

Розрахункова Робота - 1-2

з предмету “Математичний Аналіз”

студента групи ІСзп 71

Бутузова О. В.

Варіант №4

Загальне

- В pdf файлі можливо відмічати правильність/неправильність виконання відмічаючи квадрат у лівому верхньому куту завдання.
- Завдання носить нумерацію вигляду В4 (Варіант 4) - РР1 (Розрахункова робота 1) - 0М.0N (де М це завдання, а N підваріант завдання.)

Розрахункова робота - 1

- В данній розрахунковій роботі відсутній розв'язок завдання 76 (07.02)

Розрахункова робота - 2

- В деяких задачах фінальна відповідь подана в рамці. Інколи фінальна відповідь включена до розрахунків (тобто є останньою в ланцюжку перетворень), інколи відповідь і являє собою останній ланцюжок перетворення. Це (рамка) було запроваджено щоб виділити відповідь і спробувати розгрузити усі перетворення.

B4 - PP1 - 01.01

Завдання: Знайти $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ і визначити номер $N(\epsilon)$ такий що
 $|a_n - a| < \epsilon \forall n > N(\epsilon)$, якщо $a_n = \frac{2n+5}{3n+5}$.

$$a_n \frac{2n+5}{3n+5} \rightarrow \frac{2}{3} \quad \text{тому що} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n+5} = \frac{2}{3}$$

$$|a| \text{ розкривається як } \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \\ +a, & a > 0 \end{cases}$$

$$\epsilon > \frac{2n+5}{3n+5} - \left(+\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \epsilon > \frac{3(2n+5) - 2(3n+5)}{3(3n+5)} \Leftrightarrow \epsilon > \frac{6n+15-6n-10}{3(3n+5)} \Leftrightarrow \epsilon > \frac{5}{9n+5}$$

$$n > \frac{5}{9\epsilon} - \frac{15}{9} \Leftrightarrow n > \frac{5-15\epsilon}{9\epsilon} + 1$$

Візьмемо, наприклад, $\epsilon = 0,0001$. Тоді $N(\epsilon) = \frac{5-5 \cdot 0.0001}{(9 \cdot 0.0001)} = 5555$. Це означає, що, починаючи з номера $n = 5556$ всі наступні члени послідовності $\left\{ \frac{2n+5}{3n+5} \right\}$ будуть знаходитись в 0,0001-околі точки $\frac{2}{3}$.

B4 - PP1 - 02.01

Знайти Границю функції

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^2 + (n+4)^2}{(n+3)^3 - (n-2)^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^2 + (n+4)^2}{(n+3)^3 - (n-2)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)(n+5) + (n+4)(n+4)}{(n+3)(n+3)(n+3) - (n-2)(n-2)(n-2)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 10n + 25) + (n^2 + 8n + 16)}{(n^3 + 9n^2 + 27n + 27) - (n^3 - 6n^2 + 12n - 8)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 18n + 41}{15n^2 + 15n + 35} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{18}{n} + \frac{41}{n^2}}{15 + \frac{15}{n} + \frac{35}{n^2}} = \frac{2}{15}.$$

B4 - PP1 - 02.02

Знайти Границю функції

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = [\infty - \infty]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5 - \sqrt{n(n+5)} + \sqrt{n(n+5)} - n)}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

B4 - PP1 - 02.03

Знайти Границю функції

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+4} = [1^\infty]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{n+3}{n-1}\right) - 1\right)^{n+4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(n+3) - (n-1)}{n-1}\right)^{n+4} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{n+4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{4}}\right]^{\left(\frac{4}{n-1}\right)\left(\frac{n+4}{1}\right)} = \\ e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+4)}{n-1}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+4)}{x-1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(1+\frac{4}{n})}{1-\frac{1}{n}}} = e^{\frac{4}{1}} = e^4. \end{aligned}$$

В4 - РР1 - 02.04

Знайти Границю функції

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5} &= \left[\frac{0}{0}\right] \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+x)(1+x) - (1+3x)}{x+x^5} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x+x^2) - (1+3x)}{x+x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x+x^2+x+2x^2+x^3) - (1+3x)}{x+x^5} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+3x^2}{x^5+x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2+3x)}{x(x^4+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x^4+1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

В4 - РР1 - 02.05

Знайти Границю функції

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-2}{x^2-x-6} &= \left[\frac{0}{0}\right] \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{2-x}-2)}{(x+2)(x-3)} * \frac{(\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x-4}{(x-3)(x+2)(\sqrt{(2-x)}+2)} = \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-1(x+2)}{(x-3)(x+2)(\sqrt{(2-x)}+2)} &= \frac{-1}{(-2-3)(2+2)} = \frac{-1}{-5 \cdot 4} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

В4 - РР1 - 02.06

Знайти Границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \pi x + \cos 3\pi x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot (\lim_{x \rightarrow 0} \cos \pi x + \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3\pi x) = (1+1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 2 \cdot \infty = \infty$$

В4 - РР1 - 02.07

Знайти Границю функції

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\cos \pi x) x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos \pi x - 1) x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos \pi x - 1) \right] \frac{1}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos \pi x - 1) \frac{1}{\cos \pi x - 1} \right] \frac{1}{x \sin x} \frac{\cos \pi x - 1}{1} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \pi x - 1}{x \sin x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \pi x - 1}{x \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos \pi x - 1)'}{(x \sin x)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi x (\pi x)'}{(x)' \sin x + x(\sin x)'}} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\pi \sin \pi x}{\sin x + x \cos x}} = e^{\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi x}{\sin x + x \cos x}}
\end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \sin \alpha \sim \alpha \\ \cos \alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{array} \right., \quad \alpha \rightarrow 0$$

$$= e^{\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\pi x)'}{(\sin x + (x \cos x))'}} = e^{\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\pi}{(\cos x + (\cos x - x \sin x))}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x - x \sin x}}$$

$$= e^{\frac{-\pi^2}{\lim_{x \rightarrow 0} 2(1 + \frac{x^2}{2}) - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim_{x \rightarrow 0} 2 + \frac{2x^2}{2} - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{2}}.$$

B4 - PP1 - 02.08

Знайти Границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^{2x}}{\arctg 4x - \sin x} = \left[\frac{1-1}{0+0} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \sin \alpha \sim \alpha \\ \arctg \alpha \sim \alpha \\ \alpha^x - 1 \sim x \ln \alpha \end{array} \right., \quad \alpha \rightarrow 0 \quad \left| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6^x - 1) - (3^{2x} - 1)}{\arctg 4x - \sin x}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6^x - 1) - (3^{2x} - 1)}{\arctg 4x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 6 - 2x \ln 3}{4x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 6}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln 3}{3x} = \frac{\ln 6}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \frac{2 \ln 3}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \\
&= \frac{\ln 6}{3} - \frac{2 \ln 3}{3} = \frac{1}{3}(\ln 6 - \ln 9) = \frac{1}{3} \ln \frac{6}{9} = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

B4 - PP1 - 02.09

Знайти Границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin 2x)}{(\pi - 4x)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} t = x - \pi/4, \quad t \rightarrow 0 \\ x = t + \pi/4 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin(2t + \frac{2\pi}{4}))}{(\pi - 4(t + \frac{\pi}{4}))^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin(2t + \frac{2\pi}{4}))}{(\pi - 4(t + \frac{\pi}{4}))^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin(2t + \frac{\pi}{2}))}{(\pi - 4t - \pi)^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - (\sin 2t \cos \frac{\pi}{2} + \cos 2t \sin \frac{\pi}{2}))}{(4t)^2} = \left| \begin{array}{l} \sin \pi/2 = 1 \\ \cos \pi/2 = 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{16t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2t)'}{(16t^2)'} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 2t (2t)'}{32t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2t}{32t} = |\sin 2t \sim 2t, t \rightarrow 0| = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t}{32t} = -\frac{1}{8}$$

