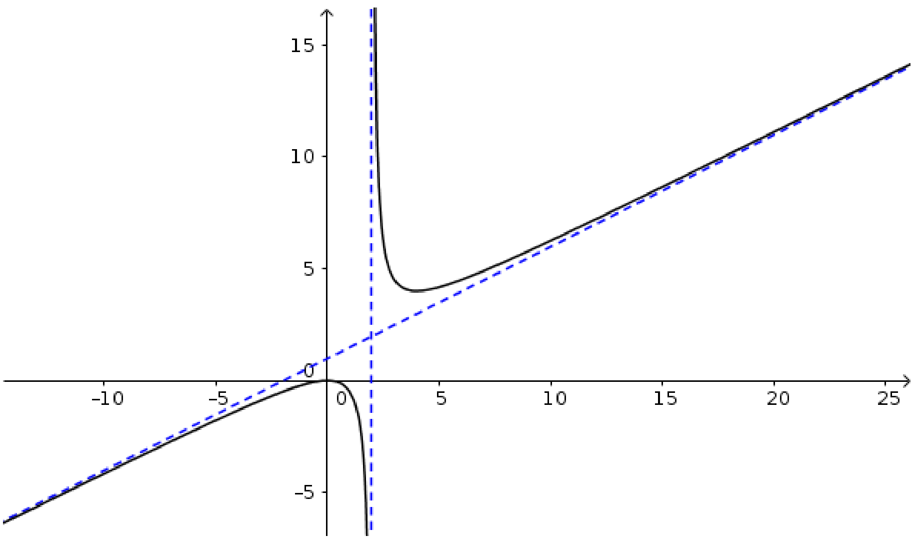


Fallið $\arctan(x)$ *hefur tvær láréttar aðfellur,* $y = \frac{\pi}{2}$ *og* $y = \frac{-\pi}{2}$.

5.6.3 Skáfella

Fallið f hefur *skáfellu* ef til eru a og b þannig að $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax - b = 0$ og/eða $\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax - b = 0$.

Skáfellan er þá línan $y = ax + b$.



Fallið $\frac{x^2}{2x-4}$ *hefur skáfelluna* $y = \frac{1}{2}x + 1$ *auk lóðréttu aðfellunnar* $x = 2$.

5.7 Að teikna graf falls

Þegar teikna á graf fallsins f er gagnlegt að fara í gegnum atriðin á eftirfarandi lista:

1. Ákvarðið f' og f'' og þáttið útkomurnar ef hægt er.
2. **Kannið f til að ákvarða skilgreiningarmengi þess auk eftirfarandi eiginleika:**
   (a) Lóðréttar aðfellur. (Leitið að rótum nefnara)
   (b) Láréttar aðfellur og skáfellur. (Finnið $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.)
   (c) Samhverfa (er f jafnstætt eða oddstætt?)
   (d) Skurðpunktar við ása (punktar með hnit $(x, 0)$ eða $(0, y)$), endapunktar skilgreiningamengisins eða aðrir punktar á grafinu þar sem einfalt er að reikna út bæði hnitin.
3. **Kannið f' til að ákvarða eftirfarandi:**
   (a) Útgildispunkta.
   (b) Punktar þar sem f' er ekki skilgreint (sérstöðupunktar, endapunktar skilgreiningarmengis f og lóðréttar aðfellur)
   (c) Bilin þar sem f' er jákvætt og neikvætt. Það er góð hugmynd að setja þessar upplýsingar fram í töflu. Á töfluna má svo líka merkja inn niðurstöður um hvar f er vaxandi og minnkandi og hvort útgildispunktar séu staðbundin hágildi eða lággildi.
4. **Kannið f'' til að ákvarða eftirfarandi:**
   (a) Punktar þar sem $f''(x) = 0$.
   (b) Punktar þar sem f'' er ekki skilgreint (sérstöðupunktar, endapunktar skilgreiningarmengis f og lóðréttar aðfellur, e.t.v. auk fleiri punkta þar sem f' er skilgreint en ekki f''.)
   (c) Bilin þar sem f'' er jákvætt og neikvætt og f þar af leiðandi kúpt og hvelft. Hér er gagnlegt að útbúa töflu.
   (d) Beygjuskilapunktar.

5.8 Útgildisverkefni

5.8.1 Markmiðið

Útgildisverkefni snúast um það að hámarka eða lágmarka tiltekna stærð, t.d. verð, rúmmál, lengd, ... Þá þarf að finna (helst diffranlegt) fall fyrir stærðina sem við höfum áhuga á hámarka/lágmarka en þó með þeim skorðum sem vandamálið setur okkur.

Til þess að þetta sé mögulegt má fallið bara vera háð einni breytu og það þarf helst að vera diffranlegt.

Þá getum við fundið útgildi með þeim aðferðum sem við erum búin að koma okkur upp.

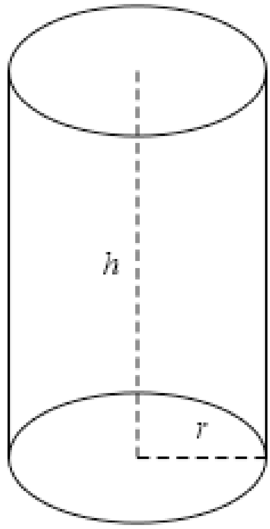
5.8.2 Að leysa útgildisvandamál

Sjá einnig bls. 260 (8. útg.), 259 (7. útg.) eða 238 (6. útg.) í kennslubókinni.

1. Lesið vandamálið vandlega og áttið ykkur á því hvert það er og hvað á að finna.
2. Teiknið mynd ef mögulegt er, hún gefur oft upplýsingar um skorður sem hjálpa okkur að útbúa fallið.
3. Skilgreinið aukabreytur.
4. Skilgreinið fallið, sem fall af einni eða fleiri breytum.
5. Finnið skorður (jöfnur) sem hægt er að stinga inn í fallið
6. Skrifið fallið sem fall af einni breytu.
7. Finnið útgildi
8. Dragið ályktanir af niðurstöðunni, og athugið hvort hún sé raunhæf miðað við verkefnið (rúmmál á ekki að vera neikvætt og þess háttar).

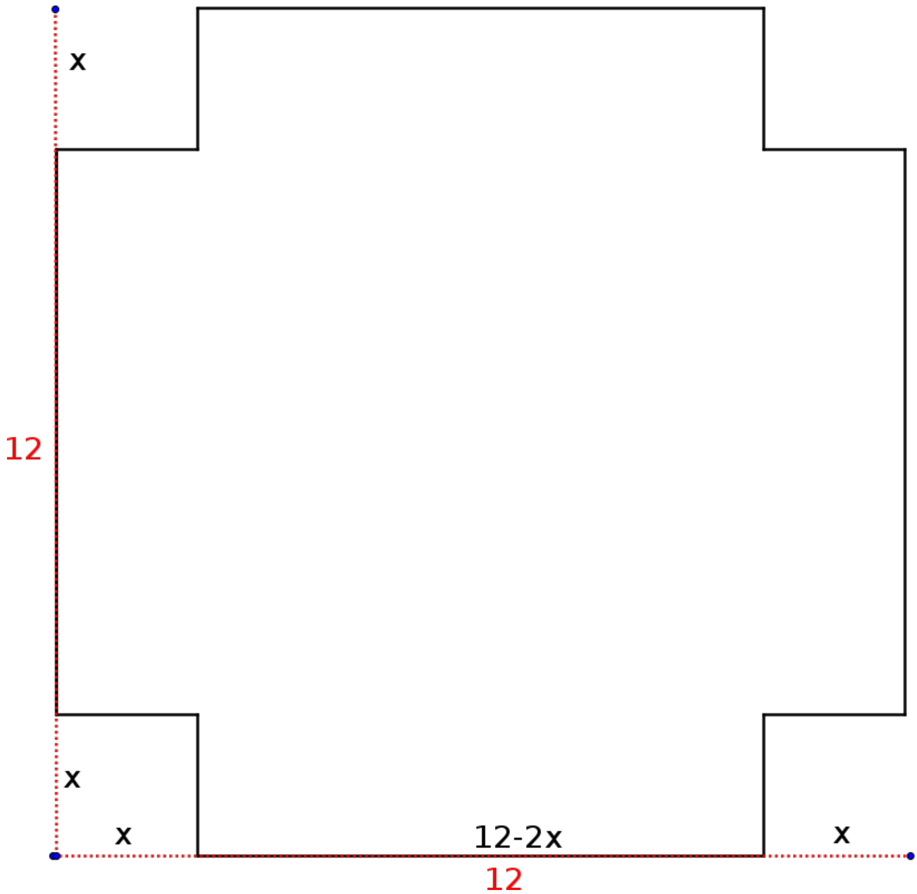
5.8.3 Dæmi: Gosdós

Hvert er hagkvæmasta formið á sívalningslaga gosdós?



5.8.4 Dæmi: Kassi

Hvernig er stærsti (mesta rúmmálið) loklausi kassinn sem hægt er búa til úr örk sem er 12×12?


x
12
x
x
12-2x
x
12

KAFLI 6

Heildun

Athugasemd: Nauðsynleg undirstaða

- markgildi
- afleiður
- keðjureglan
- reiknireglur fyrir afleiður

It can be very dangerous to see things from somebody else's point of view without the proper training.

- Douglas Adams, The Ultimate Hitchhiker's Guide : Five Complete Novels and One Story

6.1 Heildun

6.1.1 Óformleg skilgreining á heildi jákvæðs falls

Látum $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vera fall þannig að $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [a, b]$.

Þegar *heildið* $\int_a^b f(x)\, dx$ er skilgreint er útkoman úr því flatarmál svæðisins sem liggur á milli x-ás og grafs fallsins (og afmarkast til vinstri af línunni $x = a$ og til hægri af línunni $x = b$).

Ef heildið $\int_a^b f(x)\, dx$ er skilgreint þá segjum við að fallið f sé *heildanlegt* yfir bilið $[a, b]$.

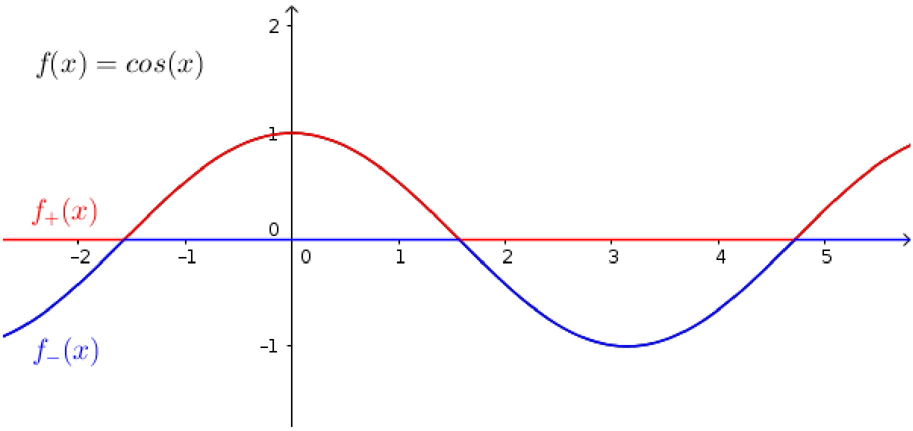
Tölurnar a og b kallast *heildismörk* heildisins.

