

Основи системного аналізу

Метод аналізу ієрархій

Савченко Ілля Олександрович
ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

Метод аналізу ієрархій (МАІ)

- Моделювання взаємозв'язків між окремими складовими частинами задачі прийняття рішення за допомогою ієрархічної структури з наступним визначенням ваг або пріоритетів альтернативних варіантів рішень відносно елементів цієї структури

Функції і принципи МАІ

Функції

- Структуризація складності
- Вимірювання у шкалі відношень
- Синтез

Принципи

- Декомпозиція
- Порівняльні судження
- Ієрархічна композиція

Принцип декомпозиції

Структуризація складної проблеми у вигляді ієрархії факторів, які впливають на головну ціль прийняття рішення.

Ієрархію можуть утворювати:

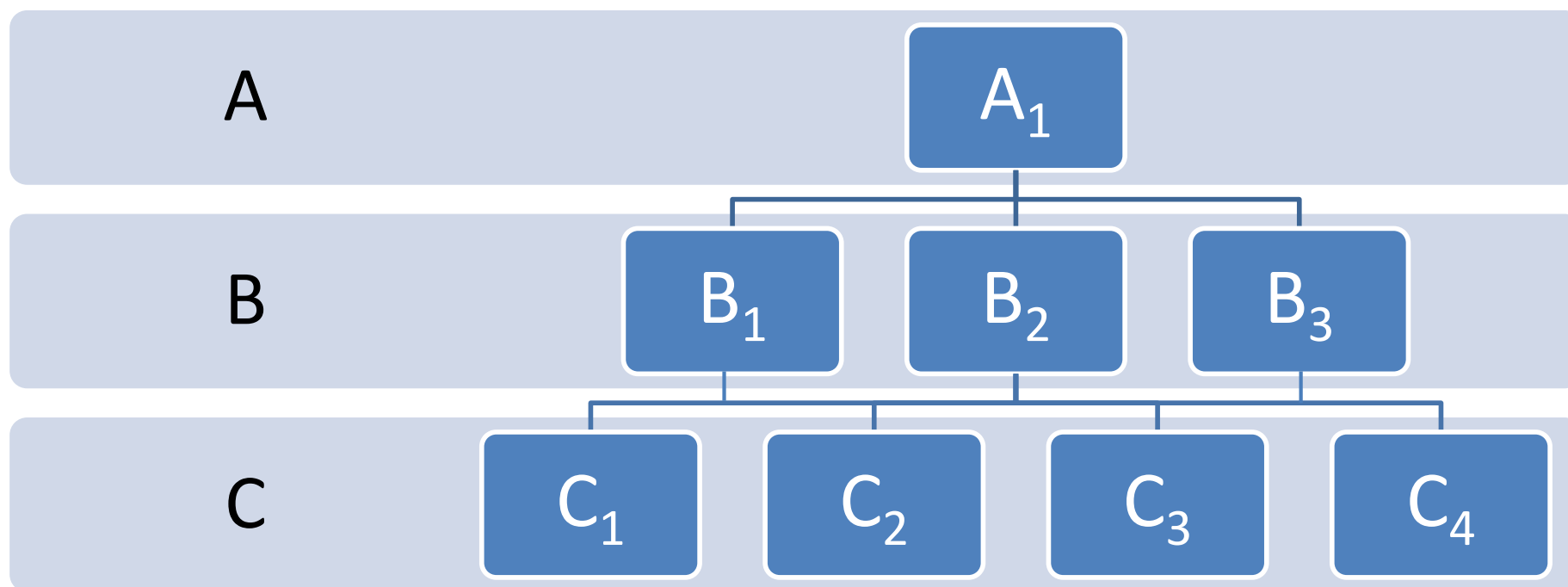
- Критерії, підкритерії
- Групи зацікавлених осіб (актори)
- Цілі, підцілі, політики акторів
- Сценарії
- Альтернативні варіанти рішень

Принцип порівняльних суджень

- Суб'єктивні оцінки експертів є основною інформацією для визначення переваг одного елемента ієрархії над іншим
- Елементи одного рівня ієрархії порівнюються між собою відносно їх впливу на спільний елемент вищого рівня

