聞き流し数学 II

物理の計算屋

二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i a^{n-i} b^i$$

多項定理

$(a+b+c)^n$ の一般項は $\frac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r$
但し, $p+q+r=n,\ p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$

$(a+b+c)^n$ の項数 $3n$
$a^p b^q c^r$ の約数の数 $(p+1)(q+1)(r+1)$

整数式の割り算

$A \div B$ の商 Q, 余り R とすると,

$A = BQ + R$ (R の次数 $<$ B の次数 か $R = 0$)

分数式

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} &= \frac{AC}{BD} \\
\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} &= \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC} \\
\frac{A}{C} + \frac{B}{C} &= \frac{A+B}{C} \\
\frac{A}{C} - \frac{B}{C} &= \frac{A-B}{C}
\end{aligned}
$$

恒等式の性質

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c \text{ が } x \text{ の恒等式}$$
$$\Leftrightarrow \quad a = a',\ b = b',\ c = c'$$

実数の性質

a, b は実数とする

$$
\begin{aligned}
a^2 &\geq 0 \\
a^2 &= 0 \Leftrightarrow a = 0 \\
a^2 + b^2 &\geq 0 \\
a^2 + b^2 &= 0 \Leftrightarrow a = b = 0
\end{aligned}
$$

コーシーシュワルツの不等式

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)(x^2+y^2) &\geq (ax+by)^2 \\
(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) &\geq (ax+by+cz)^2
\end{aligned}
$$

相加相乗平均

$a \geq 0, b \geq 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号は $a = b$ のとき成り立つ

複素数の性質

$a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする

- 虚数単位 i は $i^2 = -1$ を満たす数
  $a \geq 0$ のとき $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$
- $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ かつ $b = d$

2 次方程式の性質

実数係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とし, 判別式を $D = b^2 - 4ac$ とする.

$$
\begin{aligned}
D > 0 &\quad\Leftrightarrow\quad \text{異なる2つの実数解をもつ} \\
D = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad \text{重解} \\
D < 0 &\quad\Leftrightarrow\quad \text{異なる2つの虚数解をもつ}
\end{aligned}
$$

2 次方程式の解と係数の関係

実数係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とする

- $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$
- $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ が恒等式

2 次方程式の実数解と実数 k の大小

実数係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とする
α, β が実数のとき, 実数 k に対して

$$\begin{aligned}
\alpha > k,\ \ \beta > k \quad &\Leftrightarrow \quad D \geq 0,\ \ (\alpha - k) + (\beta - k) > 0,\ \ (\alpha - k)(\beta - k) > 0 \\
\alpha < k,\ \ \beta < k, \quad &\Leftrightarrow \quad D \geq 0,\ \ (\alpha - k) + (\beta - k) < 0,\ \ (\alpha - k)(\beta - k) > 0 \\
\alpha < k < \beta \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha - k)(\beta - k) < 0
\end{aligned}$$

剰余の定理

$P(x)$ は整式とする.
$P(x)$ を 1 次式 $x-a$ で割ったときの余りは $P(a)$ であり,
$P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $P(-\frac{b}{a})$ である.

56

因数定理

$P(x)$ は整式とする.
1 次式 $x-a$ が $P(x)$ の因数である $\Leftrightarrow P(a)=0$
1 次式 $ax+b$ が $P(x)$ の因数である $\Leftrightarrow P(-\frac{b}{a})=0$

高次方程式の性質

実数係数の n 次方程式が虚数解 $a+bi$ $(a,\ b$ は実数$)$ を持つならばそれと共役な複素数 $a-bi$ も解である

3 次方程式の解と係数の関係

- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解の 3 つの解を α, β, γ とする

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= -\frac{b}{a} \\
\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{c}{a} \\
\alpha\beta\gamma &= -\frac{d}{a}
\end{aligned}
$$

- $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が恒等式

2 点間の距離

点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) とする
2 点間の距離

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

特に原点 O と A の距離は

$$\mathrm{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

内分点, 外分点, 重心

点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) とする
線分 AB を $m : n$ に分ける点の座標や重心は

$$
\begin{aligned}
\text{内分} \quad \cdots \quad & \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right) \\
\text{外分} \quad \cdots \quad & \left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n} \right) \\
\text{重心} \quad \cdots \quad & \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)
\end{aligned}
$$

直線の方程式

- $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ または $b \neq 0$)
- 点 (x_1, y_1) を通り傾き m の直線の方程式
  $y = m(x - x_1) + y_1$
- 異なる 2 点を通る直線の方程式
  - $x_1 \neq x_2$ のとき $y - y_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(x - x_1)$
  - $x_1 = x_2$ のとき $x = x_1$

  この 2 式をまとめると $(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$

2 直線の関係

$y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$

$$
\begin{aligned}
\text{交わる:}\quad & m_1 \neq m_2 \\
\text{平行:}\quad & m_1 = m_2 \\
\text{垂直:}\quad & m_1 m_2 = -1
\end{aligned}
$$