6.1.2 Skilgreining

Látum f vera fall. Skilgreinum föllin f_+ og f_-, sem bæði hafa sama skilgreiningarsvæði og f, með

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ef } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{ef } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{ef } f(x) < 0. \end{cases}$$

Athugið að $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.



6.1.3 Óformleg skilgreining á heildi falls

Takmarkað fall f er *heildanlegt* yfir bilið $[a, b]$ ef bæði föllin f_+ og f_- eru heildanleg yfir bilið $[a, b]$. Ef fallið f er heildanlegt þá skilgreinum við heildi þess með formúlunni

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx.$$

Athugasemd: Flatarmálið sem er undir x-ás reiknast neikvætt.

6.2 Undir- og yfirsummur

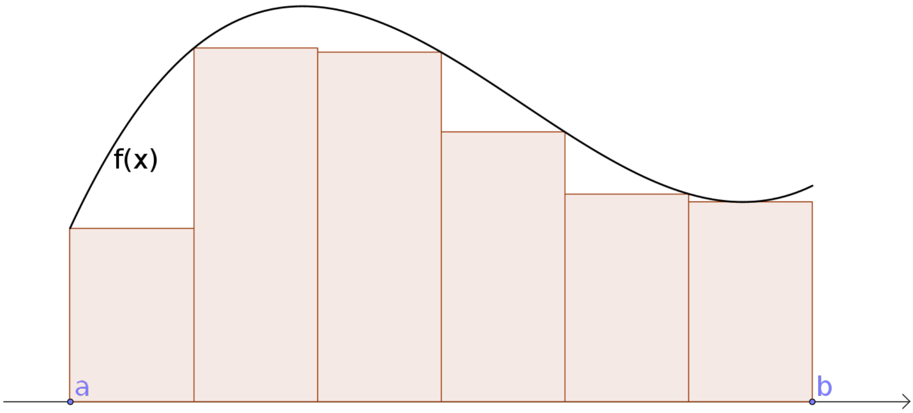
6.2.1 Dæmi: Að finna heildi

Hvernig getum við fundið flatarmálið $\int_a^b f(x)\,dx$?

Svar: Við þurfum að nálga flatarmálið með formum sem hafa þekkt flatarmál, til dæmis rétthyrningum.

6.2.2 Skilgreining: Undirsumma

Skiptum bilinu $[a, b]$ í n parta. Á hverjum parti komum við fyrir rétthyrning sem liggur undir grafi fallsins, þ.e. hæðin á honum er lággildi fallsins á þessum tiltekna parti.



Látum u_k vera flatarmál rétthyrninganna, þar sem $k = 1, \ldots, n$.

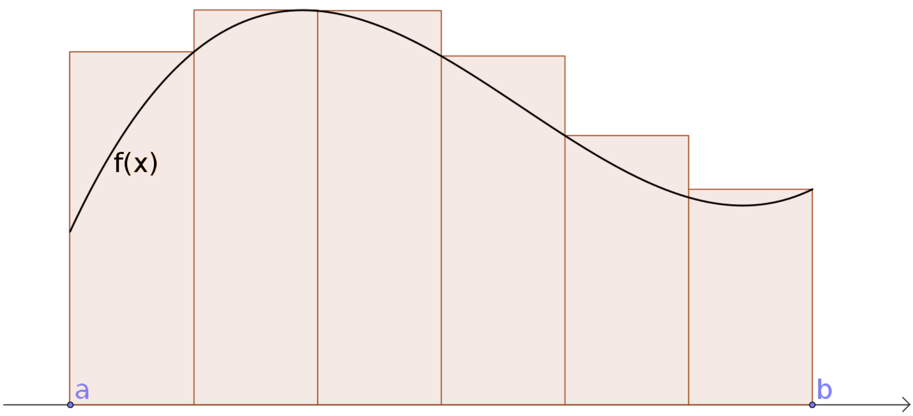
Við köllum flatarmál allra rétthyrninganna *undirsummu* fyrir heildið og táknum hana með $U(n)$, það er $U(n) = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Þá er augljóslega $U(n) \leq \int_a^b f(x)\, dx$.

Þegar n stækkar þá fáum við betri og betri nálgun á heildinu.

6.2.3 Skilgreining: Yfirsumma

Skiptum bilinu $[a, b]$ í n parta. Á hverjum parti komum við fyrir rétthyrning sem er þannig að hæðin á honum er hágildi fallsins á þessum tiltekna parti.



Táknum flatarmál hans með y_k, þar sem $k = 1, \ldots, n$. Við köllum summu flatarmáls allra rétthyrninganna *yfirsummu* fyrir heildið og táknum hana með $Y(n)$, það er $Y(n) = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Þá fæst að $\int_a^b f(x)\,dx \leq Y(n)$.

Þegar n stækkar þá fáum við betri og betri nálgun á heildinu.

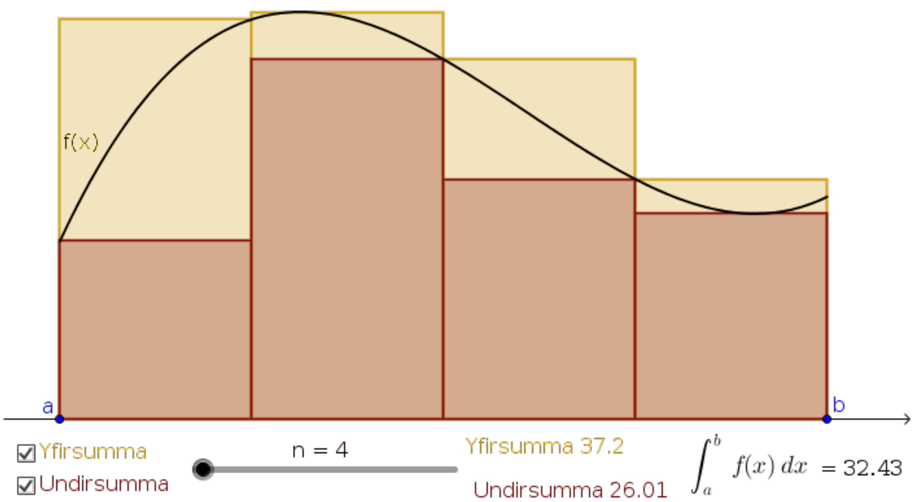
6.2.4 Skilgreining: Heildi

Ef til er **nákvæmlega ein** tala I þannig að

$$U(n) \leq I \leq Y(n),$$

fyrir allar undirsummur $U(n)$ og yfirsummur $Y(n)$ þá er fallið f heildanlegt á $[a,b]$ og

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Athugasemd: Við sögðum ekkert um það hvernig við skiptum bilinu $[a,b]$ í n parta. Það má gera hvernig sem er, það er ekki nauðsynlegt að þeir séu allir jafn stórir. Eina krafan er að stærð allra parta stefni á 0 þegar $n \to \infty$.

Athugasemd: Við erum ekki bundin af því að skoða rétthyrninga sem með hæð sem er há/lággildi fallsins á hverjum parti, t.d. má taka miðgildið á hverjum parti, gildið í hægri endapunkti eða gildið í vinstri endapunkti.

Niðurstaðan þegar $n \to \infty$ verður hins vegar alltaf sú sama, þ.e. við nálgumst heildið.

Athugasemd: Einnig er mögulegt að nálga heildið með öðrum formum en rétthyrningum, t.d.trapisum, og hentar það hugsanlega betur í tölulegum útreikningum.

6.3 Eiginleikar heildisins

6.3.1 Setning

1. Ef fallið f er samfellt á bilinu $[a, b]$ þá er f heildanlegt yfir bilið $[a, b]$.
2. Einhalla fall skilgreint á bili $[a, b]$ er heildanlegt.

6.3.2 Setning

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. Þá er

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

6.3.3 Skilgreining: Heildismörkunum snúið við

Ef fallið f er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$ (hér er $a < b$) þá skilgreinum við

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

6.3.4 Setning

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
   (Hér er náttúrlega forsenda að öll heildin séu skilgreind.)

6.3.5 Setning

Látum f og g vera föll sem eru heildanleg yfir bilið $[a, b]$ og látum A og B vera fasta. Þá er

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx.$$

Með öðrum orðum, heildun er línuleg aðgerð.

6.3.6 Setning

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að um öll $x \in [a, b]$ gildi að $f(x) \geq 0$. Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

6.3.7 Fylgisetning

1. Látum f og g vera föll sem eru heildanleg yfir bilið $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að um öll $x \in [a, b]$ gildi að $f(x) \leq g(x)$. Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. Ef m og M eru fastar þannig að um öll $x \in [a, b]$ gildir að $m \leq f(x) \leq M$ þá er

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

6.3.8 Setning

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bil $[-a, a]$.

1. Ef fallið f er oddstætt þá er

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

2. Ef fallið f er jafnstætt þá er

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

6.3.9 Skilgreining

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$. *Meðalgildi* fallsins f á bilinu $[a, b]$ er skilgreint sem

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

6.3.10 Setning: Meðalgildissetning fyrir heildi

Gerum ráð fyrir að fallið f sé **samfellt** á bilinu $[a, b]$. Þá er til punktur c í bilinu $[a, b]$ þannig að

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

Það er að segja, til er punktur c í bilinu $[a, b]$ þannig að $f(c) = \bar{f}$.

6.4 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

6.4.1 Skilgreining og setning: Fall skilgreint með heildi

Látum f vera fall sem er heildanlegt yfir bil $[a, b]$. Fyrir $x \in [a, b]$ skilgreinum við $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Fallið F er samfellt á $[a, b]$.

Aðvörun: Athugið að t er breytan sem er heildað með tilliti til, en x er haldið föstu á meðan. t hverfur svo þegar búið er að reikna heildið.

6.4.2 Setning: Undirstöðusetning stærðfræðigreiningar, fyrri hluti

Gerum ráð fyrir að fallið f sé samfellt á bili I og a sé punktur í I. Fyrir x í I skilgreinum við $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Þá er fallið F diffranlegt og

$$F'(x) = f(x)$$

fyrir öll $x \in I$.

6.5 Stofnföll

6.5.1 Skilgreining: Stofnfall

Látum f vera fall sem er skilgreint á bili I. Fall G kallast *stofnfall* fyrir f á bilinu I ef $G'(x) = f(x)$ fyrir öll x í I.

