

Основи системного аналізу

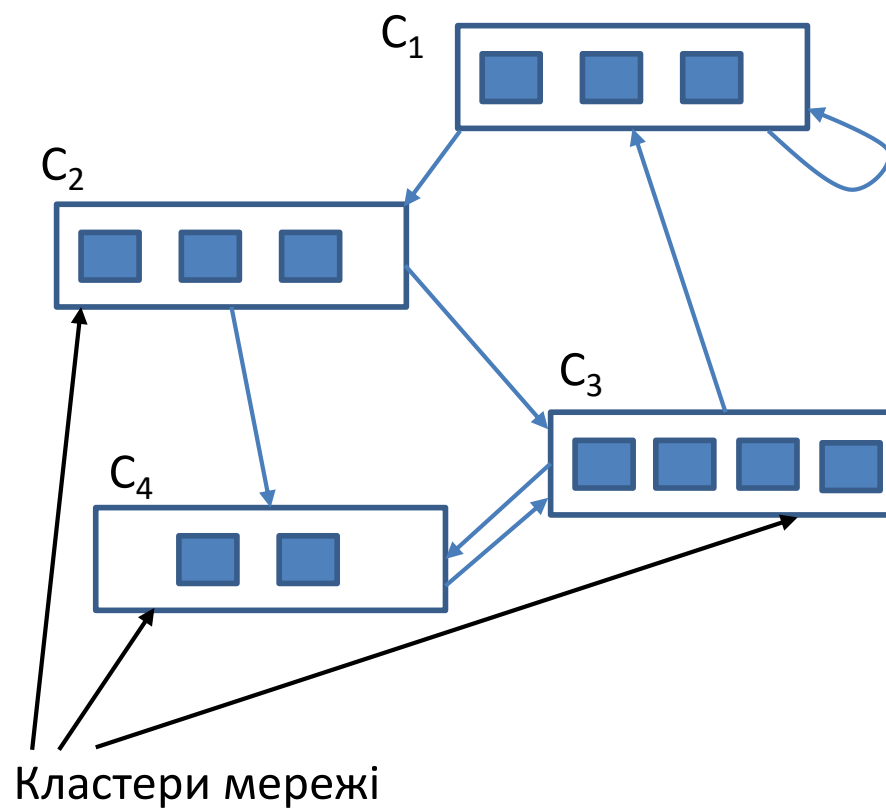
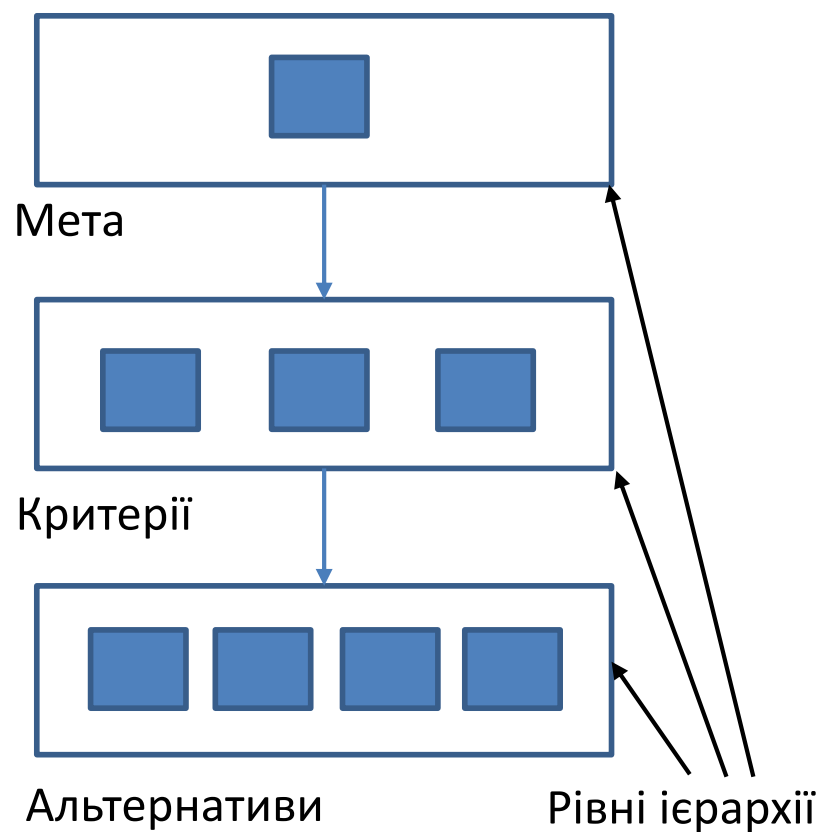
Метод аналізу мереж