Принцип ієрархічної композиції – синтез пріоритетів за всіма рівнями ієрархії

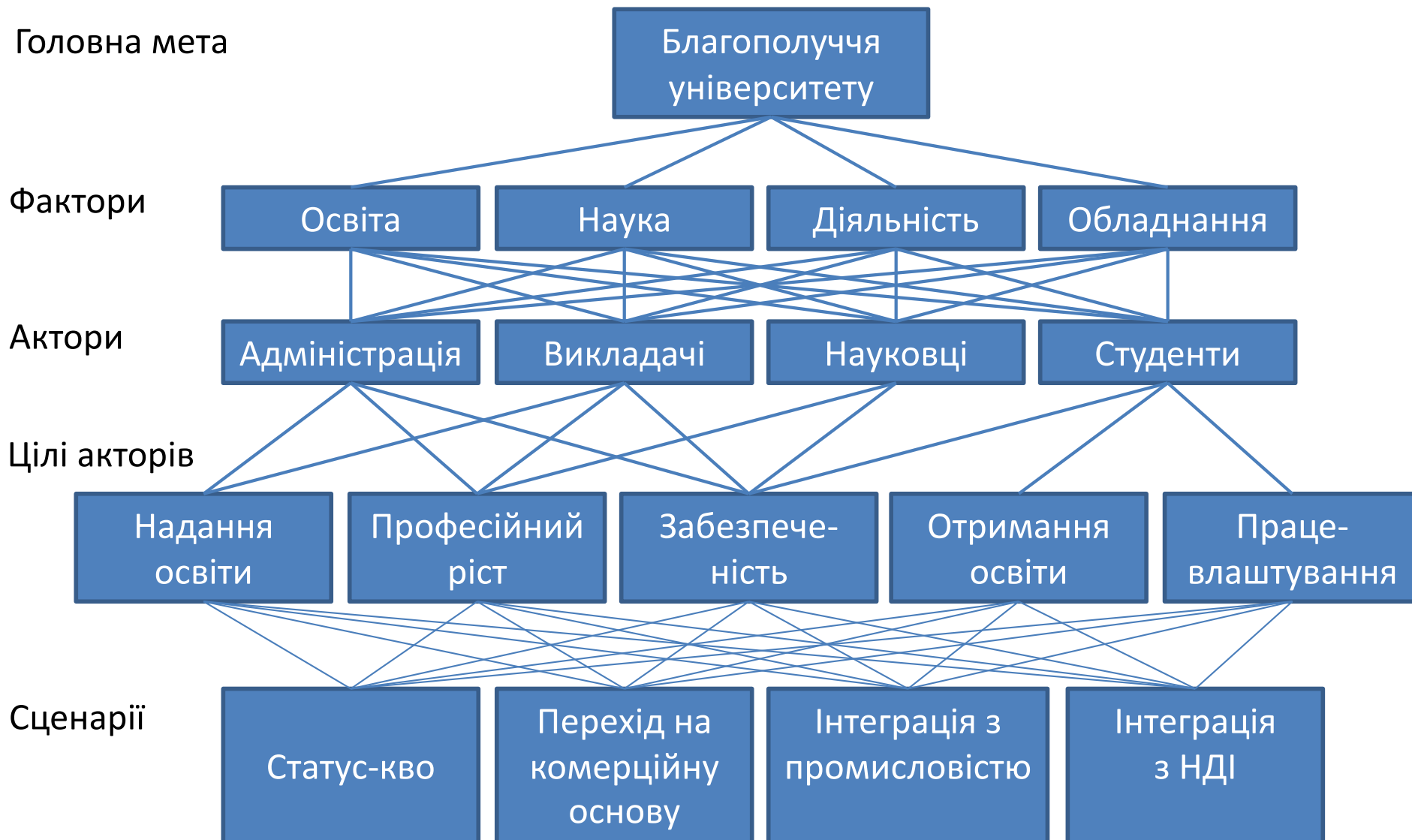
Приклади ієрархій



A – головна мета

C – альтернативи

Приклади ієрархій



Задача оцінювання майбутнього транспортної системи м. Києва

Майбутнє транспортної системи м. Києва

Актори	Фактори		
	Економічний	Соціальний	Екологічний
Цілі акторів	КМДА	Бізнес	Населення
	<ul style="list-style-type: none">• Зменшення заторів• Збільшення провізної спроможності ТС• Покращення екологічної ситуації• Зменшення обсягів фінансування ТС	<ul style="list-style-type: none">• Збільшення прибутків• Мінімізація ризиків• Зменшення витрат через простой і перепробіг• Зменшення енергетичних витрат	<ul style="list-style-type: none">• Безпека• Екологічна ситуація• Швидкість перевезення• Комфорт перевезення• Охоплення всього міста• Низькі ціни на проїзд

Задача оцінювання майбутнього транспортної системи м. Києва

Нижній рівень ієрархії – проекти (альтернативи)