6.5.2 Fylgisetning

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili I. Þá er til stofnfall fyrir f samkvæmt *fyrri hluta undirstöðustöðusetningarinnar*.

6.5.3 Hjálparsetning

Ef F og G eru hvor tveggja stofnföll fyrir f á bilinu I, þá er til fasti C þannig að $F(x) = G(x) + C$ fyrir öll x í I.

Sönnun: Þar sem

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

fyrir öll $x \in I$ þá er $G(x) - F(x) = C$ fasti.

6.5.4 Setning: Undirstöðusetning stærðfræðigreiningar, seinni hluti

Ef f er samfellt fall á bilinu I og G er eitthvert stofnfall fyrir f þá er

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a).$$

Athugasemd: Það skiptir ekki máli hvaða stofnfall er valið í setningunni að ofan, heildið er alltaf það sama.

6.5.5 Ritháttur

Þegar F er stofnfall fyrir f þá ritum við

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

eða

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

6.6 Aðferðir við að reikna stofnföll

Skilgreiningin á heildi með undir- og yfirsummum er gagnleg til að útskýra og sanna eiginleika heilda en hún er ekki mjög góð til þess að reikna heildi. Því er nauðsynlegt að koma sér upp tólum sem henta betur til þess. Ef þau duga ekki þá þurfum við að grípa til tölulegra reikninga.

6.6.1 Verkfærin

Helstu tæknilegu aðferðirnar við að finna stofnföll eru:

1. *Innsetning* / breytuskipti.
2. *Hlutheildun*.
3. *Stofnbrotaliðun*.

6.6.2 Athugasemd

Gerum ráð fyrir að F sé stofnfall f, þ.e.

$$F(x) = \int f(t)\,dt.$$

Svo að

$$F'(x) = f(x).$$

Látum nú g vera fall og skoðum fallið $F \circ g$. Þá fæst samkvæmt *keðjureglunni* að

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

eða, með því að heilda beggja vegna jafnaðarmerkisins,

$$F(g(x)) + C = \int f(g(x))g'(x)\,dx.$$

6.6.3 Innsetning

Ef við viljum reikna $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ þá dugar okkur að geta fundið $\int f(x)\,dx$.

6.6.4 Notkun á innsetningu

Setjum $u = g(x)$. Þá er

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \qquad \text{eða} \qquad du = g'(x)\,dx.$$

Svo

$$\underbrace{\int f(g(x))g'(x)\,dx}_{\text{Viljum finna}} = \int f(u)\,du \underbrace{=}_{\text{Getum reiknað}} F(u) + C = \underbrace{F(g(x)) + C}_{\text{Svarið}}.$$

> **Aðvörun:** Ef við breytum heildi með tilliti til x í heildi með tilliti til annarar breytistærðar u þá verða **öll** x að hverfa úr heildinu við breytinguna.

6.6.5 Notkun á innsetningu með mörkum

Með mörkum þá verður innsetningin svona

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f(u)\,du = [F(u)]_{x=a}^{x=b} \\ &= [F(g(x))]_{x=a}^{x=b} = F(g(b)) - F(g(a)).\end{aligned}$$

Ef $A = g(a)$ og $B = g(b)$ þá getum við eins skrifað þetta svona

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f(u)\,du = \int_A^B f(u)\,du \\ &= [F(u)]_A^B = F(B) - F(A).\end{aligned}$$

6.6.6 Öfug innsetning

Reiknum $\int f(x)\,dx$, með því að finna hugsanlega flóknara heildi sem við getum reiknað

$$\int f(g(u))g'(u)\,du.$$

Aðvörun: Athugið að hér þurfum við að finna heppilegt g. Það er ekki alltaf augljóst hvaða g er hægt að nota.

6.6.7 Notkun á öfugri innsetningu

Setjum $x = g(u)$. Þá er

$$\frac{dx}{du} = g'(u) \qquad dx = g'(u)\,du.$$

Sem gefur að

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{Viljum finna}} = \int f(g(u))g'(u)\,du \underbrace{=}_{\text{Getum reiknað}} F(u) + C = \underbrace{F(g^{-1}(x)) + C}_{\text{Svarið}}.$$

6.6.8 Öfug innsetning með mörkum

Við öfuga innsetningu þarf að passa að breyta mörkunum. Það er

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x=a}^{x=b} f(g(u))g'(u)\,du \\ &= [F(u)]_{x=a}^{x=b} = [F(g^{-1}(x))]_a^b = F(g^{-1}(b)) - F(g^{-1}(a)).\end{aligned}$$

Eða ef $a = g(A)$ og $b = g(B)$ (það er $g^{-1}(a) = A$ og $g^{-1}(b) = B$),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(g(u))g'(u)\,du = [F(u)]_A^B = F(B) - F(A).$$

6.6.9 Hlutheildun

Munum að ef u og v eru föll þá er $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Notum Undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar og heildum beggja vegna jafnaðarmerkisins, þá fæst

$$u(x)v(x) = \int (u(x)v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Það er

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

6.6.10 Hlutheildun með mörkum

Eða með mörkum

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

(Athugið að þá verða engin x í svarinu.)

6.6.11 Stofnbrotaliðun

Viljum heilda rætt fall $\frac{P(x)}{Q(x)}$ þar sem $P(x)$ og $Q(x)$ eru margliður. Stofnbrotaliðun gengur út á það að skrifa ræða fallið $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sem summu af liðum á forminu

$$\frac{1}{ax+b}, \quad \frac{x}{x^2+bx+c} \quad \text{og} \quad \frac{1}{x^2+bx+c},$$

því svona liði getum við heildað hvern fyrir sig.

Nánar er fjallað um stofnbrotaliðun í kafla 6.2 í kennslubókinni.

6.7 Óeiginleg heildi

6.7.1 Skilgreining: Óeiginleg heildi I

Látum f vera samfellt fall á bilinu $[a, \infty)$. Skilgreinum

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Fyrir fall f sem er samfellt á bili $(-\infty, b]$ skilgreinum við

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx.$$

Heildi eins og þau hér að ofan kallast *óeiginlegt heildi*.

Í báðum tilvikum segjum við að óeiginlega heildið sé samleitið ef markgildið er til, en ósamleitið ef markgildið er ekki til.

Aðvörun: Ef f stefnir ekki á 0 þegar $x \to \infty$ þá er heildið ekki samleitið. En jafnvel þó fallið stefni á 0 þá er ekki víst að heildið sé samleitið, samanber eftirfarandi dæmi.

6.7.2 Dæmi

Heildið $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ er samleitið ef $p > 1$ en ósamleitið ef $p \leq 1$.

Ef $p > 1$ þá er

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}.$$

6.7.3 Skilgreining: Óeiginleg heildi I, framhald

Látum f vera fall sem er samfellt á öllum rauntalnaásnum.

Heildi af gerðinni $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ er sagt samleitið ef bæði heildin $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ og $\int_0^\infty f(x)\,dx$ eru samleitin og þá er

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Athugasemd: Það skiptir ekki máli í hvaða punkti heildinu er skipt í tvennt, það má velja aðra tölu heldur en 0, útkoman verður alltaf sú sama.

6.7.4 Skilgreining: Óeiginleg heildi II

Látum f vera samfellt fall á bilinu $(a, b]$ og hugsanlega ótakmarkað í grennd við a. Skilgreinum

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Fyrir fall f sem er samfellt á bili $[a, b)$ og hugsanlega ótakmarkað í grennd við b þá skilgreinum við

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Í báðum tilvikum segjum við að óeiginlega heildið sé samleitið ef markgildið er til en ósamleitið ef markgildið er ekki til.

6.7.5 Dæmi

Heildið $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ er samleitið ef $p < 1$ en ósamleitið ef $p \geq 1$. Ef $p < 1$ þá er

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}.$$

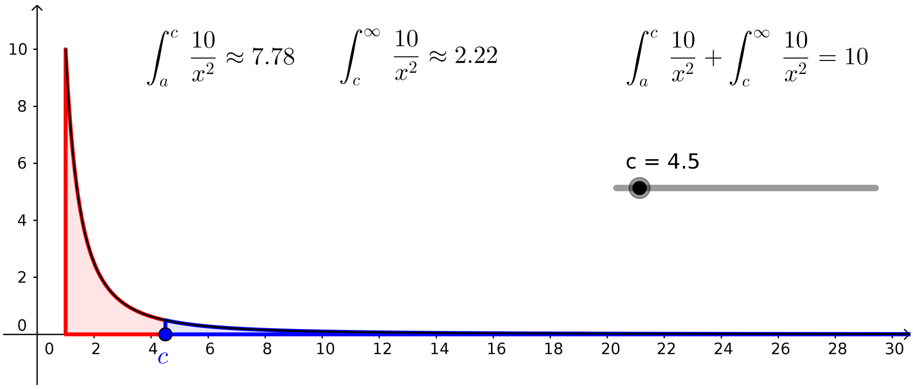
6.7.6 Skilgreining

Látum f vera samfellt fall á bili (a, ∞) og ótakmarkað í grennd við a. Látum c vera einhverja tölu þannig að $a < c < \infty$.

Heildið $\int_a^\infty f(x)\,dx$ er sagt vera samleitið ef bæði heildin $\int_a^c f(x)\,dx$ og $\int_c^\infty f(x)\,dx$ eru samleitin og þá er

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$$

Athugasemd: Það er sama hvað tala c er valin hér að ofan, útkoman verður alltaf sú sama.



6.7.7 Setning

Látum $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á (a, b) og að um öll $x \in (a, b)$ gildi að $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

1. Ef heildið $\int_a^b g(x)\, dx$ er samleitið þá er heildið $\int_a^b f(x)\, dx$ líka samleitið og

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. Ef heildið $\int_a^b f(x)\, dx$ er ósamleitið þá er heildið $\int_a^b g(x)\, dx$ líka ósamleitið.

KAFLI 7

Rúmmál, massi og massamiðja

The fact that we live at the bottom of a deep gravity well, on the surface of a gas covered planet going around a nuclear fireball 90 million miles away and think this to be normal is obviously some indication of how skewed our perspective tends to be.

- Douglas Adams, The Salmon of Doubt: Hitchhiking the Galaxy One Last Time

7.1 Rúmmál, lengd og flatarmál

7.1.1 Rúmmál rúmskika

Rúmskiki D liggur á milli plananna $x = a$ og $x = b$. Táknum með $A(x)$ flatarmál þversniðs D við plan sem sker x-ásinn í x og er hornrétt á x-ás. Ef fallið $A(x)$ er heildanlegt yfir bilið $[a, b]$ þá er rúmmál D jafnt og

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

7.1.2 Rúmmál keilu

Látum F vera takmarkaðan samanhangandi bút af plani og látum T vera punkt sem liggur ekki í planinu. Látum A tákna flatarmál F og h tákna fjarlægð topppunktsins frá planinu sem grunnflöturinn liggur í. *Keila* með grunnflöt F og topppunkt T er rúmskiki sem afmarkast af grunnfletinum F og öllum strikum sem liggja frá punktum á jaðri F til T. Rúmmál keilunnar er

$$V = \frac{1}{3}hA = \frac{1}{3}(\text{hæð})(\text{flatarmál grunnflatar}).$$

Formúlan gildir óháð lögun grunnflatarins F.