Савченко Ілля Олександрович
ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

Метод аналізу мереж

Метод аналізу мереж (ANP, Analytic Network Process) був розроблений Т. Сааті як узагальнення МАІ для задач, які не можуть бути представлені у вигляді ієрархії через наявність зворотніх та/або горизонтальних зв'язків.

Ієрархії і мережі



Етапи МАМ

- 1) Формування мережі кластерів
- 2) Оцінювання впливів елементів для пов'язаних кластерів (парні порівняння)
- 3) Формування суперматриці
- 4) Зважування суперматриці
- 5) Визначення ліміту ступенів суперматриці

Суперматриця мережі

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N1} & W_{N2} & \dots & W_{NN} \end{pmatrix}$$

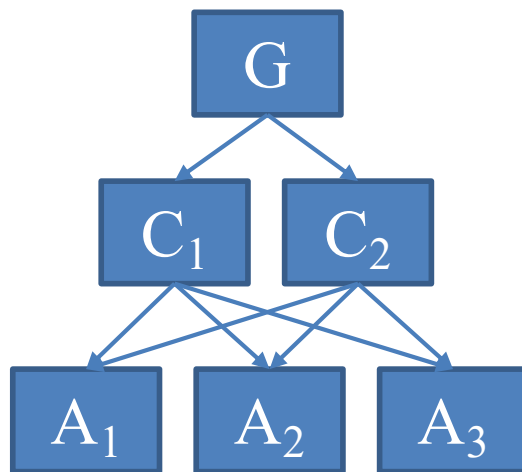
Кожна підматриця W_{ij} показує вплив елементів кластера W_i на елементи кластера W_j .

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} w_{i1}^{(j1)} & w_{i1}^{(j2)} & \dots & w_{i1}^{(jn_j)} \\ w_{i2}^{(j1)} & w_{i2}^{(j2)} & \dots & w_{i2}^{(jn_j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{in_i}^{(j1)} & w_{in_i}^{(j2)} & \dots & w_{in_i}^{(jn_j)} \end{pmatrix}$$

$w_{ik}^{(jl)}$ — локальна вага елемента w_{ik} відносно w_{jl} .

Суперматриця ієрархії

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ W_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W_{NN-1} & I \end{pmatrix}$$



	Мета	Критерії		Альтернативи		
Мета	0	0	0	0	0	0
Критерії	0,6	0	0	0	0	0
	0,4	0	0	0	0	0
Альтернативи	0	0,2	0,6	1	0	0
	0	0,5	0,3	0	1	0
	0	0,3	0,1	0	0	1

Суперматриця ієрархії

Результатом є ліміт ступенів суперматриці

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N,N-1}W_{N-1,N-2}\dots W_{21} & W_{N,N-1}W_{N-1,N-2}\dots W_{32} & \dots & W_{NN-1} & I \end{pmatrix}$$

Глобальні ваги \longrightarrow

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,36 & 0,2 & 0,6 & 1 & 0 & 0 \\ 0,42 & 0,5 & 0,3 & 0 & 1 & 0 \\ 0,22 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зважування суперматриці мережі

