

Medan listrik di sisi kawat lurus bermuatan seragam

Sparisoma Viridi

Prodi Fisika, Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10, Bandung 40132, Indonesia

v5_20210227 | <https://doi.org/10.5281/zenodo.4568133>

Pendahuluan

- Medan listrik yang disebabkan oleh muatan garis dengan rapat muatan garis seragam akan dibahas secara singkat dan sederhana dalam slide ini
- Terdapat konsep-konsep yang diasumsikan telah dipahami dan tidak dicantumkan di sini untuk menjaga agar pembahasannya dapat tetap singkat

Kerangka

- Pendahuluan
- Medan listrik oleh satu titik muatan
- Medan listrik oleh distribusi muatan
- Rapat muatan garis
- Beberapa integral
- Elemen medan listrik oleh muatan garis
- Latihan

Medan listrik oleh satu titik muatan

- Suatu titik muatan q_j yang terletak pada posisi $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ akan memberikan medan listrik pada posisi $\vec{r} = (x, y, z)$ dalam bentuk

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

Medan listrik oleh distribusi muatan

- Suatu titik elemen muatan dq_j yang terletak pada posisi $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ akan memberikan elemen medan listrik pada posisi $\vec{r} = (x, y, z)$ dalam bentuk

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

Rapat muatan garis

- Rapat muatan garis λ dan elemen panjang dl terkait melalui

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

dengan dl dapat berubah $dx, dy, dz, rd\theta$ dan lainnya

- Untuk muatan total Q dan rapat muatan homogen

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

dengan L adalah panjang muatan garis

Beberapa integral

- Dengan menggunakan

$$u = x^2 + h^2 \rightarrow du = 2x dx$$

dapat diperoleh bahwa

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} + c$$

di mana c adalah suatu konstanta

Beberapa integral (lanj.)

- Dengan menggunakan

$$x = h \tan \theta \rightarrow dx = h \sec^2 \theta d\theta$$

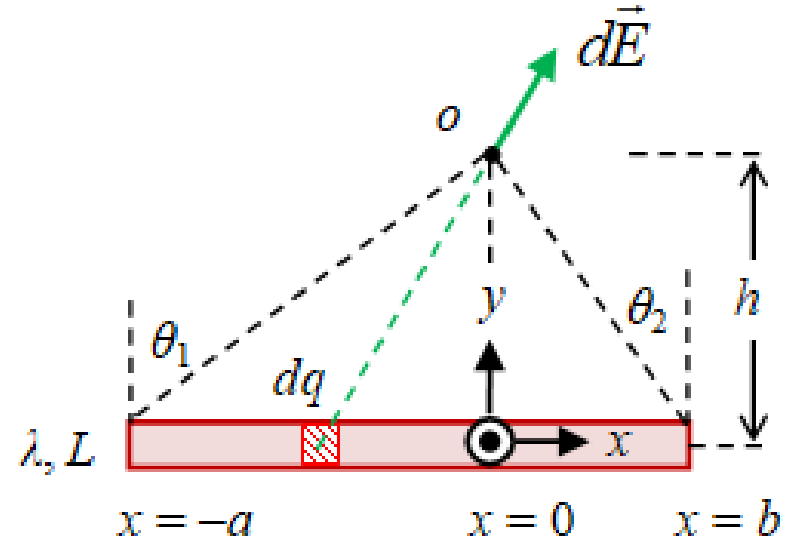
dapat ditunjukkan bahwa

$$\int \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{1}{h^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} + c$$

di mana c adalah suatu konstanta

Elemen medan listrik oleh muatan garis

- Elemen muatan dq terletak posisi $\vec{r}_j = x\hat{x}$ memberikan elemen medan listrik $d\vec{E}$ pada posisi $\vec{r} = h\hat{y}$
- Rapat muatan garis $\lambda = dq/dx$ dan sistem membentang dari $x = -a$ sampai $x = b$
- Panjang muatan garis $L = a + b$



Elemen medan listrik .. muatan garis (lanj.)

- Bermuatan seragam $\lambda \neq \lambda(x)$ atau λ bernilai konstan
- Elemen muatan $dq = \lambda dx$
- Posisi relatif titik observasi o terhadap elemen muatan dq
 $\vec{r} - \vec{r}_j = h\hat{y} - x\hat{x}$ dan jaraknya $|\vec{r} - \vec{r}_j| = \sqrt{h^2 + x^2}$
- Batas bawah integral $x = -a$ dan batas atas integral $x = b$
- Substitusi semua informasi ke persamaan di sebelah kanan

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

Elemen medan listrik .. muatan garis (lanj.)