7.1.3 Rúmmál snúðs, snúið um x-ás

Látum f vera samfellt fall á bili $[a, b]$. Rúmskikinn sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af x-ás, grafinu $y = f(x)$ og línunum $x = a$ og $x = b$ er snúið $360°$ um x-ás hefur rúmmálið

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Sjá 3D volume by rotation of a function eftir George Katehos (CC-BY-SA).

7.1.4 Rúmmál snúðs með gati

Látum f og g vera tvö samfelld föll skilgreind á bilinu $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að um öll $x \in [a, b]$ gildi að $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Þegar svæðinu milli grafa f og g er snúið $360°$ um x-ás fæst rúmskiki sem hefur rúmmálið

$$V = \pi \int_a^b g(x)^2 - f(x)^2 \, dx.$$

7.1.5 Rúmmál snúðs, snúið um y-ás

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$, með $a < b$. Gerum ráð fyrir að $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Rúmmál rúmskikans sem fæst með að snúa svæðinu sem afmarkast af x-ás, grafinu $y = f(x)$ og línunum $x = a$ og $x = b$ um $360°$ um y-ás er

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

Sjá Solids and volumes of revolution (rotation about y_axis) eftir George Katehos (CC-BY-SA).

7.1.6 Lengd grafs

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$. Lengd grafsins $y = f(x)$ milli $x = a$ og $x = b$ er skilgreind sem

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

7.1.7 Yfirborðsflatarmál snúðs, snúið um x-ás

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$. Grafinu $y = f(x)$ er snúið $360°$ um x-ás og myndast við það flötur. Flatarmál flatarins er gefið með formúlunni

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

7.1.8 Yfirborðsflatarmál snúðs, snúið um y-ás

Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a, b]$. Grafinu $y = f(x)$ er snúið $360°$ um y-ás og myndast við það flötur. Flatarmál flatarins er gefið með formúlunni

$$S = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

7.2 Massi

7.2.1 Massi vírs

Vír liggur eftir ferli $y = f(x)$ þar sem $a \leq x \leq b$. Efnisþéttleiki (eðlisþyngdin) í punkti $(x, f(x))$ er gefinn sem $\delta(x)$. *Massafrymi* vírsins (massi örbúts af lengd ds) er

$$dm = \delta(x)\, ds = \delta(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

og massi alls vírsins er

$$m = \int_a^b \delta(x)\, ds = \int_a^b \delta(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

7.2.2 Massi plötu

Plata afmarkast af x-ás, grafinu $y = f(x)$ og línunum $x = a$ og $x = b$. Á línu sem er hornrétt á x-ás og sker x-ásinn í x er efnisþéttleikinn fastur og gefinn með $\delta(x)$.

Flatarmál örsneiðar milli lína hornréttra á x-ás sem skera ásinn í x og $x + dx$ er $dA = f(x)\, dx$.

Massafrymi fyrir plötuna (massi örsneiðarinnar) er

$$dm = \delta(x)dA = \delta(x)f(x)\, dx,$$

og massi allrar plötunnar er

$$m = \int_a^b \delta(x) f(x)\, dx.$$

7.2.3 Massi rúmskika

Rúmskiki D liggur á milli planann $x = a$ og $x = b$. Táknum með $A(x)$ flatarmál þversniðs D við plan sem sker x-ásinn í x og er hornrétt á x-ás. Gerum ráð fyrir að efnisþéttleikinn sé fastur á hverju þversniði, og að á þversniði D við plan sem sker x-ásinn í x og er hornrétt á x-ás sé efnisþéttleikinn gefinn með $\delta(x)$.

Rúmmálsfrymi (rúmmál örsneiðar úr D sem liggur á milli tveggja plana sem eru hornrétt á x-ásinn og skera x-ásinn í x og $x + dx$) er $dV = A(x)\, dx$.

Massafrymi (massi örsneiðarinnar) er

$$dm = \delta(x)\, dV = \delta(x) A(x)\, dx,$$

og massi rúmskikans D er þá

$$m = \int_a^b \delta(x) A(x)\, dx.$$

7.3 Massamiðja

7.3.1 Skilgreining: Massamiðja punktmassa

Punktmassar $m_1, m_2, \ldots, m_n$ eru staðsettir í punktunum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ á x-ásnum.

Vægi kerfisins um punktinn $x = 0$ er skilgreint sem

$$M_{x=0} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i,$$

og *massamiðja* kerfisins er

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

7.3.2 Skilgreining: Massamiðja

Ef massi er dreifður samkvæmt þéttleika falli $\delta(x)$ um bil $[a,b]$ á x-ásnum þá er massi og vægi um punktinn $x=0$ gefið með formúlunum

$$m = \int_a^b \delta(x)\,dx \qquad \text{og} \qquad M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)\,dx.$$

Massamiðjan er gefin með formúlunni

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}.$$

7.3.3 Skilgreining: Massamiðja plötu

Skoðum plötu af sömu gerð og í 7.2.2.

Vægi plötunnar um y- og x-ása eru gefin með formúlunum

$$M_{x=0} = \int_a^b x\delta(x)f(x)\,dx \qquad \text{og} \qquad M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)f(x)^2\,dx,$$

og hnit massamiðju plötunnar, $(\overline{x},\overline{y})$, eru gefin með jöfnunum

$$\overline{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)f(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)f(x)\,dx}$$

og

$$\overline{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)f(x)^2\,dx}{\int_a^b \delta(x)f(x)\,dx}.$$

7.3.4 Setning Pappusar, I

Látum R vera svæði sem liggur í plani öðrum megin við línu L. Látum A tákna flatarmál R og $\overline{r}$ tákna fjarlægð massamiðju R frá L.

Þegar svæðinu R er snúið $360°$ um L myndast snúðskiki með rúmmál

$$V = 2\pi\overline{r}A.$$

7.3.5 Setning Pappusar, II

Látum C vera lokaðan feril sem liggur í plani og er allur öðrum megin við línu L. Látum s tákna lengd C og $\overline{r}$ tákna fjarlægð massamiðju C frá L. Þegar ferlinum C er snúið $360°$ um L myndast snúðflötur með flatarmál

$$S = 2\pi\overline{r}s.$$

KAFLI 8

Diffurjöfnur

Now, the invention of the scientific method and science is, I'm sure we'll all agree, the most powerful intellectual idea, the most powerful framework for thinking and investigating and understanding and challenging the world around us that there is, and that it rests on the premise that any idea is there to be attacked and if it withstands the attack then it lives to fight another day and if it doesn't withstand the attack then down it goes.

– Douglas Adams

8.1 Diffurjöfnur

8.1.1 Skilgreining: Diffurjafna

Ritum $y = y(x)$ sem fall af x.

Diffurjafna er jafna á forminu

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

þar sem F er fall (formúla) í $n + 1$ breytistærð.

Jafnan er sögð vera af n-ta *stigi* ef hæsta afleiða y sem kemur fyrir í formúlu er n.

Að leysa diffurjöfnu felur í sér að skrifa y sem fall af x, þ.e. finna formúlu fyrir y.

Athugasemd: Deildajafna, afleiðujafna og diffurjafna eru samheiti yfir sama hlutinn.

8.1.2 Dæmi

Það að finna stofnfall fyrir gefið fall f er jafngilt því að leysa fyrsta stigs diffurjöfnuna

$$y'(x) = f(x),$$

eða með framsetningunni úr *skilgreiningunni* hér að ofan,

$$F(x, y') = f(x) - y'(x) = 0.$$

8.1.3 Skilgreining: Aðgreinanleg diffurjafna

Fyrsta stigs diffurjafna sem má rita á forminu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

kallast *aðgreinanleg*. Það er, þátta má hægri hliðina þannig að annar þátturinn er bara fall af x og hinn þátturinn er bara fall af y.

Umritum jöfnuna yfir á formið

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Aðvörun: Það má ekkert x koma fyrir í vinstri hliðinni og ekkert y má koma fyrir í hægri hliðinni.

Síðan heildum við báðar hliðar og reiknum stofnföllin hægra og vinstra megin í jöfnunni

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

og munum eftir að setja inn heildunarfasta (einn er nóg). Þá höfum við jöfnu sem lýsir sambandi x og y, og inniheldur engar afleiður af y. Út frá þeirri jöfnu má fá upplýsingar um eiginleika lausnarinnar y. Stundum er hægt að einangra y og fá þannig formúlu fyrir lausn diffurjöfnunar.

8.1.4 Dæmi um aðgreinanlega diffurjöfnu

Ef við skoðum diffurjöfnuna

$$y' = x\exp(x - y)$$

þá sjáum við að hún er aðgreinanleg því með því að skrifa $\exp(x - y) = \exp(x)\exp(-y)$ og margfalda í gegn með $\exp(y)$ þá fæst

$$\exp(y)\,y' = x\exp x.$$

Hér eru öll y vinstra megin og öll x hægra megin. Heildum nú beggja vegna og munum að það er nóg að setja einn heildunarfasta

$$\exp y + C = \int \exp y\,dy = \int x\exp x\,dx = x\exp x - \exp x.$$

Reynum nú að einangra y til þess að geta skrifað út formúlu fyrir lausninni. Byrjum á að færa heildunarfastann yfir og tökum svo logrann af báðum hliðum

$$y = \ln(x \exp x - \exp x - C).$$

8.2 Línulegar fyrsta stigs diffurjöfnur

8.2.1 Skilgreining: Línuleg diffurjafna

Diffurjafna á forminu

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

kallast *línuleg diffurjafna*. Hún er n-ta stigs ef $a_n(x)$ er ekki fastafallið 0.

Ef f er fastafallið 0 þá er jafnan sögð *óhliðruð* en ef f er ekki fastafallið 0 þá er hún sögð *hliðruð*.

8.2.2 Línulegar fyrsta stigs diffurjöfnur

Almenna línulega fyrsta stigs jöfnu má rita á forminu

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Samsvarandi óhliðruð jafna er

$$y' + p(x)y = 0.$$

Skilgreinum $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ (eitthvert stofnfall). Þá er

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$$

lausn á diffurjöfnunni.

Aðvörun: Þegar þið reiknið $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ þá megið þið sleppa heildunarfastanum, en **ekki** þegar þið reiknið heildið $\int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$.

Sönnun

Setjum

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$$

inn í vinstri hlið diffurjöfnunnar, ef út kemur hægri hliðin $q(x)$ þá höfum við sýnt að þetta er lausn.