B4 - PP1 - 02.10

Знайти Границю функції

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x)^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(-\ln x)^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x \ln(-\ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{\sin x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{(\ln(-\ln x))'}{(\frac{1}{\sin x})'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\ln x} \cdot (-\ln x)'}{-\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\ln x} \cdot -\frac{1}{x}}{-\cos x}} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 x}{x \ln x \cos x}} = e^{(\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{\ln x}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}} \\
&= e^{0 \cdot 1 \cdot 1} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

В4 - PP1 - 03.01

Визначити порядок малості

Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$ якщо $\alpha(x) = \sin 3x - \sin x$, $\beta(x) = 5x$

Для того щоб визначити порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$, треба встановити, при якому числу k границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}$ буде дорівнювати числу, відмінному від нуля.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{(5x)^k} = \left| \begin{array}{ccc} \sin \alpha & \sim & \alpha \quad \alpha \rightarrow 0 \\ \sin 3x & \sim & 3x \quad \alpha \rightarrow 0 \\ \sin x & \sim & x \quad \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - x}{(5x)^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(5x)^k} = \left| \begin{array}{c} k = 1 \end{array} \right| = \frac{2}{5}$$

$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ безкінечно малі одного порядку

В4 - PP1 - 04.01

Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ -(x-1)^2 & 0 < x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases}$$

1) Сробуємо знайти границі функції зліва та справа точки 0 в якій функція не визначена

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} -(x-1)^2 = -(0-1)^2 = -1$$

Висновок - функція в точці 0 являє собою **розрив першого роду**, оскільки границі функції зліва та справа дорівнюють одна одній і є скінченними.

2) Сробуємо знайти границі функції зліва та справа точці 2 (в якій функція не визначена)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -(x-1)^2 = -(2-1)^2 = -1 \qquad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = (2-3) = -1$$

Висновок - функція в точці 2 являє собою **усувний розрив**, оскільки границі функції зліва та справа не дорівнюють одна одній і є скінченними.

B4 - PP1 - 04.02

Дослідити функцію на неперервність

$$y = \frac{2x}{3^{3x+1}}$$

Дослідимо функцію в точці $-\frac{1}{3}$ де вона можливо має точку розриву.

$$\lim_{x \rightarrow -1/3-0} \frac{2x}{3^{3x+1}} \qquad \lim_{x \rightarrow (-1/3-0.001)-0} \frac{2x}{3^{3x+1}} = \infty$$

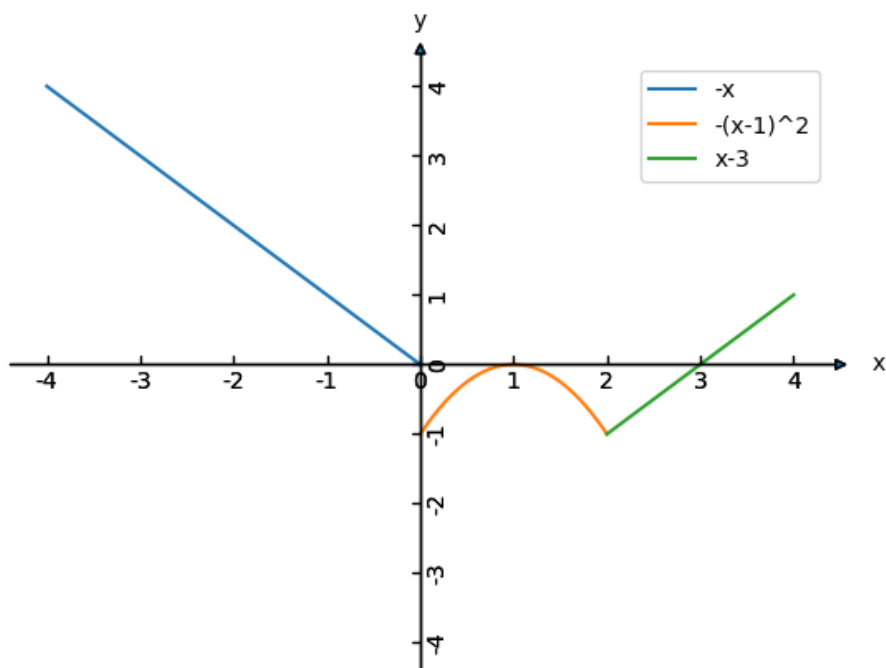


Рис. 1: Графік функції

$$\lim_{x \rightarrow -1/3+0} \frac{2x}{3\sqrt[3]{3x+1}} \quad \lim_{x \rightarrow (-1/3+0.001)+0} \frac{2x}{3\sqrt[3]{3x+1}} = \infty$$

Висновок - функція в точці $-\frac{1}{3}$ тосить характер розриву **другого роду**, оскільки границі функції зліва та зправа прямують у нескінченність.

В4 - РР1 - 05.01

Знайти похідну функції:

$$y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \operatorname{tg} e^x$$

$$y' = \frac{1}{2}(\ln(e^{2x} + 1))' + (\operatorname{tg} e^x)' = \ln(e^{2x} + 1) \cdot (e^{2x} + 1)' + \frac{1}{\cos e^x} (e^x)' = \ln(e^{2x} + 1) \cdot (e^{2x} \cdot (2x)') + \frac{1}{\cos e^x} e^x$$

$$y' = \ln(e^{2x} + 1)2e^{2x} + \frac{e^x}{\cos e^x}$$

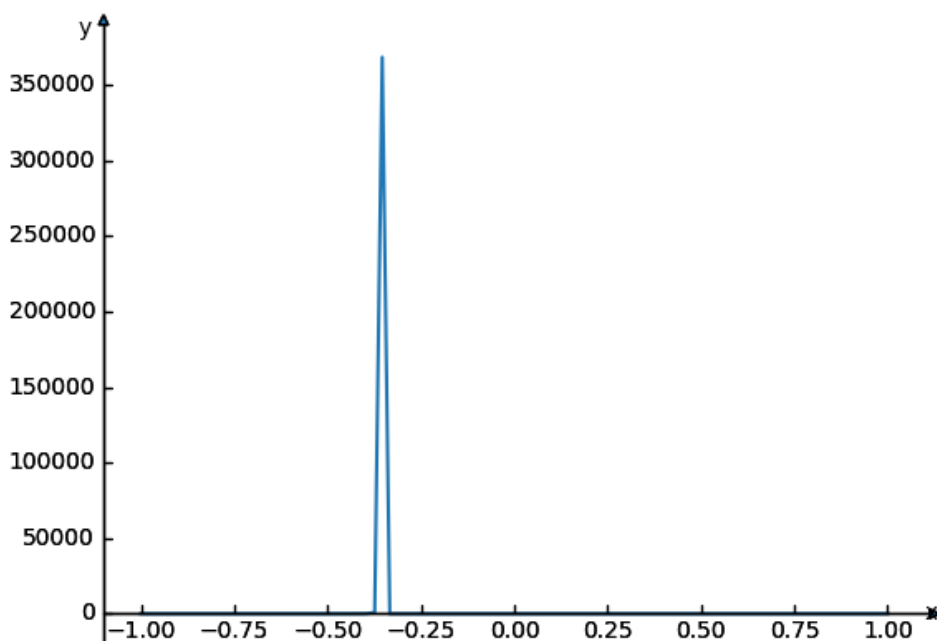


Рис. 2: Графік функції

В4 - РР1 - 05.02

Знайти похідну функції:

$$y = \sqrt{x^3 + 2x + \frac{1}{x}} = (x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = ((x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})' = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})$$

$$y' = \frac{3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{(x^3 + 2x + \frac{1}{x})}}$$