- Dapat diperoleh

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + h^2)} \frac{(h\hat{y} - x\hat{x})}{\sqrt{x^2 + h^2}} = dE_x \hat{x} + dE_y \hat{y}$$

yang dapat dipisahkan menjadi dua komponen

- Masing-masing komponen adalah

$$dE_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{xdx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = \frac{h\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Elemen medan listrik .. muatan garis (lanj.)

- Komponen medan listrik pada arah x

$$E_x = \int dE_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{xdx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} + c$$

- Komponen medan listrik pada arah y

$$E_y = \int dE_y = \frac{h\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} + c$$

Elemen medan listrik .. muatan garis (lanj.)

- Dengan memasukkan batas-batas integral $x = -a$ dan $x = b$ akan diperoleh hasil

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]_{-a}^b = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-a)^2 + h^2}} \right)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]_{-a}^b = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left[\frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} - \frac{(-a)}{\sqrt{(-a)^2 + h^2}} \right]$$

Latihan 1

1. Suatu muatan garis $Q = +1 \text{ } \mu\text{C}$ memiliki panjang $L = 1 \text{ mm}$. Hitunglah rapat muatan seragamnya.

Latihan 1 (lanj.)

- Rapat muatan seragam

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{+1 \times 10^{-6} \text{ C}}{1 \times 10^{-3} \text{ m}} = +10^{-3} \text{ C/m} = 1 \text{ mC/m}$$

Perhatikan bahwa satuan dari hasil yang diperoleh dibaca “satu **mili** Coulom per **meter**” (terdapat dua huruf **m** yang berbeda makna)

Latihan 2

2. Terdapat muatan garis dengan panjang $L = 1 \text{ mm}$ yang membentang dari $x = 0$ sampai $x = L$. Bila rapat muatan garis memiliki fungsi $\lambda = 2x \text{ nC/m}^2$ tentukanlah muatan totalnya.

Latihan 2 (lanj.)

- Muatan total diperoleh melalui

$$Q = \int dq$$

- Gunakan $dq = \lambda dx$ dan batas-batas integralnya

$$Q = \int \lambda dx = \int_0^L 2x dx = 2 \int_0^L x dx = 2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^L = (L^2 - 0) = L^2 \text{ nC/m}^2$$

- Masukkan nilainya sehingga dapat diperoleh

$$Q = (10^{-3} \text{ m}^2)^2 \text{ nC/m}^2 = 1 \text{ mC}$$

Latihan 3

3. Bila muatan total sebuah muatan garis yang membentang dari $x = 0$ sampai H adalah $-2Q_0$ dan rapat muatan garisnya adalah $\lambda = cx^2$, tentukanlah nilai c .

Latihan 3 (lanj.)

- Dengan menggunakan

$$Q = \int dq = \int \lambda dx$$

λ , batas-batas integralnya, muatan totalnya dapat diperoleh

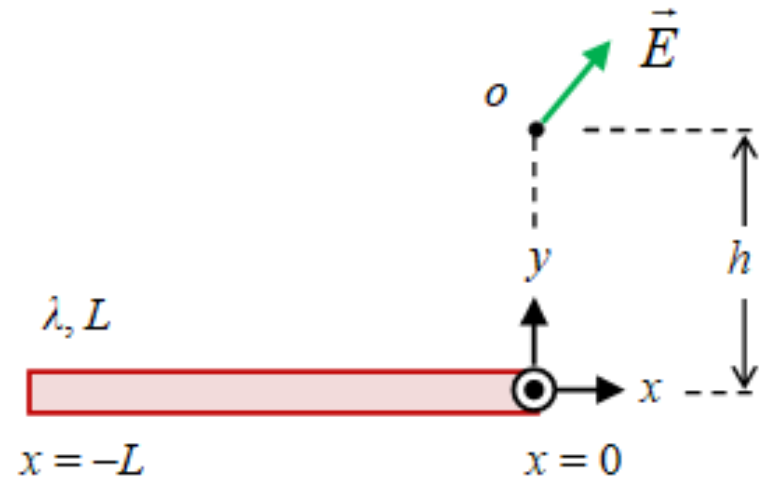
$$-2Q_0 = \int_0^H cx^2 dx = c \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^H = \frac{1}{3} c (H^3 - 0) = \frac{1}{3} c H^3$$

- Akhirnya didapatkan bahwa

$$c = -\frac{6}{H^3} Q_0$$

Latihan 4

4. Tentukanlah medan listrik akibat muatan garis dengan rapat muatan panjang seragam $\lambda \neq \lambda(x)$ seperti pada gambar di samping kanan



Latihan 4 (lanj.)

