

# Основи системного аналізу

Методи багатокритеріального  
оцінювання альтернатив.  
ELECTRE, TOPSIS

Савченко Ілля Олександрович  
ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

# Методи PROMETHEE і ELECTRE

- PROMETHEE: Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluation
- ELECTRE: фр. ELimination Et Choix Traduisant la Realite — виключення і вибір, що відображають реальність

Розв'язання задач:

- вибору
- ранжування

# Постановка задачі

## Дано:

- $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$  – множина альтернатив рішень
- $C = \{c_j \mid j = 1, \dots, m\}$  – множина критеріїв
- $V = (v_j(a_i))$  – оцінки альтернатив за критеріями
- $w_j^C$  – вага  $j$ -го критерію  $\sum_{j=1}^m w_j^C = 1$

## Знайти:

- ранжування альтернатив
- множину “найкращих” альтернатив

# Метод ELECTRE I: індекс згоди

Гіпотеза:  $a_k$  переважає  $a_l$  за всіма критеріями.

$$c(a_k, a_l) = \frac{\sum_{j \in C^+ \cup C^0} w_j}{\sum_j w_j}$$
$$\begin{aligned} C^+ &: a_k \succ a_l \\ C^0 &: a_k \sim a_l \\ C^- &: a_k \prec a_l \end{aligned}$$

$$\sum_j w_j = 1 \quad \Rightarrow \quad c(a_k, a_l) = \sum_{j \in C^+ \cup C^0} w_j$$

# Метод ELECTRE I: індекс незгоди

$$d(a_k, a_l) = \max_{j \in C^-} \frac{v_j(a_l) - v_j(a_k)}{L_j} \quad d(a_k, a_l) \in [0; 1]$$

$L_j$  – довжина шкали  $j$ -го критерію

Індекс незгоди з гіпотезою про строгу перевагу визначається на основі найбільш «суперечливого» критерію – за яким альтернатива  $a_l$  в найбільшій степені переважає  $a_k$ .

# Метод ELECTRE I: пороги згоди і незгоди

Задається пара значень  $c_1, d_1$ .

Якщо  $(c(a_k, a_l) \geq c_1) \wedge (d(a_k, a_l) \leq d_1)$  <sup>ТО</sup>  $a_k \succ a_l$   
В іншому випадку – альтернативи  
непорівнювані.

Якщо немає можливості визначити найкращу  
альтернативу, значення порогів послаблюються,  
поки така можливість не з'явиться.

# Метод ELECTRE I: приклад

5 альтернатив, 7 критеріїв у шкалі [1; 5]

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$
$a_1$	1	2	1	5	2	2	4
$a_2$	3	5	3	5	3	3	3
$a_3$	3	5	3	5	3	2	2
$a_4$	1	2	2	5	1	1	1
$a_5$	1	1	3	5	4	1	5

Ваги критеріїв:

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$
$w_j$	0,078	0,118	0,157	0,314	0,235	0,039	0,059

# Метод ELECTRE I: приклад

Індекси згоди:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	1	0,373	0,412	0,843	0,549
$a_2$	0,941	1	1	1	0,706
$a_3$	0,941	0,902	1	1	0,706
$a_4$	0,667	0,314	0,314	1	0,549
$a_5$	0,843	0,765	0,765	0,882	1



# Метод ELECTRE I: приклад

Індекси незгоди (довжина шкали  $L_j=4$ ):

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	0	0,75	0,75	0,25	0,5
$a_2$	0,25	0	0	0	0,5
$a_3$	0,5	0,25	0	0	0,75
$a_4$	0,75	0,75	0,75	0	1
$a_5$	0,25	1	1	0,25	0

# Метод ELECTRE I: приклад

Задаємо значення порогів  $c_1=0,8$ ,  $d_1=0,25$ .

