Математичний Аналіз

Конспект лекції (без прикладів) з курсу Математичний Аналіз
студента ІСзп-71 Олега Бутузов

Границі функції

Стале число a називають границею послідовності $a = a_n$ якщо для кожного додатнього числа ϵ яким би малим воно не було існує N що всі значення a_n, в яких n виконується $|a_n - a| < \epsilon$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Номер N залежить від вибору числа ϵ. При зменшенні ϵ число N буде збільшуватись. Тобто, чим більш близьких значень a_n до a вимагати, тим ймовірніше більш далеких значення ряду доведеться розглядати.
Визначення: Послідовніть a_n називається нескінченно малою якщо гранця цієї послідовності прямує до 0, і навпаки нескінченно великою якщо границя праямує до ∞.
Теорема: Якщо послідовність a_n нескінченно мала, то $\frac{1}{a_n}$ нескінченно велика, і навпаки.

Обчислення границь методом підстановки

За цим методом ми просто **підставляємо** граничне значення.

$$\lim_{n \to 3} \frac{(x^3 + 3x)}{2x + 5} = \frac{9 + 9}{6 + 5} = \frac{18}{11} = 1$$

Підставили значення, обчислили, записали границю у відповідь. Зате на базі таких границь можемо привчитись, що перш за все потрібно підставити значення у функцію (для перевірки відповіді на питання - 'що отримаємо?' чи 'до чого прямує'?).

Невизначеність

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(x^2 + 2x)}{4x^2 + 3x - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x})}{x^2(4 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2})} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4}$$

Алгоритм обчислення границі полягає у знаходженні **найбільшого степеня "х"** в чисельнику чи знаменнику. Далі на нього ділять чисельник і знаменник і знаходять границю. Відразу з практики можна отримати два висновки, які є підказкою в обчисленнях:

Якщо змінна прямує до безмежності і степінь чисельника більший від степені знаменника то границя рівна безмежності.

В протилежному випадку, якщо поліном в знаменнику старшого порядку ніж в чисельнику границя рівна нулю.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{ax^n + \dots}{bx^n + \dots} = \begin{cases} \frac{a}{b}, n = m \\ \infty, n > m \\ 0, n < m \end{cases}$$

Властивості границі функції

1. Константи виносяться

$$\lim_{n\to\infty} Can = C \lim_{n\to\infty} an$$

2. Границя суми (або різниці) двох функцій дорівнює сумі (або різниці) границь цих функцій

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

3. Добуток двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

4. За умови що $b \neq 0$ границя частки функцій дорівнює частці границь цих функцій

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Визначні границі

Приклади границь, що містять невизначеності виду нуль розділити на нуль $(0/0)$ часто зустрічаються у тригонометричних функціях. Для їх розкриття використовують першу та другу визначні границі.

Перша визначна границя

Це границя відношення $sin(f(x))$ до $f(x)$ що дорівнює 1, при x що прямує до нуля. Записується наступним образом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

На її основі можна отримати ряд корисних для практики наслідків

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(kx)}{kx} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(sin(kx))^n}{(kx)^n} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(kx)}{kx} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(tg(kx))^n}{(kx)^n} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin(x)}{x} = 1$$

Друга визначна границя

Ця границя дозволяє нам розкривати не визначеності виду 1^∞ і ви

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x}) = e$$

На її основі можна отримати ряд корисних для практики наслідків

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \qquad \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{k}{x})^x = e^k \qquad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$$

Еквівалентні нескінченно малі функції для обчислення границь

Швидким способом знаходження границь функцій, що мають особливості виду нуль на нуль $\left[\frac{0}{0}\right]$ є застосування еквівалентних нескінченно малих функцій. Вони вкрай необхідні, якщо потрібно знаходити границі без застосування правила Лопіталя. Еквівалентності полягають в заміні функції її розкладом в ряд Маклорена. Як правило, при обчисленні границь використовують не більше двох членів розкладу.

