聞き流し数学A

物理の計算屋

個数定理

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
  特に $A \cap B = \varnothing$ のとき $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ (U は全体集合, A はその部分集合)
- $n(A \cup B \cup C)$
  $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

集合の要素の個数の性質

- $n(U) \geq n(A \cup B)$
- $n(A \cap B) \leq n(A)$, $n(A \cap B) \leq n(B)$
- $n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$

場合の数の数え方

辞書式配列法や樹形図を用いてもれなく，重複することなく数え上げる.

和の法則, 差の法則

- 和の法則
  事柄 A, B の起こり方がそれぞれ a, b 通りで A, B が同時に起こらないとき, A または B のどちらかが起こる場合の数は $a+b$ 通りである.
- 積の法則
  事柄 A の起こり方が a 通りあり, その各々に対して事柄 B の起こり方が b とおりあるとすると, A と B がともに起こる場合の数は ab 通りである.

順列

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0 \leq r \leq n) \\
&= \prod_{i=0}^{r-1} \\
0! &= 1 \\
{}_nP_n &= n!
\end{aligned}
$$

円順列

$$\frac{n!}{n} = (n-1)! = \frac{{}_nP_n}{n}$$

じゅず順列

$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{\text{円順列}}{2}$$

重複順列 n^r

- n 個の異なるものを A, B 2 組に分ける $2^n - 2$
- A, B 2 組に分ける $(2^2 - 2)/2$
- A, B, C 3 組に分ける $3^n - 3(2^n - 2) - 3$
- 3 組に分ける $\{3^n - 3(2^n - 2) - 3\}/2$

組合せの数

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (0 \le r \le n) \\
{}_nC_n &= 1
\end{aligned}
$$

${}_nC_r$ の性質

$$
\begin{aligned}
{}_nC_r &= {}_nC_{n-r} \quad (0 \le r \le n) \\
{}_nC_r &= {}_{n-1}C_{r-1} +_{n-1} C_r \quad (1 \le r \le n-1, 2 \le n)
\end{aligned}
$$

組分け

n 人を A 組 p 人, B 組 q 人, C 組 r 人に分ける.

$$ {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!} $$

単に 3 組に分けるときには注意が必要

- 3 組同時なら $\div 3!$
- 2 組同時なら $\div 2!$

同じものを含む順列

$$ {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r \times \cdots = \frac{n!}{p!q!r!\cdots} $$

ただし,

$$ p + q + r + \cdots = n $$

重複の組合せの数

$$ {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r \qquad (n \leq r \text{であってもよい}) $$

確立の定義

全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき,
事象 A の起こる確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

基本性質

$$
\begin{aligned}
0 \leq \quad P(A) \quad &\leq 1 \\
P(\varnothing) \quad &= \quad 0 \\
P(U) \quad &= \quad 1
\end{aligned}
$$

加法定理

事象 A, B が互いに排反のとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

余事象の確立

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

独立な試行の確率

2 つの独立な試行 S, T において, S では事象 A が起こり, T では事象 B が起こる事象を C とすると,

$$P(C) = P(A)P(B)$$

反復試行の確立

1 回の試行で事象 A の起こる確率が p であるとする
この試行を n 回繰り返すとき, 事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$$ {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} $$

条件付き確率

事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率 $P_A(B)$ は

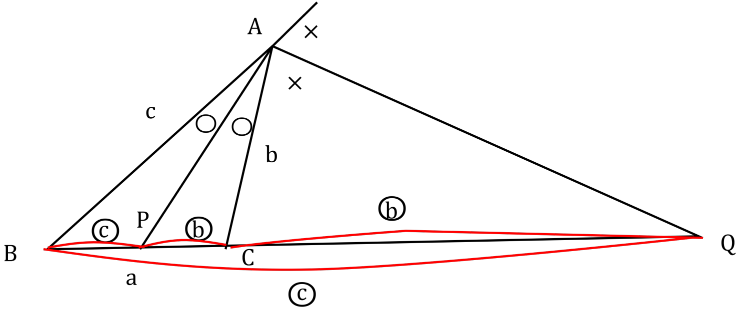
$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