В4 - РР1 - 05.03

Знайти похідну функції:

$$y = \frac{\arccos \sqrt{x}}{x}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(\arccos \sqrt{x})'(x) - (\arccos \sqrt{x})(x)'}{x^2} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}(\sqrt{x})' - \arccos \sqrt{x}}{x^2} = \\
 &= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \arccos \sqrt{x}}{x^2} = -\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \arccos \sqrt{x}}{x^2}.
 \end{aligned}$$

B4 - PP1 - 05.04

Знайти похідну функції:

$$y = (x^3 - x^2)^x$$

$$y' = ((x^3 - x^2)^x)'$$

$$(\ln y)' = (\ln(x^3 - x^2)^x)'$$

$$\frac{1}{y}y' = x \frac{1}{x^3 - x^2} (x^3 - x^2)'$$

$$y' = x(x^3 - x^2)^x \frac{1}{x^3 - x^2} (3x^2 - 2x) = \frac{x(x^3 - x^2)^x (3x^2 - 2x)}{x^3 - x^2}$$

$$y' = (x^3 - x^2)^{x-1} (3x^3 - 2x^2).$$

B4 - PP1 - 05.05

Знайти похідну функції:

$$y = 5^{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$y' = (5^{\operatorname{tg}^2 x})' = 5^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln 5 \cdot ((\operatorname{tg} x)^2)' = 5^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln 5 \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

B4 - PP1 - 05.06

Знайти похідну функції:

$$x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x = 2$$

$$x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x - 2 = 0$$

$$0 = (x \operatorname{tg} y)' - (y \operatorname{tg} x)' - (2)' = ((x)' \operatorname{tg} y + x(\operatorname{tg} y)') - ((y)' \operatorname{tg} x + y(\operatorname{tg} x)') = (x' \operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y}) - (y' \operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x})$$

$$y' \operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x} = x' \operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y}$$

$$y' \operatorname{tg} x = x' \operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y} - \frac{y}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} + \frac{x}{\operatorname{tg} x \cos^2 y} - \frac{y}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}$$

B4 - PP1 - 05.07

Знайти похідну функції:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t+2} \\ y = \frac{t^2}{(t+2)^2} \end{cases} \quad y'_x = ? \quad y''_x = ?$$

$$y'_x = \frac{y'}{x'} \quad y''_x = \frac{y''_x}{x'}$$

$$x' = \left(\frac{1}{t+2} \right)' = \frac{1}{(t+2)^2} (t+2)' = \frac{1}{(t+2)^2}$$

$$y' = \left(\frac{t^2}{(t+2)^2} \right)' = \frac{(t^2)'(t+2)^2 - (t^2)((t+2)^2)'}{(t+2)^4} = \frac{2t(t+2)^2 - 2t^2(t+2)}{(t+2)^4} = \frac{(2t(t+2) - 2t^2)(t+2)}{(t+2)^4}$$

$$y' = \frac{2t(t+2) - 2t^2}{(t+2)^3} = \frac{2t((t+2) - t)}{(t+2)^3} = \frac{4t}{(t+2)^3}$$

$$y'_x = \frac{y'}{x'} = \frac{\frac{4t}{(t+2)^3}}{\frac{1}{(t+2)^2}} = \frac{4t(t+2)^2}{(t+2)^3} = \frac{4t}{t+2}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x'} = \frac{\left(\frac{4t}{t+2} \right)'}{\frac{1}{(t+2)^2}} = (t+2)^2 \frac{(4t)'(t+2) - (4t)(t+2)'}{(t+2)^2} = \frac{(4t+8-4t)(t+2)^2}{(t+2)^2} = 8$$

В4 - РР1 - 06.01

Обчислити наближено за допомогою диференціала.

$$y = x^{11}, x0.998$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x$$

Тоді для $\Delta x = 0.102$

$$f(1.1) = x^{11} + 11x^{10} \cdot \Delta x = 0.998^{11} + 11 \cdot 0.998^{10} \cdot 0.102 \approx 2.0779$$

В4 - РР1 - 07.01

Провести повне дослідження функції і побудувати графік

$$y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

$$1) x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$$

2) Графік не перетинає ось x .

3) Функція непарна оскільки

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2 + 2(-x)} = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

4) Обидві точки -2 та 0 носять характер розриву другого роду оскільки вони прямують в безмежність.

$$\lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} \frac{2}{x^2 + 2x} = \mp \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \frac{2}{x^2 + 2x} = \pm \infty$$

5) Похідна

$$y' = \left(\frac{2}{x^2 + 2x} \right)' = \frac{2'(x^2 + 2x) - 2(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x)^2}$$

Функція не існує в точках $x = -2$ та $x = 0$, а $x = -1$ є критичною (такою що є підозрілою на екстремум мінімум або максимум). На інтервалі $(-\infty; +\infty)$ матимемо:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+	не існує	+	0	-	не існує	-
$f(x)$	\nearrow	не існує	\nearrow	$y_{max} = -2$	\searrow	не існує	\searrow

6) Друга похідна

$$y'' = \left(\frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x)^2} \right)' = \frac{(-4x - 4)'(x^2 + 2x)^2 - (-4x - 4)((x^2 + 2x)^2)'}{(x^2 + 2x)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2 + 2x) + 4(2x + 2)^2}{(x^2 + 2x)^3} = \frac{-4x^2 - 8x + 16x^2 + 32x + 16}{(x^2 + 2x)^3} = \frac{12x^2 + 24x + 16}{(x^2 + 2x)^3}$$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	+	не існує	-	не існує	+
$f(x)$	\cup	не існує	\cap	не існує	\cup

7) з пункта (4) впливає що функція має вертикальні асимптоти в точках $x = -2$ та $x = 0$.

Знаходимо горизонтальні асимптоти за формулами (через границі функції):

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x(x^2 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x^2}{x(1 + 2/x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x^2}{1 + 2/x} = \frac{0}{1} = 0$$

8) Враховуючи висновки дослідження функції будуємо графік:

B4 - PP1 - 07.02

Провести повне дослідження функції і побудувати графік

$$\rho = \alpha(1 - \cos 2\varphi)$$

B4 - PP2 - 01.01

Знайти Інтеграл

$$\int \sqrt{9 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{9 - x^2} + 9 \arcsin \frac{x}{3} \right) + C = \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + \frac{9 \arcsin \frac{x}{3}}{2} + C.$$

$$\frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + \frac{9 \arcsin \frac{x}{3}}{2} + C$$