Для того, щоб ліміт суперматриці мережі був скінченний, необхідно, щоб матриця була стохастичною за стовпчиками:

$$\forall j \in \overline{1, N_s} : \sum_{i=1}^{N_s} w_{ij} = 1$$

Два підходи:

- 1) нормування матриці:
- 2) Зважування кластерів

$$\tilde{w}_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{k=1}^{N_s} w_{kj}}$$

Зважування кластерів

Для кожного кластера порівнюються кластери, що на нього впливають, з точки зору величини цього впливу. Формується матриця W^c :

$$W^c = \begin{pmatrix} w_{11}^c & \dots & w_{1N}^c \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{N1}^c & \dots & w_{NN}^c \end{pmatrix}$$
$$\forall j \in \overline{1, N} : \sum_{i=1}^N w_{ij}^c = 1$$
$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} w_{11}^c W_{11} & w_{12}^c W_{12} & \dots & w_{1N}^c W_{1N} \\ w_{21}^c W_{21} & w_{22}^c W_{22} & \dots & w_{2N}^c W_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{N1}^c W_{N1} & w_{N2}^c W_{N2} & \dots & w_{NN}^c W_{NN} \end{pmatrix}$$

Ліміт ступенів суперматриці

При піднесенні суперматриці до ступенів
можливі два варіанти:

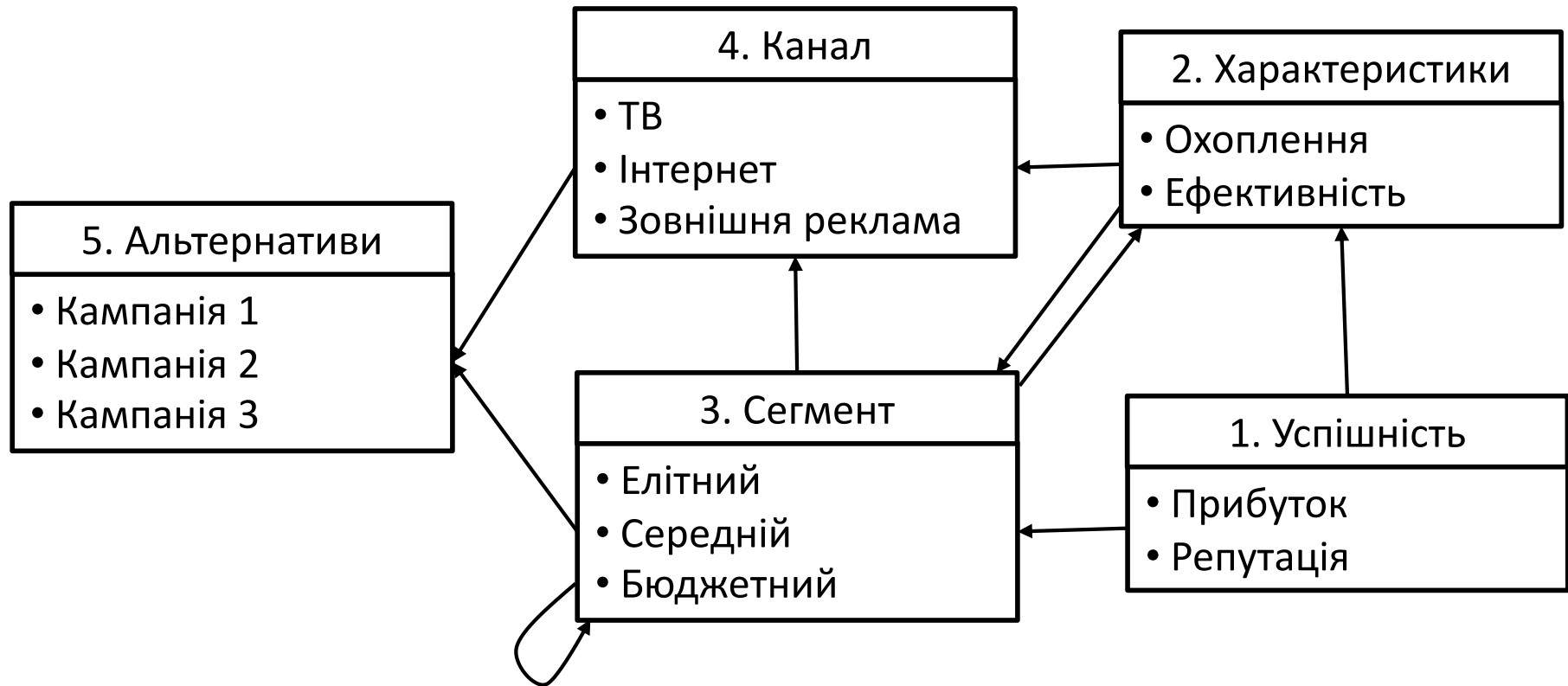
- 1) Матриця збігається до фіксованих величин
- 2) Матриця “зациклюється”

