Розрахункова Робота - 1

з предмету "Математичний Аналіз"

студента групи ІСзп 71
Бутузова О. В.

Варіант №4

Загальне

- В pdf файлі можливо відмічати правильність/неправильність виконання відмічаючи квадрат у лівому верхньому куту завдання.
- Завдання носить нумерацію вигляду В4 (Варіант 4) - РР1 (Розрахункова робота 1) - 0M.0N (де M це завдання, а N підваріант завдання.)

Розрахункова робота - 1

- В данній розрахунковій роботі відсутній розв'язок завдання 7б (07.02)

☐ B4 - PP1 - 01.01

Завдання: Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\epsilon)$ такий що $|a_n - a| < \epsilon$ ∀n>N(ϵ), якщо а $a_n = \dfrac{2n+5}{3n+5}$.

$$a_n \frac{2n+5}{3n+5} \to \frac{2}{3} \qquad \text{тому що} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2n+5}{3n+5} = \frac{2}{3}$$

$$|\text{a}| \text{ розкривається як } \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \\ +a, & a > 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon > \frac{2n+5}{3n+5} - (+\frac{2}{3}) \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{3(2n+5) - 2(3n+5)}{3(3n+5)} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{6n+15-6n-10}{3(3n+5)} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{9n+5}$$

$$n > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{15}{9} \Leftrightarrow n > \frac{5-15\varepsilon}{9\varepsilon} + 1$$

Візьмемо, наприклад, $\epsilon = 0,0001$. Тоді $N(\epsilon) = \dfrac{5 - 5\cdot 0.0001}{(9\cdot 0.0001)} = 5555$. Це означає, що, починаючи з номера $n = 5556$ всі наступні члени послідовності $\left\{\dfrac{2n+5}{3n+5}\right\}$ будуть знаходитись в 0,0001-околі точки $\dfrac{2}{3}$.

☐ B4 - PP1 - 02.01

Знайти Границю функції

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)^2 + (n+4)^2}{(n+3)^3 - (n-2)^3} = [\frac{\infty}{\infty}]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)^2 + (n+4)^2}{(n+3)^3 - (n-2)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)(n+5) + (n+4)(n+4)}{(n+3)(n+3)(n+3) - (n-2)(n-2)(n-2)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+10n+25) + (n^2+8n+16)}{(n^3+9n^2+27n+27) - (n^3-6n^2+12n-8)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+18n+41}{15n^2+15n+35} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{18}{n} + \frac{41}{n^2}}{15 + \frac{15}{n} + \frac{35}{n^2}} = \frac{2}{15}.$$

☐ B4 - PP1 - 02.02

Знайти Границю функції

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = [\infty - \infty]$$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+5 - \sqrt{n(n+5)} + \sqrt{n(n+5)} - n)}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

☐ B4 - PP1 - 02.03

Знайти Границю функції

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+3}{n-1})^{n+4}=[1^\infty]$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+(\frac{n+3}{n-1})-1)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{(n+3)-(n-1)}{n-1})^{n+4}=$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{4}{n-1})^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{4}{n-1})^{\frac{n-1}{4}}\right]^{(\frac{4}{n-1})(\frac{n+4}{1})}=$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(n+4)}{n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(n+4)}{x-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(1+\frac{4}{n})}{1-\frac{1}{n}}}=e^{4\frac{1}{1}}=e^4.$$

☐ B4 - PP1 - 02.04 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}=[\frac{0}{0}]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+x)(1+x)-(1+3x)}{x+x^5}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x+x^2)-(1+3x)}{x+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x+x^2+x+2x^2+x^3)-(1+3x)}{x+x^5}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2}{x^5+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3x)}{x(x^4+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^4+1}=\frac{0}{1}=0$$

☐ B4 - PP1 - 02.05 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{2-x}-2)}{(x+2)(x-3)}*\frac{(\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{2-x-4}{(x-3)(x+2)(\sqrt{(2-x)}+2)}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{-1(x+2)}{(x-3)(x+2)(\sqrt{(2-x)}+2)}=\frac{-1}{(-2-3)(2+2)}=\frac{-1}{-5\cdot 4}=\frac{1}{20}.$$