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	1	0,373	0,412	0,843	0,549
$a_2$	0,941	1	1	1	0,706
$a_3$	0,941	0,902	1	1	0,706
$a_4$	0,667	0,314	0,314	1	0,549
$a_5$	0,843	0,765	0,765	0,882	1

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	0	0,75	0,75	0,25	0,5
$a_2$	0,25	0	0	0	0,5
$a_3$	0,5	0,25	0	0	0,75
$a_4$	0,75	0,75	0,75	0	1
$a_5$	0,25	1	1	0,25	0

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	—			Р	
$a_2$	Р	—	Р	Р	
$a_3$		Р	—	Р	
$a_4$				—	
$a_5$	Р			Р	—

Домінованою є альтернатива  $a_4$ .  
Інші складають перше ядро найкращих альтернатив.

# Метод ELECTRE I: приклад

Задаємо більш слабкі значення порогів  $c_1=0,75$ ,  $d_1=0,5$ .

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	1	0,373	0,412	0,843	0,549
$a_2$	0,941	1	1	1	0,706
$a_3$	0,941	0,902	1	1	0,706
$a_4$	0,667	0,314	0,314	1	0,549
$a_5$	0,843	0,765	0,765	0,882	1

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	0	0,75	0,75	0,25	0,5
$a_2$	0,25	0	0	0	0,5
$a_3$	0,5	0,25	0	0	0,75
$a_4$	0,75	0,75	0,75	0	1
$a_5$	0,25	1	1	0,25	0

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	—			P	
$a_2$	P	—	P	P	
$a_3$	P	P	—	P	
$a_4$				—	
$a_5$	P			P	—

Домінованими є альтернатива  $a_1$ ,  $a_4$ .  
Інші складають друге ядро найкращих альтернатив.

# Метод ELECTRE I: приклад

Щоб розрізнити альтернативи  $a_2, a_3, a_5$ , значення порогів  $c_1=0,75, d_1=1$ .

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	1	0,373	0,412	0,843	0,549
$a_2$	0,941	1	1	1	0,706
$a_3$	0,941	0,902	1	1	0,706
$a_4$	0,667	0,314	0,314	1	0,549
$a_5$	0,843	0,765	0,765	0,882	1

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	0	0,75	0,75	0,25	0,5
$a_2$	0,25	0	0	0	0,5
$a_3$	0,5	0,25	0	0	0,75
$a_4$	0,75	0,75	0,75	0	1
$a_5$	0,25	1	1	0,25	0

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	—			P	
$a_2$	P	—	P	P	
$a_3$	P	P	—	P	
$a_4$				—	
$a_5$	P	P	P	P	—

Найкращою є альтернатива  $a_5$ .