Athugum fyrst að

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-\mu(x)}(-\mu'(x))\int e^{\mu(x)}q(x)\,dx + e^{-\mu(x)}\frac{d}{dx}\int e^{\mu(x)}q(x)\,dx \\ &= -e^{-\mu(x)}p(x)\int e^{\mu(x)}q(x)\,dx + e^{-\mu(x)}e^{\mu(x)}q(x) = -p(x)y(x) + q(x). \end{aligned}$$

Ef við setjum þetta inn í diffurjöfnuna fæst

$$y'(x) + p(x)y(x) = -p(x)y(x) + q(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

þannig að y skilgreint eins og hér að ofan er greinilega lausn á diffurjöfnunni.

8.3 Línulegar annars stigs diffurjöfnur með fastastuðla

8.3.1 Skilgreining

Línuleg annars stigs diffurjafna með fastastuðla er diffurjafna á forminu

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

þar sem a, b og c eru fastar.

Jafnan er sögð *óhliðruð* ef fallið $f(x)$ er fastafallið 0.

8.3.2 Skilgreining: Kennijafna

Jafnan $ar^2 + br + c = 0$ kallast *kennijafna* diffurjöfnunnar $ay'' + by' + cy = 0$.

8.3.3 Setning

Ef föllin $y_1(x)$ og $y_2(x)$ eru lausnir á diffurjöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$ þá er fallið

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

þar sem A og B eru fastar, líka lausn.

Ef $y_2(x)$ er ekki fastamargfeldi af $y_1(x)$ þá má skrifa **sérhverja** lausn $y(x)$ á diffurjöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$ á forminu

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

þar sem A og B eru fastar.

8.3.4 Setning

Ef leysa á annars stigs óhliðraða diffurjöfnu með fastastuðla

$$ay'' + by' + cy = 0$$

þá geta komið upp þrjú tilvik.

Tilvik I *Kennijafnan* $ar^2 + br + c = 0$ *hefur tvær ólíkar rauntölulausnir* r_1 og r_2.

Þá er fallið

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

alltaf lausn sama hvernig fastarnir A og B eru valdir og sérhverja lausn má rita á þessu formi.

Tilvik II *Kennijafnan* $ar^2 + br + c = 0$ *hefur bara eina rauntölulausn* $k = -\frac{b}{2a}$.

Þá er fallið

$$y(x) = Ae^{kx} + Bxe^{kx}$$

alltaf lausn sama hvernig fastarnir A og B eru valdir og sérhverja lausn má rita á þessu formi.

Tilvik III *Kennijafnan* $ar^2 + br + c = 0$ *hefur engar rauntölulausnir.*

Setjum $k = -\frac{b}{2a}$ og $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Rætur kennijöfnunnar eru $r_1 = k + i\omega$ og $r_2 = k - i\omega$.

Þá er fallið

$$y(x) = Ae^{kx}\cos(\omega x) + Be^{kx}\sin(\omega x)$$

alltaf lausn sama hvernig fastarnir A og B eru valdir og sérhverja lausn má rita á þessu formi.

8.3.5 Setning

Látum $y_{\mathrm{p}}(x)$ vera einhverja lausn á hliðruðu jöfnunni

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Látum $y_1(x)$ og $y_2(x)$ vera lausnir sem fást úr *8.3.4* á óhliðruðu jöfnunni

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Sama hvernig fastarnir A og B eru valdir þá er fallið

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_{\mathrm{p}}(x)$$

alltaf lausn á diffurjöfnunni $ay'' + by' + cy = f(x)$ og sérhverja lausn má skrifa á þessu formi.

8.4 Ágiskanir

Við höfum skoðað aðferðir til að leysa aðgreinanlegar diffurjöfnur, línulegar fyrsta stigs diffurjöfnur og óhliðraðar línulegar annars stigs diffurjöfnur með fastastuðla. Þessar jöfnur eru samt bara pínulítið brot af öllum mögulegum diffurjöfnum og ef við veljum diffurjöfnu af “handahófi” þá getum við yfirleitt ekki leyst hana auðveldlega.

Þrátt fyrir þetta er ástæðulaust að gefast upp og fyrir ákveðinn flokk af diffurjöfnum þá getum við stundum giskað á lausn, en þetta eru **hliðraðar** línulegar annars stigs diffurjöfnur með fastastuðla.

8.4.1 Ágiskun

Lausn á hliðruðu jöfnu $ay'' + by' + cy = f(x)$ kallast *sérlausn*. Stundum, ef f er ekki of flókið, þá er mögulegt að giska á sérlausn.

Látum $P_n(x)$ standa fyrir einhverja n-ta stigs margliðu og látum $A_n(x)$ og $B_n(x)$ tákna n-ta stigs margliður með óákveðnum stuðlum.

- Ef $f(x) = P_n(x)$ þá er giskað á $y_\mathrm{p}(x) = x^m A_n(x)$.
- Ef $f(x) = P_n(x)e^{rx}$ þá er giskað á $y_\mathrm{p}(x) = x^m A_n(x)e^{rx}$.
- Ef $f(x) = P_n(x)e^{rx}\sin(kx)$ þá er giskað á $y_\mathrm{p}(x) = x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)]$.
- Ef $f(x) = P_n(x)e^{rx}\cos(kx)$ þá er giskað á $y_\mathrm{p}(x) = x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx) + B_n(x)\sin(kx)]$.

Hér táknar m minnstu töluna af tölunum 0, 1, 2 sem tryggir að enginn liður í ágiskuninni sé lausn á óhliðruðu jöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$.

Ef við erum búin að finna sérlausn y_p og almenna lausn y á óhliðruðu jöfnunni $ay'' + by' + cy = 0$, þá er $y + y_p$ áfram lausn á hliðruðu jöfnunni. Reyndar er **sérhver** lausn á óhliðruðu jöfnunni á forminu $y + y_p$, bara með mismundandi A og B í y.

8.5 Samantekt

8.5.1 Aðskiljanlegar jöfnur

Jöfnur sem hægt er að rita á forminu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

má leysa með því að heilda og einangra y út úr

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx.$$

8.5.2 Línulegar fyrsta stigs jöfnur

Lausn við jöfnu á forminu

$$y'(x) + p(x)y = q(x)$$

er gefin með

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\, dx,$$

þar sem $\mu(x) = \int p(x)\, dx$.

8.5.3 Línulegar annars stigs jöfnur með fastastuðla

Lausn á $ay'' + by' + cy = 0$ er gefin með

Tilvik I $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ ef kennijafnan hefur tvær ólíkar rauntölulausnir r_1 og r_2.

Tilvik II $y(x) = Ae^{kx} + Bxe^{kx}$ ef kennijafnan $ar^2 + br + c = 0$ hefur bara eina tvöfalda rauntölulausn $k = -\frac{b}{2a}$.

Tilvik III $y(x) = Ae^{kx}\cos(\omega x) + Be^{kx}\sin(\omega x)$ ef kennijafnan $ar^2 + br + c = 0$ hefur engar rauntölulausnir, bara tvinntölulausnir $r_1 = k + i\omega$ og $r_2 = k - i\omega$, þar sem $k = -\frac{b}{2a}$ og $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Lausn á liðruðu jöfnunni á $ay'' + by' + cy = f(x)$ er mögulega hægt að finna með *ásgiskun*. Sérhver lausn á óhliðruðu jöfnunni $ay'' + by' + cy = f(x)$ er svo á forminu $y + y_p$ þar sem y er lausn á óhliðruðu jöfnunni.

KAFLI 9

Runur og raðir

Would it save you a lot of time if I just gave up and went mad now?

- Douglas Adams, The Hitchhiker's Guide to the Galaxy

9.1 Runur

9.1.1 Skilgreining: Runa

Runa er raðaður listi af tölum.

Runa hefur fyrsta stak en ekkert síðasta stak. Stökin í runu eru oft númeruð með náttúrlegu tölunum $1, 2, 3, \ldots$. Stökin eru þá

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

Runur eru táknaðar með $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eða bara $\{a_n\}$.

Oft er runa gefin með formúlu, $a_n = f(n)$. Til dæmis $a_n = 3n + n^2$.

9.1.2 Skilgreining

Runa $\{a_n\}$ er sögð *takmörkuð að neðan* ef til er tala m þannig að

$$m \leq a_n$$

fyrir allar náttúrlegar tölur n.

Runan er sögð *takmörkuð að ofan* ef til er tala M þannig að

$$a_n \leq M$$

fyrir allar náttúrlegar tölur n.

Runa sem er bæði takmörkuð að ofan og neðan er sögð *takmörkuð*.

9.1.3 Skilgreining

Runa $\{a_n\}$ er sögð

1. *vaxandi* ef $a_n \leq a_{n+1}$ fyrir öll n,
2. *stranglega vaxandi* ef $a_n < a_{n+1}$ fyrir öll n,
3. *minnkandi* ef $a_n \geq a_{n+1}$ fyrir öll n,
4. *stranglega minnkandi* ef $a_n > a_{n+1}$ fyrir öll n.

Runa kallast *einhalla* ef hún er annaðhvort vaxandi eða minnkandi.

9.1.4 Skilgreining: Víxlmerkjaruna

Víxlmerkjaruna er runa þannig að formerki skiptast á, annaðhvort $+, -, +, -, \dots$ eða $-, +, -, +, \dots$.

Einnig má lýsa þessu þannig að runa $\{a_n\}$ sé víxlmerkjaruna ef $a_n a_{n+1} < 0$ fyrir öll n.

9.1.5 Skilgreining

Segjum að $\{a_n\}$ sé *samleitin* að tölu L (eða *stefni á* L) ef fyrir sérhverja tölu $\epsilon > 0$ má finna náttúrlega tölu N þannig að ef $n \geq N$ þá er

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

Ritað $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ og talan L kallast *markgildi rununnar*.

Sagt er að runa sé *samleitin* ef $\lim_{n\to\infty} a_n$ er skilgreint, en annars er runan sögð *ósamleitin*.

9.1.6 Setning

Látum f vera fall skilgreint á $\mathbb{R}$ og látum $\{a_n\}$ vera runu þannig að $a_n = f(n)$ fyrir öll n. Ef $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ þá er $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Aðvörun: Þetta gildir ekki í hina áttina, runan getur verið samleitin án þess að fallið sé það.

9.1.7 Setning

Látum $\{a_n\}$ vera runu. Eftirfarandi tvö skilyrði eru jafngild:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$,

2. fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ eru aðeins endanlega margir liðir rununnar $\{a_n\}$ utan við bilið $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

9.1.8 Fylgisetning

Samleitin runa er takmörkuð.

