

Основи системного аналізу

Методи багатокритеріального
оцінювання альтернатив.
PROMETHEE

Савченко Ілля Олександрович
ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

Методи PROMETHEE і ELECTRE

- PROMETHEE: Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluation
- ELECTRE: фр. ELimination Et Choix Traduisant la Realite — виключення і вибір, що відображають реальність

Розв'язання задач:

- вибору
- ранжування

Постановка задачі

Дано:

- $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ – множина альтернатив рішень
- $C = \{c_j \mid j = 1, \dots, m\}$ – множина критеріїв
- $V = (v_j(a_i))$ – оцінки альтернатив за критеріями
- w_j^C – вага j -го критерію $\sum_{j=1}^m w_j^C = 1$

Знайти:

- ранжування альтернатив
- множину “найкращих” альтернатив

Таблиця оцінок за критеріями

	c_1	c_2	...	c_m
a_1	$v_1(a_1)$	$v_2(a_1)$...	$v_m(a_1)$
a_2	$v_1(a_2)$	$v_2(a_2)$...	$v_m(a_2)$
...
a_n	$v_1(a_n)$	$v_2(a_n)$...	$v_m(a_n)$

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	0,2	5600	добре	так
a_2	0,3	8100	погано	ні
a_3	0,1	11000	дуже добре	ні
a_4	0,4	8750	задовільно	так

Модель порогів

- Відношення нерозрізненості за критерієм c_j

$$a_k I a_l \Leftrightarrow |v_j(a_k) - v_j(a_l)| \leq q_j$$

- Відношення сильної переваги за критерієм c_j

$$a_k P a_l \Leftrightarrow |v_j(a_k) - v_j(a_l)| > p_j$$

- Відношення слабкої переваги за критерієм c_j

$$a_k Q a_l \Leftrightarrow q_j < |v_j(a_k) - v_j(a_l)| \leq p_j$$

Функція переваги

Функція переваги a_k над a_l за критерієм c_j :

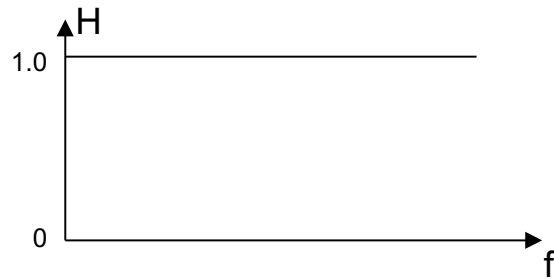
$$H_j(a_k, a_l) = H_j(f_j(a_k, a_l))$$

$$f_j(a_k, a_l) = v_j(a_k) - v_j(a_l)$$

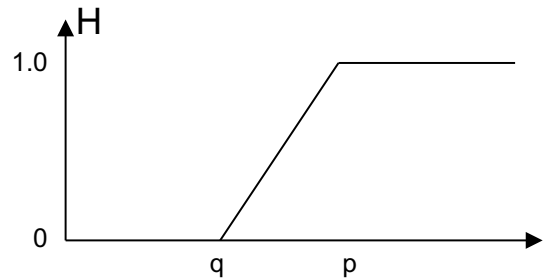
$$H_j(a_k, a_l) \in [0, 1]$$

Види функцій переваг

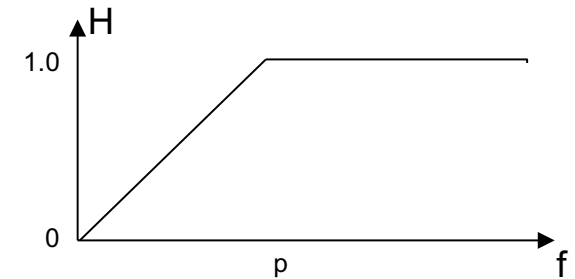
Використовуються різні типи функцій переваг, які для кожного критерію призначає експерт або аналітик.