☐ B4 - PP1 - 02.06 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\pi x+cos3\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot(\lim_{x\to 0}\cos\pi x+\lim_{x\to 0}\cos 3\pi x)=(1+1)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=2\cdot\infty=\infty$$

☐ B4 - PP1 - 02.07 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos\pi x-1)^{\frac{1}{x\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos\pi x-1)\right]^{\frac{1}{x\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos\pi x-1)^{\frac{1}{\cos\pi x-1}}\right]^{\frac{1}{x\sin x}\frac{\cos\pi x-1}{1}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos\pi x-1}{x\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\pi x-1}{x\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos\pi x-1)'}{(x\sin x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin\pi x(\pi x)'}{(x)'\sin x + x(\sin x)'}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\pi\sin\pi x}{\sin x + x\cos x}} = e^{\pi\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin\pi x}{\sin x + x\cos x}}$$

$$\left|\begin{array}{lcl} \sin\alpha\sim\alpha & , & \alpha\to 0\\ \cos\alpha\sim 1-\dfrac{\alpha^2}{2} & , & \alpha\to 0\end{array}\right|$$

$$= e^{\pi\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(\pi x)'}{(\sin x + (x\cos x))'}} = e^{\pi\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\pi}{(\cos x + (\cos x - x\sin x))}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2\cos x - x\sin x}}$$

$$= e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2(1+\frac{x^2}{2}) - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2+\frac{2x^2}{2} - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2+x^2 - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{2}}.$$

$\square$ B4 - PP1 - 02.08 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-3^{2x}}{\operatorname{arctg}4x-\sin x} = [\frac{1-1}{0+0}] = [\frac{0}{0}] = \left|\begin{array}{cccl} \sin\alpha & \sim & \alpha & ,\alpha\to 0\\ \operatorname{arctg}\alpha & \sim & \alpha & ,\alpha\to 0\\ \alpha^x-1 & \sim & x\ln\alpha & ,\alpha\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(6^x-1)-(3^{2x}-1)}{\operatorname{arctg}4x-\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(6^x-1)-(3^{2x}-1)}{\operatorname{arctg}4x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln 6-2x\ln 3}{4x-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln 6}{3x} - \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln 3}{3x} = \frac{\ln 6}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} - \frac{2\ln 3}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}$$

$$= \frac{\ln 6}{3} - \frac{2\ln 3}{3} = \frac{1}{3}(\ln 6-\ln 9) = \frac{1}{3}\ln\frac{6}{9} = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}.$$

$\square$ B4 - PP1 - 02.09 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-sin2x)}{(\pi-4x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l} t=x-\pi/4,\quad t\to 0\\ x=t+\pi/4\end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{(1-\sin(2t+\frac{2\pi}{4}))}{(\pi-4(t+\frac{\pi}{4}))^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1-\sin(2t+\frac{2\pi}{4}))}{(\pi-4(t+\frac{\pi}{4}))^2} = \lim_{t\to 0}\frac{(1-\sin(2t+\frac{\pi}{2}))}{(\pi-4t-\pi 4)^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1-(\sin 2t\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2t\sin\frac{\pi}{2}))}{(4t)^2} = \left|\begin{array}{l}\sin\pi/2=1\\ \cos\pi/2=0\end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{16t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos 2t)'}{(16t^2)'} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 2t(2t)'}{32t} = -\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t}{32t} = |\sin 2t\sim 2t, t\to 0| = -\lim_{t\to 0}\frac{4t}{32t} = -\frac{1}{8}$$

$\square$ B4 - PP1 - 02.10 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to 0}(-\ln x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(-\ln x)^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln(-\ln x)} = \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln(-\ln x)}{\dfrac{1}{\sin x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{(\ln(-\ln x))'}{(\dfrac{1}{\sin x})'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{\ln x}\cdot(-\ln x)'}{\dfrac{-\cos x}{(\sin x)^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{\ln x}\cdot -\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{(\sin x)^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\dfrac{1}{x\ln x}}{\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\sin^2 x}{x\ln x\cos x}} = e^{(\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\sin x}{\ln x})\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}}$$

$$e^{0\cdot 1\cdot 1} = e^0 = 1.$$

$\square$ B4 - PP1 - 03.01 Визначити порядок малості

Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$ якщо $\alpha(x) = \sin 3x - \sin x$, $\beta(x) = 5x$