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
\text{交わる:}\quad & a_1 b_1 - a_2 b_2 \neq 0 \\
\text{平行:}\quad & a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\
\text{垂直:}\quad & a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0
\end{aligned}
$$

点と直線の関係

直線 $ax + by + c = 0$ と点 (x_1, y_1) の距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

三角形の面積

3 点 O$(0,0)$, A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

円の方程式

- 中心 (a, b), 半径 r

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0$$

- 一般形

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

但し, $l^2+m^2-4n=0$

円の接線

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

不等式の表す領域

不等式と領域

$$
\begin{aligned}
y > f(x) \quad &\cdots \quad \text{曲線} y = f(x) \quad \text{の上側の部分} \\
y < f(x) \quad &\cdots \quad \text{曲線} y = f(x) \quad \text{の下側の部分} \\
x^2 + y^2 < r^2 \quad &\cdots \quad \text{円} \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{の内部} \\
x^2 + y^2 > r^2 \quad &\cdots \quad \text{円} \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{の外部}
\end{aligned}
$$

弧度法

- $1^\circ = \frac{\pi}{180}[\mathrm{rad}]$, $1[\mathrm{rad}] = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$
- **半径 r, 中心角 θ の扇形**
  弧の長さ $r\theta$, 面積 $\frac{1}{2}r^2\theta$

三角関数の性質

n は整数，複合同順とする

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta + 2n\pi) &= \sin\theta \\
\cos(\theta + 2n\pi) &= \cos\theta \\
\tan(\theta + n\pi) &= \tan\theta \\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\sin(\pi \pm \theta) &= \mp\sin\theta \\
\cos(\pi \pm \theta) &= -\cos\theta \\
\tan(\pi \pm \theta) &= \pm\tan\theta
\end{aligned}
$$

三角関数の性質

$$
\begin{aligned}
\sin(\frac{\pi}{2} \pm \theta) &= \cos\theta \\
\cos(\frac{\pi}{2} \pm \theta) &= \mp \sin\theta \\
\tan(\frac{\pi}{2} \pm \theta) &= \mp \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}
$$

周期

k は正の整数である

$$y = \sin k\theta \quad \text{の周期} \quad \frac{2\pi}{k}$$

$$y = \cos k\theta \quad \text{の周期} \quad \frac{2\pi}{k}$$

$$y = \tan k\theta \quad \text{の周期} \quad \frac{\pi}{k}$$

加法定理

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

2倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

半角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2}\\
\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2}\\
\tan^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

3倍角の公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$$

積和の公式

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\} \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}
\end{aligned}
$$

和積公式

$$
\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= \quad 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\
\sin A - \sin B &= \quad 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \\
\cos A + \cos B &= \quad 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\
\cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}
\end{aligned}
$$

三角関数の合成 $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$

但し,

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

実数の指数

$a > 0, b > 0$ で n が正の整数 $r,\ s$ が実数のとき

- 定義

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- 法則

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{r+s} \\ (a^r)^s &= a^{rs} \\ (ab)^r &= a^r b^r \end{aligned}$$

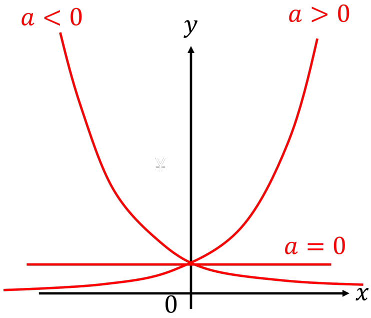
累乗根

$m,\ n,\ p$ は正の整数とする. 性質 $a>0,\ b>0$ とする

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[n]{a}\right)^n &= a \\
\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\
\left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \sqrt[n]{a^m} \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\
\sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[np]{a^{mp}}
\end{aligned}
$$

指数関数 $y = a^x$ とそのグラフ $(a > 0,\ a \neq 1)$

- 定義域は実数全体, 値域は $y > 0$
- $a > 1$ のとき x が増加すると y も増加
- $0 < a < 1$ のとき x が増加すると y は減少
- グラフは点 $(0, 1)$ を通り, x 軸が漸近線



指数と対数の基本関係

$a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0$ とする

定義 $a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$

特に $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0, \log_a \frac{1}{a} = -1$

対数の性質

a, b, c は 1 でない正の数
$M>0$, $N>0$, k は実数とする

$$
\begin{aligned}
\log_a MN &= \log_a M + \log_a N \\
\log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N \\
\log_a M^k &= k \log_a M \\
\log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \\
\log_a b &= \frac{1}{\log_b a}
\end{aligned}
$$

対数関数 $y = \log_a x$ とそのグラフ

- $y = \log_a x$ は $x = a^y$ と同値 $(a > 0,\ a \neq 1)$
- 定義域は $x > 0$, 値域は実数全体
- $a > 1$ のとき x が増加すると y も増加
- $0 < a < 1$ のとき x が増加すると y は減少
- グラフは点 (1_0) を通り, y 軸が漸近線