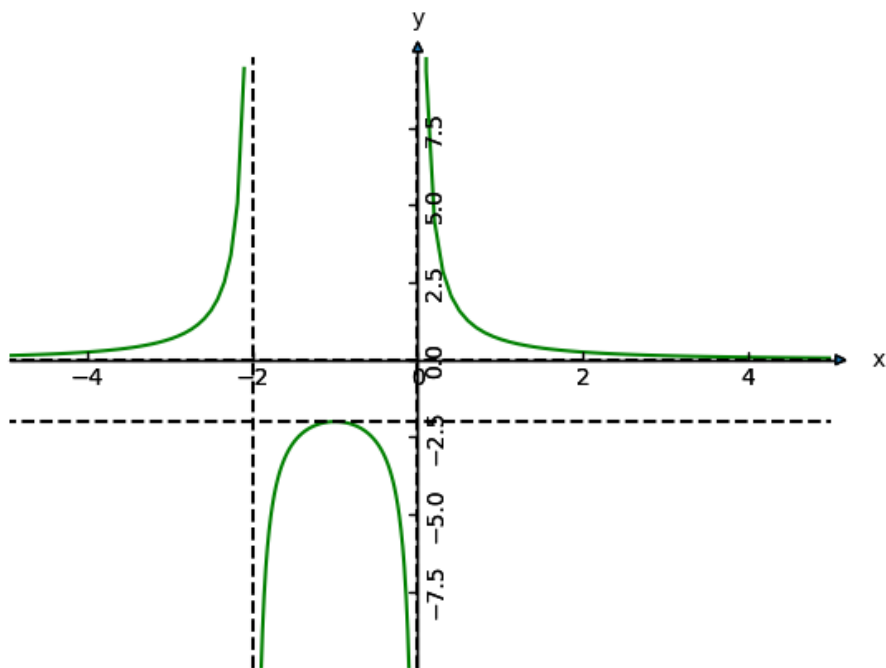


Рис. 3: Графік функції $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$

В4 - РР2 - 01.02

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \left| \begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \end{array} \right|$$

$$\int \frac{dx}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x + C = \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C.$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C}$$

В4 - РР2 - 01.03

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{2x \, dx}{x^4 + 3} = \int 2x \frac{1}{x^4 + 3} \, dx = \left| \begin{array}{ll} t = x^2 & dx = (x)' dt \\ x = \sqrt{t} & dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{array} \right|$$

$$2 \int \frac{\sqrt{t}}{2(t^2 + 3)(\sqrt{t})} \, dt = \frac{2}{2} \int \frac{\sqrt{t}}{(t^2 + 3)(\sqrt{t})} \, dt = \int \frac{1}{t^2 + \sqrt{3}^2} \, dt = \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C = \frac{\operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C}$$

В4 - РР2 - 01.04

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = \left| \begin{array}{ll} t = 3-2x & dx = (x)' dt \\ x = \frac{3-t}{2} & dx = (\frac{3}{2} - \frac{t}{2})' = \frac{dt}{2} \end{array} \right|$$

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \sqrt{t} + C = \sqrt{t} + C = \left| t = 3-2x \right| = \sqrt{3-2x} + C.$$

$$\boxed{\sqrt{3-2x} + C}$$

В4 - РР2 - 01.05

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} \, dx = \int \ln \operatorname{tg} x \frac{1}{2 \sin x \cos x} \, dx$$

Якщо провести заміну $t = \ln \operatorname{tg} x$ і позначити dt як $t' dx$ то можемо бачити що:

$$du = (\ln \operatorname{tg} x)' dx = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x' dx = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\sin x \cos x} dx$$

Як бачимо цей вираз вже присутній під інтегралом, отож можемо провести заміну:

$$\frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{t^2}{4} + C = \frac{(\ln \operatorname{tg} x)^2}{4} + C.$$

$$\boxed{\frac{(\ln \operatorname{tg} x)^2}{4} + C}$$

В4 - РР2 - 01.06

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}}} = \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{3}{2} \quad dx = (x)' dt \\ x = t - \frac{3}{2} \quad dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} dt$$

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} - \int \frac{\frac{3}{2} dt}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} = \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} =$$

Окремо проінтегруємо обидва інтеграли:

$$1) \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} = \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot t dt = \frac{2}{2} \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot t dt = \frac{1}{2} \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot d(t^2 - \frac{13}{4}) = \frac{2\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}}{2} + C = \sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}} + C = \sqrt{x^2 + 3x - 1} + C.$$

$$2) -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} = -\frac{3}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - \frac{13}{4}} \right| + C = -\frac{3}{2} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}} \right| + C$$

Підставимо обидва розв'язки назад в нашу формулу і отримаємо рішення:

$$\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \frac{3 \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x - 1} \right|}{2} + C$$

B4 - PP2 - 01.07

Знайти Інтеграл

$$\int (x+5) \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v = \frac{x^2}{2} + 5x \\ u' = \frac{1}{x} & v' = x + 5 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \int (x+5) \ln x \, dx &= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) \frac{1}{x} \, dx \\ &= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) - \int \frac{x^2 + 10x}{2x} \, dx = \ln x \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) - \frac{1}{2} \int \frac{x(x+10)}{x} \, dx \end{aligned}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) - \frac{1}{2} \left(\int x \, dx + \int 10 \, dx \right) = \ln x \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 10x \right) + C$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) - \left(\frac{x^2}{4} + 5x \right) + C = 5x \ln x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - 5x + C = 5x(\ln x - 1) + \frac{1}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

$$\boxed{5x(\ln x - 1) + \frac{1}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C}$$

B4 - PP2 - 01.08

Знайти Інтеграл

$$\int (x+1)2^x dx = \int x2^x dx + \int 2^x dx = \int x2^x dx + \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\int x2^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v = \frac{2^x}{\ln 2} \\ u' = 1 & v' = 2^x \end{array} \right| = x \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \int 2^x dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\int (x+1)2^x dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^x}{\ln 2} \left(x - \frac{1}{\ln 2} + 1 \right) + C$$

$$\boxed{\frac{2^x}{\ln 2} \left(x - \frac{1}{\ln 2} + 1 \right) + C}$$

B4 - PP2 - 01.09

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{2x^4 - 9x^2 - 1}{x^3 - 7x - 6} dx = \int \frac{2x^4 - 9x^2 - 1}{(x+1)(x+2)(x-3)} dx$$

Розкладаємо многочлен:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 9x^2 + 0x - 1 & x^3 - 7x - 6 \\ - 2x^4 - 14x^2 - 12x + 0 & 2x \\ \hline 5x^2 + 12x - 1 & \end{array}$$

В свою чергу розкладаємо многочлен що залишився:

$$\frac{5x^2 + 12x - 1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$5x^2 + 12x - 1 = A(x^2 - 3x + 2x - 6) + B(x^2 - 3x + x - 3) + C(x^2 + 2x + 1x + 2)$$

$$\begin{array}{l|l|l} x^2 & 5 & A + B + C \\ x^1 & 12 & -A - 2B + 3B \\ x^0 & -1 & -6A - 3B + 2C \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{з чого виходить що } A = 2, B = -1, C = 4 \\ \end{array}$$

З чого (після підстановки) отримуємо спрощений інтеграл:

$$\int 2x + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x-3} dx = 2 \int x dx + 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2} + 4 \int \frac{dx}{x-3}$$

$$\boxed{x^2 + 2 \ln |x+1| - \ln |x+2| + 4 \ln |x-3| + C}.$$

B4 - PP2 - 01.10

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx = \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 1)} dx = \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

Розкладаємо многочлен:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 8x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ - & 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x - 0 \\ \hline & 4x^3 + 4x^2 + 4x - 1 \\ - & 4x^3 + 4x^2 - 4x - 4 \\ \hline & 8x + 3 \end{array}$$