У другому випадку використовується ліміт за
Чезаро або сума за Чезаро послідовних
елементів циклу.

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{h=1}^k \tilde{W}^h$$

Приклад

Оцінювання рекламних кампаній



Приклад

Суперматриця

	1		2		3			4			5			
D :=	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0.5	0.5	0	0	0.1	0.5	0.8	0	0	0	0	0	0	2
	0.5	0.5	0	0	0.9	0.5	0.2	0	0	0	0	0	0	
	0.2	0.7	0.05	0.1	1	0.2	0	0	0	0	0	0	0	3
	0.4	0.2	0.35	0.3	0	0.8	0.4	0	0	0	0	0	0	
	0.4	0.1	0.6	0.6	0	0	0.6	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0.5	0.1	0.1	0.3	0.7	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0.1	0.7	0.4	0.4	0.2	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0.4	0.2	0.5	0.3	0.1	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0.4	0.5	0.4	0.8	0	1	0	0	5
	0	0	0	0	0.6	0.3	0.1	0.2	0.2	0.5	0	1	0	
	0	0	0	0	0.4	0.3	0.4	0.4	0	0.5	0	0	1	

Приклад

Зважування кластерів суперматриці

$$W^c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Приклад

Зважена суперматриця

	1		2		3			4			5			
D :=	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0.5·0.1	0.5·0.1	0	0	0.1·0.1	0.5·0.1	0.8·0.1	0	0	0	0	0	0	2
	0.5·0.1	0.5·0.1	0	0	0.9·0.1	0.5·0.1	0.2·0.1	0	0	0	0	0	0	
	0.2·0.9	0.7·0.9	0.05·0.3	0.1·0.3	1·0.1	0.2·0.1	0·0.1	0	0	0	0	0	0	3
	0.4·0.9	0.2·0.9	0.35·0.3	0.3·0.3	0	0.8·0.1	0.4·0.1	0	0	0	0	0	0	
	0.4·0.9	0.1·0.9	0.6·0.3	0.6·0.3	0	0	0.6·0.1	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0.5·0.7	0.1·0.7	0.1·0.3	0.3·0.3	0.7·0.3	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0.1·0.7	0.7·0.7	0.4·0.3	0.4·0.3	0.2·0.3	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0.4·0.7	0.2·0.7	0.5·0.3	0.3·0.3	0.1·0.3	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0.4·0.5	0.5·0.5	0.4	0.8	0	1	0	0	5
	0	0	0	0	0.6·0.5	0.3·0.5	0.1·0.5	0.2	0.2	0.5	0	1	0	
	0	0	0	0	0.4·0.5	0.3·0.5	0.4·0.5	0.4	0	0.5	0	0	1	