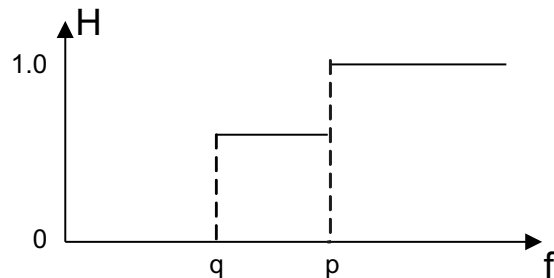
usual shape



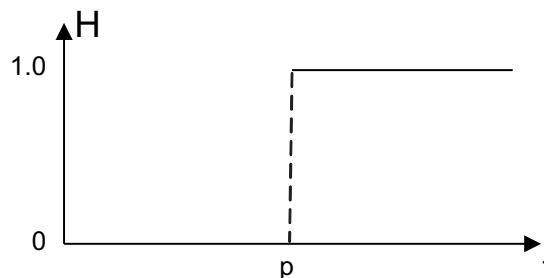
linear shape



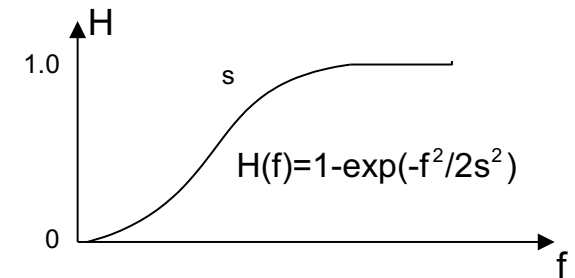
V shape



level shape

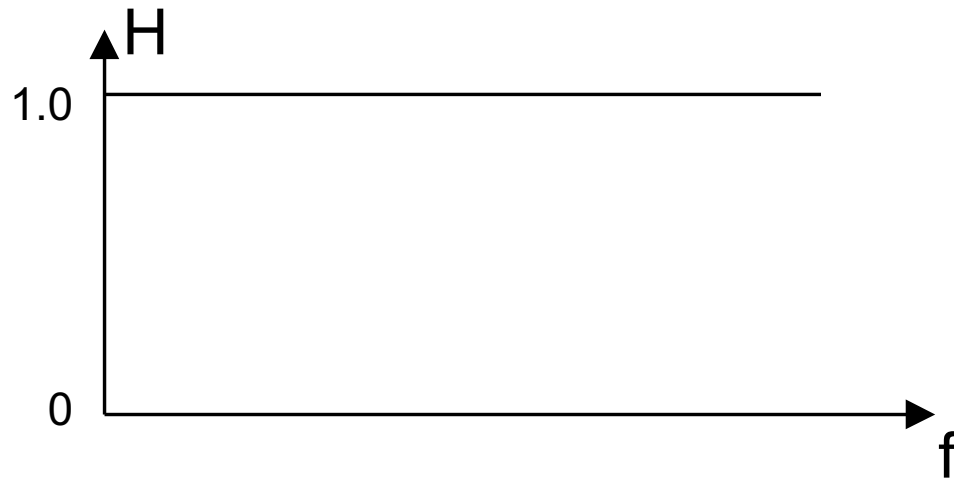


U shape



Gaussian shape

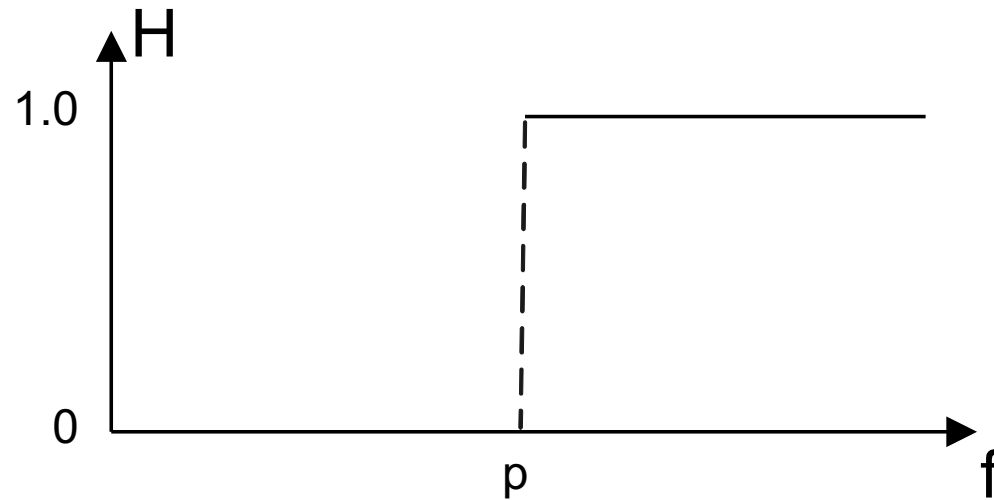
Функція переваги “usual shape”



Використовується, в основному, для якісних критеріїв з невеликою кількістю рівнів.

$$H_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 1, & v_j(a_k) > v_j(a_l) \\ 0, & v_j(a_k) \leq v_j(a_l) \end{cases}$$

Функція переваги “U shape”