# Метод ELECTRE III

Відношення:  $a_k$  не гірше за  $a_l$  за критерієм  $c_j$

$$a_k S_j a_l$$

$c_j$  знаходиться в згоді з відношенням  $a_k S_j a_l$ ,

якщо:  $v_j(a_l) - v_j(a_k) \leq q_j$

$c_j$  знаходиться в незгоді з відношенням  $a_k S_j a_l$ ,

якщо:  $v_j(a_l) - v_j(a_k) \geq p_j$

# Метод ELECTRE III: індекс згоди

- $a_k$  не гірше за  $a_l$  за критерієм  $c_j$

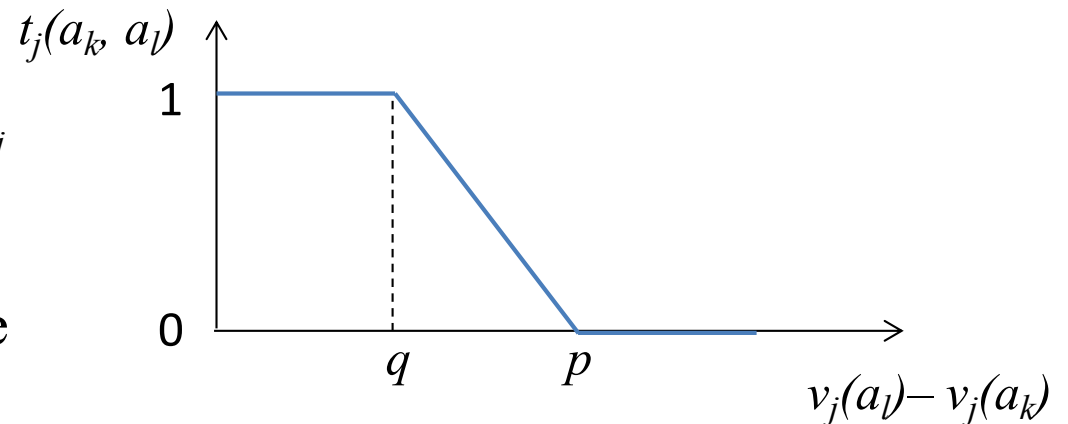
$t_j(a_k, a_l)$  – індекс згоди

Пороги  $p_j, q_j$  в загальному вигляді є лінійними функціями від оцінок  $v_j(a_k)$

$$t_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0, & v_j(a_l) \geq v_j(a_k) + p_j(v_j(a_k)) \\ 1, & v_j(a_l) \leq v_j(a_k) + q_j(v_j(a_k)) \\ \frac{p_j(v_j(a_k)) - (v_j(a_l) - v_j(a_k))}{p_j(v_j(a_k)) - q_j(v_j(a_k))}, & \text{інакше} \end{cases}$$

Для порогів – констант:

$$t_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0, & v_j(a_l) - v_j(a_k) \geq p_j \\ 1, & v_j(a_l) - v_j(a_k) \leq q_j \\ \frac{p_j - (v_j(a_l) - v_j(a_k))}{p_j - q_j}, & \text{інакше} \end{cases}$$



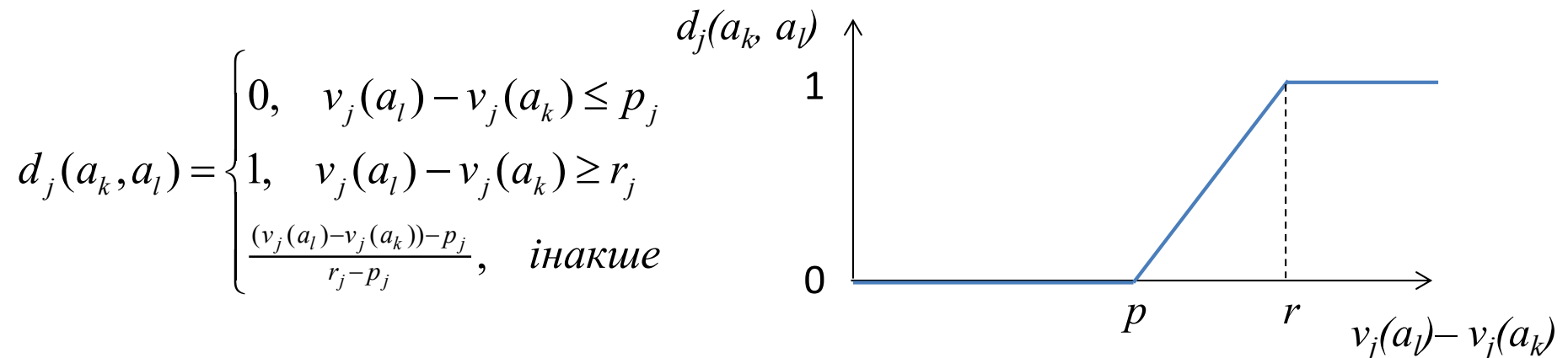
# Метод ELECTRE III: індекс незгоди

- $a_k$  гірше за  $a_l$  за критерієм  $c_j$

$d_j(a_k, a_l)$  – індекс незгоди

$$d_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0, & v_j(a_l) \leq v_j(a_k) + p_j(v_j(a_k)) \\ 1, & v_j(a_l) \geq v_j(a_k) + r_j(v_j(a_k)) \\ \frac{(v_j(a_l) - v_j(a_k)) - p_j(v_j(a_k))}{r_j(v_j(a_k)) - p_j(v_j(a_k))}, & \text{інакше} \end{cases}$$

$r_j(v_j(a_k))$  – поріг вето



# Метод ELECTRE III: поріг вето

- Відношення  $a_k S_j a_l$  не справджується, якщо

$$v_j(a_l) - v_j(a_k) \geq r_j$$

$r_j \geq p_j$  – поріг вето

Призначення: вилучити з розгляду альтернативу з низькою оцінкою хоча б за одним з критеріїв, незалежно від її оцінок за іншими критеріями.