Для того щоб визначити порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$, треба встановити, при якому числу k границя $\lim \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}$ буде дорівнювати числу, відмінному від нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - \sin x}{(5x)^k} = \left|\begin{array}{lll} \sin\alpha & \sim \ \alpha & \alpha\to 0 \\ \sin 3x & \sim \ 3x & \alpha\to 0 \\ \sin x & \sim \ x & \alpha\to 0 \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x - x}{(5x)^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(5x)^k} = \left|\ k = 1\ \right| = \frac{2}{5}$$

$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ безкінечно малі одного порядку

.

$\square$ B4 - PP1 - 04.01 Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leqslant 0 \\ -(x-1)^2 & 0 < x < 2 \\ x - 3 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

1) Сробуємо знайти границі функції зліва та справа точки 0 в якій функція не визначена

$$\lim_{x \to 0\ -0} -x = 0 \qquad \lim_{x \to 0\ +0} -(x-1)^2 = -(0-1)^2 = -1$$

Висновок - функція в точкі 0 являє собою **розрив першого роду**, оскільки границі функції зліва та справа дорівнюють одна одній і є скінченними.

2) Сробуємо знайти границі функції зліва та справа точці 2 (в якій функція не визначена)

$$\lim_{x \to 2\ -0} -(x-1)^2 = -(2-1)^2 = -1 \qquad \lim_{x \to 2\ +0} (x-3) = (2-3) = -1$$

Висновок - функція в точкі 2 являє собою **усувний розрив**, оскільки границі функції зліва та справа не дорівнюють одна одній і є скінченними.

$\boxed{\square \text{ B4 - PP1 - 04.02}}$ Дослідити функцію на неперервність

$$y = 3^{\dfrac{2x}{3x+1}}$$

Дослідимо функцію в точкі $-\dfrac{1}{3}$ де вона можливо має точку розриву.

$$\lim_{x \to -1/3-0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} \qquad \lim_{x \to (-1/3-0.001)-0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} = \infty$$

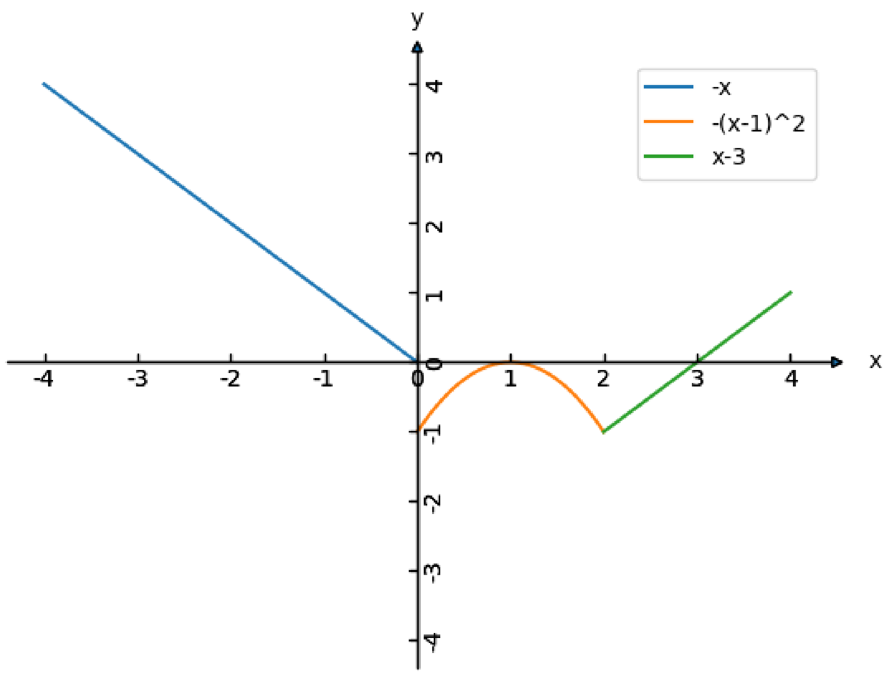

Рис. 1: Графік функції

$$\lim_{x\to -1/3+0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} \qquad \lim_{x\to(-1/3+0.001)+0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} = \infty$$

Висновок - функція в точкі $-\dfrac{1}{3}$ тосить характер розриву **другого роду**, оскільки границі функції зліва та зправа прямують у нескінченність.