9.1.9 Setning

Gerum ráð fyrir að runurnar $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ séu samleitnar. Þá gildir:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$, þar sem c er fasti,
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$,
4. ef $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ þá er $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$,
5. ef $a_n \leq b_n$ fyrir öll n sem eru nógu stór, þá er
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$
(frasinn *fyrir öll n sem eru nógu stór* þýðir að til er einhver tala N þannig að skilyrðið gildir fyrir öll $n \geq N$),
6. (Klemmuregla) ef $a_n \leq c_n \leq b_n$ fyrir öll n sem eru nógu stór og $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ þá er runan $\{c_n\}$ samleitin og
$$\lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

9.1.10 Setning

Takmörkuð einhalla (vaxandi eða minnkandi) runa er samleitin.

9.2 Raðir

9.2.1 Skilgreining: Röð

Látum $a_1, a_2, \ldots$ vera gefna runu. *Röðin*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
er skilgreind sem formleg summa liðanna $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

9.2.2 Skilgreining

Fáum í hendurnar röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ þar sem $a_1, a_2, \ldots$ eru tölur. Skilgreinum

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

sem summa fyrstu n liða raðarinnar. Segjum að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé *samleitin með summu* s ef

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Það er að segja, röðin er samleitin með summu s ef

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s.$$

Ritum þá

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

9.2.3 Setning

Ef $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, þ.e. báðar raðirnar eru samleitnar, þá gildir að

1. ef c er fasti þá er $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$,
3. ef $a_n \leq b_n$ fyrir öll n þá er $A \leq B$.

9.2.4 Setning

Ef röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin þá er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

9.2.5 Athugasemd

Ef $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ þá ekki víst að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin.

9.2.6 Dæmi: Kvótaröð

Röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

kallast *kvótaröð*. Hún er samleitin ef $-1 < a < 1$ og þá er

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

9.2.7 Dæmi: Kíkisröð

Röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

kallast *kíkisröð*. Hún er samleitin og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

9.3 Samleitnipróf fyrir raðir

9.3.1 Setning

Ef $\lim_{n\to\infty} a_n$ er ekki til eða $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ekki samleitin.

9.3.2 Setning: Samleitnipróf I

Gerum ráð fyrir að $a_n \geq 0$ fyrir allar náttúrlegar tölur n. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er þá annaðhvort samleitin eða ósamleitin að ∞ (þ.e.a.s. hlutsummurnar $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ stefna á ∞ þegar n stefnir á ∞.)

9.3.3 Setning: Samleitnipróf II – Samanburðarpróf

Gerum ráð fyrir að $0 \leq a_n \leq b_n$ fyrir allar náttúrlegar tölur n.

1. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ líka samleitin.
2. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er ósamleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ líka ósamleitin.

9.3.4 Setning: Samleitnipróf III – Heildispróf

Látum f vera **jákvætt, samfellt** og **minnkandi** fall sem er skilgreint á bilinu $[1, \infty)$. Fyrir sérhverja náttúrlega tölu n setjum við $a_n = f(n)$. Þá eru röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og óeiginlega heildið $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ annaðhvort bæði samleitin eða bæði ósamleitin.

9.3.5 Fylgisetning

Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ er samleitin ef $p > 1$ en ósamleitin ef $p \leq 1$.

9.3.6 Setning: Samleitnipróf IV – Markgildissamanburðarpróf

Gerum ráð fyrir að $a_n \geq 0$ og $b_n \geq 0$ fyrir allar náttúrlegar tölur n og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, þar sem L er tala eða ∞.

1. Ef $L < \infty$ og röðin $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ líka samleitin.
2. Ef $L > 0$ og röðin $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ líka ósamleitin.

9.3.7 Setning: Samleitnipróf V – Kvótapróf

Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$ fyrir öll n og að markgildið $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ sé skilgreint eða að það sé ∞.

1. Ef $0 \leq \rho < 1$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.
2. Ef $1 < \rho \leq \infty$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.
3. Ef $\rho = 1$ þá er ekkert hægt að fullyrða um hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin eða ósamleitin, hvor tveggja kemur til greina og nota þarf aðrar aðferðir til að skera úr um það.

9.3.8 Setning: Samleitnipróf VI – Rótarpróf

Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$ fyrir öll n og að markgildið $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ sé skilgreint eða að það sé ∞.

1. Ef $0 \leq \sigma < 1$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.
2. Ef $1 < \sigma \leq \infty$ þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.
3. Ef $\sigma = 1$ þá er ekkert hægt að fullyrða um hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin eða ósamleitin, hvor tveggja kemur til greina og nota þarf aðrar aðferðir til að skera úr um það.

9.3.9 Setning: Samleitnipróf VII – Víxlmerkjaraðapróf

Gerum ráð fyrir að

1. $a_n \geq 0$ fyrir öll n (frekar jákvæðir liðir),
2. $a_{n+1} \leq a_n$ fyrir öll n (frekar minnkandi),
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (stefnir á 0).

Þá er víxlmerkjaröðin

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

samleitin.

9.3.10 Fylgisetning

Gerum ráð fyrir að runa $\{a_n\}$ uppfylli skilyrðin sem gefin eru í setningunni á undan *(9.3.9)*.

Látum s_n tákna summu n fyrstu liða raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ og táknum summu raðarinnar með s. Þá gildir að $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$.

9.4 Alsamleitni

9.4.1 Skilgreining

Röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er sögð vera *alsamleitin* ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin.

9.4.2 Setning

Röð sem er alsamleitin er samleitin.

9.4.3 Athugasemd

Til eru samleitnar raðir, t.d. röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, sem eru ekki alsamleitnar.

9.4.4 Skilgreining

Samleitin röð sem er ekki alsamleitin er sögð vera *skilyrt samleitin*, það er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin en röðin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er ósamleitin.

9.4.5 Setning: Umröðun

Dæmi um umröðun á liðum raðar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er

$$a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_{100} + a_{99} + \cdots + a_{11} + a_{1000} + a_{999} + \cdots .$$

1. Ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er alsamleitin þá skiptir engu máli hvernig liðum raðarinnar er umraðað, summan verður alltaf sú sama.

2. Ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er skilyrt samleitin og L einhver rauntala, eða $\pm\infty$ þá er hægt að umraða liðum raðarinnar þannig að summan eftir umröðun verði L.

Athugasemd: Með öðrum orðum: Liðum skilyrt samleitinnar raðar má umraða þannig að summan getur orðið hvað sem er, það jskiptir því máli í hvaða röð við leggjum saman.

Veldaraðir

What to do if you find yourself stuck in a crack in the ground underneath a giant boulder you can't move, with no hope of rescue. Consider how lucky you are that life has been good to you so far. Alternatively, if life hasn't been good to you so far, which given your current circumstances seems more likely, consider how lucky you are that it won't be troubling you much longer.

– Douglas Adams, The Original Hitchhiker Radio Scripts

10.1 Veldaraðir

10.1.1 Skilgreining

Röð á forminu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

kallast *veldaröð* með *miðju* í punktinum c.

10.1.2 Setning

Um sérhverja veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ gildir eitt af þrennu:

1. Röðin er aðeins samleitin fyrir $x = c$.
2. Til er jákvæð tala R þannig að veldaröðin er alsamleitin fyrir öll x þannig að $|x-c| < R$ og ósamleitin fyrir öll x þannig að $|x-c| > R$.
3. Röðin er samleitin fyrir allar rauntölur x.

10.1.3 Skilgreining: Miðja og samleitnigeisli

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ vera veldaröð.

1. Talan c kallast *miðja* eða *samleitnimiðja* veldaraðarinnar.
2. Í tilviki 2. í setningunni hér á undan er röðin alsamleitin á opna bilinu $(c-R, c+R)$ og ósamleitin fyrir utan lokaða bilið $[c-R, c+R]$.

   Talan R er kölluð *samleitnigeisli* raðarinnar.

   Mögulegt er að röðin sé samleitin (alsamleitin eða skilyrt samleitin) í öðrum eða báðum punktunum $x = c - R$ og $x = c + R$ (þetta þarf að athuga sérstaklega).

   Í tilfelli 1. í setningunni þegar röðin er bara samleitin fyrir $x = c$ setjum við $R = 0$ og í tilfelli 3. þegar röðin er samleitin fyrir allar rauntölur x þá setjum við $R = \infty$.
3. *Samleitnibil* veldaraðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ er mengi allra gilda x þannig að röðin er samleitin. Setning hér á undan sýnir að :þetta mengi er alltaf bil.
   - Þegar samleitnigeilsinn er 0 er samleitnibilið $\{c\}$.
   - Þegar samleitnigeislinn er $R > 0$ þá koma fjórir möguleikar til greina eftir því hvort röðin er samleitin í hvorugum, öðrum eða báðum punktunum $x = c - R$ og $x = c + R$. Samleitnibilið getur verið $(c-R, c+R)$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$ eða $[c-R, c+R]$.
   - Þegar samleitnigeislinn er ∞ þá er samleitnibilið $(-\infty, \infty)$.

10.2 Samleitnipróf

10.2.1 Setning

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ vera veldaröð.

1. *Kvótapróf*: Gerum ráð fyrir að $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ sé til eða ∞.

   Þá hefur veldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ samleitnigeisla

$$R = \begin{cases} \infty & \text{ef } L = 0, \\ \frac{1}{L} & \text{ef } 0 < L < \infty, \\ 0 & \text{ef } L = \infty. \end{cases}$$

2. *Rótarpróf*: Gerum ráð fyrir að $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ sé til eða ∞. Þá hefur veldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ samleitnigeisla

$$R = \begin{cases} \infty & \text{ef } L = 0, \\ \frac{1}{L} & \text{ef } 0 < L < \infty, \\ 0 & \text{ef } L = \infty. \end{cases}$$

10.2.2 Setning Abels

Fallið f skilgreint á samleitnibili með

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

er samfellt á öllu samleitnibili veldaraðarinnar.

Ef samleitnigeislinn er $0 < R < \infty$ og röðin er samleitin í punktinum $x = c + R$ þá er

$$\lim_{x \to (c+R)^-} f(x) = f(c+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((c+R)-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Eins ef röðin er samleitin í punktinum $x = c - R$ þá er

$$\lim_{x \to (c-R)^+} f(x) = f(c-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((c-R)-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

10.2.3 Setning: Diffrað lið fyrir lið

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$ vera veldaröð með miðju í c og samleitnigeisla R.

Fyrir $x \in (c-R, c+R)$ skilgreinum við

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Fallið f er diffranlegt og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

og röðin fyrir $f'(x)$ er samleitin fyrir öll $x \in (c-R, c+R)$.

Þetta þýðir að við getum diffrað veldaraðir lið fyrir lið.

Þar sem diffranleg föll eru samfelld þá fæst eftirfarandi.

10.2.4 Fylgisetning

Fallið f er samfellt á $(c-R, c+R)$.

10.2.5 Setning: Heildað lið fyrir lið

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$ vera veldaröð með miðju í c og samleitnigeisla R.