В свою чергу розкладаємо многочлен що залишився:

$$\frac{8x + 3}{(x - 1)(x + 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x + 1)}$$

$$8x + 3 = A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 - 1) + C(x - 1)$$

$$\begin{array}{c|c|c} x^2 & 0 & A + B \\ x^1 & 8 & 2A - C \\ x^0 & 3 & A - B - C \end{array} \quad \text{з чого виходить що } A = \frac{11}{4}, B = -\frac{11}{4}, C = \frac{5}{2}$$

З чого (після підстановки) отримуємо спрощений інтеграл:

$$\int 4x + 4 + \frac{11}{x-1} + \frac{-\frac{11}{4}}{x+1} + \frac{\frac{5}{2}}{(x+1)^2} dx = \int 4x + 4 + \frac{11}{4(x-1)} - \frac{11}{4(x+1)} + \frac{5}{2(x+1)^2} dx =$$

$$4 \int x dx + 4 \int dx + \frac{11}{4} \int \frac{dx}{(x-1)} - \frac{11}{4} \int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{5}{2} \int \frac{dx+1}{(x+1)^2} =$$

$$\boxed{2x^2 + 4x + \frac{11}{4}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + \frac{5}{2(x+1)} + C}$$

B4 - PP2 - 01.11

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{(x^2 + 23) dx}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)}$$

Спершу, спрощуємо многочлен:

$$\frac{(x^2 + 23) dx}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 6x + 13)} = \frac{A(x^2 + 6x + 13) + (Bx + C)(x+1)}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)}$$

$$(x^2 + 23) = A(x^2 + 6x + 13) + (Bx + C)(x+1) = Ax^2 + 6Ax + 13A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$x^2 = 0 = A + B$$

$$x^1 = 1 = 6A + B + C \quad \text{з чого виходить що } A = 3, B = -2, C = -16$$

$$x^0 = 23 = 13A + C$$

$$\int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{-1(2x+16)}{x^2+6x+13} = 3 \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{2x+16}{x^2+6x+13} dx$$

$$= 3 \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx - \int \frac{10}{x^2+6x+13} dx$$

$$= 3 \ln|x+1| + C - \int \frac{dx^2+6x+13}{x^2+6x+13} - 10 \int \frac{1}{x^2+6x+13} dx$$

$$= 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C + 10 \int \frac{1}{(x+3)^2+4} dx \left| \begin{array}{l} t = x+3 \quad dx = (x)' dt \\ x = t-3 \quad dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - 10 \int \frac{1}{t^2+4} dt$$

$$= 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - \frac{10}{4} \int \frac{1}{\frac{t^2}{4}+1} dt \left| \begin{array}{l} u = \frac{t}{2} \quad dt = (t)' du \\ t = 2u \quad dt = 2 du \end{array} \right|$$

$$= 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - \frac{10}{4} \int \frac{2}{u^2+1} du = 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - 5 \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| - 5 \operatorname{arctg} u + C = 3 \ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| - 5 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C$$

$$3 \ln |x + 1| - \ln |x^2 + 6x + 13| - 5 \operatorname{arctg} \frac{x + 3}{2} + C$$

В4 - РР2 - 01.12

Знайти Інтеграл

$$\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{2} \\ x = 2t \end{array} \quad \begin{array}{l} dx = (x)' dt \\ dx = 2 dt \end{array} \right| = \int \operatorname{tg}^2 t \cdot 2 dt = 2 \int \operatorname{tg}^2 t dt = 2 \operatorname{tg} t - 2t + C = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - x + C$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - x + C$$

В4 - РР2 - 01.13

Знайти Інтеграл

$$\int \sin^5 x \cos^3 x dx = \left| \begin{array}{ll} \sin x = t & x = \arcsin t \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} & dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{t^5 \cdot (\sqrt{1-t^2})^3 dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int t^5 \cdot (\sqrt{1-t^2})^2 dt = \int t^5 \cdot (1-t^2) dt = \int t^5 dt - \int t^7 dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + C = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C.$$

$$\frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$$

В4 - РР2 - 01.14

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{dx}{4 + \cos x} \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{4 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

$$\int \frac{2 dt}{\frac{(4(1 + t^2) + (1 - t^2))(1 + t^2)}{1 + t^2}} = 2 \int \frac{dt}{(4(1 + t^2) + (1 - t^2))} = 2 \int \frac{dt}{(4 + 4t^2 + 1 - t^2)} = 2 \int \frac{dt}{5 + 3t^2}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\frac{5}{5} + \frac{3t^2}{5}} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{\frac{3t^2}{5} + 1} \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{3/5} t \quad dt = (t)' du \\ t = \frac{u}{\sqrt{3/5}} \quad dt = \frac{du}{\sqrt{3/5}} \end{array} \right| = \frac{2}{5} \int \frac{du}{(u^2 + 1)(\sqrt{3/5})}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{3/5}} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3/5}} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{75}} \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} u + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} t + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C}$$

B4 - PP2 - 01.15

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$$

$\triangleleft I = x^{-1}(x^3 + 1)^{-1/3}$ то $m = 0$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$ з чого випливає щонайменше $\frac{0+1}{3} + (-\frac{1}{3}) = 0$, $0 \in \mathbb{Z}$,

а отже ми використаємо підстановку $a + bx^n = x^n \cdot t^s$ (спрощено $\frac{a}{x^n} + b = t^s$), де s знаменник s .

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= \left| \begin{array}{ll} t^3 = \frac{1}{x^3} + 1 & dx = (x)' dt \\ x^3 = \frac{1}{t^3 - 1} & dx = t^{-4} \cdot (t^{-3} - 1)^{-1/3} dt \end{array} \right| = \int (1 + \frac{1}{t^3 - 1})^{-1/3} \cdot t^{-4} \cdot (t^{-3} - 1)^{-1/3} dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{t^3 - 1}}} \cdot \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{t^3} - 1}} dt = \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{t^3 - 1})(\frac{1}{t^3} - 1)}} dt = \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{t^3 - 1 + 1}{t^3 - 1})(\frac{1 - t^3}{t^3})}} dt \\
&= \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{t^3}{t^3 - 1}(\frac{1 - t^3}{t^3})}} dt = \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1 - t^3}{t^3 - 1}}} dt = \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{-t^3 + 1}{t^3 - 1}}} dt = \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{-(t^3 - 1)}{t^3 - 1}}} dt \\
&= \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} dt = \int \frac{1}{t^4} \cdot -\frac{1}{1} dt = - \int \frac{1}{t^4} dt = -\frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{3(\frac{1}{x^3} + 1)} + C = -\frac{1}{\frac{3 + 3x^3}{x^3}} + C
\end{aligned}$$

$$-\frac{x^3}{3 + 3x^3} + C$$

B4 - PP2 - 01.16

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} \sqrt{x^2 - 9} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2 - 9} & v = 1/x \\ u' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} & v' = 1/x^2 \end{array} \right| = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} \frac{1}{x} dx = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$$

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C$$

B4 - PP2 - 01.17

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$$

$\triangleleft I = x^{-1} \cdot (x^3 + 1)^{-1/4}$ то $m = -1, n = 3, p = -\frac{1}{4}$ з чого впливає щонайменше $\frac{-1+1}{3} = 0, 0 \in \mathbb{Z}$, а

отже ми використаємо підстановку $a + bx^n = t^s$, де s знаменник дробу p .