$\square$ B4 - PP1 - 05.01 Знайти похідну функції:

$$y = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \operatorname{tg} e^x$$

$$y' = \frac{1}{2}(\ln(e^{2x}+1))' + (\operatorname{tg} e^x)' = \ln(e^{2x}+1)\cdot(e^{2x}+1)' + \frac{1}{\cos e^x}(e^x)' = \ln(e^{2x}+1)\cdot(e^{2x}\cdot(2x)') + \frac{1}{\cos e^x}e^x$$

$$y' = \ln(e^{2x}+1)2e^{2x} + \frac{e^x}{\cos e^x}$$

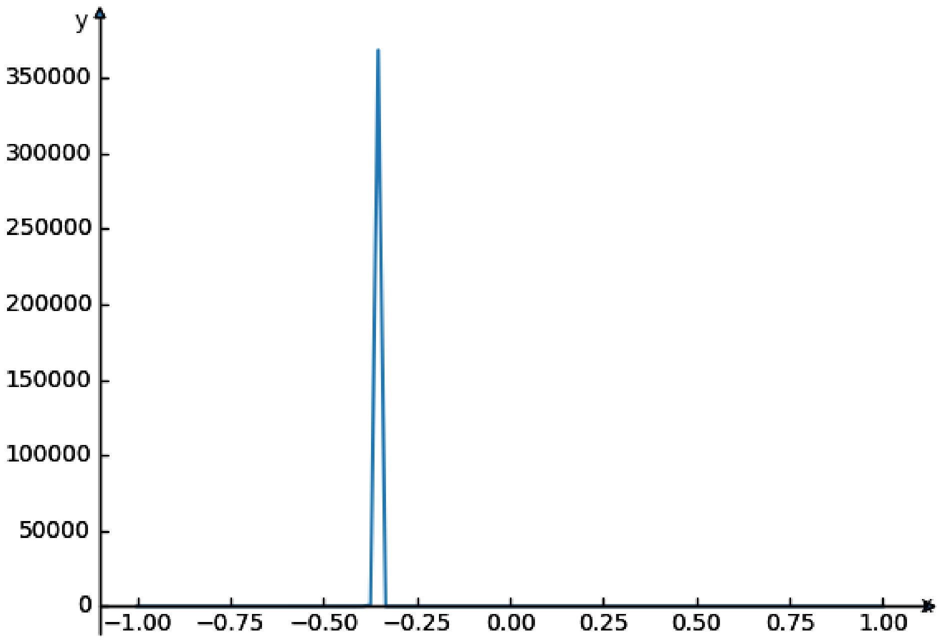

Рис. 2: Графік функції

☐ B4 - PP1 - 05.02 Знайти похідну функції:

$$y = \sqrt{x^3 + 2x + \frac{1}{x}} = (x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = ((x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})' = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})$$

$$y' = \frac{3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{(x^3 + 2x + \frac{1}{x})}}$$

☐ B4 - PP1 - 05.03 Знайти похідну функції:

$$y = \frac{\arccos\sqrt{x}}{x}$$

$$y' = \frac{(\arccos\sqrt{x})'(x) - (\arccos\sqrt{x})(x)'}{x^2} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}(\sqrt{x})' - \arccos\sqrt{x}}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(x)}} - \arccos\sqrt{x}}{x^2} = -\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \arccos\sqrt{x}}{x^2}.$$

