

Hypergraphes

Mehdi Naima
Université Paris Nord

2 juin 2015

Résumé

Table des matières

1	Rappels sur les hypergraphes	4
1.1	Définitions	4
1.2	Représentation	4
1.3	Hypergraphe simple	4
1.4	Hypergraphe appartenant à la famille de Sperner	4
1.5	Génération aléatoire	4
2	Probabilité qu'un hypergraphe généré aléatoirement soit simple	5
2.1	Étude théorique	5

Introduction

Ce rapport présentera différents aspects de la génération aléatoire des hypergraphes. Dans la première partie nous ferons quelques rappels sur ce que sont les hypergraphes. Nous consacrerons la deuxième partie à l'étude théorique de la probabilité qu'un hypergraphe généré aléatoirement soit simple, nous ferons ensuite quelques statistiques

1 Rappels sur les hypergraphes

1.1 Définitions

Les hypergraphes sont des objets mathématiques généralisant la notion de graphe.

Un hypergraphe H est un couple (V, E)

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

représente les sommets de l'hypergraphe et

$$E = E_1, E_2, \dots, E_m$$

est une famille de parties non vides de V

1.2 Représentation

Un hypergraphe peut être représenté par une matrice $A_{n,m}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ où chaque colonne représente une hyperarête telle que

$$\forall a_{i,j} \in A_{n,m} a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in E_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(mettre un exemple d'une matrice et de sa représentation graphique éventuellement)

1.3 Hypergraphe simple

$H(V, E)$ est dit simple si $\forall E_i \in E, |E_i| > 1$ et que $\forall E_i, E_j \in E$ si $E_i = E_j$ alors $i = j$

1.4 Hypergraphe appartenant à la famille de Sperner

$H(V, E)$ est de Sperner si $\forall E_i \in E, |E_i| > 1$ et que $\forall E_i, E_j \in E$ si $E_i \subset E_j$ alors $i = j$

1.5 Génération aléatoire

La matrice d'un hypergraphe peut être générée aléatoirement avec des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Nous considérerons dans le reste du rapport des matrices générées avec des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p $B(p)$

2 Probabilité qu'un hypergraphe généré aléatoirement soit simple

2.1 Étude théorique

Nous considérons l'espace probabilisé (Ω, A, P) avec $\Omega = \{A_{n,m}(0,1)\}$, A est la tribu borélienne sur Ω , et P une mesure sur cette tribu. (apporter un peu de précisions)

Considérons C l'événement « l'hypergraphe est simple », D l'événement « toutes les colonnes contiennent au moins deux 1 » et E l'événement « $\forall E_i, E_j \in E, si E_i = E_j$ alors $i = j$ ».

Par conséquent, $C = D \cap E$.

$D = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m$, avec $\forall D_i \in I, D_i$ est l'événement « la i ème colonne contient au moins deux 1 »

Les colonnes de $A_{n,m}$ étant indépendantes (car toutes les v.a le sont ... preuve formelle requise) $P(D) = P(D_1) \times P(D_2) \times \dots \times P(D_m) = (P(D_1))^m$.

$P(D_1) = (1 - ((p-1)^n + (np(p-1)^{n-1})))$.

$P(D) = (1 - ((p-1)^n + (np(p-1)^{n-1})))^m$

$P(C|D)$ = probabilité que toutes les colonnes soient différentes sachant qu'elles ont toutes un nombre de 1 supérieur à 1.

Nous pouvons voir cette probabilité comme m événements indépendants les uns des autres. $P(i)$ étant la probabilité que la i ème colonne soient différentes des autres colonnes $1, \dots, i-1$ sachant qu'elle a un nombre de 1 supérieur à 1.

Et alors $P(C|D) = P(1) \times P(2) \times \dots \times P(m)$.

Dès lors $P(1)$ = la probabilité que la première colonne soit différentes de celles précédemment analysées sachant qu'elle a un nombre de 1 supérieur à 1. $P(1) = 1$.