Fyrir $x \in (c-R, c+R)$ skilgreinum við $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Fallið f hefur stofnfall

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \\ &= a_0(x-c) + \frac{a_1}{2}(x-c)^2 + \frac{a_2}{3}(x-c)^3 + \frac{a_3}{4}(x-c)^4 + \cdots \end{aligned}$$

og röðin fyrir $F(x)$ er samleitin fyrir öll $x \in (c-R, c+R)$.

Þetta þýðir að við getum heildað veldaraðir lið fyrir lið.

10.2.6 Setning

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$ vera veldaröð með miðju í c og samleitnigeisla R.

Fyrir $x \in (c-R, c+R)$ skilgreinum við

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Fallið f er k-sinnum diffranlegt fyrir $k = 1, 2, 3, \ldots$ og

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

10.2.7 Skilgreining: Fágað fall

Fall f þannig að til er veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ með samleitnigeisla $R > 0$ þannig að

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

fyrir öll $x \in (c-R, c+R)$ kallast *fágað* (raunfágað) í punktinum c.

10.2.8 Athugasemd

Dæmi um raunfáguð föll eru margliður, ræð föll, hornaföll, veldisföll og lograr.

10.3 Taylorraðir

10.3.1 Skilgreining: Taylorröð

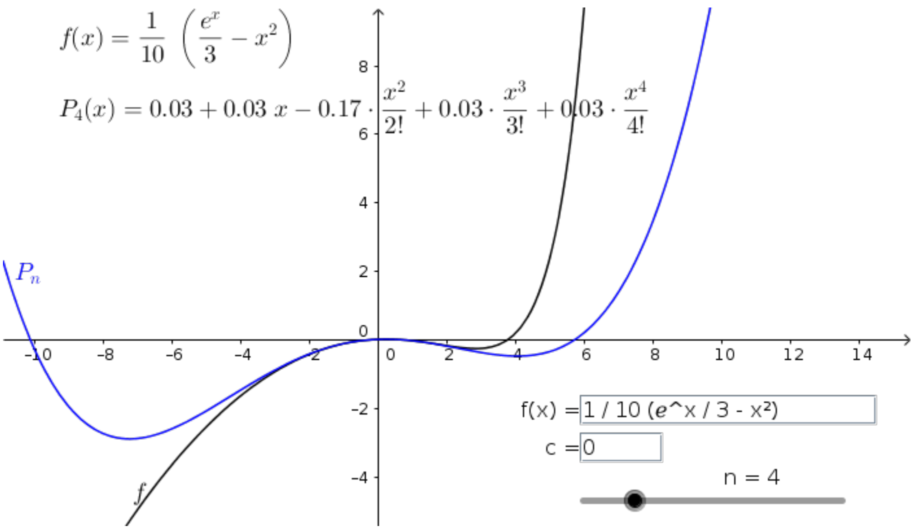
Gerum ráð fyrir að fall $f(x)$ sé óendanlega oft diffranlegt í punktinum $x = c$, (það er $f^{(k)}(c)$ er til fyrir $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Veldaröðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-c)^4 + \cdots$$

kallast *Taylorröð* með miðju í $x = c$ fyrir $f(x)$.

Ef svo vill til að $c = 0$ þá er oft talað um *Maclaurinröð*.



10.3.2 Setning

Taylormargliða með miðju í c fyrir f er skilgreind sem margliðan

$$P_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Skekkjan í n-ta stigs Taylornálgun er $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Til er tala X sem liggur á milli c og x þannig að

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

10.3.3 Setning

Gerum ráð fyrir að f sé fall sem er óendanlega oft diffranlegt í punktinum c.

Fyrir fast gildi á x þá er Taylorröðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

samleitin með summu $f(x)$ ef og aðeins ef

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

10.3.4 Dæmi: Tvíliðuröðin

Fyrir x þannig að $|x| < 1$ og rauntölu r gildir að

$$\begin{aligned}(1+x)^r =& 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 \\ &+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}x^4 + \cdots \\ =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n.\end{aligned}$$

10.3.5 Athugasemd

Ef $r \in \mathbb{N}$ þá gefur summan að ofan einfaldlega stuðlanna þegar búið er að margfalda upp úr svigum, og summan er því endanleg, því þegar $n \geq r+1$ þá verða stuðlarnir 0.

Ef hins vegar $r \notin \mathbb{N}$ þá er enginn stuðlanna 0.

10.3.6 Taylorraðir nokkra falla

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{fyrir öll } x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{fyrir öll } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{fyrir öll } x$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{fyrir } -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad \text{fyrir } -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad \text{fyrir } -1 < x \le 1$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{fyrir } -1 \le x \le 1$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{fyrir öll } x$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{fyrir öll } x$$

I may not have gone where I intended to go, but I think I have ended up where I needed to be.

– Douglas Adams, The Long Dark Tea-Time of the Soul

KAFLI 11

Viðauki

The story so far: In the beginning the Universe was created. This has made a lot of people very angry and been widely regarded as a bad move.

– Douglas Adams, The Restaurant at the End of the Universe

- Pdf-útgafa af þessum nótum, https://edbook.hi.is/stae104g/stae104g.pdf.
- GeoGebru skrárnar sem eru notaðar, http://edbook.hi.is/stae104g_geogebra.zip.
- Námskeiðið á Uglu https://ugla.hi.is/kv/index2.php?sid=219&namsknr=09101120176.
- Námskeiðið á Piazza, http://piazza.com/hi.is/fall2017/st104g/home.
- Námskeiðið í kennsluskrá, https://ugla.hi.is/kennsluskra/index.php?sid=&tab=nam&chapter=namskeid&id=09101120176.

11.1 Kennsluáætlun

Reality is frequently inaccurate.

– Douglas Adams, The Restaurant at the End of the Universe

Dags.	Efni	Nótur	Adams Calculus
21.08.17	1. Tölur og föll	1.1-1.4	P.1, P.2, P.4,P.5, P.6, P.7
23.08.17	2. Markgildi og samfelldni	2.1-2.3	1.2, 1.5
28.08.17	3. Markgildi og samfelldni	2.4-2.6	1.3
30.08.17	3. Markgildi og samfelldni	2.7-2.8	1.4
04.09.17	3. Afleiður	3.1-3.3	2.1, 2.2, 2.3
06.09.17	3. Afleiður	3.4-3.6	2.4, 2.5, 2.6
11.09.17	3. Afleiður	3.7-3.10	2.8, 2.9, 3.1
13.09.17	3. Afleiður	3.11-3.13	2.7, 4.3, 4.9, 4.10
18.09.17	4. Torræð föll	4.1-4.4	3.2, 3.3, 3.4
20.09.17	4. Torræð föll	4.5-4.7	3.5, 3.6
25.09.17	5. Könnun falla	5.1-5.3	4.5
27.09.17	5. Könnun falla	5.4-5.6	4.4, 4.6
02.10.17	5. Könnun falla	5.7-5.8	4.6, 4.8
-	**Próf úr lesnu efni**	-	-
04.10.17	6.Heildun	6.1-6.3	5.1, 5.2, 5.3, 5.4
09.10.17	6. Heildun	6.4-6.5	5.5, 2.10
11.10.17	6. Heildun	6.6	5.6, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4
16.10.17	6. Heildun	6.7	6.5
18.10.17	7. Rúmmál, massi og massamiðjur	7.1	7.1, 7.2, 7.3
23.10.17	7. Rúmmál, massi og massamiðjur	7.2-7.3	7.4, 7.5
25.10.17	8. Diffurjöfnur	8.1-8.2	7.9, 18.1, 18.2
30.10.17	8. Diffurjöfnur	8.3-8.5	3.7, 18.4, 18.5
-	**Próf úr heimadæmum**	-	-
01.11.17	Hagnýtingar	ítarefni	-
06.11.17	9. Runur og raðir	9.1-9.2	9.1, 9.2
08.11.17	9. Runur og raðir	9.3-9.4	9.2, 9.3
13.11.17	10. Veldaraðir	10.1	9.3, 9.5
15.11.17	10. Veldaraðir	10.2	9.5
20.11.17	10. Veldaraðir	10.3	9.6
22.11.17	Samantekt og prófundirbúningur	gamalt próf	

Kaflanúmer í Adam's Calculus miðast við 8. útgáfu kennslubókarinnar.

11.2 Skipulag námskeiðsins

You know," said Arthur, "it's at times like this, when I'm trapped in a Vogon airlock with a man from Betelgeuse, and about to die of asphyxiation in deep space that I really wish I'd listened to what my mother told me when I was young."

"Why, what did she tell you?"

"I don't know, I didn't listen."

– Douglas Adams, The Hitchhiker's Guide to the Galaxy

11.2.1 Námsefni

Viðfangsefni námskeiðsins er stærðfræðigreining í einni breytistærð, þ.e. markgildi, samfelldni, diffrun, heildun, diffurjöfnur, runur og raðir, ásamt hagnýtingum á þessum hlutum.

11.2.2 Kennslubók

Kennslubókin er *Calculus: A Complete Course*, eftir Robert Adams, 8. útgáfa. Við munum fara í gegnum kafla 1-7, 9 og 18. Einnig er hægt að nota 7. eða 6. útgáfu, þær eru að mestu leyti eins og sú 8.

11.2.3 Fyrirlestrar og dæmatímar

Fyrirlestrar eru á mánudögum klukkan 8:20-9:50 og á miðvikudögum klukkan 10:00-11:30. Auk þess er nemendum er skipt í dæmahópa sem hittast einu sinni í viku ásamt dæmatímakennara.

11.2.4 Dæmablöð

Fyrir hverja viku er gefið út dæmablað sem verður sett í *Verkefnamöppuna* á Uglunni. Á dæmablaðinu eru sett fyrir skiladæmi og dæmi fyrir dæmatíma.

11.2.5 Skiladæmi

Í hverri viku, nema þegar próf er, þá eru sett fyrir skiladæmi. Skiladæmunum á að skila fyrir 16:00 á fimmtudögum í hólf dæmatímakennara, en þau eru staðsett í andyri VRII. Lausnirnar eiga að vera snyrtilega uppsettar, ekki í möppu og merktar nafni ykkar og dæmatímakennara á **fremstu síðu**. Ég mun setja lausnir við skiladæmunum í möppuna *Lausnir* á Uglunni.

Til að öðlast próftökurétt þarf að skila fullnægjandi lausnum á að minnsta kosti 7 af 10 heimadæmum.

Undanþágur frá þessari reglu fást eingöngu fyrir atbeina Náms- og starfsráðgjafar Háskólans.

Heimadæmin eru einstaklingsverkefni og ef tveir eða fleiri nemendur skila eins verkefnum þá verða skil ekki gefin skil fyrir.

Frekari leiðbeiningar um frágang og framsetningu skiladæma er að finna hér fyrir *neðan*.