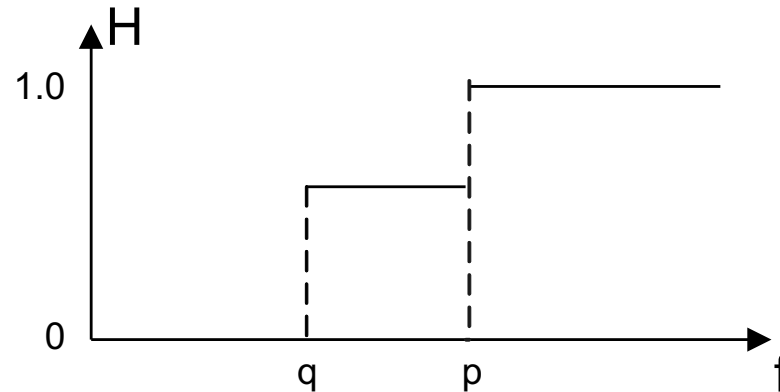


Використовується, в основному, для якісних критеріїв.

p – поріг строгої переваги.

$$H_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 1, & v_j(a_k) - v_j(a_l) > p_j \\ 0, & v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq p_j \end{cases}$$

Функція переваги “Level shape”

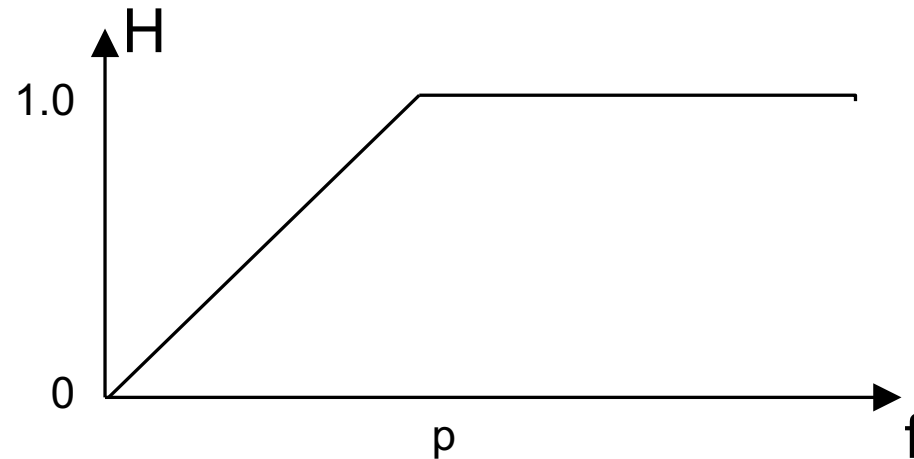


Використовується, в основному, для якісних критеріїв з великою кількістю рівнів.

q – поріг нерозрізненості, p – поріг строгої переваги.

$$H_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 1, & v_j(a_k) - v_j(a_l) > p_j \\ 0,5, & q_j < v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq p_j \\ 0, & v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq q_j \end{cases}$$

Функція переваги “V shape”

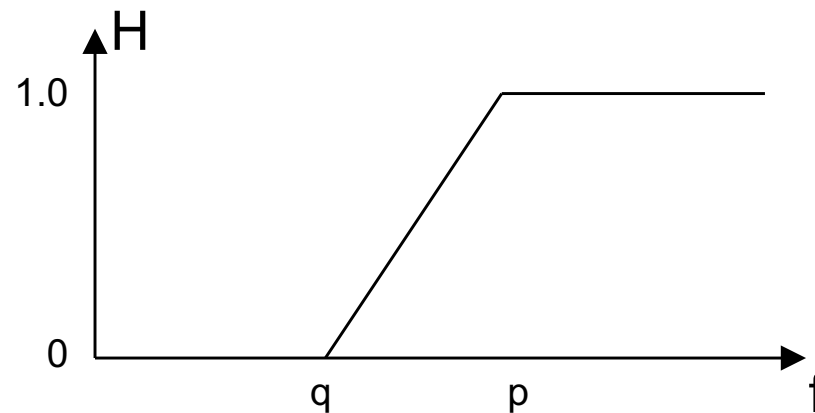


Використовується для кількісних критеріїв без порогу нерозрізненості.

p – поріг строгої переваги.

$$H_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 1, & v_j(a_k) - v_j(a_l) > p_j \\ \frac{v_j(a_k) - v_j(a_l)}{p_j}, & 0 < v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq p_j \\ 0, & v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq 0 \end{cases}$$

Функція переваги “Linear shape”

