聞き流し数学 I

物理の計算屋

整数の加法・減法・乗法

	加法	乗法
交換法則	$A+B=B+A$	$AB=BA$
結合法則	$(A+B)+C=C+(B+A)$	$(AB)C=A(BC)$

分配法則 $A(B+C)=AB+AC,\ (A+B)C=AC+BC$

指数法則

$$
\begin{aligned}
a^m a^n &= a^{m+n} \\
(a^m)^n &= a^{mn} \\
(ab)^n &= a^n b^n
\end{aligned}
$$

展開の公式, 因数分解

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2+b^2 \\
(x+a)(x+b) &= x^2+(a+b)x+b^2 \\
(ax+b)(cx+d) &= acx^2+(ad+bc)x+bd \\
(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3 \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

実数の構造

- 実数
  - 有理数
    - 整数
      - 自然数, 0
      - 負の整数
    - 有限小数
    - 循環小数
  - 無理数

有限小数・循環小数 → 分数

絶対値の性質

$a \geq 0$ のとき $|a| = a$

$a \leq 0$ のとき $|a| = -a$

平方根の性質

$a \geq 0$ のとき

$$(\sqrt{a})^2 = a,\ (-\sqrt{a})^2 = a,\ \sqrt{a} \geq 0, \sqrt{a^2} = a$$

$a \leq 0$ のとき

$$\sqrt{a^2} = -a$$

$a > 0,\ b > 0,\ k > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \sqrt{a}\sqrt{b} &= \sqrt{ab} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} \\ \sqrt{k^2 a} &= k\sqrt{a} \end{aligned}$$

2 重根号のはずし方

文字はすべて正の整数とする

$\sqrt{p+k\sqrt{q}}$ は $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ に変形し,

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} &= \sqrt{a}+\sqrt{b}\\ \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} &= \sqrt{a}-\sqrt{b}\end{aligned}$$

不等式の性質

$$
\begin{aligned}
a < b \quad &\text{ならば} \quad a + c < b + c, a - c < b - c \\
a < b, c > 0 \quad &\text{ならば} \quad ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \\
a < b, c < 0 \quad &\text{ならば} \quad ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \\
a < b, b < c \quad &\text{ならば} \quad a < c
\end{aligned}
$$

絶対値を含む方程式, 不等式

場合分け

$$|A| = \begin{cases} A(A \geq 0) \\ -A(A < 0) \end{cases}$$

簡便法 $c > 0$ のとき方程式

$$\begin{aligned} |x| = c \quad &\text{の解は} \quad x = \pm c \\ |x| < c \quad &\text{の解は} \quad -c < x < c \\ |x| > c \quad &\text{の解は} \quad x < -c, c < x \end{aligned}$$

集合の基本

U は全体集合で A, B, C は U の部分集合とする

部分集合 $A \subset B$

「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つ

相当 $A = B$

「$A \subset B$ かつ $B \subset A$」が成り立つ

共通部分 $A \cap B = \{x | x \in A \text{かつ} x \in B\}$

和集合 $A \cup B = \{x | x \in A \text{または} x \in B\}$

補集合 $\bar{A} = \{x | x \in U \text{かつ} x \notin A\}$

ド・モルガンの法則

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\
\overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \\
\overline{A \cup B \cup C} &= \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \\
\overline{A \cap B \cap C} &= \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}
\end{aligned}
$$