Skil teljast **fullnægjandi** ef reynt hefur verið af alvöru við meirihluta dæmanna, lausnin er læsileg, textinn skýr og frágangur í samræmi við það sem kemur fram í *Frágangur Skiladæma*. Skil eru **ekki fullnægjandi** ef þessu er ekki fylgt hvort sem lokasvarið er rétt eða rangt.

11.2.6 Námsmat

Á misserinu verða tvö stutt próf, annað úr lesnu efni og hitt úr skiladæmum. Þessi próf gilda hvort um sig 15% af lokaeinkunn, en þó eingöngu til hækkunar. Fyrra prófið verður 2. október og verður þá spurt úr lesnu efni, þ.e. skilgreiningum, setningum og sönnunum. Seinna prófið er 30. október og verður þá spurt beint upp úr skiladæmum.

Svindl á prófunum verður tilkynnt deildarforseta viðkomandi nemanda og sett í farveg innan sviðsins (sbr. 51. gr. rgl. 569/2009 HÍ).

Lokaprófið er þriggja tíma skriflegt próf og gildir það 70% á móti misserisprófunum tveimur. Nauðsynlegt og nægjanlegt er að fá 5 á lokaprófinu til þess að standast námskeiðið. Engin hjálpargögn eru leyfileg í prófinu, en með því fylgir formúlublað. Vasareiknar eru ekki leyfðir í prófinu.

11.2.7 Viðtalstímar

Benedikt og Auðunn er með skrifstofur á þriðju hæð í Tæknigarði og verða með viðtalstíma á milli 10:00 og 12:00 á mánudögum. Ef þið viljið finna okkur utan þess tíma væri gott að þið hefðuð samband fyrst með tölvupósti, netföngin okkar eru bsm@hi.is og audunnskuta@hi.is. Persónuleg málefni má ræða í viðtalstímum eða í tölvupósti, en vinsamlegast sendið allar almennar fyrirspurnir vegna námsefnisins, fyrirkomulagsins, heimadæma og þess háttar inn á Piazza-vef námskeiðsins, http://piazza.com/hi.is/fall2017/st104g/home.

11.3 Frágangur skiladæma

A learning experience is one of those things that says, 'You know that thing you just did? Don't do that.'

– Douglas Adams, The Salmon of Doubt

- Skrifið upp **fyrirmælin** og lausnina snyrtilega. Gott er að skrifa fyrirmælin með penna og lausnina með blýant.
- Heftið blöðin saman með einu hefti í efra vinstra hornið. Ekki skila í plastvösum.
- Vísið í setningar sem þið notið.
- Notið ekki rökfræðitákn eins og $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$.
- Textinn á að vera samfelldur og læsilegur (lesið hann sjálf yfir).
- Skýrt svar/niðurstaða.
- Er örugglega búið að svara því sem spurt var um og sýna það sem átti að sýna.

  "Forty-two!" yelled Loonquawl. "Is that all you've got to show for seven and a half million years' work?"

  "I checked it very thoroughly," said the computer, "and that quite definitely is the answer. I think the problem, to be quite honest with you, is that you've never actually known what the question is."

  -Douglas Adams, The Hitchhiker's Guide to the Galaxy

11.4 Ítarefni

I refuse to answer that question on the grounds that I don't know the answer.

– Douglas Adams

Fyrir nánari útlistun á hugtökunum sem við fjöllum um þá er hægt að skoða, auk kennslubókarinnar,

- http://edbook.hi.is/undirbuningur, upprifjunarefni fyrir þá sem eru að hefja nám
- http://stae.is/os, íslensk-ensk og ensk-íslensk stærðfræðiorðaskrá
- http://stae.is/hugtakasafn
- http://planetmath.org
- http://mathworld.wolfram.com
- http://en.wikipedia.org (ath. enska útgáfan)
- http://tutor-web.net/math

11.4.1 Forrit

- GeoGebra http://www.geogebra.org
- WolframAlpha http://www.wolframalpha.com
- Matlab http://www.mathworks.com (sjá https://notendur.hi.is/~jonasson/matlab/)
- Octave http://www.gnu.org/software/octave/ (opið og ókeypis, svipað og Matlab)
- Sage http://www.sagemath.org/ (opið og ókeypis, byggt á Python)
- Mathematica http://www.wolfram.com/mathematica/

11.5 Að læra stærðfræði

Eftir Rögnvald G. Möller

11.5.1 Að lesa

Í fyrirlestrum gefst aðeins tími til að fara yfir helstu atriði námsefnisins og verðið þið að að kynna ykkur stóran hluta þess upp á eigin spýtur. Sumir nemendur hafa farið í gegnum framhaldsskóla með því læra utan að reikniaðferðir og vart reynt að skilja námsefnið. Hættan við þessa námsaðferð er að allt fari í einn graut, og nemendur geti ekki yfirfært þekkingu sína á önnur svipuð verkefni. Því held ég að léttasta leiðin í gegnum stærðfræðinámskeiðin í námi ykkar sé að skilja efnið. Skilningur á efninu fæst með því að rýna í skilgreiningar og reglur, skoða sannanir og tengja við dæmi. Þið {bf verðið} að lesa kennslubókina og kynna ykkur efni fyrirlestra. Stór hluti þess sem þið munuð fást við í háskólanámi ykkar er aðeins skiljanlegur þegar notað er tungumál stærðfræðinnar. Ef þið leggið það á ykkur að verða læs á tungumál stærðfræðinnar þá munið þið njóta þess í öllu ykkar námi.

11.5.2 Að reikna

Dæmaskammtarnir eru stórir. Mörg dæmanna eru hugsuð sem léttar reikniæfingar. Önnur dæmi eru til að æfa meðferð hugtaka og að hjálpa ykkur að skilja skilgreiningarnar. Það er ekki nóg að læra niðurstöður, reglur og reikniaðferðir: til að geta beitt þeim af öryggi þarf að hafa góðan skilning á þeim grundvallarhugtökunum.

Til að hafa fullt gagn af dæmatímunum þurfið þið að reyna við dæmin áður en þið mætið í dæmatímann. Ég hvet ykkur eindregið til að vinna saman í náminu. Þannig getur maður fengið hjálp þegar maður er strand og einnig skerpir fátt skilning manns jafn mikið og að útskýra fyrir öðrum. Námið verður skemmtilegra og þannig léttara.

11.5.3 Einbeiting

Meiri árangur næst í náminu ef þið eruð einbeitt. Það er hægt að blekkja sjálfan sig í að halda að maður hafi verið að læra allan daginn þegar í raun var deginum eitt í spjall við félagana, netvafr, fésbókar stúss, msn, tölvuleiki, hlusta á ipodinn, og svo framvegis.

11.5.4 Frágangur skiladæma

Leggið áherslu á vandaða og agaða framsetningu á lausnum skiladæmanna. Það að setja lausnina skýrt og skipulega fram er nauðsynlegt til að maður sjálfur skilji lausnina til hlítar.

Líkt og venjulegt tal- og ritmál þá hefur mál stærðfræðinnar sína málfræði, t.d. krefst táknið "$=$" þess að sitthvoru megin við það standi stærðir eða stærðtákn, og ef fullyrðing sem er sett fram er rétt þá eru þessar stærðir jafnar. Sitthvoru megin við táknið "$\Rightarrow$" varða að standa fullyrðingar, og þegar það er notað rétt þá er fullyrðing hægra megin afleiðing fullyrðingarinnar vinstra megin, þ.e.a.s. alltaf þegar fullyrðing vinstra megin er sönn þá er fullyrðingin hægrra megin líka sönn.

Táknin "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$" eru hentug þegar útreikningar eru sýndir á töflu, en mín ráðlegging er að nota þau sem minnst. Þau eru ekki notuð í kennslubókinni, ekki heldur í lausnaheftinu, og atvinnustærðfræðingar nota þessi tákn ekki í sínum skrifum. Í löngum útreikngum er oft hægt að nota "$=$" í stað leiðingaörva. Engin ástæða er heldur til að nota táknin "$\vee$", "$\wedge$" því orðin "eða" og "og" eru mun skýrari; það eina sem táknin hafa fram yfir orðin er tilgerðin.

Gott er að hafa eftirfarandi reglur í huga þegar gengið er frá lausnum verkefna:

1. Textinn á að vera ein samfelld heild sem fullnægir sömu kröfum og gerðar eru til annars ritaðs máls. Stærðfræðiformúla eða stærðtákn á aldrei að koma fyrir eitt sér, heldur alltaf að vera felt inn í samfellt mál.
2. Uppsetningin á að vera aðlaðandi og frágangur snyrtilegur.
3. Allar fullyrðingar skulu studdar ljósum rökum.
4. Svara þarf því sem spurt er um! Það þarf að koma skýrt fram hvert svarið er.

KAFLI 12

Orðaskrá

andhverfanlegur : invertible

andhverfur breiðbogakósínus : inverse hyperbolic cosine

andhverfur breiðbogasínus : area-hyperbolic sine

andhverfur breiðbogatangens : inverse hyperbolic tangent

bakmengi : codomain

bil : interval

breiðbogakósínus : hyperbolic cosine

breiðbogasínus : hyperbolic sine

breiðbogatangens : hyperbolic tangent

diffranlegur : differentiable

diffurjafna : differential equation

efra mark : least upper bound

eintækur : injective

fall : function

gagntækur : bijective

gildi : image

heilda : integrate

heildanlegur : integrable

heildismark : limit of integration

heiltala : integer

hliðruð línuleg diffurjafna : inhomogeneous linear differential equation

hlutheildun : integration by parts

hvelft fall : concave function

hverfipunktur : flex point

innri punktur : inner point

innsetning : change of variables

jafnstæður : even

jaðarpunktur : boundary point

keila : cone

kennijafna : characteristic equation

kúpt fall : convex function

línuleg diffurjafna : linear differential equation

meðalgildi : average value

meðalgildissetning : mean value theorem

miðja : centre

myndmengi : actual range

náttúrleg tala : natural number

náttúrlegur logri : natural logarithm

rauntala : real number

ræð tala : rational number

rótarpróf : root test

röð : infinite series

samfelldni : continuity

samfellt fall : continuous function

samleitin röð : convergent series

samleitnibil : interval of convergence

samleitnigeisli : radius of convergence

samsemdarvörpun : identity mapping

samskeyting : composite

skilgreiningarmengi : argument domain

snertill : tangent line

staðbundið hágildi : local maximum

staðbundið lággildi : local minimum

staðbundið útgildi : extremum in the small

stofnbrotaliðun : expansion in partial fractions

stofnfall : antiderivative

tvinntala : complex number

tölugildi : absolute value

undirsumma : lower sum

veldaröð : power series

veldisvísisfall : exponential function

vægi : moment

vörpun : mapping

yfirsumma : upper sum

átækur : onto

óeiginlegt heildi : improper integral

óræð tala : irrational number

V

Y