Показники важливості критерію:

- Вага  $w_j^C$
- Близькість  $r_j$  до  $p_j$



# Метод ELECTRE III: агрегований індекс згоди

- $a_k$  не гірше за  $a_l$  за всіма критеріями

$$T(a_k, a_l) = \sum_{j=1}^m w_j^c t_j(a_k, a_l)$$

Розраховується для всіх пар альтернатив.

# Метод ELECTRE III: рівень переваги

- Шукається множина  $J(a_k, a_l)$  критеріїв, для яких індекс незгоди більший за агрегований індекс згоди:  $d_j(a_k, a_l) > T(a_k, a_l)$
- Розраховуються ступені переваги  $a_k$  над  $a_l$

$$S(a_k, a_l) = \begin{cases} T(a_k, a_l), & \text{якщо } J(a_k, a_l) = \emptyset \\ T(a_k, a_l) \prod_{j \in J(a_k, a_l)} \frac{1 - d_j(a_k, a_l)}{1 - T(a_k, a_l)}, & \text{інакше} \end{cases}$$

# Метод ELECTRE III: ранжування

Ранжування альтернатив здійснюється за величинами вхідного і вихідного, або чистого потоків, як в методі PROMETHEE.

- Вихідний потік  $\Phi^+(a_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{l \neq k} S(a_k, a_l)$
- Вхідний потік  $\Phi^-(a_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{l \neq k} S(a_l, a_k)$
- Чистий потік  $\Phi(a_k) = \Phi^+(a_k) - \Phi^-(a_k)$

# Метод ELECTRE III: приклад

	$c_1$	$c_2$	$c_3 (min)$	$c_4$
$a_1$	11200	870	12,3	0
$a_2$	8790	888	10,4	1
$a_3$	5700	912	9	1,5
$a_4$	6200	840	9,3	1
$a_5$	8300	930	10,6	0,5
$a_6$	10000	850	10,7	0

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$W$	0,2	0,3	0,1	0,4
$Q$	1000	3%	10%	0
$P$	2000	6%	20%	1

Порогу вето не введено.

# Метод ELECTRE III: приклад

Індекси згоди за першим критерієм для пар альтернатив:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	–	1	1	1	1	1
$a_2$	0	–	1	1	1	0,79
$a_3$	0	0	–	1	0	0
$a_4$	0	0	1	–	0	0
$a_5$	0	1	1	1	–	0,3
$a_6$	0,8	1	1	1	1	–

Оскільки порогу вето немає, індекси незгоди дорівнюють нулю.

# Метод ELECTRE III: приклад

Індекси згоди за другим критерієм для пар альтернатив:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	—	1	0,391	1	0	1
$a_2$	1	—	1	1	0,423	1
$a_3$	1	1	—	1	1	1
$a_4$	0,81	0,095	0	—	0	1
$a_5$	1	1	1	1	—	1
$a_6$	1	0,51	0	1	0	—

$$t_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0, & v_j(a_l) \geq v_j(a_k) + p_j \cdot v_j(a_k) \\ 1, & v_j(a_l) \leq v_j(a_k) + q_j \cdot v_j(a_k) \\ \frac{p_j \cdot v_j(a_k) - (v_j(a_l) - v_j(a_k))}{p_j \cdot v_j(a_k) - q_j \cdot v_j(a_k)}, & \text{інакше} \end{cases}$$