- Dengan menggunakan rumusan sebelumnya dapat diperoleh

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]_{-L}^0 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{(-L)^2 + h^2}} \right)$$

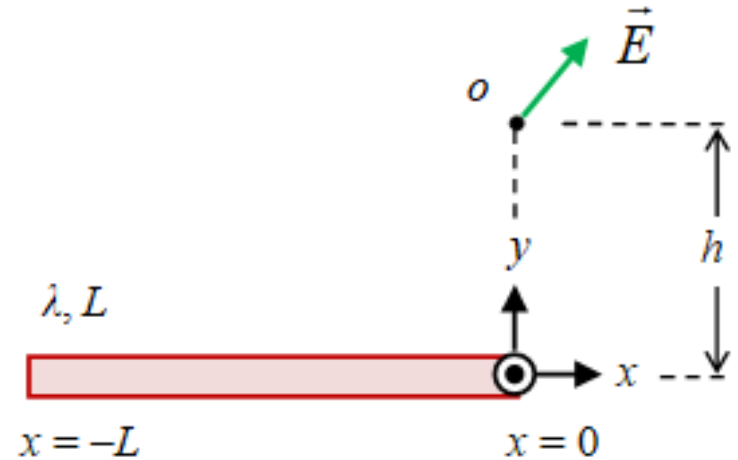
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]_{-L}^0 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left[0 - \frac{(-L)}{\sqrt{(-L)^2 + h^2}} \right]$$

Latihan 4 (lanj.)

- Dapat ditampilkan kembali

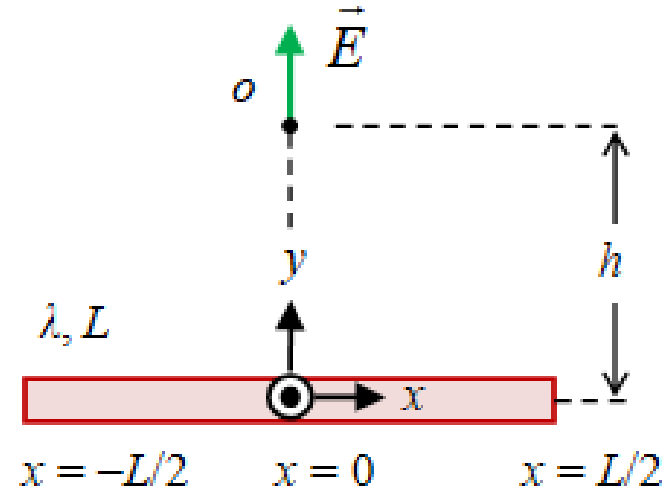
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{(-L)^2 + h^2}} \right)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left[\frac{L}{\sqrt{L^2 + h^2}} \right]$$



Latihan 5

5. Tentukanlah medan listrik akibat muatan garis dengan rapat muatan panjang seragam $\lambda \neq \lambda(x)$ seperti pada gambar di samping kanan



Latihan 5 (lanj.)

- Dengan menggunakan rumusan sebelumnya dapat diperoleh

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-L/2)^2 + h^2}} \right)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left[\frac{(L/2)}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}} - \frac{(-L/2)}{\sqrt{(-L/2)^2 + h^2}} \right]$$

Latihan 5 (lanj.)

yang lebih lanjut akan menjadi

$E_x = 0$ (karena terletak di tengah-tengah panjang kawat)

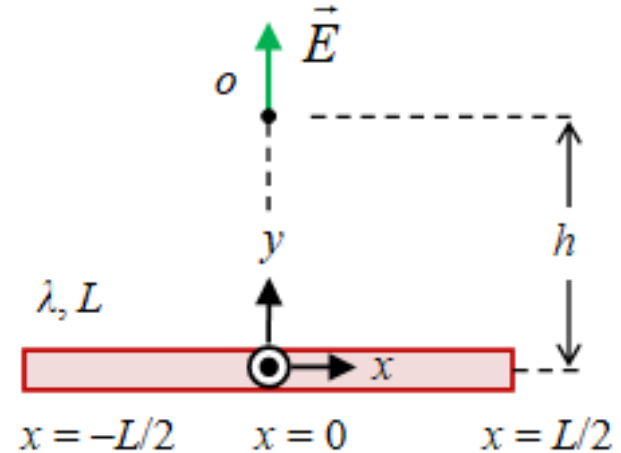
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left(\frac{L}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + h^2}} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right)$$

Latihan 5 (lanj.)

- Dapat ditampilkan kembali

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} \left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right)$$





Terima kasih