Розрахункова Робота

з дискретної математики

студента групи ІСзп 71
Бутузова О. В.

Варіант №4

1.1 Довести тотожність аксіоматично

$$A \cup ((B \triangle (B \triangle A)) \setminus B) = A$$

Спростимо ліву частину завдиння поступово спрощуючи формули за допомогою основних та похідних законів алгебри множин (для кращого розуміння ходу процесу кожна дія обмежена одною-двома операціями):

$$A \cup ((B \triangle (B \triangle A)) \setminus B) = A$$

Операції $\setminus$ та $\triangle$ розкривати за формулами:
A$\setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$
qquad A$\triangle B = (A \cap B^{\mathsf{c}}) \cup (B \cap A^{\mathsf{c}})$

Розкриття

$A = A \cup ((B \triangle (B \triangle A)) \setminus B)$
$A = A \cup ((B \triangle (((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}})))) \setminus B)$
$A = A \cup (((((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}}))^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}})) \cap B^{\mathsf{c}})) \setminus B)$
$A = A \cup (((((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}}))^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}})) \cap B^{\mathsf{c}})) \cap B^{\mathsf{c}})$

Доведення

Закони	Тотожності
1	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((B \cap ((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}}))^{\mathsf{c}}) \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}})))))$
$10, 11, 1$	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((B \cap ((A^{\mathsf{c}} \cup B) \cap (A \cup B^{\mathsf{c}}))) \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}})))))$
2	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap (((B \cap (A^{\mathsf{c}} \cup B)) \cap (B \cap (A \cup B^{\mathsf{c}}))) \cup ((B^{\mathsf{c}} \cap (A^{\mathsf{c}} \cap B)) \cap (B^{\mathsf{c}} \cap (A \cap B^{\mathsf{c}})))))$
1	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap (((B \cap (B \cup A^{\mathsf{c}})) \cap (B \cap (B^{\mathsf{c}} \cup A))) \cup ((B^{\mathsf{c}} \cap (B \cap A^{\mathsf{c}})) \cap (B^{\mathsf{c}} \cap (B^{\mathsf{c}} \cap A)))))$
6	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap (((B \cap (B \cup A^{\mathsf{c}})) \cap (B \cap (B^{\mathsf{c}} \cup A))) \cup ((B^{\mathsf{c}} \cap (B \cap A^{\mathsf{c}})) \cap (B^{\mathsf{c}} \cap (B^{\mathsf{c}} \cap A)))))$
12	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((B \cap (B \cap (B^{\mathsf{c}} \cup A))) \cup ((B^{\mathsf{c}} \cap (B \cap A^{\mathsf{c}})) \cap (B^{\mathsf{c}} \cap (B^{\mathsf{c}} \cap A)))))$
8	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap (((B \cap B) \cap A) \cup (((B^{\mathsf{c}} \cap B) \cap A^{\mathsf{c}}) \cap ((B^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}) \cap A))))$
$5, 4, 7$	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((B \cap A) \cup ((\varnothing \cap A^{\mathsf{c}}) \cap (B^{\mathsf{c}} \cap A))))$
5	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((B \cap A) \cup (\varnothing \cap (B^{\mathsf{c}} \cap A))))$
3	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap ((B \cap A) \cup \varnothing)$
$8, 4$	$A \cup (B^{\mathsf{c}} \cap (B \cap A))$
5	$A \cup (\varnothing \cap A)$
5	$A \cup \varnothing$
3	A

Тотожність доведено.

1.2 Довести тотожність модельно

$$((A \cap (A^{\mathsf{c}} \cup B)) \times (C \bigtriangleup D)) \cup (A \times (C \cup D)) = (A \times (C \cup D))$$

$$((A \cap (A^{\mathsf{c}} \cup B)) \times (C \bigtriangleup D)) \cup (A \times (C \cup D)) = (A \times (C \cup D)) \iff \varepsilon_1 \vee \varepsilon_2 = \varepsilon_2$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (x, y) \in ((A \cap (A^{\mathsf{c}} \cup B)) \times (C \bigtriangleup D)) \\ \varepsilon_2 &= (x, y) \in (A \times (C \cup D)) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} & (x, y) \in ((A \cap (A^{\mathsf{c}} \cup B)) \times (C \bigtriangleup D)) \\ \iff & (x \in (A \cap (A^{\mathsf{c}} \cup B))) \wedge (y \in (C \bigtriangleup D)) \\ \iff & (x \in (A \cup B)) \wedge (y \in ((C \cap D^{\mathsf{c}}) \cup (C^{\mathsf{c}} \cup D))) \\ \iff & ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((y \in (C \cap D^{\mathsf{c}})) \vee (y \in (C^{\mathsf{c}} \cup D)))) \\ \iff & ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (((y \in C) \wedge (y \notin D)) \vee ((y \notin C) \wedge (y \in D))) \\ \iff & ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((y \in C) \vee (y \in D)) \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} & (x, y) \in (A \times (C \cup D)) \\ \iff & (x \in A) \wedge (y \in (C \cup D)) \\ \iff & (x \in A) \wedge ((y \in D) \vee (y \in C)) \end{cases}$$