$$\left| \begin{array}{ll} t^4 = 1 + x^3 & dx = (x)' dt \\ x = \sqrt[3]{t^4 - 1} & dx = \frac{4t^3}{3\sqrt[3]{(t^4 - 1)^2}} dt \end{array} \right| = \int \frac{4t^3}{\sqrt[3]{t^4 - 1} \cdot \sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{t^4 - 1}^3} \cdot 3\sqrt[3]{(t^4 - 1)^2}} dt$$

$$= \int \frac{4t^3}{3\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{t^4 - 1}^3} \cdot \sqrt[3]{t^4 - 1} \cdot \sqrt[3]{(t^4 - 1)^2}} dt = \int \frac{4t^3}{3\sqrt[4]{1 + t^4 - 1} \cdot \sqrt[3]{(t^4 - 1)^3}} dt$$

Розкладаємо многочлен до прийнятної форми

$$= \frac{4}{3} \int \frac{t^3}{t \cdot (t^4 - 1)} dt = \frac{4}{3} \int \frac{t^2}{(t^4 - 1)} dt = \frac{4}{3} \int \frac{t^2}{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)} dt$$

$$\frac{t^2}{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} = \frac{A(t^2 + 1)(t + 1) + B(t^2 + 1)(t - 1) + (Ct + D)(t + 1)(t - 1)}{(t^2 + 1)(t + 1)(t - 1)}$$

$$t^2 = A(t^3 + t^2 + t + 1) + B(t^3 - t^2 + t - 1) + (Ct + D)(t^2 + t - t - 1)$$

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\ln|x^2+1|}{2} \Big|_0^1 - \operatorname{arctg} x \Big|_0^1$$

$$\left(\frac{\ln|x^2+1|}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{\ln 1^2+1}{2} - \operatorname{arctg} 1 \right) - \left(\frac{\ln 0^2+1}{2} - \operatorname{arctg} 0 \right) =$$

$$\left(\frac{\ln|x^2+1|}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^1 = \frac{\ln|2|}{2} - \operatorname{arctg} 1 - \frac{\ln|1|}{2} + \operatorname{arctg} 0 = \frac{\ln|2|}{2} - \operatorname{arctg} 1$$

$$\boxed{\frac{\ln|2|}{2} - \operatorname{arctg} 1}$$

B4 - PP2 - 02.03

Обчислити визначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (\sin -x + \sin 3x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x - \sin x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \frac{1}{6} \int_0^{\pi} \sin 3x d3x - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \left(\frac{1}{6} \cdot -\cos 3x \Big|_0^{\pi} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) \\ &= -\frac{1}{6} (\cos 3\pi - \cos 0) + \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0) = -\frac{1}{6} (-1 - 1) + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) = \frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{12}}$$

B4 - PP2 - 02.04

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-2}^{-\sqrt[3]{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$$

$\triangleleft I = x^{-1} \cdot (1-x^3)^{-1/2}$ то $m = -1$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{2}$ з чого випливає щонайменше $\frac{-1+1}{3} = 0$, $0 \in \mathbb{Z}$, а

отже ми використаємо підстановку $a + bx^n = t^s$, де s знаменник дробу p .

$$\left| \begin{array}{lll} t^2 = 1 - x^3 & dx = (x)' dt & x_2 = -\sqrt[3]{3} \quad t_2 = \sqrt{1 - (-\sqrt[3]{3})^3} = 2 \\ x = \sqrt[3]{1 - t^2} & dx = -\frac{2t dt}{3\sqrt[3]{(1 - t^2)^2}} & x_1 = -2 \quad t_1 = \sqrt{1 - (-2)^3} = 3 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= \int_3^2 -\frac{2t dt}{\sqrt[3]{1 - t^2} \cdot 3\sqrt[3]{(1 - t^2)^2}} = -\int_3^2 \frac{2t dt}{3\sqrt[3]{(1 - t^2)^3}} = -\frac{1}{3} \int_3^2 \frac{2t dt}{1 - t^2} = -\frac{1}{3} \int_3^2 \frac{d(t^2 - 1)}{-1(t^2 - 1)} = \frac{1}{3} \int_3^2 \frac{d(t^2 - 1)}{t^2 - 1} \\ &= \frac{1}{3} \ln t^2 - 1 \Big|_3^2 = \frac{1}{3} (\ln |4 - 1| - \ln |9 - 1|) = \frac{1}{3} \ln \frac{|4 - 1|}{|9 - 1|} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3}{8} \right| \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \ln \left| \frac{3}{8} \right|}$$

B4 - PP2 - 02.05

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^2 (x + 1) \ln(x + 1) dx = \left| \begin{array}{lll} t = x + 1 & dx = (x)' dt & x_2 = 2 \quad y_2 = 3 \\ x = t - 1 & dx = dt & x_1 = 0 \quad y_1 = 1 \end{array} \right| = \int_1^3 t \ln t dt$$

$$\int_1^3 t \ln t dt \left| \begin{array}{ll} u = \ln t & v = t \\ u' = \frac{1}{t} & \int v = \frac{t^2}{2} \end{array} \right| = \ln t \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2}{2} dt$$

$$\frac{t^2 \ln t}{2} \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{2t} dt = \frac{t^2 \ln t}{2} \Big|_1^3 - \frac{1}{2} \int_1^3 t dt = \frac{t^2 \ln t}{2} \Big|_1^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_1^3 =$$

$$\left(\frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{t^2}{4} \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{2(t^2 \ln t) - t^2}{4} \right) \Big|_1^3 = \frac{2(3^2 \ln 3) - 3^2}{4} - \frac{2(1^2 \ln 1) - 1^2}{4} =$$

$$\frac{(18 \ln 3 - 18) - (2 \ln 1 - 2)}{4} = \frac{18 \ln 3 - 18 - 2 \ln 1 + 2}{4} = \frac{18 \ln 3 - 2 \ln 1 - 16}{4} = \frac{9 \ln 3 - \ln 1 - 8}{2} = \frac{9 \ln 3 - 8}{2}$$

$$\boxed{\frac{9 \ln 3 - 8}{2}}$$

В4 - РР2 - 02.06

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-2}^{-1} \sqrt{2-7x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} t = 2 - 7x & dx = (x)' dt \\ x = (2-t)/7 & dx = (2/7 - t/7)' = \frac{dt}{7} \end{array} \right. \begin{array}{ll} x_2 = -1 & t_2 = 9 \\ x_1 = -2 & t_1 = 16 \end{array} \Bigg| = \int_{16}^9 \sqrt{t} \frac{dt}{7}$$

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} \Bigg|_{16}^9 = \frac{3\sqrt{t^3}}{14} \Bigg|_{16}^9 = \frac{3}{14}(\sqrt{9^3} - \sqrt{16^3}) = \frac{3}{14}(\sqrt{3^{2+3}} - \sqrt{4^{2+3}}) = \frac{3}{14}(3^3 - 4^3) = \frac{3(27-64)}{14} = 7\frac{13}{14}.$$

$$\boxed{7\frac{13}{14}}$$

В4 - РР2 - 03.01

Обчислити невластний інтеграл або довести розбіжність

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx$$

Спочатку спростуємо інтеграл (для підстановки), а потім знаходимо різницю границь.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx = \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt{x} & dx = (x)' dt \\ x = t^2 & dx = 2t \, dt \end{array} \right| = \int_1^{\infty} \frac{2t \cdot t}{t^2+1} \, dt$$

$$\begin{aligned}
2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt &= 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2 \left(\int \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \right) \\
&= 2 \left(\int dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \right) = 2 \left(t - \operatorname{arctg} t \right) + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

Переходимо, власне, до підстановки:

$$\begin{aligned}
\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx &= (\lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) - (\lim_{x \rightarrow 1} 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \\
&= (\lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) - (\lim_{x \rightarrow 1} 2\sqrt{x} - \lim_{x \rightarrow 1} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \\
&= (2 \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \sqrt{x}) - (2 \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \\
&= (2 \cdot \infty - 2 \cdot \frac{\pi}{2}) - (2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4}) = (\infty - \pi) - (2 - \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Маємо ситуацію розбіжності інтегралів, тому що 1-ий (одна з границь) прямує в безмежність.