確率の乗法

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$$

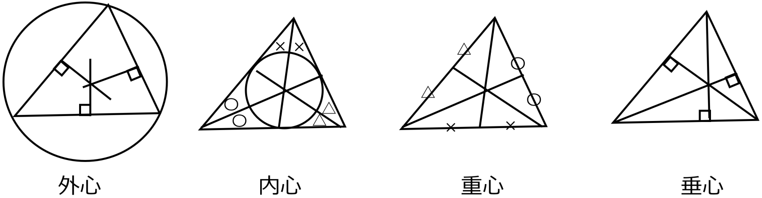
三角形の二等分線と比

- △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点 P は, 辺 BC を $c : b$ に内分する.
- $b \neq c$ である △ABC の外角の二等分線と辺 BC の延長線との交点 Q は辺 BC を $c : b$ に外分する.



外心・内心・重心

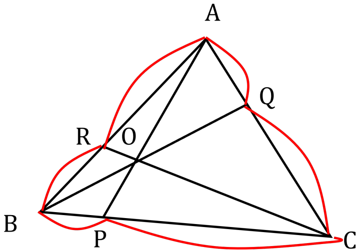
- 外心・・・3 辺の垂直二等分線の交点
- 内心・・・3 つの内角の二等分線の交点
- 重心・・・3 つの中線の交点
  重心は各中点を 2 : 1 に内分する.
- 垂心・・・三角形の各頂点から対辺またはその延長に下した垂線の交点



チェバの定理

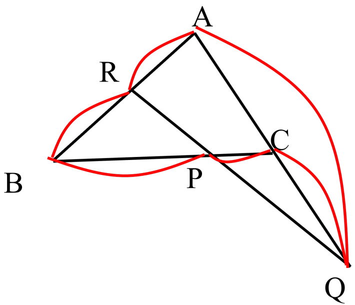
任意の点 O

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$



メネラウスの定理

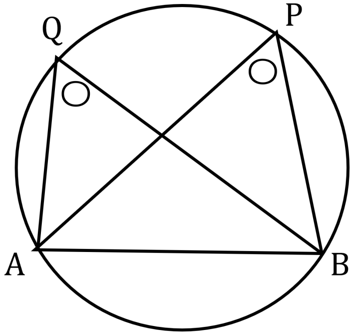
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} \cdot \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1$$



円周角の定理とその逆

4 点 A, B, P, Q が 1 つの円周上にある.

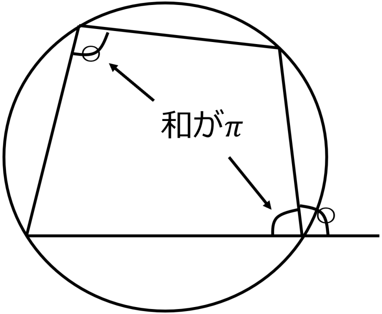
$\Leftrightarrow \angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{AQB}$



円に内接する四角形

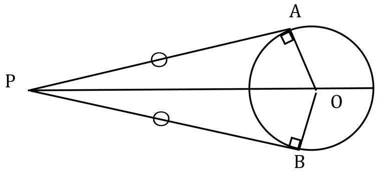
四角形が円に内接するとき次の (1) と (2) が成り立つ.

1. 対角の和は π
2. 内角はその対角の外角に等しい



円の接線

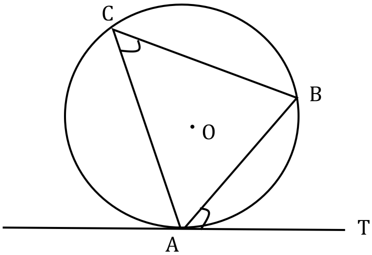
$$\begin{aligned} \mathrm{OA} &\perp \mathrm{PA} \\ \mathrm{OB} &\perp \mathrm{PB} \\ \mathrm{PA} &= \mathrm{PB} \end{aligned}$$



接弦定理とその逆

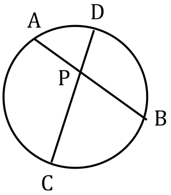
直線 AT が円 O の接線

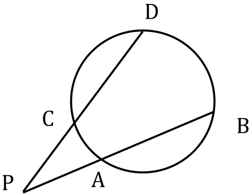
$$\Leftrightarrow \angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BAT}$$