# Метод ELECTRE III: приклад

Індекси згоди за третім критерієм для пар альтернатив:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	—	0,455	0	0	0,618	0,699
$a_2$	1	—	0,654	0,942	1	1
$a_3$	1	1	—	1	1	1
$a_4$	1	1	1	—	1	1
$a_5$	1	1	0,491	0,774	—	1
$a_6$	1	1	0,411	0,692	1	—

$$t_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0, & v_j(a_l) \leq v_j(a_k) - p_j \cdot v_j(a_k) \\ 1, & v_j(a_l) \geq v_j(a_k) - q_j \cdot v_j(a_k) \\ \frac{p_j \cdot v_j(a_k) + (v_j(a_l) - v_j(a_k))}{p_j \cdot v_j(a_k) - q_j \cdot v_j(a_k)}, & \text{інакше} \end{cases}$$

# Метод ELECTRE III: приклад

Індекси згоди за четвертим критерієм для пар альтернатив:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	–	0	0	0	0,5	1
$a_2$	1	–	0,5	1	1	1
$a_3$	1	1	–	1	1	1
$a_4$	1	1	0,5	–	1	1
$a_5$	1	0,5	0	0,5	–	1
$a_6$	1	0	0	0	0,5	–



# Метод ELECTRE III: приклад

Агреговані індекси згоди для пар альтернатив:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	–	0,546	0,317	0,5	0,462	0,97
$a_2$	0,8	–	0,765	0,994	0,827	0,958
$a_3$	0,8	0,8	–	1	0,8	0,8
$a_4$	0,743	0,529	0,5	–	0,5	0,8
$a_5$	0,8	0,8	0,549	0,777	–	0,86
$a_6$	0,96	0,453	0,241	0,569	0,5	–

Без порогу вето значення ступенів переваги співпадають з агрегованими індексами згоди

# Метод ELECTRE III: приклад

Ранг	Альтернатива	Вихідний потік $\Phi^+$	Вхідний потік $\Phi^-$	Чистий потік $\Phi$
1	$a_3$	0,84	0,475	0,365
2	$a_2$	0,869	0,625	0,244
3	$a_5$	0,757	0,618	0,14
4	$a_4$	0,614	0,768	-0,154
5	$a_1$	0,559	0,821	-0,262
6	$a_6$	0,545	0,878	-0,333

# Метод ELECTRE III: приклад

Введемо для першого критерію поріг вето, рівний 4000.

	$c_1$	$c_2$	$c_3 (min)$	$c_4$
$a_1$	11200	870	12,3	0
$a_2$	8790	888	10,4	1
$a_3$	5700	912	9	1,5
$a_4$	6200	840	9,3	1
$a_5$	8300	930	10,6	0,5
$a_6$	10000	850	10,7	0

# Метод ELECTRE III: приклад

Індекси незгоди за першим критерієм для пар альтернатив:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	–	0	0	0	0	0
$a_2$	0,205 (0,8)	–	0	0	0	0
$a_3$	<b>1 (0,8)</b>	0,545 (0,8)	–	0	0,3 (0,8)	<b>1 (0,8)</b>
$a_4$	<b>1 (0,743)</b>	0,295 (0,529)	0	–	0,05 (0,5)	<b>0,9 (0,8)</b>
$a_5$	0,45 (0,8)	0	0	0	–	0
$a_6$	0	0	0	0	0	–

Індекси незгоди порівнюємо з агрегованими індексами згоди  
(наведені в дужках для ненульових значень)

# Метод ELECTRE III: приклад

Значення ступенів переваги:

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	–	0,546	0,317	0,5	0,462	0,97
$a_2$	0,8	–	0,765	0,994	0,827	0,958
$a_3$	<b>0</b>	0,8	–	1	0,8	<b>0</b>
$a_4$	<b>0</b>	0,529	0,5	–	0,5	<b>0,4</b>
$a_5$	0,8	0,8	0,549	0,777	–	0,86
$a_6$	0,96	0,453	0,241	0,569	0,5	–

$$S(a_3, a_1) = 0,8 \cdot \frac{1-1}{1-0,8} = 0 \quad S(a_4, a_6) = 0,8 \cdot \frac{1-0,9}{1-0,8} = 0,4$$