☐ B4 - PP1 - 05.04 Знайти похідну функції:

$$\begin{aligned} y &= (x^3 - x^2)^x \\ y' &= ((x^3 - x^2)^x)' \\ (\ln y)' &= (\ln(x^3 - x^2)^x)' \end{aligned}$$

$$\frac{1}{y}y' = x\frac{1}{x^3 - x^2}(x^3 - x^2)'$$

$$y' = x(x^3 - x^2)^x \frac{1}{x^3 - x^2}(3x^2 - 2x) = \frac{x(x^3 - x^2)^x(3x^2 - 2x)}{x^3 - x^2}$$

$$y' = (x^3 - x^2)^{x-1}(3x^3 - 2x^2).$$

☐ B4 - PP1 - 05.05 Знайти похідну функції:

$$y = 5^{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$y' = (5^{\operatorname{tg}^2 x})' = 5^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln 5 \cdot ((\operatorname{tg} x)^2)' = 5^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln 5 \cdot 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

☐ B4 - PP1 - 05.06 Знайти похідну функції:

$$x\operatorname{tg} y - y\operatorname{tg} x = 2$$

$$x\operatorname{tg} y - y\operatorname{tg} x - 2 = 0$$

$$0 = (x\operatorname{tg} y)' - (y\operatorname{tg} x)' - (2)' = ((x)'\operatorname{tg} y + x(\operatorname{tg} y)') - ((y)'\operatorname{tg} x + y(\operatorname{tg} x)') = (x'\operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y}) - (y'\operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x})$$

$$y'\operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x} = x'\operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y}$$

$$y'\operatorname{tg} x = x'\operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y} - \frac{y}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} + \frac{x}{\operatorname{tg} x\cos^2 y} - \frac{y}{\operatorname{tg} x\cos^2 x}$$

☐ B4 - PP1 - 05.07 Знайти похідну функції:

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1}{t+2} \\ y = & \dfrac{t^2}{(t+2)^2} \end{cases} \qquad y'_x = ? \qquad y''_x x = ?$$

$$y'_x = \frac{y'}{x'} \qquad y''_x x = \frac{y'_x}{x'}$$

$$x' = \left(\frac{1}{t+2}\right)' = \frac{1}{(t+2)^2}(t+2)' = \frac{1}{(t+2)^2}$$

$$y' = \left(\frac{t^2}{(t+2)^2}\right)' = \frac{(t^2)'(t+2)^2 - (t^2)((t+2)^2)'}{(t+2)^4} = \frac{2t(t+2)^2 - 2t^2(t+2)}{(t+2)^4} = \frac{(2t(t+2) - 2t^2)(t+2)}{(t+2)^4}$$

$$y' = \frac{2t(t+2) - 2t^2}{(t+2)^3} = \frac{2t((t+2) - t)}{(t+2)^3} = \frac{4t}{(t+2)^3}$$

$$y'_x = \frac{y'}{x'} = \frac{\dfrac{4t}{(t+2)^3}}{\dfrac{1}{(t+2)^2}} = \frac{4t(t+2)^2}{(t+2)^3} = \frac{4t}{t+2}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x'} = \frac{\left(\dfrac{4t}{t+2}\right)'}{\dfrac{1}{(t+2)^2}} = (t+2)^2\frac{(4t)'(t+2) - (4t)(t+2)'}{(t+2)^2} = \frac{(4t+8-4t)(t+2)^2}{(t+2)^2} = 8$$

$\boxed{\square\ \text{B4 - PP1 - 06.01}}$ Обчислити наближено за допомогою диференціала.

$$y = x^{11}, x0.998$$

$$f(x + \triangle x) = f(x) + f'(x) \triangle x$$

Тоді для $\triangle x = 0.102$

$$f(1.1) = x^{11} + 11x^{10} \cdot \triangle x = 0.998^{11} + 11 \cdot 0.998^{10} \cdot 0.102 \approx 2.0779$$

$\boxed{\square\ \text{B4 - PP1 - 07.01}}$ Провести повне дослідження функції і побудувати графік

$$y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

1) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$

2) Графік не перетинає ось x.