命題と条件

真の場合: 証明する

偽の場合: 反例を 1 つあげる

必要・十分条件

2 つの条件 $p,\ q$ について

$p \Rightarrow q$ が真であるとき

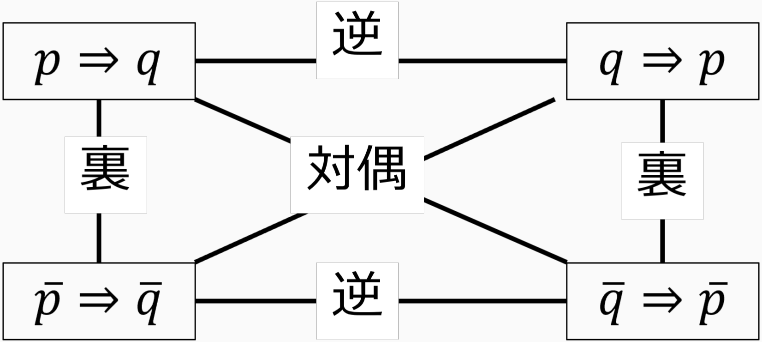
q は p であるための必要条件

p は q であるための十分条件

$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p$ が共に真であるとき

q は p (p は q) であるための必要十分条件

命題の逆, 対偶, 裏



命題とその対偶の真偽は一致する

$y = a(x-p)^2 + q \ (a \neq 0)$ のグラフ

頂点 (p, q), 軸が直線 $x = p$ の放物線

$a > 0$ なら下に凸, $a < 0$ なら上に凸

$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ のグラフ

右辺を平方完成して

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

頂点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b-4ac}{4a}\right)$, 軸が直線 $x = -\frac{b}{2a}$ の放物線

平行移動

x方向にp, y方向にqの平行移動で

$$\begin{aligned} \text{点}(a, b) &\rightarrow (a+p, b+q), \\ \text{グラフ}y = f(x) &\rightarrow y - q = f(x-p) \end{aligned}$$

対称移動

	x 軸	y 軸	原点
(a, b)	$(a, -b)$	$(-a, b)$	$(-a, -b)$
$y = f(x)$	$y = -f(x)$	$y = f(-x)$	$y = -f(-x)$

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大・最小

平方完成して $y = a(x-p)^2 + q$ の形にする

$a > 0$ のとき, $x = p$ で最小値 q, 最大値はない

$a < 0$ のとき, $x = p$ で最大値 q, 最小値はない

2次関数 $y = ax^2 + bx + c \ (h \leq x \leq k)$ の最大・最小

$a > 0$ (下に凸) の場合,

1. 区間の内に頂点があるとき, 頂点で最小, 頂点から遠い区間の端で最大
2. 区間の内に頂点がないとき, 頂点に近い区間の端で最小, 遠い端で最大

2 次関数の決定

与えられた条件が

1. 放物線の頂点や軸

$$\to y = a(x-p)^2 + q \text{ とおく}$$

2. グラフが通る 3 点

$$\to y = ax^2 + bx + c \text{ とおく}$$

2 次方程式の実数解の個数

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ に対し,

この方程式が

$$
\begin{aligned}
\text{異なる2つの実数解をもつ} \quad &\Leftrightarrow \quad D > 0 \\
\text{ただ1つの実数解(重解)をもつ} \quad &\Leftrightarrow \quad D = 0 \\
\text{実数解をもたない} \quad &\Leftrightarrow \quad D < 0
\end{aligned}
$$

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを C とする．判別式 $D = b^2 - 4ac$ とすると

$$
\begin{aligned}
D > 0 &\iff C\text{は}x\text{軸と異なる2点で交わる} \\
D = 0 &\iff C\text{は}x\text{軸と1点で接する} \\
D < 0 &\iff C\text{は}x\text{軸と共有点をもたない}
\end{aligned}
$$

$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c<0$ の解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ を持ち, $\alpha<\beta$ とする

$a>0$ の場合,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c>0 &\quad \text{の解は} \quad x<\alpha, \beta<x \\ ax^2+bx+c<0 &\quad \text{の解は} \quad \alpha<x<\beta \end{aligned}$$

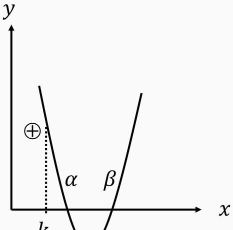
$(x-a)^2 > 0,\ (x-a)^2 < 0$ の解

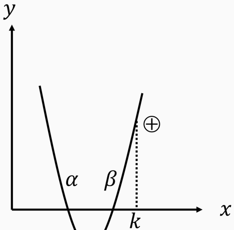
$$
\begin{aligned}
(x-a)^2 < 0 &\quad \text{の解は} \quad \text{ない} \\
(x-a)^2 \leq 0 &\quad \text{の解は} \quad x = a \\
(x-a)^2 > 0 &\quad \text{の解は} \quad a\text{以外のすべての実数} \\
(x-a)^2 \geq 0 &\quad \text{の解は} \quad \text{すべての実数}
\end{aligned}
$$