Дві нескінченномалі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними якщо різниця їх відношення дорівнює 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \qquad \text{з чого випливає} \qquad \alpha(x) \sim \beta(x)$$

Теорема: Якщо нескінченно мала функція $\alpha(x) \sim \alpha_i(x)$ при $x \to a$ і $\beta(x) \sim \beta_i(x)$ при $x \to a$ то їх можн азамінити на еквівалентні:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Для зручності наведемо еквівалентності основних функцій при прямуванні змінної до нуля $a \to 0$

1. $\sin(a) \sim a, a \to 0$
2. $\arcsin(a) \sim a, a \to 0$
3. $\cos(a) \sim 1 - \frac{a^2}{2}, a \to 0$
4. $\tan(a) \sim a, a \to 0$
5. $\arctan(a) \sim a, a \to 0$
6. $e^a - 1 \sim a \to 0$
7. $a^a - 1 \sim a \ln a, a \to 0$
8. $\ln(1 + a) \sim a, a \to 0$
9. $(1 + a)^k \sim ka, a \to 0$

Границя функції в точці

Границя функції в точці — фундаментальне поняття математичного аналізу, зокрема аналізу функцій дійсної змінної, число, до якого прямує значення функції, якщо її аргумент прямує до заданої точки. Строге математичне означення границі функції дається мовою $\delta - \varepsilon$.

Одностороння границя — це границя функції однієї змінної в деякій точці, коли аргумент прямує до значення аргументу у цій точці окремо зі сторони більших аргументів (**правостороння границя**), або зі сторони менших аргументів (**лівостороння границя**). Тобто, є сенс говорити про односторонні границі функції у деякій точці тільки тоді, коли у цій точці **лівостороння границя функції не дорівнює правосторонній**.

Лівосторонню границю прийнято позначати:

$$\lim_{x \to x_{0-}} = A \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \qquad \forall x : x_0 - \delta < x < x_0$$

Правосторонню границю прийнято позначати:

$$\lim_{x \to x_{0+}} = B \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \qquad \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta$$

Функція неперерва в точці $x = a$ якщо вона:

1. Вона визначена в цій точці

2. Існує границя функції в цій точці

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

3. Значення границі дорівнює значенню функції в точці

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

   Якщо одна із умов порушується, то функція називається **розривною в точці** x=a, а сама точка x=a називається **точкою розриву**. Усі елементарні функції є неперервними на інтервалах визначеності.

Точка $_0$ називається **точкою розриву першого роду** функції $= f(x)$, якщо існують скінчені односторонні границі зліва та зправа (константи):

$$\lim_{x \to x_{0+}} = C_1 \qquad \lim_{x \to x_{0-}} = C_2$$

Функція в точці x=a **має неусувний розрив першого роду**, за умов:

$$\begin{cases} \lim_{x \to a_{0+}} f(x) \neq f(a) \\ \lim_{x \to a_{0-}} f(x) \neq f(a) \\ \lim_{x \to a_{0-}} f(x) \neq \lim_{x \to a_{0+}} f(x) \end{cases}$$

Функція в точці x=a має **усувний розрив першого роду**, за умов що функції рівні але функції в точці а не існує.

$$\lim_{x \to a_{0+}} f(x) = \lim_{x \to a_{0-}} f(x) \neq f(a)$$

Якщо границя зправа або зліва не існує або прямує до нескінченності то у цій точци матимемо **розрив другого роду**.

Стрибок функції

Стрибком функції в точці розриву x_0 є різниця її првосторонньої і лівоторонньої границі.

$$\lim_{x \to a_{0+}} f(x) - \lim_{x \to a_{0-}} f(x) \neq f(a)$$

1. елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, але не може бути розривною на певному інтервалі.

2. елементарна функція може мати розрив в точці де вона не визначена за умови, що вона буде визначена хоча би з однієї сторони від цієї точки.

3. неелементарна функція може мати розриви як в точках, де вона невизначена, так і в тих, де вона визначена.

Наприклад, якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів, то на межі стику може бути розривною.