Підставивши наші виразі назад у вираз отримаємо

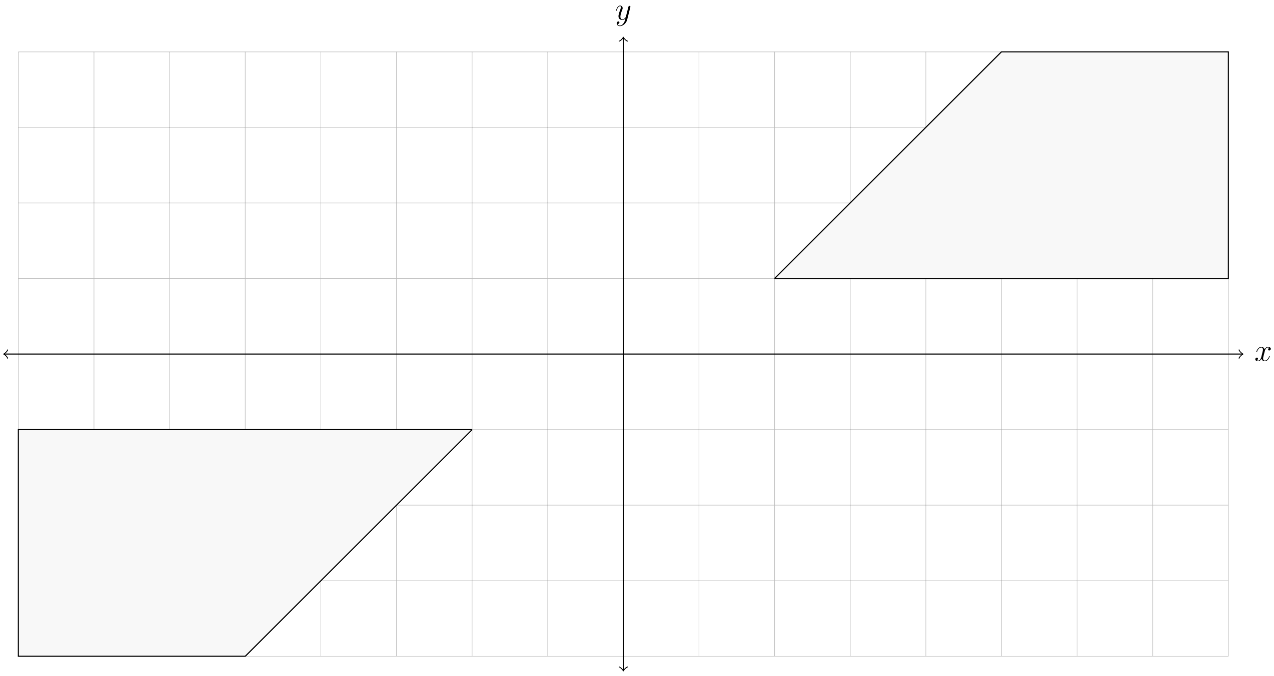
$$(((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((y \in C) \vee (y \in D))) \vee ((x \in A) \wedge ((y \in D) \vee (y \in C))) = ((x \in A) \wedge ((y \in D) \vee (y \in C)))$$

$$\iff ((x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in A)) \wedge ((y \in D) \vee (y \in C)) = (x \in A) \wedge ((y \in D) \vee (y \in C)) \iff$$

$$\iff ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in A) = (x \in A) \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

2.1 Дослідити відношення $R \subset \mathbb{R}$ на властивості

$$(xRy) \iff (0 < \frac{y}{x} < 1) \Rightarrow x > y$$



(графік лише приблизно відтворє наше відношення)

- Рефлексивність - відношення **не є рефлексивним** - оскільки порушується умова при заміні y на x.
- Антирефлексивність - відношення **не є антирефлексивним** оскільки не виконується умова $\neg(xRx)$
- Симетричність - відношення **не є симетричним** оскільки щоб умова виконувась x має бути принамні на одиницю більше y, і якщо їх поміняти місцями результат поміняється діаметрально.
- Антисиметричність - відношення **є антисиметричним** оскільки для x та y оскільки з виконання xRy не слідкує виконання yRx.
- Транзитивність - відношення є **є транзитивним** оскільки виконується умова $xRz \wedge zRy$ (наприклад при x=40, z=20, y=10)

