Числові ряди / Series

Основні поняття

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 \dots a_n$	Загальний член ряду
$S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$	nна часткова сума
$\lim_{x\to\infty} S_n = S$	Сумма ряда
$R_n = \lvert S - S_n \rvert$	Абсолютна похибка

Збіжність і Розбіжність

Ряд **збігається**

$$\lim_{x\to\infty} S_n = S$$

Приклад ряду що **збігається**

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 \dots + aq^n, (|q| < 1)}$$

Спадаюча геометрична прогресія

Ряд **розбігається**

$$\lim_{x\to\infty} S_n \neq S$$

Приклад ряду що **розбігається**

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}}$$

Гармонічний ряд (завжди розбіжний)

Знако_змінність та Ознаки збіжності таких рядів

ЗнакоПостійні

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots + a_n}$$

1. 1ша ознака збіжності
2. 2га ознака збіжності
3. Ознака КОШІ
4. Ознака ДАЛАМБЕРА
5. Інтегральна ознака

ЗнакоЗмінні

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} -1^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \dots + (-1)^{n+1} a_n}$$

1. Ознака Лейбніца

1ша ознака збіжності Ознака Порівняння

Порівняємо членів рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b$

За умови що $\boxed{\forall a_n \leqslant b_n}$ (кожен член ряду a менше або дорівнює кожному члену ряду b), тоді якщо збігається $\sum_{n=1}^{\infty} b$ буде збігається і $\sum_{n=1}^{\infty} a$, і навпаки.

2га ознака збіжності Умова Граничної Ознаки

Якщо існує границя $k = \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}}$ кінцева і відмінна від нуля границя , то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a$ b $\sum_{n=1}^{\infty} b$ одночасно сходяться або розходяться. Що може служити достатньою ознакою збіжності (якщо порівнюбвати з вже відомим рядом)

Ознака збіжності Коші

Для числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a$ існує границя вигляду
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = c \begin{cases} c > 1 & \text{ряд розбігається} \\ c < 1 & \text{ряд збігається} \\ c \neq 1 & \text{не відомо} \end{cases}$$

Ознака збіжності Даламбера

Для числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a$ існує границя вигляду $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c \begin{cases} c < 1 & \text{ряд збігається} \\ c > 1 & \text{ряд розбігається} \end{cases}$

Інтегральна ознака збіжності

Якщо $f(x)$ безперервна додатня монотонно спадаюча функція, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, де $a_n = f(x)$ є збіжним якщо і інтеграл $\int_{n=0}^{\infty} f(x)$ є збіжним і навпаки.

Ознака збіжності Лейбніца

використовується ЛИШЕ ДЛЯ ЗНАКОЗМІННИХ рядів

Знакозмінний ряд сходитьс якщо абсолютні велечини його членів спадають. а загальний член ряду прямує до нуля.

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ починаючи з деякого номеру (n > N)

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Не відповідність ряду першій ознаці не є достаньою ознакою того що ряд не сходиться.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$ **збігається** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **зігається абсолютно**

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$ **розбіжний, АЛЕ Ознаки Лейбніца - ВИКОНУЮТЬСЯ** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **збіжний умовно**

Приклади

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \qquad \left| a_n = \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n} \right|$$

Ряд **є збіжним за першою ознакою ()** - оскільки загальний член ряду менше загального загального члену $(1/2)^n$ який є з.ч. спадаючої геометричної прогресії, а вона є збіжним числовим рядом.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+3} \qquad \left| \; a_n = \quad \frac{1}{3n+3} \quad b_n = \quad \frac{1}{n} \; \right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{3}$$

Ряд є **розбіжним за другою ознакою збіжності -** оскільки границею від частки загального елементу нашого ряду на загальний елемент гармонічного ряду є кінцеве і відмінне від нуля число, а значить наш ряд має туж характеристику що і ряд щагальний елемент якого ми вкористали для діленя (тобто "розбіжний").

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Ряд є збіжним за **ознакою Коші**

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}} \times \frac{n^{10}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{10} = 2$$

Ряд є розбіжним за **ознакою Даламбера**

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = -(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}) = 0 + \frac{1}{1} = 1$$

Ряд є збіжним за інтегральною ознакою

$$6)\sum_{n=1}^{\infty} -1^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Ряд знакозмінний, шукаємо ознаки Лейбніца, обидві умови для ряду Лейбніца виконуються, але ряд за модулем є розбіжним (за порівняльною ознакою, де ми порівнбємо з членом гармонічного ряду) тобто ряд є умовно збіжним.

Ряди

Геометрична прогресія

Збіжний ряд (|q| $<$ 1)

$$\boxed{Sn = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a_1}{1-q}}$$

Розбіжний ряд (|q| $>$ 1)

$$\boxed{Sn = a\sum_{n=0}^{k} q^n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}}$$