Розширення
мережі доріг

Розв'язки,
реконструкція
площ

Реконструкція,
будівництво
мостів

Впровадження
АСКДР

Покращення
екологічності
двигунів

Обмеження
руху
автомобілів

Реконструкція
громадського
транспорт

Аксиоми МАІ

Однорідність

- Елементи, які порівнюються, не повинні відрізнятись більше, ніж на порядок

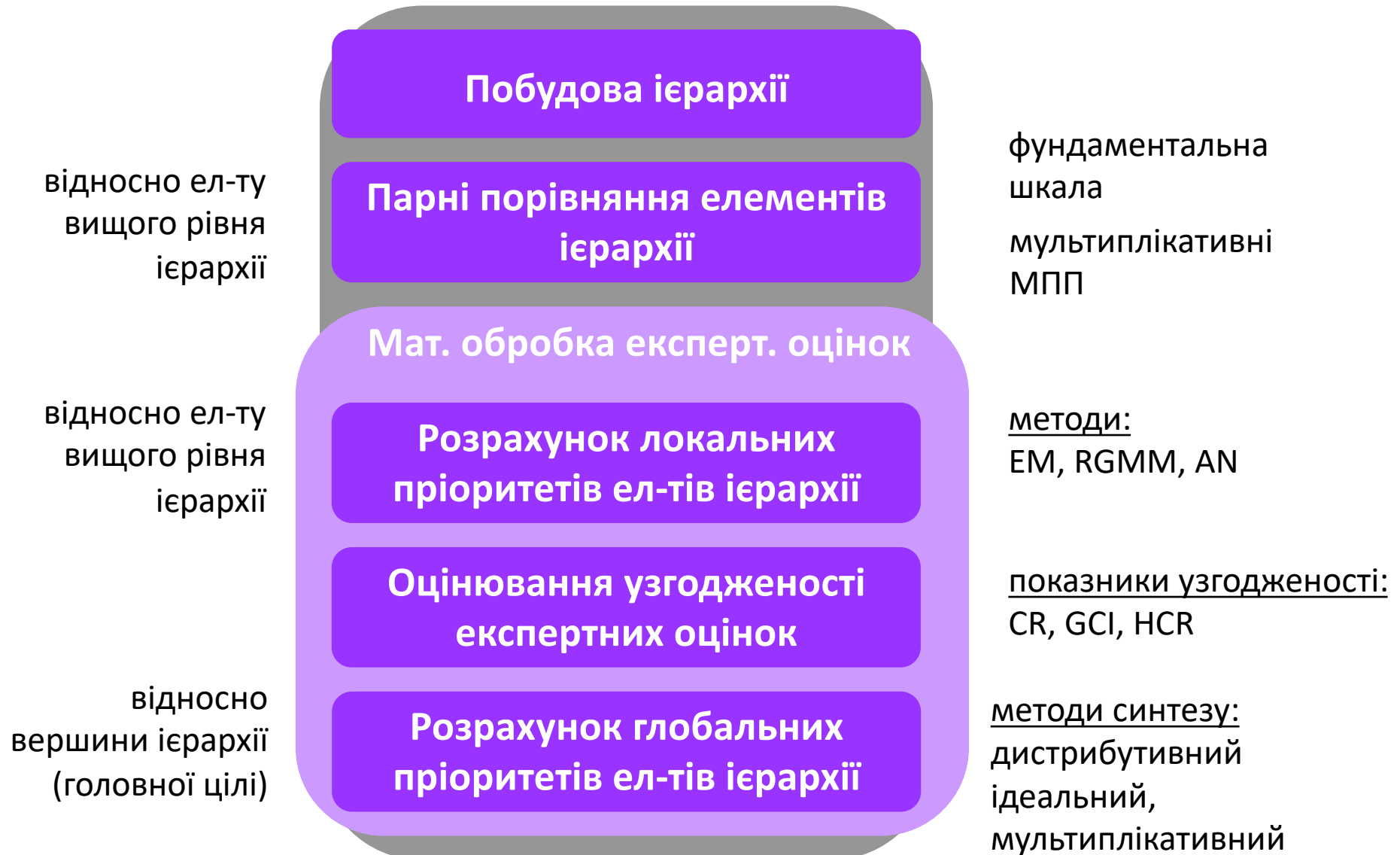
Оберненість (взаємність)

- Оборненість симетричних парних порівнянь відносно батьківського елемента

Одностороння залежність елементів рівнів ієрархії

- Не повинно існувати циклів

Етапи МАІ



Локальні і глобальні ваги

Означення. Локальна вага – вага елемента ієрархії відносно елементу сусіднього вищого рівня ієрархії.

Розраховується з МПП методами EM, RGMM та ін.

Означення. Глобальна вага – вага елемента ієрархії відносно вершини ієрархії (в більшості випадків це головна ціль прийняття рішення).

Розраховується за локальними вагами методом ієрархічного синтезу.

Постановка задачі розрахунку глобальних ваг альтернатив

Дано:

- $A = \{A_i \mid i = \overline{1, n}\}$ – множина альтернатив
- $C = \{C_j \mid j = \overline{1, m}\}$ – множина критеріїв
- $V = \{v_{ij} \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ – локальні ваги альтернатив
відносно критеріїв, ненормовані
- $w^C = \{w_j^C \mid j = \overline{1, m}\}$ – ваги критеріїв: $\sum_{j=1}^m w_j^C = 1$

Потрібно:

- $w^{glob} = \{w_i^{glob} \mid i = \overline{1, n}\}$ – глобальні ваги альтернатив,
нормовані

Дистрибутивний синтез

$$w_i^{glob} = \sum_{j=1}^m w_j^C \cdot r_{ij} \quad i = \overline{1, n}$$

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{k=1}^n v_{kj}} \quad \sum_{i=1}^n r_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i^{glob} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_j^C \cdot r_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n w_j^C \cdot r_{ij} = \sum_{j=1}^m w_j^C \sum_{i=1}^n r_{ij} = \sum_{j=1}^m w_j^C = 1$$

Ідеальний синтез

$$v_i^{glob} = \sum_{j=1}^m w_j^C \cdot r_{ij} \quad i = \overline{1, n}$$

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\max_{k=1, \dots, n} v_{kj}} \quad j = \overline{1, m}$$

$$w_i^{glob} = \frac{v_i^{glob}}{\sum_{k=1}^n v_k^{glob}} \quad i = \overline{1, n}$$

