

Числові ряди / Series

Основні поняття

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{Загальний член ряду}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad n\text{-на часткова сума}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{Сумма ряду}$$

$$R_n = |S - S_n| \quad \text{Абсолютна похибка}$$

Збіжність і Розбіжність

Ряд **збігається**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = S$$

Приклад ряду що **збігається**

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n, (|q| < 1)$$

Спадаюча геометрична прогресія

Ряд **розбігається**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S_n \neq S$$

Приклад ряду що **розбігається**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Гармонічний ряд (завжди розбіжний)

Знако_змінність та Ознаки збіжності таких рядів

ЗнакоПостійні

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

- 1ша ознака збіжності
- 2га ознака збіжності
- Ознака КОШІ
- Ознака ДАЛАМБЕРА
- Інтегральна ознака

ЗнакоЗмінні

$$\sum_{n=1}^{\infty} -1^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$$

1. Ознака Лейбніца

1ша ознака збіжності
Ознака Порівняння

$$\text{Порівняємо членів рядів } \sum_{n=1}^{\infty} a \text{ та } \sum_{n=1}^{\infty} b$$

За умови що $\boxed{\forall a_n \leq b_n}$ (кожен член ряду a менше або дорівнює кожному члену ряду b), тоді якщо збігається $\sum_{n=1}^{\infty} b$ буде збігається і $\sum_{n=1}^{\infty} a$, і навпаки.

2га ознака збіжності
Умова Граничної Ознаки

$$\text{Якщо існує границя } k = \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}} \text{ кінцева і відмінна}$$

від нуля границя, то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b$ одночасно сходяться або розходяться. Що може служити достатньою ознакою збіжності (якщо порівнювати з вже відомим рядом)

Ознака збіжності Коші

$$\text{Для числового ряду } \sum_{n=0}^{\infty} a \quad \text{існує границя вигляду} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = c \begin{cases} c > 1 & \text{ряд розбігається} \\ c < 1 & \text{ряд збігається} \\ c \neq 1 & \text{не відомо} \end{cases}$$

Ознака збіжності Даламбера

Для числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a$ існує границя вигляду $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c \begin{cases} c < 1 & \text{ряд збігається} \\ c > 1 & \text{ряд розбігається} \end{cases}$

Інтегральна ознака збіжності

Якщо $f(x)$ безперервна додатня монотонно спадаюча функція, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, де $a_n = f(x)$ є збіжним якщо і інтеграл $\int_{n=0}^{\infty} f(x)$ є збіжним і навпаки.

Ознака збіжності Лейбніца

використовується **ЛИШЕ ДЛЯ ЗНАКОЗМІННИХ** рядів

Знакозмінний ряд сходиться якщо абсолютні величини його членів спадають, а загальний член ряду прямує до нуля.

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$ починаючи з деякого номеру ($n > N$)

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Не відповідність ряду першій ознаці не є достатньою ознакою того що ряд не сходиться.

- | | | | | |
|---|-----------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------|
| 1 | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ | збігається | $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ | зігається абсолютно |
| 2 | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ | розбіжний, АЛЕ Ознаки Лейбніца - ВИКОНУЮТЬСЯ | $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ | збіжний умовно |

Дослідження знакозмінних рядів здійснюється за алгоритмом:

- якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0$, то ряд розбіжний за необхідною ознакою, інакше до пункта 2.
- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ збіжний то даний ряд збігається абсолютно, інакше пункт 3
- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є рядом Лейбніца то він збігається умовно.

Приклади

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} \quad \left| a_n = \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n} \right|$$

Ряд є **збіжним за першою ознакою** () - оскільки загальний член ряду менше загального загального члену $(1/2)^n$ який є з.ч. спадаючої геометричної прогресії, а вона є збіжним числовим рядом.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+3} \quad \left| a_n = \frac{1}{3n+3} \quad b_n = \frac{1}{n} \right| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{3}$$

Ряд є **розбіжним за другою ознакою збіжності** - оскільки границею від частки загального елементу нашого ряду на загальний елемент гармонічного ряду є кінцеве і відмінне від нуля число, а значить наш ряд має туж характеристику що і ряд щазгальний елемент якого ми вкористали для ділення (тобто "розбіжний").

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Ряд є збіжним за **ознакою Коші**

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}} \times \frac{n^{10}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{10} = 2$$

Ряд є розбіжним за **ознакою Даламбера**

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = 0 + \frac{1}{1} = 1$$

Ряд є збіжним за інтегральною ознакою

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} -1^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Ряд знакозмінний, шукаємо ознаки Лейбніца, обидві умови для ряду Лейбніца виконуються, але ряд за модулем є розбіжним (за порівняльною ознакою, де ми порівняємо з членом гармонічного ряду) тобто ряд є умовно збіжним.

Ряди

Геометрична прогресія

Збіжний ряд ($|q| < 1$)

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

Розбіжний ряд ($|q| > 1$)

$$S_n = a \sum_{n=0}^k q^n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Ряд Діріхле

Збіжний ряд ($|q| > 1$)

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Розбіжний ряд ($|q| \leq 1$)

$$S_n = a \sum_{n=0}^k \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$