

聞き流し数学 I

物理の計算屋

整数の加法・減法・乗法

加法

交換法則

$$A + B = B + A$$

結合法則

$$(A + B) + C = C + (B + A)$$

乗法

$$AB = BA$$

$$(AB)C = A(BC)$$

分配法則

$$A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$$

指数法則

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

展開の公式, 因数分解

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

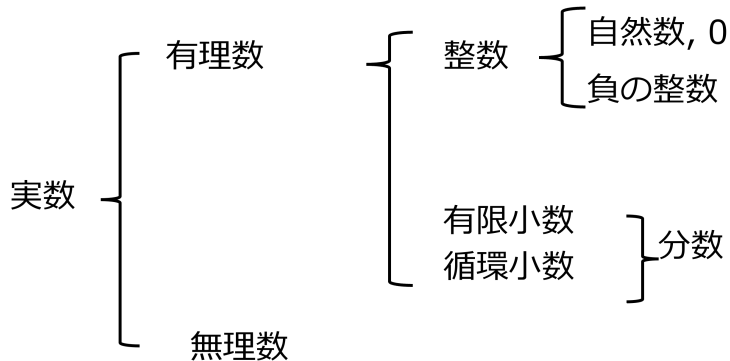
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

実数の構造



絶対値の性質

$$\begin{aligned} a \geq 0 \text{ のとき } |a| &= a \\ a \leq 0 \text{ のとき } |a| &= -a \end{aligned}$$

平方根の性質

$a \geq 0$ のとき

$$(\sqrt{a})^2 = a, (-\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a} \geq 0, \sqrt{a^2} = a$$

$a \leq 0$ のとき

$$\sqrt{a^2} = -a$$

$a > 0, b > 0, k > 0$ のとき

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$$

2重根号のはずし方

文字はすべて正の整数とする

$\sqrt{p + k\sqrt{q}}$ は $\sqrt{(a + b) \pm 2\sqrt{ab}}$ に変形し,

$$\sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{(a + b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

不等式の性質

$$a < b \quad \text{ならば} \quad a + c < b + c, a - c < b - c$$

$$a < b, c > 0 \quad \text{ならば} \quad ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$a < b, c < 0 \quad \text{ならば} \quad ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$a < b, b < c \quad \text{ならば} \quad a < c$$

絶対値を含む方程式, 不等式

場合分け

$$|A| = \begin{cases} A (A \geq 0) \\ -A (A < 0) \end{cases}$$

簡便法 $c > 0$ のとき方程式

$$|x| = c \quad \text{の解は} \quad x = \pm c$$

$$|x| < c \quad \text{の解は} \quad -c < x < c$$

$$|x| > c \quad \text{の解は} \quad x < -c, c < x$$

集合の基本

U は全体集合で A, B, C は U の部分集合とする
部分集合 $A \subset B$

「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」が成り立つ

相当 $A = B$

「 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ 」が成り立つ

共通部分 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$

和集合 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$

補集合 $\bar{A} = \{x | x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

$$\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

真の場合: 証明する
偽の場合: 反例を 1 つあげる

必要・十分条件

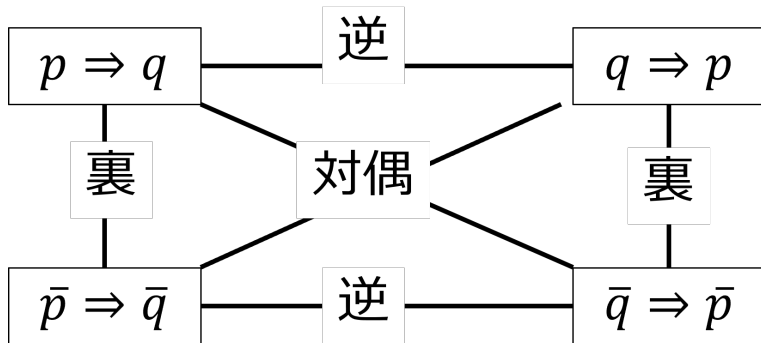
2つの条件 p, q について
 $p \Rightarrow q$ が真であるとき

q は p であるための必要条件
 p は q であるための十分条件

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ が共に真であるとき

q は p (p は q) であるための必要十分条件

命題の逆, 対偶, 裏



命題とその対偶の真偽は一致する

$y = a(x - p)^2 + q$ ($a \neq 0$) のグラフ

頂点 (p, q) , 軸が直線 $x = p$ の放物線
 $a > 0$ なら下に凸, $a < 0$ なら上に凸

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) のグラフ

右辺を平方完成して

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

頂点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$, 軸が直線 $x = -\frac{b}{2a}$ の放物線

平行移動

x 方向に p , y 方向に q の平行移動で

$$\text{点}(a, b) \rightarrow (a + p, b + q),$$

$$\text{グラフ } y = f(x) \rightarrow y - q = f(x - p)$$

対称移動

	x 軸	y 軸	原点
(a, b)	$(a, -b)$	$(-a, b)$	$(-a, -b)$
$y = f(x)$	$y = -f(x)$	$y = f(-x)$	$y = -f(-x)$

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大・最小

平方完成して $y = a(x - p)^2 + q$ の形にする
 $a > 0$ のとき, $x = p$ で最小値 q , 最大値はない
 $a < 0$ のとき, $x = p$ で最大値 q , 最小値はない