2.2 Обчислити $(R \circ S)^{-1}$ та $(R \circ R^{-1})_{Tr}$

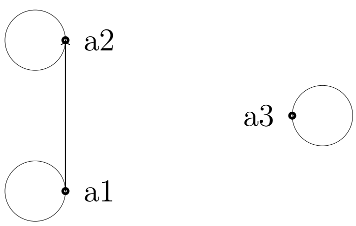
$$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\}, S = \{(b_2, c_1), (b_1, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4)\}.$$

$$R : A \to B, \quad R = \left[\begin{array}{c|cc} & b_1 & b_2 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad S : B \to C, \quad S = \left[\begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

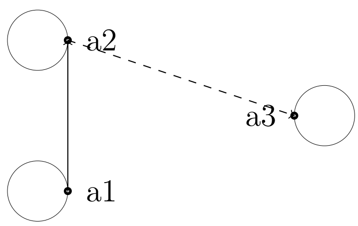
$$a) \qquad R \circ S = \left[\begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] (R \circ S)^{-1} \left[\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline c_1 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 1 & 1 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 1 \\ c_4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$b) \quad R : A \to B, \quad R = \left[\begin{array}{c|cc} & b_1 & b_2 \\ \hline a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad R^{-1} : B \to A, \quad R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline b_1 & 1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

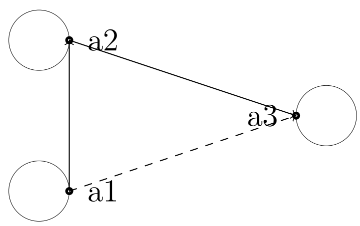
$$(R \circ R^{-1}) = \left[\begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



R



$R \cup R^2$



$R \cup R^2 \cup R^3$

$$\boxed{R_{Tr} = R \cup R^2 \cup R^3}$$

3.1 Вибір нумерованих об'єктів

Упосудині знаходиться n_1 білих, n_2 чорних, n_3 червоних кульок (всі кульки нумеровані). Скількома способами можна витягнути k кульок без повернення та без урахування порядку, так щоб у виборці було не менш ніж k_1 білих, k_2 чорних та k_3 червоних кульок?

$$\begin{array}{lll} n_1 = 4 & & k_1 = 2 \\ n_2 = 6 & k = 6 & k_2 = 2 \\ n_3 = 2 & & k_3 = 0 \end{array}$$

m білі	m чорні	m червоних	Кількість варіантів		
2	2	2	$C_4^2 C_6^2 C_2^2$	$6 \times 15 \times 1$	$= 90$
2	3	1	$C_4^2 C_6^3 C_2^1$	$6 \times 20 \times 2$	$= 240$
2	4	0	$C_4^2 C_6^4 C_2^0$	$6 \times 15 \times 1$	$= 90$
3	2	1	$C_4^3 C_6^2 C_2^1$	$4 \times 15 \times 2$	$= 60$
3	3	0	$C_4^3 C_6^3 C_2^0$	$4 \times 20 \times 1$	$= 80$
4	2	0	$C_4^4 C_6^2 C_2^0$	$1 \times 15 \times 1$	$= 15$

Загальна кількість способів, якими можна задовольними умови виборки по колору є сумма усіх можливих комбінацій тобто 575 ($90 \times 2 + 15 + 60 + 240$).

Закони Логічної Еквіваленції

1. Закон Комутативності / Commutative Laws

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

2. Закони Розподільності / Дистрибутивність / Distributive Laws

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3. Закони Нейтральності / Identity Laws / Domination Laws

$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap U = A$$

4. Закони Доповненості / Complement Laws

$$A \cup A^{\mathsf{c}} = U \quad A \cap A^{\mathsf{c}} = \varnothing$$

5. Закони Універсальних границь / Universal Bounds

$$A \cup U = U \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

6. Закони Абсорбції / Absorption Laws

$$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$$

7. Закони Ідемподентості / Idempodent Laws

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

8. Закони Ассоціативності / Associative Laws

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

9. Закони Єдності доповнення

$$\begin{cases} A \cup X = U \\ A \cap X = \varnothing \end{cases} \Rightarrow (X = A^{\mathsf{c}})$$

10. Інволютивність / Involution

$$(A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = A$$

11. Закон Де Моргана / De Morgan's Law

$$(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} \qquad (A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$$

12. Закон Порецького

$$A \cap (A^{\mathsf{c}} \cup B) = A \cap B \qquad A \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B) = A \cap B$$

13. Закон Склеювання

$$(A \cup B) \cap (A \cup B^{\mathsf{c}}) = A \qquad (A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}}) = A$$