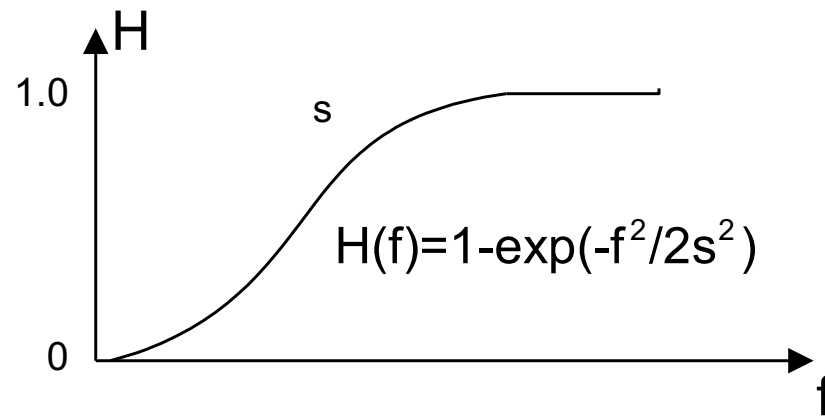


Використовується для кількісних критеріїв з порогом нерозрізненості.

q – поріг нерозрізненості, p – поріг строгої переваги.

$$H_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 1, & v_j(a_k) - v_j(a_l) > p_j \\ \frac{v_j(a_k) - v_j(a_l) - q_j}{p_j - q_j}, & q_j < v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq p_j \\ 0, & v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq q_j \end{cases}$$

Функція переваги “Gaussian shape”



Використовується для кількісних критеріїв.

s – параметр середньої переваги.

$$H_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(v_j(a_k) - v_j(a_l))^2}{2s^2}}, & v_j(a_k) - v_j(a_l) > 0 \\ 0, & v_j(a_k) - v_j(a_l) \leq 0 \end{cases}$$

Метод PROMETHEE

Розраховується агрегований ступінь переваги a_k над a_l за всіма критеріями:

$$\forall(a_k, a_l) \quad F(a_k, a_l) = \sum_{j=1}^m w_j^c H_j(a_k, a_l)$$

$$F(a_k, a_l) \in [0, 1] \quad F(a_k, a_k) = 0$$

Метод PROMETHEE. Потіки

Для кожної альтернативи розраховуються вхідний, вихідний і чистий потоки:

- Вихідний потік $\Phi^+(a_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{l \neq k} F(a_k, a_l)$
- Вхідний потік $\Phi^-(a_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{l \neq k} F(a_l, a_k)$
- Чистий потік $\Phi(a_k) = \Phi^+(a_k) - \Phi^-(a_k)$

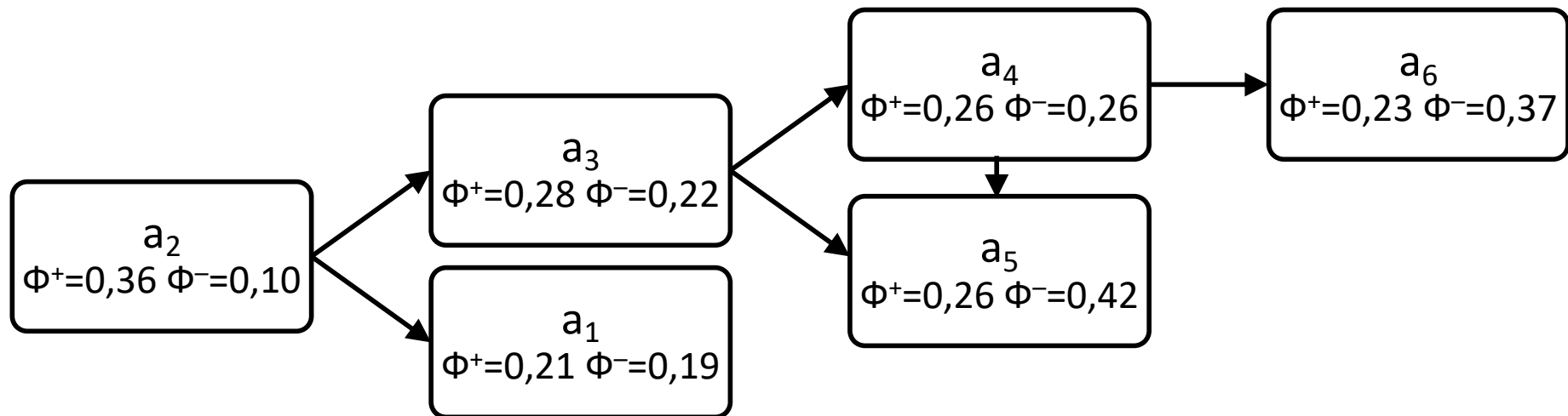
Метод PROMETHEE I

- $a_k I a_l$ якщо $(\Phi^+(a_k) = \Phi^+(a_l)) \wedge (\Phi^-(a_k) = \Phi^-(a_l))$
- $a_k P a_l$ якщо $\left[\begin{array}{l} (\Phi^+(a_k) \geq \Phi^+(a_l)) \wedge (\Phi^-(a_k) < \Phi^-(a_l)) \\ (\Phi^+(a_k) > \Phi^+(a_l)) \wedge (\Phi^-(a_k) = \Phi^-(a_l)) \end{array} \right.$
- $a_k Q a_l$ (непорівнюваність) в іншому випадку