В4 - РР2 - 03.02

Обчислити невласний інтеграл або довести розбіжність

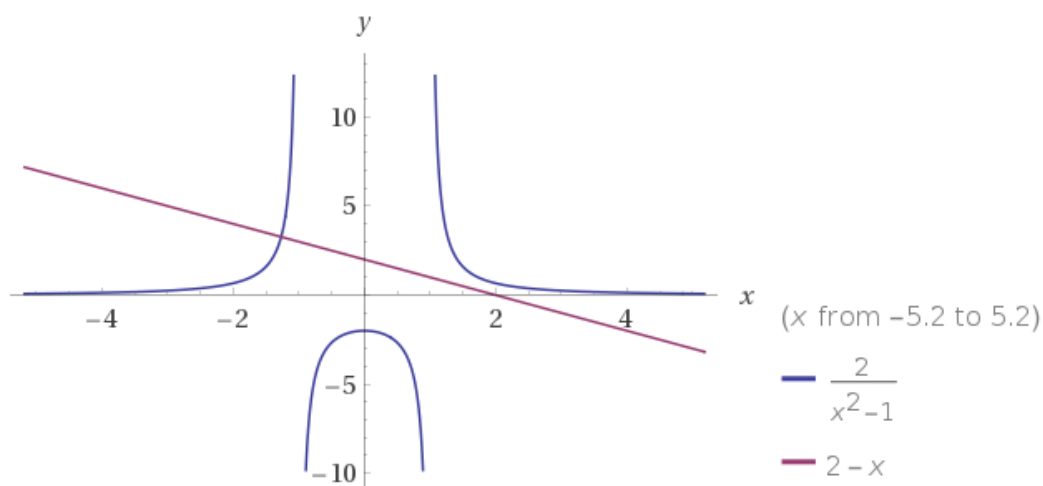
$$\int_1^2 \frac{x dx}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x dx}{x^2-1}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x dx}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |x^2-1|}{2} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln |x^2-1| \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln |2^2-1| - \ln |(1+\varepsilon)^2-1|)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{3}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{3}{2\varepsilon+\varepsilon^2} = \infty$$

Оскільки границя прямує до безмежності, ми можемо стверджувати що невласний інтеграл розбігається - тоюто розбіжність доведено.

$$y = \frac{2}{x^2 - 1}, \quad y = 2 - x$$



Судячи з графіку, задані лінії мають лише 1 точку пересічення ($\frac{2}{x^2 - 1} = 2 - x$), тому будемо вважати що таку площу знайти неможливо, оскільки вона нічим не обмежена.

$$\rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi, \quad \rho = 2 \sin \varphi$$

Якщо функція на відрізку $[a; b]$ задана в параметричній формі $x = x(t), y = y(t), t \in [\varphi_1; \varphi_2]$, де $x(\varphi_1) = a, x(\varphi_2) = b$ і функції $x(\varphi), y(\varphi)$ неперервно диференційовні на $[\varphi_1; \varphi_2]$, то площа криволінійної трапеції дорівнює

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(\varphi) x'(\varphi) d\varphi$$

Для визначеності, припустимо що параметричні рівняння
$$\begin{cases} \rho = 2\sqrt{3} \cos \varphi \\ \rho = 2 \sin \varphi \end{cases}$$
 задають канонічний

еліпс з центром на початку координат великою напівовсюю в точці $2\sqrt{3}$ і короткою в точці 2.

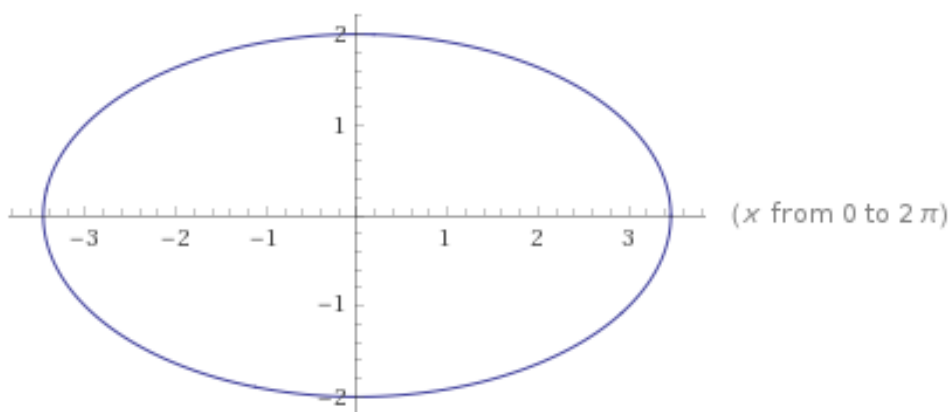


Рис. 4: Параметрично заданий еліпс

Оскільки фігура площу якої ми шукаємо симетрична, ми будемо шукати її площу лише на відрізку її четверті (на відрізку з $\pi/2$ до 0), а потім отриману площу просто помножимо на 4.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2 \sin \varphi (2\sqrt{3} \cos \varphi)' d\varphi &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \varphi \times (-2\sqrt{3}) \sin \varphi d\varphi = -4\sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \varphi d\varphi \\ -4\sqrt{3} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 &= -\frac{4\sqrt{3}}{2} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = -2\sqrt{3} \left(0 - \frac{\sin 2 \times 0}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2 \times \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right) \\ &= -2\sqrt{3} \left(0 - \frac{\sin 0}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) = -2\sqrt{3} \left(0 - 0 - \frac{\pi}{2} + 0 \right) = -2\sqrt{3} \times -\frac{\pi}{2} = \boxed{\pi\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Оскільки ми шукали площу лише четверті еліпсу, домножимо отриману площу на 4 щоб знайти повну площу.

$$\boxed{S = 4\pi\sqrt{3}}$$

B4 - PP2 - 05.01

Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні данної кривої
насколо осі OX

$$y = -\frac{1}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \quad x \in [1; e]$$

Для знаходження поверхні обертання використаємо наступну формулу

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$2\pi \int_1^e \left(-\frac{1}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}\right) \sqrt{1 + \left(\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x\right)'\right)^2} dx = 2\pi \int_1^e \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \ln x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} dx$$

$$= \frac{2\pi}{2} \left(\int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \ln x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} dx \right) = \pi \int_1^e \frac{x^2}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} dx - \pi \int_1^e \ln x \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^e x^2 \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}} dx - \pi \int_1^e \ln x \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^e \frac{x^2}{2x} \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} dx - \pi \int_1^e \ln x \sqrt{\frac{x^2(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})}{4x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx - \pi \int_1^e \frac{\ln x}{2} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e (x^3 + x) dx - \frac{\pi}{2} \int_1^e \ln x \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx + \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx - \frac{\pi}{2} \int_1^e \frac{(x^2 + 1) \ln x}{x} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx + \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx - \frac{\pi}{2} \left(\int_1^e \frac{x^2 \ln x}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx + \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx - \frac{\pi}{2} \left(\int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \right) \left| \begin{array}{lll} u = \ln x & x_1 = e & y_1 = \ln e = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & x_0 = 1 & y_0 = \ln 1 = 0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx + \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx - \frac{\pi}{2} \left(\int_1^e x \ln x dx + \int_0^1 u du \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx + \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx - \frac{\pi}{2} \int_0^1 u du - \frac{\pi}{2} \int_1^e x \ln x dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v = x^2/2 \\ u' = 1/x & v' = x \end{array} \right|$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx + \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx - \frac{\pi}{2} \int_0^1 u du - \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^2 \ln x}{2} \right) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx + \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx - \frac{\pi}{2} \int_0^1 u du - \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^2 \ln x}{2} \right) \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