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ ($h \leq x \leq k$) の最大・最小

$a > 0$ (下に凸) の場合,

1. 区間の内に頂点があるとき, 頂点で最小, 頂点から遠い区間の端で最大
2. 区間の内に頂点がないとき, 頂点に近い区間の端で最小, 遠い端で最大

2 次関数の決定

与えられた条件が

1. 放物線の頂点や軸

$$\rightarrow y = a(x - p)^2 + q \text{ とおく}$$

2. グラフが通る 3 点

$$\rightarrow y = ax^2 + bx + c \text{ とおく}$$

2次方程式の実数解の個数

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ に対し、
この方程式が

異なる2つの実数解をもつ $\Leftrightarrow D > 0$

ただ1つの実数解(重解)をもつ $\Leftrightarrow D = 0$

実数解をもたない $\Leftrightarrow D < 0$

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを C とする. 判別式 $D = b^2 - 4ac$ とすると

$D > 0 \iff C$ は x 軸と異なる2点で交わる

$D = 0 \iff C$ は x 軸と1点で接する

$D < 0 \iff C$ は x 軸と共有点をもたない

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ の解

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる 2 つの実数解 α, β を持ち, $\alpha < \beta$ とする
 $a > 0$ の場合,

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{の解は} \quad x < \alpha, \beta < x$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{の解は} \quad \alpha < x < \beta$$

$(x - a)^2 > 0, (x - a)^2 < 0$ の解

$(x - a)^2 < 0$ の解は ない

$(x - a)^2 \leq 0$ の解は $x = a$

$(x - a)^2 > 0$ の解は a 以外のすべての実数

$(x - a)^2 \geq 0$ の解は すべての実数

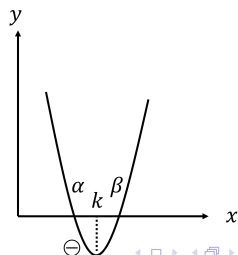
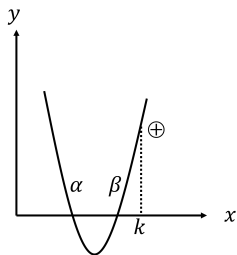
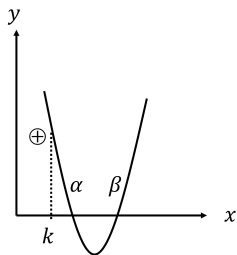
放物線と x 軸の共有点の位置

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $D = b^2 - 4ac$ とする. 放物線 $y = f(x)$ が x 軸と $x = \alpha, \beta$ ($\alpha \leq \beta$) で共有点を持つとする $a > 0$ のとき,

$$\alpha > k, \beta < k \Leftrightarrow D \geq 0, \text{軸} > k, f(k) > 0$$

$$\alpha < k, \beta < k \Leftrightarrow D \geq 0, \text{軸} < k, f(k) > 0$$

$$\alpha < k < \beta \Leftrightarrow f(k) < 0$$

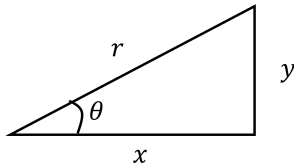


三角比の定義

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



三角比の相互関係

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ 1 + \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta}\end{aligned}$$

$\pi - \theta, \frac{\pi}{2} \pm \theta$ の三角比

$$\sin(\pi \pm \theta) = \pm \sin \theta$$

$$\cos(\pi \pm \theta) = \mp \cos \theta$$

$$\tan(\pi \pm \theta) = \mp \tan \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos \theta$$

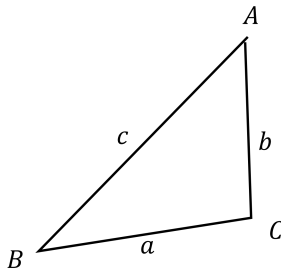
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \frac{1}{\tan \theta}$$

正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$a = c \cos B + b \cos C$$

$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$c = b \cos A + a \cos B$$

三角形の辺と角の関係

三角形の成立条件 $|b - c| < a < b + c$
辺と角の大小関係

$$a < b \Leftrightarrow A < B$$

$$a = b \Leftrightarrow A = B$$

$$a > b \Leftrightarrow A > B$$

$$A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$A > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

2辺とその間の角

$\triangle ABC$ の面積 S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

3辺 (ヘロンの公式)

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

データの代表値

平均値：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

中央値 (メジアン)：

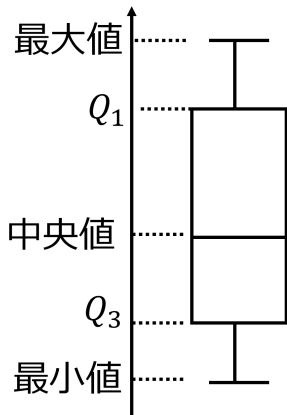
- ・データを値の大きい順に並べたときの中央の位置にくる値
- ・データの大きさが偶数のときは中央に並ぶ2つの値の平均値

最頻値 (モード)：

- ・データにおける最も個数の多い値
- ・度数分布表に整理したときは度数が最も大きい階級の階級値

箱ひげ図

データの最小値, 第1四分位数 Q_1 , 中央値, 第3四分位数 Q_3 , 最大値を箱と線(ひげ)で表現する図



偏差: 変数 x_i と平均 \bar{x} の差

$$x_i - \bar{x}$$

分散: 偏差 2 乗平均

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$$

標準偏差: 分散の正の平方根

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

相関係数

変量 x, y の標準偏差をそれぞれ σ_x, σ_y とし,
 x と y の共分散を σ_{xy} とすると

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} (-1 \leq r \leq 1)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \end{aligned}$$