3) Функція непарна оскільки

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2 + 2(-x)} = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

4) Обидві точки -2 та 0 носить характер розриву другого роду оскільки вони прямують в безмежність.

$$\lim_{x \to -2\ \pm 0} \frac{2}{x^2 + 2x} = \mp\infty \qquad \lim_{x \to 0\ \pm 0} \frac{2}{x^2 + 2x} = \pm\infty$$

5) Похідна

$$y' = (\frac{2}{x^2 + 2x})' = \frac{2'(x^2 + 2x) - 2(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x)^2}$$

Функція не існує в точках $x = -2$ та $x = 0$, а $x = -1$ є критичною (такою що є підозрілою на екстремум мінімум або максимум). На інтервалі $(-\infty; +\infty)$ матимемо:

x	(-∞; -2)	-2	(-2;-1)	-1	(-1:0)	0	(0; $+\infty$)
f'(x)	+	не існує	+	0	-	не існує	-
f(x)	$\nearrow$	не існує	$\nearrow$	y$_{max} = -2$	$\searrow$	не існує	$\searrow$

6) Друга похідна

$$y'' = (\frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x)^2})' = \frac{(-4x - 4)'(x^2 + 2x)^2 - (-4x - 4)((x^2 + 2x)^2)'}{(x^2 + 2x)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2 + 2x) + 4(2x + 2)^2}{(x^2 + 2x)^3} = \frac{-4x^2 - 8x + 16x^2 + 32x + 16}{(x^2 + 2x)^3} = \frac{12x^2 + 24x + 16}{(x^2 + 2x)^3}$$

x	(-∞; −2)	-2	(-2:0)	0	(0:+∞)
f"(x)	+	не існує	-	не існує	+
f(x)	∪	не існує	∩	не існує	∪

7) з пункта (4) випливає що фунція має вертикальні асимптоти в точках $x = -2$ та $x = 0$.

Знаходимо горизонтальні асимптоти за формулами (через границі функції):

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x(x^2+2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2}{x(1+2/x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2}{1+2/x} = \frac{0}{1} = 0$$

8) Враховуючи висновки ослідження функції будуємо графік:

☐ B4 - PP1 - 07.02 Провести повне дослідження функції і побудувати графік

$$\rho = \alpha(1 - cos2\varphi)$$

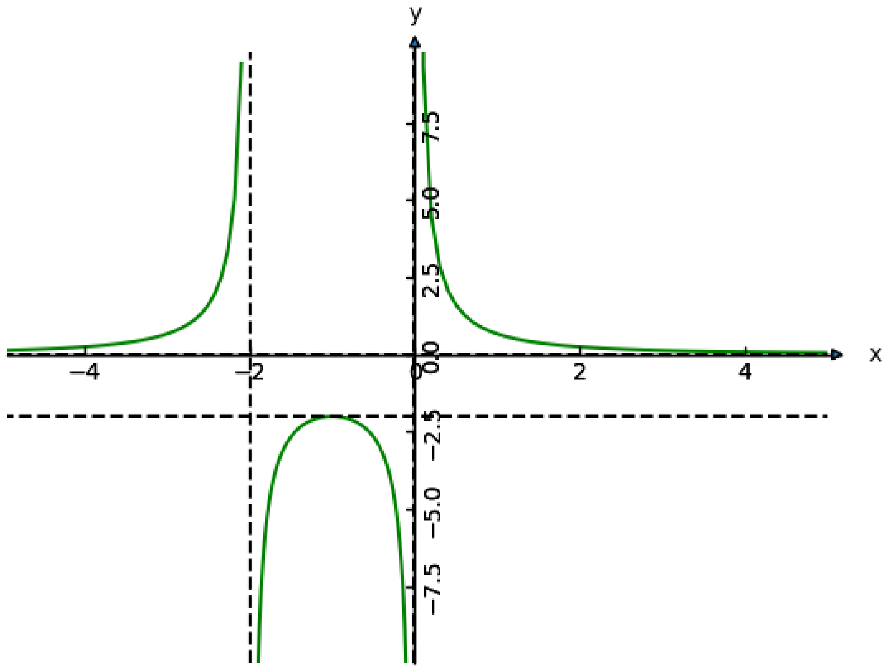

Рис. 3: Графік функції $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$