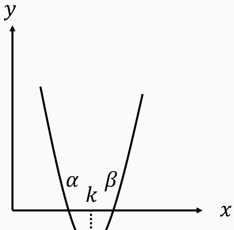
放物線と x 軸の共有点の位置

$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$, $D = b^2 - 4ac$ とする．放物線 $y = f(x)$ が x 軸と $x = \alpha, \beta \ (\alpha \leq \beta)$ で共有点を持つとする $a > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
\alpha > k, \beta < k &\iff D \geq 0, \text{軸} > k, f(k) > 0 \\
\alpha < k, \beta < k &\iff D \geq 0, \text{軸} < k, f(k) > 0 \\
\alpha < k < \beta &\iff f(k) < 0
\end{aligned}$$

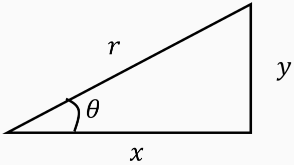






三角比の定義

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{y}{r} \\
\cos\theta &= \frac{x}{r} \\
\tan\theta &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$



三角比の相互関係

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\
\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
1 + \tan^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

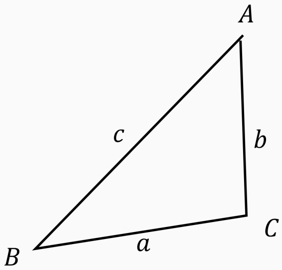
$\pi - \theta$, $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ の三角比

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi \pm \theta) &= \pm \sin\theta \\
\cos(\pi \pm \theta) &= \mp \cos\theta \\
\tan(\pi \pm \theta) &= \mp \tan\theta \\
\sin(\frac{\pi}{2} \pm \theta) &= \cos\theta \\
\cos(\frac{\pi}{2} \pm \theta) &= \mp \sin\theta \\
\tan(\frac{\pi}{2} \pm \theta) &= \mp \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}
$$

正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



余弦定理

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\
a &= c\cos B + b\cos C \\
b &= a\cos C + c\cos A \\
c &= b\cos A + a\cos B
\end{aligned}
$$

三角形の辺と角の関係

三角形の成立条件 $|b-c| < a < b+c$

辺と角の大小関係

$$\begin{aligned} a < b &\iff A < B \\ a = b &\iff A = B \\ a > b &\iff A > B \\ A < \frac{\pi}{2} &\iff a^2 < b^2 + c^2 \\ A = \frac{\pi}{2} &\iff a^2 = b^2 + c^2 \\ A > \frac{\pi}{2} &\iff a^2 > b^2 + c^2 \end{aligned}$$

2 辺とその間の角

$\triangle ABC$ の面積 S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

3 辺 (ヘロンの公式)

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

データの代表値

平均値：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i} x_i$$

中央値 (メジアン)：

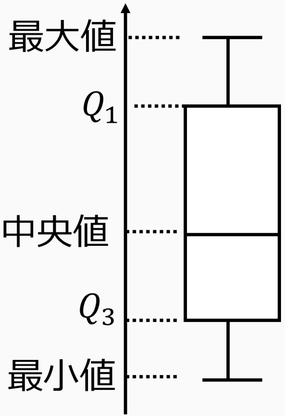
- データを値の大きい順に並べたときの中央の位置にくる値
- データの大きさが偶数のときは中央に並ぶ 2 つの値の平均値

最頻値 (モード)：

- データにおける最も個数の多い値
- 度数分布表に整理したときは度数が最も大きい階級の階級値

箱ひげ図

データの最小値, 第 1 四分位数 Q_1, 中央値, 第 3 四分位数 Q_3, 最大値を箱と線 (ひげ) で表現する図



偏差: 変数 x_i と平均 $\bar{x}$ の差

$$x_i - \bar{x}$$

分散: 偏差 2 乗平均

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

標準偏差: 分散の正の平方根

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

相関係数

変量 x, y の標準偏差をそれぞれ σ_x, σ_y とし,

x と y の共分散を σ_{xy} とすると

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} (-1 \leq r \leq 1) \\
\sigma_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\
r &= \frac{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \\
&= \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}}
\end{aligned}
$$