# Метод ELECTRE III: приклад

Ранг	Альтернатива	Вихідний потік $\Phi^+$	Вхідний потік $\Phi^-$	Чистий потік $\Phi$
1	$a_2$	0,869	0,626	0,243
2	$a_5$	0,757	0,618	0,139
3	$a_1$	0,559	0,512	0,047
4	$a_3$	0,52	0,474	0,046
5	$a_6$	0,545	0,638	-0,093
6	$a_4$	0,386	0,768	-0,382

# Метод TOPSIS

Technique for Preference by Similarity to the Ideal Solution

Метод ґрунтується на тому, що найкраща альтернатива повинна мати найменшу відстань до максимальних значень критерію і найбільшу – до мінімальних.

# Метод TOPSIS

1. Значення альтернатив за критеріями нормалізуються:

$$R = \left\{ r_{ij} = \frac{v_j(a_i)}{\max_i v_j(a_i)} \mid i \in [1; n], j \in [1; m] \right\}$$

2. Формується зважена нормалізована матриця:

$$T = \left\{ t_{ij} = w_j r_{ij} \mid i \in [1; n], j \in [1; m] \right\}$$



# Метод TOPSIS

3. Обчислюються відстані альтернатив до найкращих і найгірших значень критеріїв

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (t_{ij} - t_j^+)^2} \quad d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (t_{ij} - t_j^-)^2}$$

4. Розраховується схожість до ідеальної альтернативи. Чим менше  $s_i^+$  – тим краще

$$s_i^+ = \frac{d_i^+}{d_i^+ + d_i^-} \quad s_i^+ \in [0; 1]$$

# Метод TOPSIS

Значення критеріїв для альтернатив:

	$c_1$	$c_2$	$c_3 (min)$	$c_4$
$a_1$	11200	870	12,3	0
$a_2$	8790	888	10,4	1
$a_3$	5700	912	9	1,5
$a_4$	6200	840	9,3	1
$a_5$	8300	930	10,6	0,5
$a_6$	10000	850	10,7	0

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$W$	0,2	0,3	0,1	0,4

# Метод TOPSIS

## Нормована матриця

	$c_1$	$c_2$	$c_3 (min)$	$c_4$
$a_1$	1	0,935	1	0
$a_2$	0,785	0,955	0,846	0,667
$a_3$	0,509	0,981	0,732	1
$a_4$	0,554	0,903	0,756	0,667
$a_5$	0,741	1	0,862	0,333
$a_6$	0,893	0,914	0,87	0

# Метод TOPSIS

## Нормована зважена матриця

	$c_1$	$c_2$	$c_3 (min)$	$c_4$
$a_1$	0,2	0,281	0,1	0
$a_2$	0,157	0,286	0,085	0,267
$a_3$	0,102	0,294	0,073	0,4
$a_4$	0,111	0,271	0,076	0,267
$a_5$	0,148	0,3	0,086	0,133
$a_6$	0,179	0,274	0,087	0

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$W$	0,2	0,3	0,1	0,4

# Метод TOPSIS

Відстані до максимумів і мінімумів:

	$c_1$	$c_2$	$c_3 (min)$	$c_4$	$d_i^+$	$d_i^-$	$s_i^+$
$a_1$	0,2	0,281	0,1	0	0,401	0,01	0,976
$a_2$	0,157	0,286	0,085	0,267	0,141	0,075	0,653
$a_3$	0,102	0,294	0,073	0,4	0,098	0,161	0,378
$a_4$	0,111	0,271	0,076	0,267	0,163	0,072	0,693
$a_5$	0,148	0,3	0,086	0,133	0,272	0,021	0,929
$a_6$	0,179	0,274	0,087	0	0,402	0,006	0,985