Мультиплікативний синтез

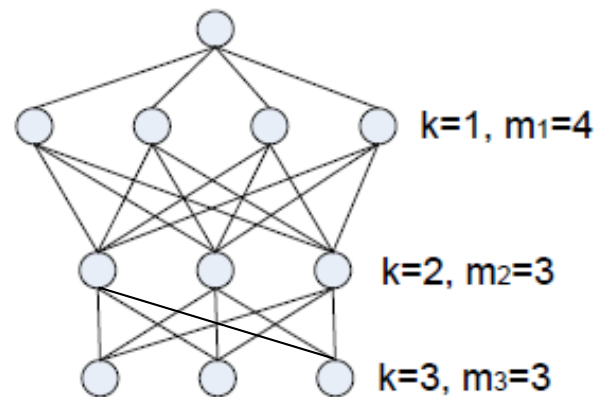
$$v_i^{glob} = \prod_{j=1}^m (v_{ij})^{w_j^C} \quad i = \overline{1, n}$$

$$w_i^{glob} = \frac{v_i^{glob}}{\sum_{k=1}^n v_k^{glob}} \quad i = \overline{1, n}$$

Ієрархії з чотирма і більше рівнями

В загальному випадку ієрархія складається з p рівнів,
 $p \geq 2$.

Тоді для розрахунку глобальних ваг елементів розглянуті вище методи ієрархічного синтезу (агрегування) використовуються рекурсивно на кожному рівні ієрархії.



Оцінювання сценаріїв розвитку компанії

За допомогою методу аналізу ієрархій
оцінюються можливі шляхи розвитку
компанії.

Головна мета – благополуччя компанії.

Побудуємо трьохрівневу ієрархію.

Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: критерії

Дохід

- Поточні грошові надходження від продажу товарів

Витрати

- Зменшення виробничих та інших витрат

Конкурентоспроможність

- Привабливість продукції порівняно з іншими компаніями на ринку

Перспективи

- Здатність компанії до довгострокового розвитку і процвітання

Репутація

- Довіра покупців і привабливість бренду

Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: сценарії

Сценарій 1: “Масове виробництво”

- Збільшення обсягів виробництва товарів

Сценарій 2: “Нові технології”

- Розробка вдосконалених варіантів товару

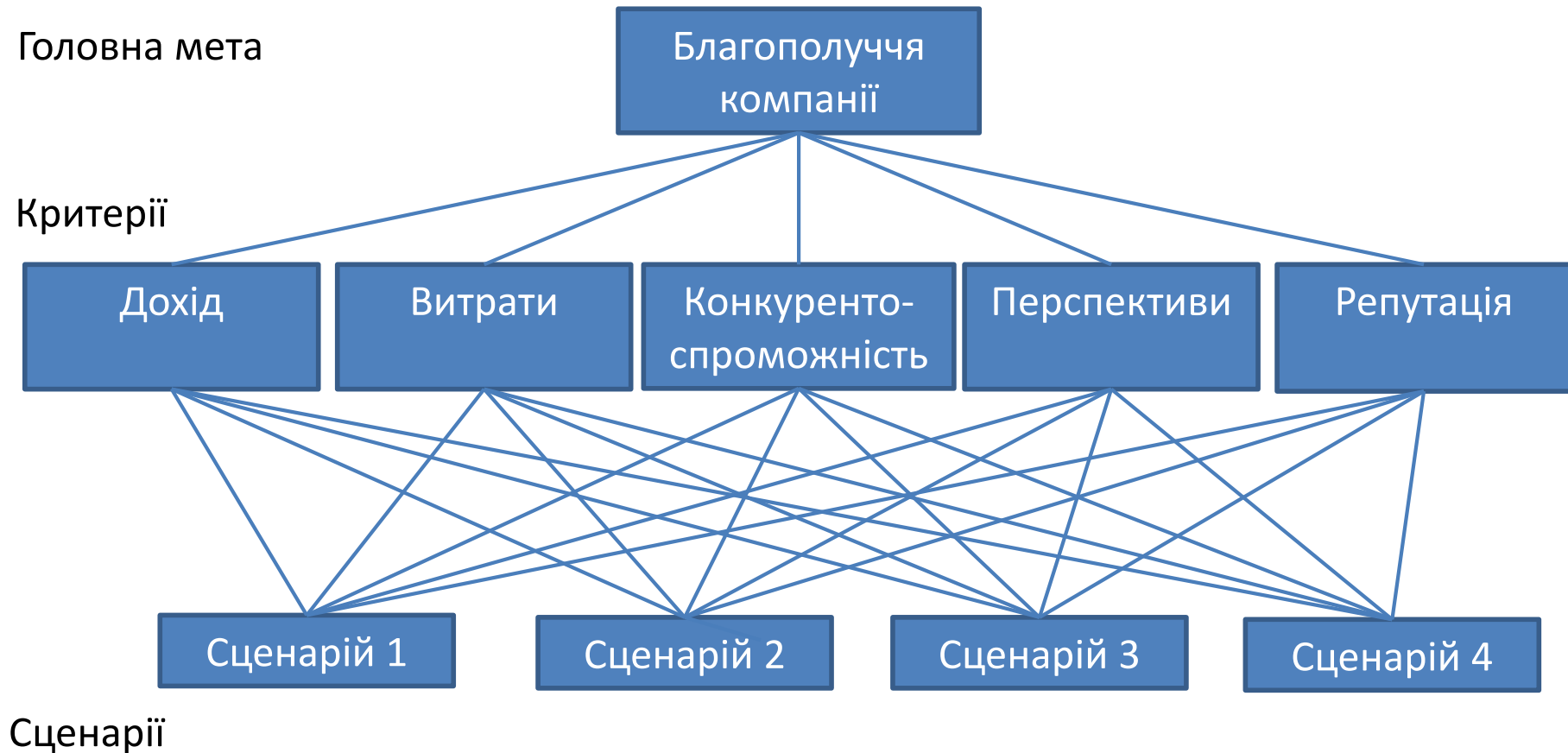
Сценарій 3: “Дешево й сердито”

