Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

1. Функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* при $x \to x_0$, если
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A,\ A \neq 0,\ A \in R;$$
2. Функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка,* чем $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, если
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0;$$
3. Функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой низшего порядка,* чем $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, если
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty;$$
4. Функция $\alpha_1(x)$ называется *бесконечно малой k-го порядка* относительно $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$, если
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)} = A,\ A \neq 0,\ A \in R$$
5. Бесконечно малые функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются *несравнимыми* при $x \to x_0$, если в точке x_0 не существует предела их отношения.

Приведенные выше определения остаются в силе при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и при $x \to x_0 \pm 0$.

Некоторые эквивалентные бесконечно малые функции

$\sin x \sim x,\ x \to 0$	$e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$
$\operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0$	$a^x - 1 \sim x \ln a,\ x \to 0$
$\arcsin x \sim x,\ x \to 0$	$\log_a(1+x) \sim x \log_a e,\ x \to 0$
$\operatorname{arctg} x \sim x,\ x \to 0$	$\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0$	$(1+x)^k - 1 \sim kx,\ x \to 0,\ k > 0$