,,

1. Föll og markgildi

Stærðfræðigreining IB, 29. ágúst 2015

Benedikt Steinar Magnússon, bsm@hi.is

1.1

Tölur og föll

Inngangur

Viðfangsefnið

There is a theory which states that if ever anybody discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable. There is another theory which states that this has already happened. -Douglas Adams

1.2

Stærðfræðigreining

Grunnhugmyndin

Stærðfræðigreining grundvallast á því að mæla breytingu (oft með tilliti til tíma)

- Eðlisfræði; hraði, hröðun, massi, orka, vinna, afl, þrýstingur
- Rúmmál; flatarmál, rúmmál, lengd, massamiðja
- Hagnýtingar; hagfræði, stofnstærðir, hámörkun/lágmörkun
- Stærðfræði; markgildi, hermun, jafnvægisástand

Sagan

Sett fram samtímis, en óháð, af Isaac Newton og Gottfried Leibniz í lok 17. aldar.

1.3

Ítarefni

Fyrir nánari útlistun á hugtökunum sem við fjöllum um þá er hægt að skoða

- http://stæ.is (hugtakasafn og orðaskrá)
- http://planetmath.org
- http://mathworld.wolfram.com
- http://en.wikipedia.org (ath. enska útgáfan)

Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

Forrit

- GeoGebra http://www.geogebra.org
- WolframAlpha http://www.wolframalpha.com 1.4

0.1 Skiladæmi

0.1.1 Frágangur skiladæma

- Skrifið upp **dæmið** og lausnina snyrtilega
- Vísið í setningar sem þið notið
- Notið ekki rökfræðitákn eins og $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$
- Textinn á að vera samfelldur og læsilegur (lesið hann sjálf yfir)
- Skýrt svar/niðurstaða. Passið að svara því sem er spurt um.
  ”Forty-two!” yelled Loonquawl. ”Is that all you’ve got to show for seven and a half million years’ work?”
  ”I checked it very thoroughly,” said the computer, ”and that quite definitely is the answer. I think the problem, to be quite honest with you, is that you’ve never actually known what the question is.”
  -Douglas Adams, The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy

Tölur

Tölur

1.1 Skilgreining

(i) *Náttúrlegu tölurnar* eru tölurnar $1, 2, 3, 4, \dots$ og mengi þeirra er táknað með $\mathbb{N}$.
(ii) Mengi *heiltalna* er táknað með $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
(iii) Mengi *ræðra talna* er táknað með $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$.
(iv) Mengi *rauntalna* er táknað með $\mathbb{R}$.
(v) Mengi *tvinntalna* er táknað með $\mathbb{C}$.

1.2 Athugasemd

Margir vilja telja 0 með sem náttúrlega tölu. Það er eðlilegt ef maður lítur á náttúrlegu tölurnar þannig að þær tákni fjölda. Ef maður lítur hins vegar þannig á að þær séu notaðar til að númera hluti þá er 0 ekki með. 1.5

1.3 Smíði rauntalna

Rauntölur eru smíðaðar úr ræðu tölunum með því að fylla upp í götin.

T.d. eru

$$\begin{aligned} \pi &= 3,1415926\dots, \qquad \text{og} \\ \sqrt{2} - 4 &= -2,58578\dots \end{aligned}$$

ekki ræðar tölur (það er ekki hægt að skrifa þær sem brot $\frac{a}{b}$, þar sem a og b eru heilar tölur), en þær eru rauntölur.

1.4 Frumsendan um efra mark

Látum A vera mengi af rauntölum sem er þannig að til er tala x, þannig að fyrir allar tölur $a \in A$ þá er

$$a \leq x.$$

Þá er til rauntala x_0 sem kallast *minnsta efra mark* fyrir A, sem er þannig að $a \leq x_0$ fyrir allar tölur $a \in A$ og ef $x < x_0$ þá er til tala $a \in A$ þannig að $a > x$. 1.6

Bil

1.5 Skilgreining
Látum a og b vera rauntölur þannig að $a < b$. Skilgreinum
(i) *opið bil* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
(ii) *lokað bil* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
(iii) *hálf opið bil* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
(iv) *hálf opið bil* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

Þessi bil sem er skilgreind hér fyrir ofan eru kölluð endanleg. Til eru fleiri gerðir af bilum:
(v) *opið óendanlegt bil* $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$
(vi) *opið óendanlegt bil* $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$
(vii) *lokað óendanlegt bil* $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$
(viii) *lokað óendanlegt bil* $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$
(ix) *allur rauntalnaásinn* $(-\infty, \infty)$.