- Економія на виробництві для забезпечення максимально низької собівартості

Сценарій 4: “Елітний бренд”

- Орієнтація на покупців вищого класу

Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: ієрархія



Етапи МАІ



Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: опитування

Питання експерту:

*Який критерій важливіший: «Дохід» чи «Мінімізація витрат» для благополуччя компанії?
Яким є ступінь переваги?*

Варіанти відповіді:

- обидва критерії в рівній мірі впливають на досягнення головної мети (однаково важливі (1))
- збільшення доходу є важливішим за мінімізацію витрат (напр., слабка перевага (3))
- мінімізація витрат важливіша за збільшення доходу (напр., слабка перевага (3))

Мультиплікативна МПП

	Прибуток	Витрати	Конк.-ть	Персп.	Реп.
Дохід	1	1 (3)			
Витрати	1 (1/3)	1			
Конкурентозд.			1		
Перспективи				1	
Репутація					1

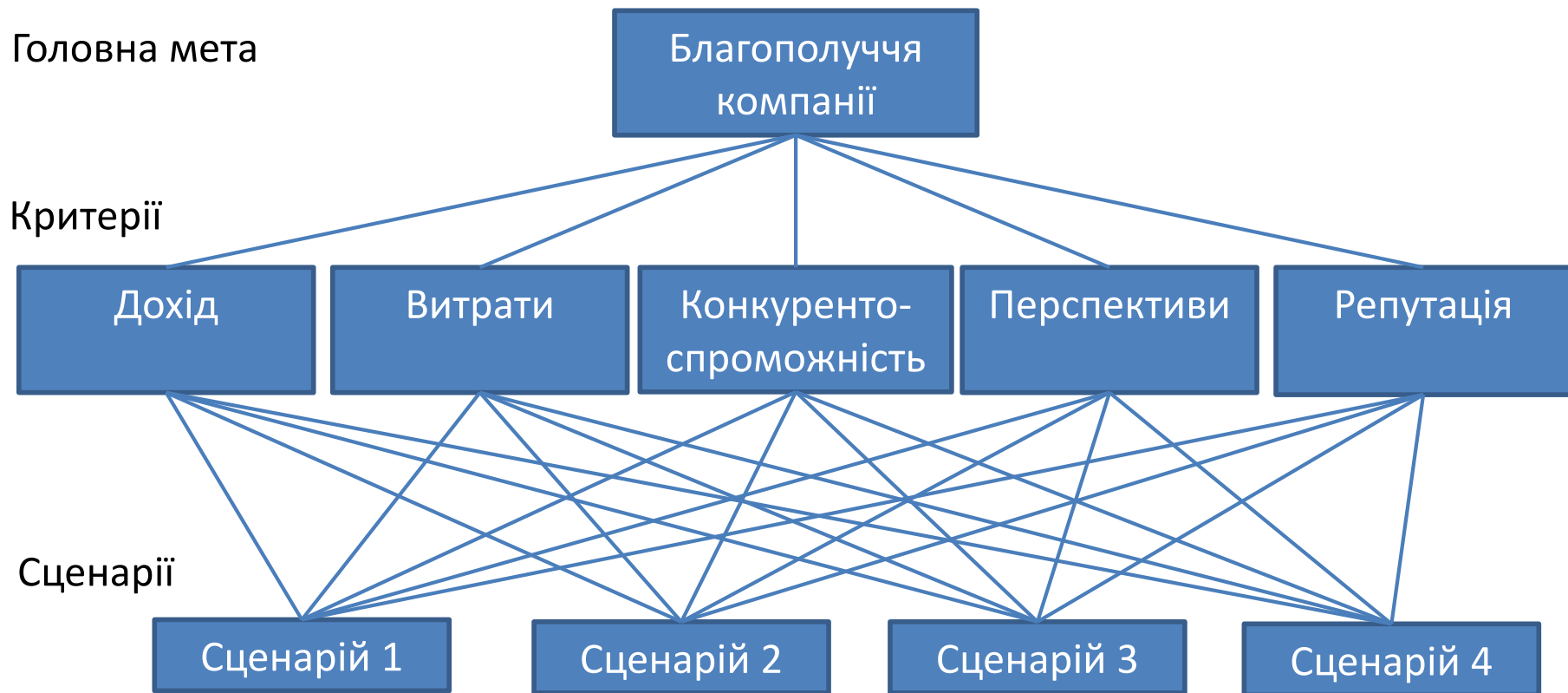
$n=5$

$n(n-1)/2 = 10$ парних порівнянь

Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: опитування

	Дохід	Витрати	Конкурентоздатність	Перспективи	Репутація
Дохід	1	2	1	1/2	3
Витрати	1/2	1	1/2	1/3	2
Конкурентоздатність	1	2	1	1	3
Перспективи	2	3	1	1	4
Репутація	1/3	1/2	1/3	1/4	1

Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: ієрархія



Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: опитування

Відносно критерію “Дохід”:

	Сцен. 1	Сцен. 2	Сцен. 3	Сцен. 4
Сценарій 1	1	3	2	1
Сценарій 2	1/3	1	1/2	1/2
Сценарій 3	1/2	2	1	1/2
Сценарій 4	1	2	2	1

Відносно критерію “Витрати”:

	Сцен. 1	Сцен. 2	Сцен. 3	Сцен. 4
Сценарій 1	1	3	1/3	1/2
Сценарій 2	1/3	1	1/8	1/5
Сценарій 3	3	8	1	3
Сценарій 4	2	5	1/3	1

“Конкурентоспроможність”:

	Сцен. 1	Сцен. 2	Сцен. 3	Сцен. 4
Сцен. 1	1	1/3	2	1
Сцен. 2	3	1	6	4
Сцен. 3	1/2	1/6	1	1/3
Сцен. 4	1	1/4	3	1

“Перспективи”:

	Сцен. 1	Сцен. 2	Сцен. 3	Сцен. 4
Сцен. 1	1	1/4	2	1/2
Сцен. 2	4	1	7	2
Сцен. 3	1/2	1/7	1	1/3
Сцен. 4	2	1/2	3	1

“Репутація”:

	Сцен. 1	Сцен. 2	Сцен. 3	Сцен. 4
Сцен. 1	1	1/2	1	1/2
Сцен. 2	2	1	3	2
Сцен. 3	1	1/3	1	1/3
Сцен. 4	2	1/2	3	1

Етапи МАІ



Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: локальні ваги

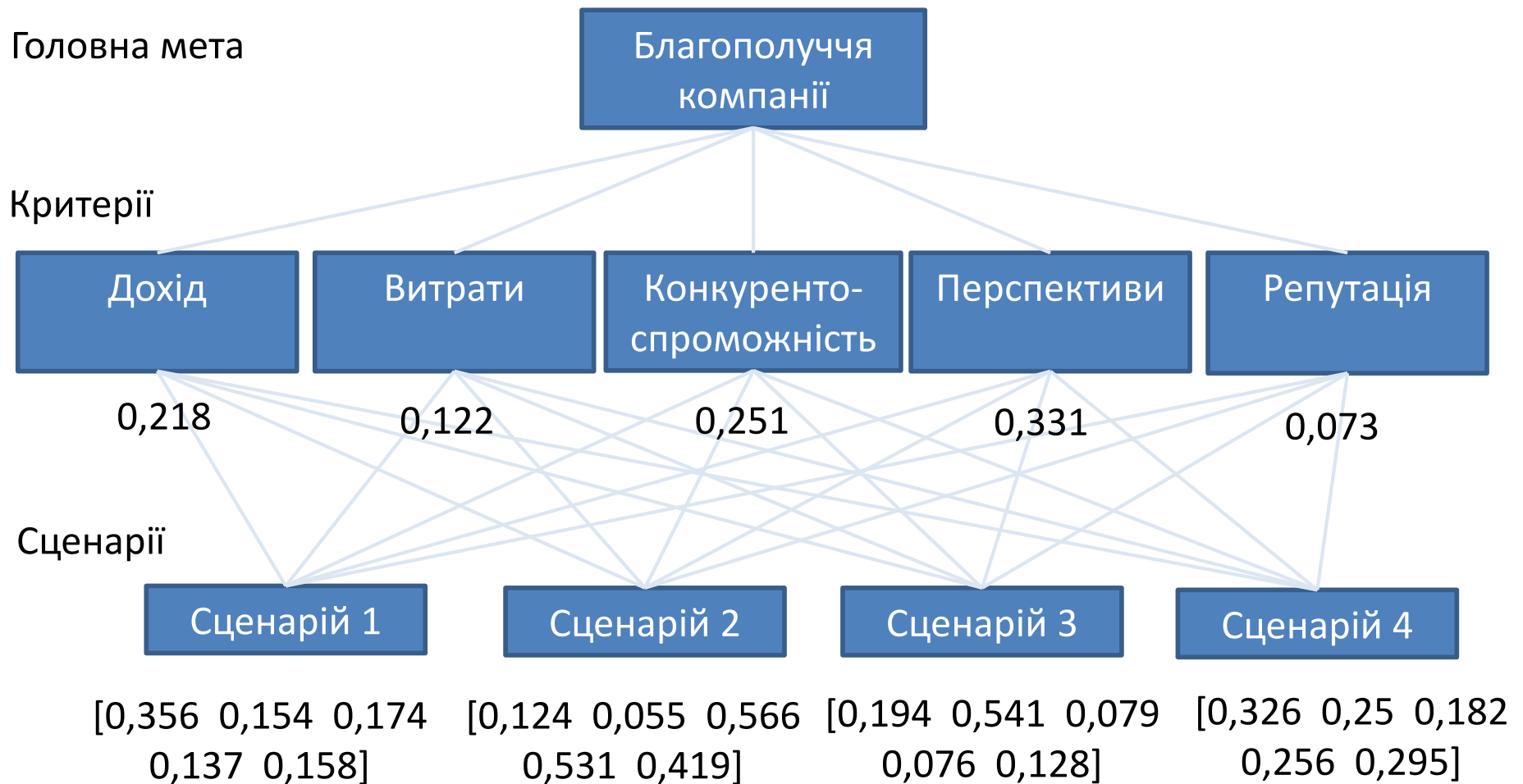
	Дохід	Витрати	Конкуренто-здатність	Перспективи	Репутація	Ваги методом ЕМ
Дохід	1	2	1	1/2	3	0,218
Витрати	1/2	1	1/2	1/3	2	0,122
Конкуренто-здатність	1	2	1	1	3	0,251
Перспективи	2	3	1	1	4	0,331
Репутація	1/3	1/2	1/3	1/4	1	0,073