Для більшої зручності поредемо обчислення визначених інтегралів окремо (формула вже завелика для копіювання навіть при наборі в LaTeX).

$$1) \frac{\pi}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{\pi}{4} \times \frac{x^4}{4} \Big|_1^e = \frac{\pi}{16} (x^4) \Big|_1^e = \frac{\pi}{16} (e^4 - 1^4) = \frac{\pi}{16} (e^4 - 1)$$

$$2) \frac{\pi}{4} \int_1^e x dx = \frac{\pi}{4} \times \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{\pi}{8} (x^2) \Big|_1^e = \frac{\pi}{8} (e^2 - 1^2) = \frac{\pi}{8} (e^2 - 1)$$

$$3) - \frac{\pi}{2} \int_0^1 u du = - \frac{\pi}{4} (u^2) \Big|_0^1 = - \frac{\pi}{4} (1^2 - 0^2) = - \frac{\pi}{4}$$

$$4) - \frac{\pi}{2} \times \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e = - \frac{\pi}{4} (e^2 \ln e - 1^2 \ln 1) = - \frac{\pi}{4} (e^2 \times 1 - 1^2 \times 0) = - \frac{\pi e^2}{4}$$

$$5) - \frac{\pi}{2} \times -\frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{\pi}{4} \times \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{\pi}{8} \times (x^2) \Big|_1^e = \frac{\pi}{8} \times (e^2 - 1^2) = \frac{\pi}{8} \times (e^2 - 1)$$

Залишилось лише просумувати отримані площі.

$$\frac{\pi}{16}(e^4 - 1) + \frac{\pi}{8}(e^2 - 1) - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi e^2}{4} + \frac{\pi}{8} \times (e^2 - 1) = \frac{\pi}{16}(e^4 - 1) + \frac{\pi}{4}(e^2 - 1) - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi e^2}{4}$$

$$= \frac{\pi((e^4 - 1) + 4(e^2 - 1) - 4 - 4e^2)}{16} = \frac{\pi(e^4 - 1 + 4e^2 - 4 - 4 - 4e^2)}{16} = \frac{\pi(e^4 - 9)}{16}$$

$$Q = \frac{\pi(e^4 - 9)}{16}$$

B4 - PP2 - 06.01

Знайти об'єм тіла, одержаного при обертанні криволінійного заданого сектора навколо полярної осі:

$$\rho = \alpha \sqrt{\cos \varphi}, \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Об'єм тіла отриманого обертанням в навколо полярної осі заданого двома полярними координатами можна знайти за формулою

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin \varphi \, d\varphi$$

$$\frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sqrt{\cos \varphi})^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos \varphi^{\frac{3}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \left| \begin{array}{lll} u = \sin \varphi & \varphi_2 = \frac{\pi}{2} & u_2 = 1 \\ du = \cos \varphi & \varphi_1 = 0 & u_1 = 0 \end{array} \right| = \frac{2\pi a^4}{3} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} \, du$$

$$= \frac{2\pi a^4}{3} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} \, du = \frac{a^4 \pi}{6} \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{a^4 \pi}{15} \sqrt{u^5} \Big|_0^1 = \frac{a^4 \pi}{15}$$

$$V = \frac{a^4 \pi}{15}$$

В4 - РР2 - 07.01

Знайти координати центра мас дуги першої арки циклоїди:

$$x = \alpha(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0; 2\pi]$$

Оскільки циклоїда симетрично паралельна осі Х ми можемо стверджувати що центр тяжесті лежить на ній, тобто на $\bar{x} = \pi\alpha$, для знаходження \bar{y} спочатку знайдемо диференціал довжини арки циклоїди

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(\alpha(1 - \cos t))^2 + (\alpha(\sin t))^2} dt = \sqrt{\alpha^2(1 - \cos t)^2 + \alpha^2 \sin^2 t} dt = \sqrt{\alpha^2((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t)} dt \\ &= a\sqrt{(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} dt = a\sqrt{1 - 2\cos t + 1} dt = a\sqrt{2(1 - \cos t)} dt = a\sqrt{4(\sin^2 \frac{t}{2})} dt \end{aligned}$$

$$dl = 2a \sin \frac{t}{2} dt$$

Координати центр мас знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \gamma(x) dl}{\int_a^b \gamma(t) dl} \text{ та } y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \gamma(y) dl}{\int_a^b \gamma(t) dl}$$

Де m це маса дуги а M_y та M_x це статичні моменти відносно осей Х та Y.

$$M_x = \int_0^{2\pi} x' dl = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = \int_0^{2\pi} 2a^2(1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} (\sin \frac{t}{2} - \cos t \sin \frac{t}{2}) dt$$

$$= 2a^2 \left(\int \sin \frac{t}{2} dt - \int \cos t \sin \frac{t}{2} dt \right) \Big|_0^{2\pi} = 2a^2 \left(\int \sin \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \left(\int \sin \left(\frac{3t}{2} \right) dt + \int \sin \left(-\frac{t}{2} \right) \right) \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2 \left(2 \int \sin \frac{t}{2} d\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \int \sin \left(\frac{3t}{2} \right) d\frac{3t}{2} - 2 \int \sin \left(\frac{t}{2} \right) d\frac{t}{2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \cos \frac{3t}{2} + 2 \cos \frac{t}{2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = 2a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} - \left(-\frac{1}{3} \cos \frac{3t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2a^2 \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3t}{2} - 3 \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2 \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3 \cdot 2\pi}{2} - 3 \cos \frac{2\pi}{2} \right) - 2a^2 \left(\frac{1}{3} \cos \frac{3 \cdot 0}{2} - 3 \cos \frac{0}{2} \right) = 2a^2 \left(\frac{1}{3} \cos 3\pi - 3 \cos \pi \right) - 2a^2 \left(\frac{1}{3} \cos 0 - 3 \cos 0 \right)$$

$$= 2a^2 \left(\frac{1}{3} \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \right) - 2a^2 \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = 2a^2 \frac{-1+9}{3} - 2a^2 \frac{1-9}{3} = 2a^2 \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) \right) = 2a^2 \frac{16}{3} = \frac{32a}{3}$$

Знайдемо масу (довжину дуги)

$$\int_0^{2\pi} dl = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 4a \cdot -\cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \frac{2\pi}{2} - \cos \frac{0}{2})$$

$$= -4a(\cos \pi - \cos 0) = -4a(-1 - 1) = 8a$$

З чого випливає що ординатою центру маси по ОУ буде

$$\bar{y} = \frac{\frac{32a}{3}}{8a} = \frac{32a^2}{24a} = \frac{4a}{3}$$

Координати центра мас πa та $\frac{4a}{3}$