1.7

1.6 Skilgreining
Mengi A af rauntölum kallast bil ef um allar tölur $a < b$ sem eru í menginu A gildir að ef $a < x < b$ þá er x líka í menginu A. Þ.e. *engin göt.*

1.7 Athugasemd
(i) Sérhvert bil á rauntalnaásnum er af einni þeirra gerða sem talin er upp í Skilgreiningu 1.5. (Þessi staðhæfing er jafngild frumsendunni um efra mark.)
(ii) Það er jafngilt að segja

$$x \in (a - \eta, a + \eta)$$

og

$$|x - a| < \eta.$$

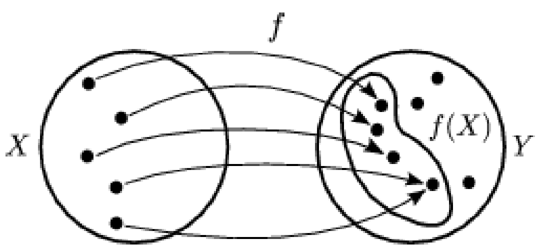
1.8

Föll

Vörpun

1.8 Skilgreining
Vörpun frá mengi X yfir í mengi Y er regla sem úthlutar sérhverju staki x í X nákvæmlega einu staki $f(x)$ í Y. Táknum þetta með $f : X \to Y$.
Stakið $f(x)$ kallast *gildi* vörpunarinnar (í punktinum x).

1.9 Skilgreining
Mengið X kallast *skilgreiningarmengi* f, mengið Y kallast *bakmengi* f og mengið $f(X) = \{f(x); x \in X\}$ kallast *myndmengi* f.

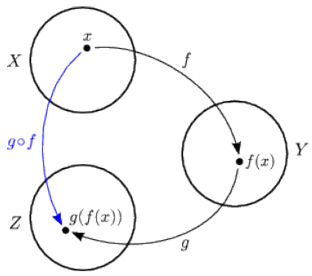


1.9

Samskeyting

1.10 Skilgreining

Látum $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ vera varpanir. Vörpunin $g \circ f : X \to Z$ sem skilgreind er með $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ kallast *samskeyting* f og g. Stakið $g(f(x)) \in Z$ fæst með því að beita fyrst vörpuninni f á stakið x og síðan vörpuninni g á stakið $f(x)$.



1.10

Eintækni/átækni

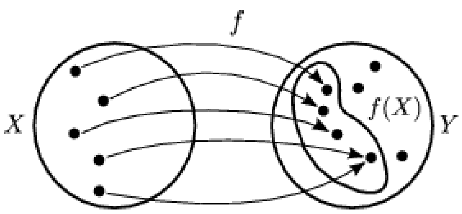
1.11 Athugasemd

Það er ekki víst að öll gildin í Y séu tekin (þ.e. $f(X)$ getur verið minna en Y). Eins þá er mögulegt að f taki sama gildið oftar en einu sinni.

1.12 Skilgreining

Við segjum að vörpunin f sé *átæk* ef $f(X) = Y$, það þýðir að fyrir sérhvert stak y í Y þá er til (amk. eitt) stak x í X þannig að $f(x) = y$.

Segjum að vörpunin f sé *eintæk* ef $f(x_1) = f(x_2)$ hefur í för með sér að $x_1 = x_2$, þ.e. sérhvert gildi sem vörpunin tekur er bara tekið einu sinni.



1.11

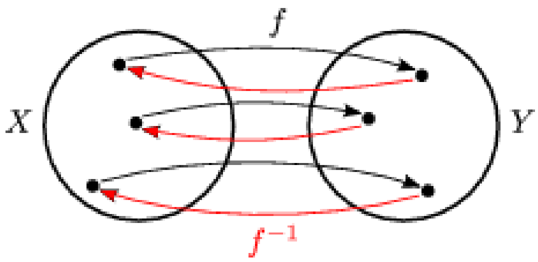
Andhverfa

1.13 Skilgreining

Vörpun sem er bæði eintæk og átæk kallast *gagntæk*.

1.14 Setning

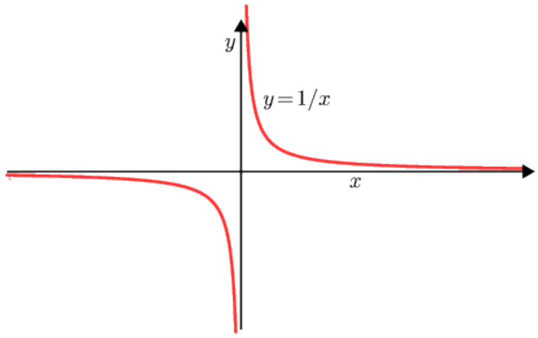
Látum $f : X \to Y$ vera vörpun. Sagt er að f sé andhverfanleg ef til er vörpun $f^{-1} : Y \to X$ þannig að samskeyting varpananna f og f^{-1} annars vegar og f^{-1} og f hins vegar sé viðeigandi samsemdarvörpun, þ.e. $f^{-1} \circ f = id_X$ og $f \circ f^{-1} = id_Y$.



1.12

1.15 Athugasemd
Venjulega hjá okkur þá eru mengin X og Y mengi af rauntölum. Þegar Y er mengi af tölum þá er notast við orðið *fall* í stað orðsins *vörpun*.

1.16 Skilgreining
Látum $f : X \to Y$ vera fall þannig að X og Y eru mengi af rauntölum. *Graf* fallsins f er þá mengi allra punkta í planinu $\mathbb{R}^2$ af gerðinni $(x, f(x))$ þar sem $x \in X$. Notum oft y í stað $f(x)$.



1.13