Приклад

Зважена суперматриця

	1			2			3			4			5			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0.05	0.05	0	0	0.01	0.05	0.08	0	0	0	0	0	0	0	0	2
	0.05	0.05	0	0	0.09	0.05	0.02	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0.18	0.63	0.01	0.03	0.1	0.02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
	0.36	0.18	0.12	0.09	0	0.08	0.04	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0.36	0.09	0.18	0.18	0	0	0.06	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0.35	0.07	0.03	0.09	0.21	0	0	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0.07	0.49	0.12	0.12	0.06	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0.28	0.14	0.15	0.09	0.03	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0.2	0.25	0.4	0.8	0	1	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0.3	0.15	0.05	0.2	0.2	0.5	0	1	0	0	0	
	0	0	0	0	0.2	0.15	0.2	0.4	0	0.5	0	0	1	0	0	

Приклад

Ліміт суперматриці

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$1.615 \cdot 10^{-8}$	$1.615 \cdot 10^{-8}$	$4.705 \cdot 10^{-9}$	$4.705 \cdot 10^{-9}$	$3.599 \cdot 10^{-9}$	$3.599 \cdot 10^{-9}$	$3.599 \cdot 10^{-9}$	0	0	0	0	0	0
4	$1.148 \cdot 10^{-8}$	$1.148 \cdot 10^{-8}$	$3.344 \cdot 10^{-9}$	$3.344 \cdot 10^{-9}$	$2.561 \cdot 10^{-9}$	$2.561 \cdot 10^{-9}$	$2.561 \cdot 10^{-9}$	0	0	0	0	0	0
5	$8.471 \cdot 10^{-9}$	$8.472 \cdot 10^{-9}$	$2.466 \cdot 10^{-9}$	$2.466 \cdot 10^{-9}$	$1.894 \cdot 10^{-9}$	$1.894 \cdot 10^{-9}$	$1.894 \cdot 10^{-9}$	0	0	0	0	0	0
$D^{12} =$ 6	$2.589 \cdot 10^{-8}$	$2.588 \cdot 10^{-8}$	$7.536 \cdot 10^{-9}$	$7.536 \cdot 10^{-9}$	$5.79 \cdot 10^{-9}$	$5.79 \cdot 10^{-9}$	$5.79 \cdot 10^{-9}$	0	0	0	0	0	0
7	$2.913 \cdot 10^{-8}$	$2.913 \cdot 10^{-8}$	$8.478 \cdot 10^{-9}$	$8.478 \cdot 10^{-9}$	$6.525 \cdot 10^{-9}$	$6.525 \cdot 10^{-9}$	$6.525 \cdot 10^{-9}$	0	0	0	0	0	0
8	$6.58 \cdot 10^{-8}$	$6.58 \cdot 10^{-8}$	$1.916 \cdot 10^{-8}$	$1.916 \cdot 10^{-8}$	$1.471 \cdot 10^{-8}$	$1.471 \cdot 10^{-8}$	$1.471 \cdot 10^{-8}$	0	0	0	0	0	0
9	$5.479 \cdot 10^{-8}$	$5.479 \cdot 10^{-8}$	$1.595 \cdot 10^{-8}$	$1.595 \cdot 10^{-8}$	$1.226 \cdot 10^{-8}$	$1.226 \cdot 10^{-8}$	$1.226 \cdot 10^{-8}$	0	0	0	0	0	0
10	$4.597 \cdot 10^{-8}$	$4.597 \cdot 10^{-8}$	$1.338 \cdot 10^{-8}$	$1.338 \cdot 10^{-8}$	$1.029 \cdot 10^{-8}$	$1.029 \cdot 10^{-8}$	$1.029 \cdot 10^{-8}$	0	0	0	0	0	0
11	0.391	0.272	0.325	0.546	0.178	0.412	0.463	0.4	0.8	0	1	0	0
12	0.282	0.398	0.293	0.254	0.479	0.298	0.17	0.2	0.2	0.5	0	1	0
13	0.328	0.331	0.382	0.201	0.343	0.29	0.367	0.4	0	0.5	0	0	1

Приклад

Ступені зваженої суперматриці збігаються,
результат для ваг альтернатив відносно
факторів успішності:

	Прибуток	Репутація
K1	0,391	0,272
K2	0,282	0,398
K3	0,328	0,331