Часткове ранжування в PROMETHEE I

Альтернатива	Вихідний потік Φ^+	Вхідний потік Φ^-
a_1	0,21	0,19
a_2	0,36	0,10
a_3	0,28	0,22
a_4	0,26	0,26
a_5	0,26	0,42
a_6	0,23	0,37

Переваги у вигляді графу



Метод PROMETHEE II

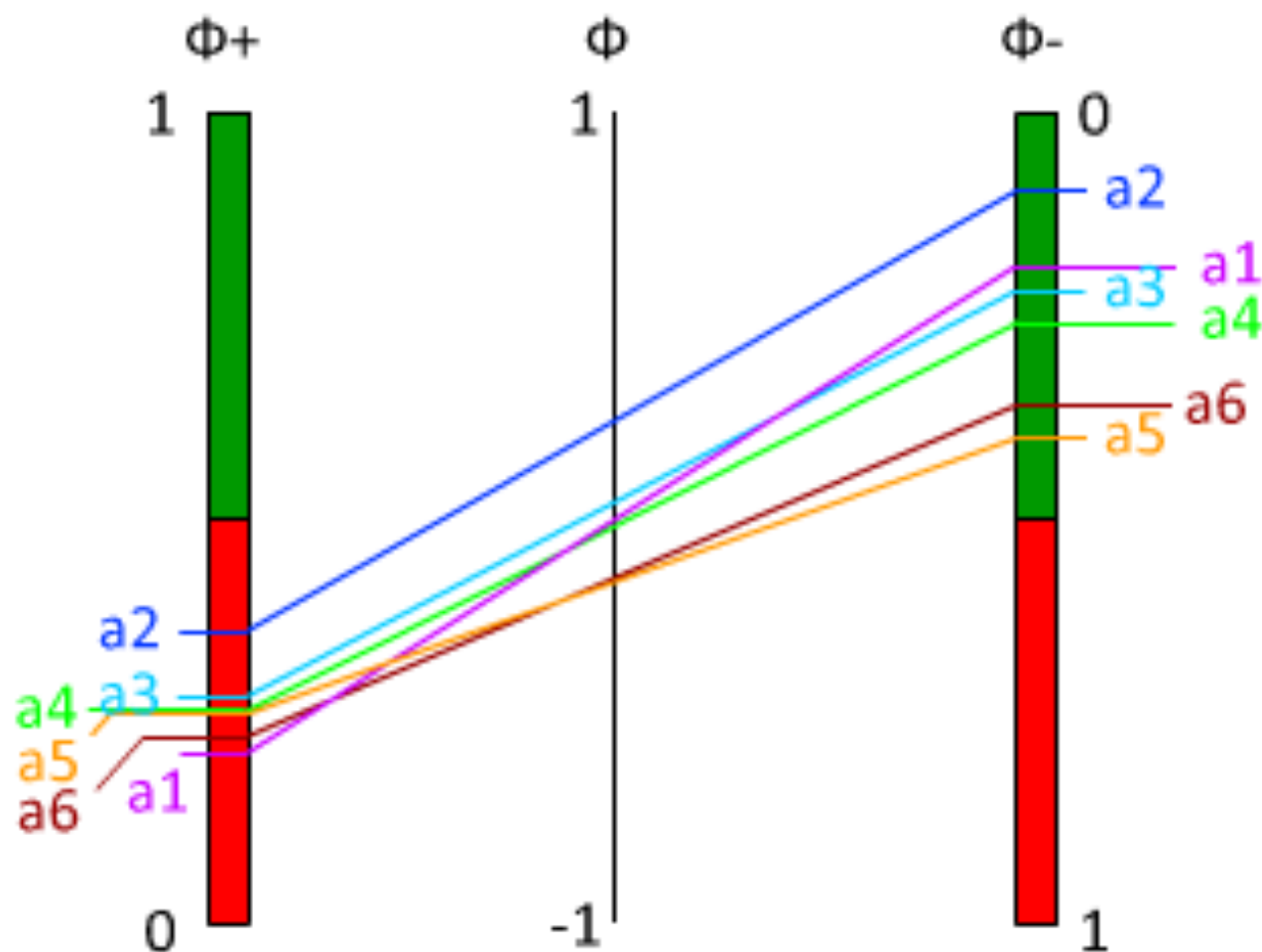
Альтернативи ранжуються за чистими потоками