CR=0,012

Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: локальні ваги

	Дохід	Витрати	Конкуренто- здатність	Перспективи	Репутація
Сценарій 1	0,356	0,154	0,174	0,137	0,158
Сценарій 2	0,124	0,055	0,566	0,531	0,419
Сценарій 3	0,194	0,541	0,079	0,076	0,128
Сценарій 4	0,326	0,25	0,182	0,256	0,295
CR	0,017	0,022	0,017	0,003	0,03

Оцінювання сценаріїв розвитку компанії: локальні ваги



Етапи МАІ



Дистрибутивний синтез

$$w_i^{glob} = \sum_{j=1}^m w_j^C \cdot r_{ij} \quad i = \overline{1, n}$$

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{k=1}^n v_{kj}} \quad \sum_{i=1}^n r_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, m}$$

$$w_1^{glob} = 0,218 \cdot 0,356 + 0,122 \cdot 0,154 + 0,251 \cdot 0,174 + \\ + 0,331 \cdot 0,137 + 0,073 \cdot 0,158 = 0,197$$

Ідеальний синтез

$$v_i^{glob} = \sum_{j=1}^m w_j^C \cdot r_{ij} \quad i = \overline{1, n} \quad r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\max_{k=1, \dots, n} v_{kj}} \quad j = \overline{1, m}$$

$$w_i^{glob} = \frac{v_i^{glob}}{\sum_{k=1}^n v_k^{glob}} \quad i = \overline{1, n}$$

$$r_{11} = \frac{0,356}{0,356} = 1 \quad r_{12} = \frac{0,154}{0,541} = 0,285 \quad r_{13} = \frac{0,174}{0,566} = 0,307$$

$$r_{14} = \frac{0,137}{0,531} = 0,258 \quad r_{15} = \frac{0,158}{0,419} = 0,377$$

$$v_1^{glob} = 0,218 \cdot 1 + 0,122 \cdot 0,285 + 0,251 \cdot 0,307 + \\ + 0,331 \cdot 0,258 + 0,073 \cdot 0,377 = 0,443$$

Мультиплікативний синтез

$$v_i^{glob} = \prod_{j=1}^m (v_{ij})^{w_j^C} \quad i = \overline{1, n} \quad w_i^{glob} = \frac{v_i^{glob}}{\sum_{k=1}^n v_k^{glob}} \quad i = \overline{1, n}$$

$$v_1^{glob} = 0,356^{0,218} \cdot 0,154^{0,122} \cdot 0,174^{0,251} \cdot 0,137^{0,331} \cdot 0,158^{0,073} = 0,185$$

$$v_2^{glob} = 0,294 \quad v_3^{glob} = 0,126 \quad v_4^{glob} = 0,251$$

$$w_1^{glob} = 0,216 \quad w_2^{glob} = 0,343 \quad w_3^{glob} = 0,147 \quad w_4^{glob} = 0,293$$

Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВБВПА)

Проводиться декомпозиція множини альтернатив і задача розв'язується окремо для кожної пари альтернатив.

$$\frac{N(N-1)}{2} \text{ підзадач}$$

З кожної підзадачі отримуємо пару ваг (w_i^{ik}, w_k^{ik}) одним із методів синтезу.

Будуємо матрицю $P = \{p_{ij}\}, p_{ij} = \frac{w_i^{(ij)}}{w_j^{(ij)}}; i, j \in \overline{1, N}$

Матриця P аналогічна матриці парних порівнянь, з неї знаходимо ваги альтернатив.

Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВБВПА)

Для альтернатив 1, 2:

$$r_{11} = \frac{0,356}{0,356 + 0,124} = 0,742 \quad r_{12} = 0,737 \quad r_{13} = 0,235 \quad r_{14} = 0,205 \quad r_{15} = 0,274$$

$$r_{21} = \frac{0,124}{0,356 + 0,124} = 0,258 \quad r_{22} = 0,263 \quad r_{23} = 0,765 \quad r_{24} = 0,795 \quad r_{25} = 0,726$$

$$w_1^{(12)} = 0,218 \cdot 0,742 + 0,122 \cdot 0,737 + 0,251 \cdot 0,235 + \\ + 0,331 \cdot 0,205 + 0,073 \cdot 0,274 = 0,399$$

$$w_2^{(12)} = 0,601$$

$$p_{12} = \frac{0,399}{0,601} = 0,664 \quad p_{21} = \frac{0,601}{0,399} = 1,506$$

Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВБВПА)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0,664 & 1,463 & 0,736 \\ 1,506 & 1 & 1,959 & 1,165 \\ 0,684 & 0,51 & 1 & 0,513 \\ 1,359 & 0,858 & 1,949 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{glob} = 0,221 \quad w_2^{glob} = 0,327 \quad w_3^{glob} = 0,156 \quad w_4^{glob} = 0,295$$

Порівняння методів

	Дистрибутивний синтез	Ідеальний синтез	Мультиплікативний синтез	ГВБВПА з дистрибутивним
Сценарій 1	0,197	0,213	0,216	0,221
Сценарій 2	0,382	0,357	0,343	0,327
Сценарій 3	0,163	0,166	0,147	0,156
Сценарій 4	0,254	0,263	0,293	0,295

Реверс рангів в МАІ

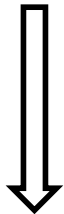
- **Реверс рангів** – це зміна рангів альтернатив при їх оцінюванні за багатьма критеріями при додаванні/вилученні альтернативи.

Множина критеріїв, ваги критеріїв і оцінки «старих» альтернатив за критеріями не змінюються.

Види реверсу рангів

1. Зміна знаку переваги між «старими» альтернативами

$\dots \succ A_i \succ A_k \succ \dots$



Після додавання нової альтернативи

$\dots \succ A_k \succ A_i \succ \dots$

Реверс рангів також має місце, якщо ваги альтернатив були рівні в межах практичної точності, а після додавання альтернативи стали відрізнятися.

Види реверсу рангів

Математичний опис появи реверсу рангів:

$$\Delta v_{ik}^{glob} \cdot \Delta \tilde{v}_{ik}^{glob} < 0$$

або

$$((\Delta v_{ik}^{glob} = 0) \wedge (\Delta \tilde{v}_{ik}^{glob} \neq 0)) \vee ((\Delta v_{ik}^{glob} \neq 0) \wedge (\Delta \tilde{v}_{ik}^{glob} = 0))$$

$$\Delta v_{ik}^{glob} = v_i^{glob} - v_k^{glob}$$

\tilde{v}_{ik}^{glob} – ваги після появи n+1-ї альтернативи

$$(\Delta v_{ik}^{glob} = 0) \Leftrightarrow |v_i^{glob} - v_k^{glob}| < \varepsilon$$

Види реверсу рангів

2. Зміна оптимальної “старої” альтернативи при додаванні/вилученні альтернативи
3. Зміна рангів альтернатив при їх попарному розгляді в порівнянні з розглядом всіх альтернатив одночасно

Приклад реверсу рангів

- Два рівноважливих критерії
- Три альтернативи

$$D_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 3/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 \end{pmatrix} \quad D_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Альтернатива	Вага			
	Дистрибут.	Ідеальний	ГВБВПА	Мультиплік.
A ₁	0,3887	0,3712	0,3372	0,3418
A ₂	0,3484	0,3636	0,3219	0,3164
A ₃	0,2629	0,2652	0,3409	0,3418

Приклад реверсу рангів

Додається четверта альтернатива:

$$D_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 1/7 & 1 & 3/7 & 2/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 7/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \quad D_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 & 3/2 \\ 6 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1/2 & 1 & 9/2 \\ 2/3 & 1/9 & 2/9 & 1 \end{pmatrix}$$

Альтернатива	Вага			
	Дистрибут.	Ідеальний	ГВБВПА	Мультиплік.
A ₁	0,2999	0,3108	0,2847	0,2855
A ₂	0,3174	0,3044	0,2550	0,2643
A ₃	0,2250	0,2220	0,2797	0,2855
A ₄	0,1577	0,1628	0,1806	0,1648

Транзитивність ранжувань

Ефективний метод багатокритеріального прийняття рішень має задовольняти властивості транзитивності.

$$A_1 \succ A_2, A_2 \succ A_3 \Rightarrow A_1 \succ A_3$$

Ранжування, отримані методами **дистрибутивного** та **ідеального** синтезу з узгоджених МПП не завжди задовольняють властивості транзитивності.

Ранжування, отримані методом **мультиплікативного** синтезу з узгоджених МПП задовольняють властивості транзитивності.