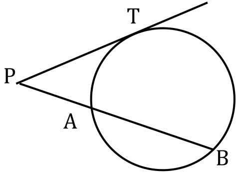


方べきの定理 (逆も成り立つ)

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD},\ \mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$$







三垂線の定理

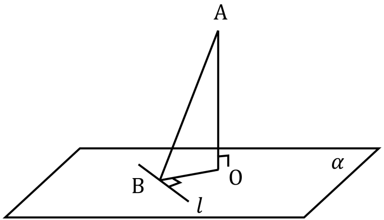
平面 α 上に直線 l があるとき, α 上にない点 A, l 上の点 B, l 上にない α 上の点 O について

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{l}, \quad \mathrm{OB} \perp \mathrm{l}, \quad \mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$$

ならば

$$\mathrm{OA} \perp \alpha$$

が成り立つ



空間における直線や平面の位置関係

- 平行な 2 直線の一方に垂直な直線は他方にも垂直である
- 直線 l が平面 α 上の交わる 2 直線 $m,\ n$ に垂直ならば直線 l は平面 α に垂直である
- 平面 α の 1 つの垂線を含む平面は α に垂直である

正多面体の定義

次の 2 つの条件を満たす凸多面体を正多面体という

- 各面はすべて合同な多角形である
- 各面はすべて合同な多角形であり，各頂点に集まる面の数は等しい

オイラー多面体定理

凸多面体において v: 頂点数, e: 辺の数, f: 面の数

$$v - e + f = 2$$

倍数の判定法

- 2 の倍数: 一の位が 0, 2, 4, 6, 8
- 5 の倍数: 一の位が 0, 5
- 4 の倍数: 下 2 桁が 4 の倍数
- 3 の倍数: 各位の和が 3 の倍数
- 9 の倍数: 各位の数の和が 9 の倍数

約数の個数

自然数 N の素因数分解が $N = p^a q^b r^c \cdots$ となるとき, N の正の約数の個数は

$$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots$$

最大公約数, 最小公倍数の性質

2 つの自然数 a, b の最大公約数を g, 最小公倍数を l とする. $a = ga'$, $b = gb'$ とすると

1. a', b' は互いに素である
2. $l = ga'b' = ab' = a'b$
3. $ab = gl$ 特に $g = 1$ のとき $ab = l$

整数の割り算

整数 a と正の整数 b に対して

$$a = bg + r,\ 0 \leq r \leq b$$

を満たす整数 q と r がただ 1 通りに定まる

連続する整数の積の性質

1. 連続する 2 つの整数の積は 2 の倍数である
2. 連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数である

余りによる整数の分類

k は整数とする

1. $2k$, $2k+1$ (偶数, 奇数)
2. $3k$, $3k+1$, $3k+2$ (3 で割った余りが 0, 1, 2)
3. 一般に m が 2 以上の自然数のとき
   $mk, mk+1, mk+2, \cdots, mk+(m-1)$

合同式

m は正の整数とする
2 つの整数 a, b について, $a-b$ が m の倍数であるとき, a と b は m を法として合同であるといい, 式で $a \equiv b \pmod{m}$ として表す

割り算と最大公約数

2 つの自然数 a, b について, a を b で割ったときの余りを r とすると, a と b の最大公約数は, b と r の最大公約数に等しい.

ユークリッドの互除法

2 つの自然数 a, b の最大公約数を求めるには次の手順を繰り返せばよい

1. a を b で割ったときの余りを r とする.
2. $r = 0 \Rightarrow b$ が a と b の最大公約数
   $r > 0 \Rightarrow a$ を b, b を r で置き換えて (1) へ

1 次不定方程式と整数解

0 でない 2 つの整数 $a,\ b$ が互いに素であるならば任意の整数 c について $ax + by = c$ を満たす $x,\ y$ が存在する

有限小数, 循環小数の判定法

既約分数 $\frac{m}{n}$ において次のことが成り立つ

- 分母 n の素因数は 2, 5 だけからなる
  $\Leftrightarrow$ $\frac{m}{n}$ は有限小数で表される.
- 分母 n の素因数について 2, 5 以外のものがある
  $\Leftrightarrow$ $\frac{m}{n}$ は循環小数で表される

n 進法, n 進数

位置取りの基礎を n として数を表す方法を n 進法といい,
n 進法で表された数を n 進数という