- $a_k I a_l$ якщо $\Phi(a_k) = \Phi(a_l)$
- $a_k P a_l$ якщо $\Phi(a_k) > \Phi(a_l)$

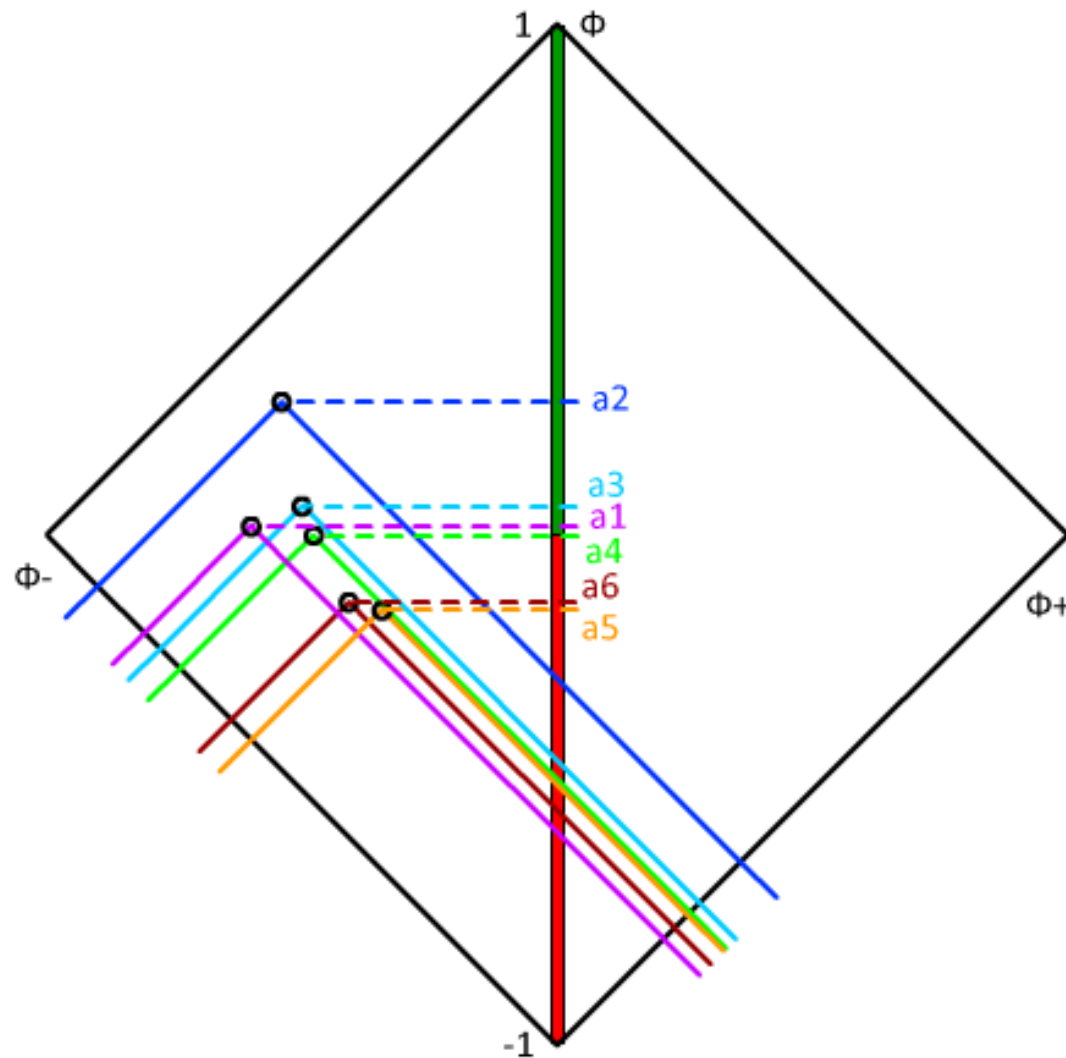
Метод PROMETHEE II

Ранг	Альтернатива	Вихідний потік Φ^+	Вхідний потік Φ^-	Чистий потік Φ
1	a_2	0,36	0,10	0,26
2	a_3	0,28	0,22	0,06
3	a_1	0,21	0,19	0,02
4	a_4	0,26	0,26	0
5	a_6	0,23	0,37	-0,14
6	a_5	0,26	0,42	-0,16

Графічні представлення потоків



Графічні представлення потоків: діамант



PROMETHEE V

Метод використовується для того, щоб обрати підмножину альтернатив.

Наприклад:

- проекти;
- інвестиції;
- маркетингові канали;
- тощо.

PROMETHEE V

1. Виконується аналіз PROMETHEE II і обчислюються чисті потоки $\Phi(a_k)$.
2. Кожній альтернативі присвоюється бінарна змінна x_k , яка означає, чи обрана відповідна альтернатива.
3. Розв'язується оптимізаційна задача

$$\max \sum_{i=1}^n x_i \Phi(a_i)$$

PROMETHEE V

За умови відсутності обмежень будуть обрані всі альтернативи з додатнім потоком Φ .

В залежності від задачі можуть вводитись обмеження.

Наприклад:

- необхідність вибору рівно n_c альтернатив:
$$\sum_{i=1}^n x_i = n_c$$
- обмеження за бюджетом:
$$\sum_{i=1}^n b_i x_i \leq B$$
- несумісність альтернатив:
$$x_i + x_j \leq 1$$

Аналіз GAIA

PROMETHEE часто поєднують з аналізом GAIA (Geometrical Analysis for Interactive Aid)

Аналіз GAIA відповідає на питання:

- Наскільки альтернативи схожі/відмінні між собою? Чи є кластери схожих альтернатив?
- Які критерії конфліктують між собою? Які критерії дають схожі значення?
- Як впливають ваги критеріїв на ранжування методом PROMETHEE?

Чистий потік за критерієм

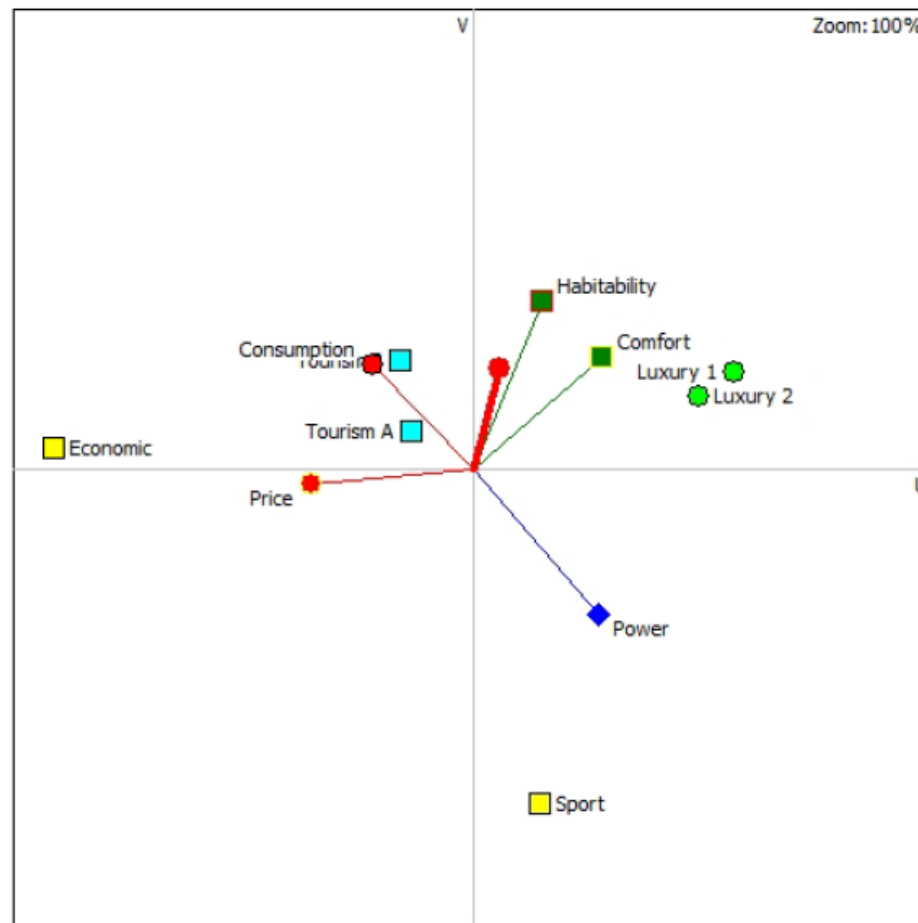
Для альтернатив можна знайти величини чистого потоку за критерієм:

$$\Phi_j(a_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{l \neq k} \left(H_j(a_k, a_l) - H_j(a_l, a_k) \right)$$

	Φ_1	Φ_2	...	Φ_m
a_1	$\Phi_1(a_1)$	$\Phi_2(a_1)$...	$\Phi_m(a_1)$
a_2	$\Phi_1(a_2)$	$\Phi_2(a_2)$...	$\Phi_m(a_2)$
...
a_n	$\Phi_1(a_n)$	$\Phi_2(a_n)$...	$\Phi_m(a_n)$

Аналіз GAIA

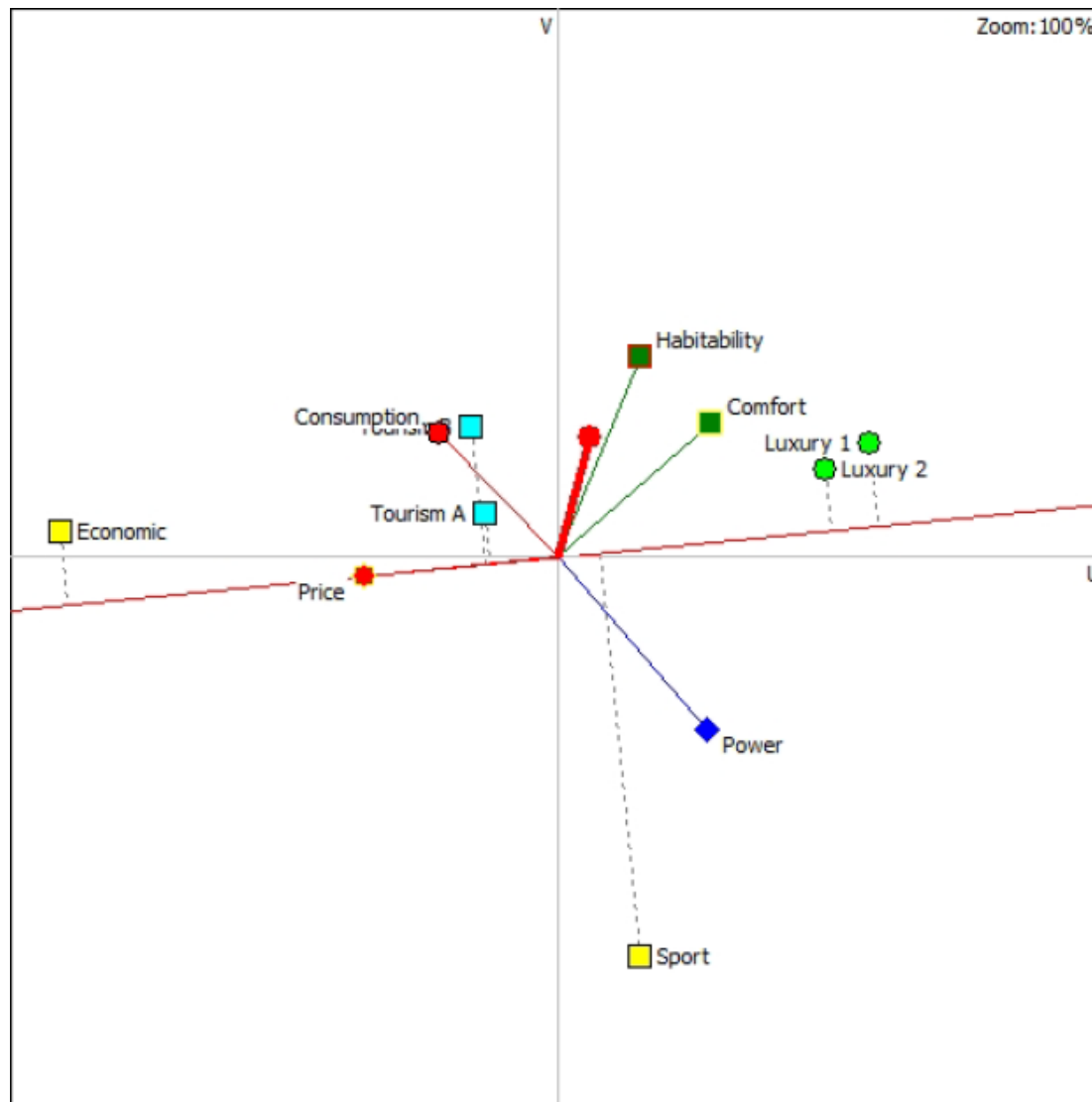
Використовується метод головних компонент, що переводить оцінки в площину UV.



Аналіз GAIA

- Схожі альтернативи знаходяться поблизу одна від одної, різні – далеко
- Критерії, що представляють однакові вимоги, знаходяться близько один від одного. Конфліктуючі критерії знаходяться у протилежних напрямках
- Альтернативи, що мають великі значення за певними критеріями, знаходяться приблизно в тому ж напрямку

Аналіз GAIA



GAIA Webs

