Розрахункова Робота

з предмету "Алгебра та Геометрія"

студента групи ІСзп 71
Бутузова О. В.

Варіант №4

$\boxed{\square \text{ Глава 9 - 2}}$ Чи є вектори c_1 та c_2 побудовані по векторам a и b колінеарними?

$$a = \{1, 2, -3\} \qquad b = \{2, -1, -1\} \qquad c_1 = 4a + 3b, \qquad c_2 = 8a - b$$

Умова колітералності векторів - що має існувати таке число α за умови якого буде виконуватись умова $c_1 = \alpha c_2$ (тобто еоординати мають зберігати певну пропорцію).

$$\begin{cases} c_1 = & 4a + 3b & = \{ & (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2) & ; & (4 \cdot 2 + 3 \cdot -1) & ; & (4 \cdot -3 + 3 \cdot -1) & \} & = \{10; 5; -15\} \\ c_2 = & 8a - b & = \{ & (8 \cdot 2 - (-1)) & ; & (8 \cdot 2 - (-3)) & ; & (8 \cdot (-3) - (-1)) & \} & = \{6; 17; -23\} \end{cases}$$

Оскільки $\dfrac{10}{6} \neq \dfrac{5}{17} \neq \dfrac{-15}{-23}$ можна стверджувати що данні ветори не є колінеарними.

$\boxed{\square \text{ Глава 9 - 3}}$ Знайти косинус вугла між векторами AB и AC.

$$A = (-1, 2, -3) \qquad B = (3, 4, -6) \qquad B = (1, 1, -1)$$

Щоб знайти косинус кута між векторами потрібно скалярний добуток векторів розділити на добуток їх довжин.

$$\begin{cases} \overline{AB} = & \{ & 3 - (-1) & ; & 4 - 2 & ; & -6 - (-3) & \} = \{ & 4 & ; & 2 & ; & -3 & \} \\ \\ \overline{AC} = & \{ & 1 - (-1) & ; & 1 - 2 & ; & -1 - (-3) & \} = \{ & 2 & ; & -1 & ; & 2 & \} \end{cases}$$

Знаходження власне косинусу кута між векторами

$$\cos \widehat{\overline{AB}, \overline{AC}} = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{4 \cdot 2 + 2 \cdot -1 + -3 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{9}} = \frac{0}{3\sqrt{29}} = \boxed{0}$$

$\boxed{\square \text{ Глава 9 - 4}}$ Знайдість площу паралелограмма, побудованого на векторах a та b.

$$\overline{a} = 3\overline{p} - 2\overline{q} \qquad \overline{b} = \overline{p} + 5\overline{q}; \qquad |\overline{p}| = 4, |\overline{q}| = \frac{1}{2} \quad \sin \widehat{(p, q)} = \frac{5\pi}{6}$$

Довжина векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на векторах-співмножниках відкладених від спільної точки.
Спочатку знайдемо векторний добуток вектора a на b.

$$[\overline{a}; \overline{b}] = [3\overline{p} - 2\overline{q}, \overline{p} + 5\overline{q}] = 3[\overline{p}, \overline{p}] + 15[\overline{p}, \overline{q}] - 2[\overline{q}, \overline{p}] - 10[\overline{q}, \overline{q}] = 17[\overline{p}, \overline{q}]$$

Маючи векорний добуток, знайдемо площу.

$$S = |a \cdot b| = |17 \cdot \overline{p} \cdot \overline{q}| = 17 \cdot |\overline{p} \cdot \overline{q}| = 17 \cdot \overline{|p|} \cdot \overline{|q|} \cdot \sin \widehat{(p, q)} = 17 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = 34 \cdot \frac{1}{2} = 17$$

Площа паралелограмма побудованого на векторах a та b - 17

$\boxed{\square \text{ Глава 9 - 5}}$ Чи вектори a, b та c компланарні?

$$a = \{1, -1, -3\} \qquad b = \{3, 2, 1\} \qquad c = \{2, 3, 4\}$$

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 2 - 27 + 12 + 12 - 3 = 0$$

Оскільки змішаний добуток дорівнює нулю - можна стверджувати що вектора компланарні.

☐ Глава 9 - 6

Визначита обєм тетраєдра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 і його висоту, спущену з вершини A_4 на грань A_1, A_2, A_3.

$$A_1 = (2, 1, 4) \qquad A_2 = (-1, 5, -2) \qquad A_3 = (-7, -3, 2) \qquad A_4 = (-6, -3, 6)$$

Проведемо вектори з вершини A_1

$$\begin{array}{rlllllll} \overline{A_1A_2} = & \{-1-2 & ; & 5-1 & ; & -2-4 & \} & = \{-3 \; ; \; 4 \; ; \; -6\} \\ \overline{A_1A_3} = & \{-7-2 & ; & -3-1 & ; & 2-4 & \} & = \{-9 \; ; \; -4 \; ; \; -2\} \\ \overline{A_1A_4} = & \{-6-2 & ; & -3-1 & ; & 6-4 & \} & = \{-8 \; ; \; -4 \; ; \; 2\} \end{array}$$

Формула за якою ми знайдемо об'єм піраміди:

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|$$

Отож занйдемо, змішаний добуток

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -9 & -4 & -2 \\ -8 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \; 24 + 64 - 216 + 192 + 72 + 24 = 160$$

І обєм піраміди завдяки змішаному добутку.

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \frac{1}{6} \cdot 160 = \frac{80}{3}$$

Висоту піраміди ми можемо обчислити завдяки іншій формулі обєму що виглядає наступним чином

$$V = \frac{1}{3} Sh \iff h = \frac{3V}{S}$$

де h висота спущена з вершини A_4 на грань A_1, A_2, A_3

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{|\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}|}{2}$$

Векторний добуток:

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -9 & -4 & -2 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} - j \cdot \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -4 \end{bmatrix} = -i32 + j48 + k48 = \{-32; 48; 48\}$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{\sqrt{-32^2 + 48^2 + 48^2}}{2} = \frac{\sqrt{5632}}{2} == \sqrt{\frac{5632}{4}} = \sqrt{1408} = \sqrt{64 \cdot 22} = 8\sqrt{22}$$

$$h = \frac{3 \cdot \dfrac{80}{3}}{8\sqrt{22}} = \frac{80}{8\sqrt{22}} = \frac{10}{\sqrt{22}}$$

$$\boxed{V = \frac{80}{3} \qquad h = \frac{10}{\sqrt{22}}}$$

$\square$ Глава 9 - 7

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

$$M_1 = (1, -1, 1) \qquad M_2 = (-2, 0, 3) \qquad M_3 = (2, 1, -1) \qquad M_0 = (-2, 4, 2)$$

Знаходимо рівні площини що проходять через три точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ -2 - 1 & 0 + 1 & 3 - 1 \\ 2 - 1 & 1 + 1 & -1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(x-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + (y+1)\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + (z-1)\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -6x - 4y - 7z + 9 = 0$$

Відстань d до точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $A_x + B_y + C_z + D = 0$

$$d = \frac{|(-6 \cdot -2) + (-4 \cdot 4) + (-7 \cdot 2) + 9|}{\sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 + (-7)^2}} = \frac{|12 - 16 - 14 + 9|}{\sqrt{36 + 16 + 49}} = \frac{|-9|}{\sqrt{101}} = \frac{9}{\sqrt{101}}$$

$$\boxed{d = \frac{9}{\sqrt{101}}}$$

$\square$ Глава 9 - 8

Напишіть рівняння прощини, що проходить через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$.

$$A = (-8, 0, 7) \qquad B = (-3, 2, 4) \qquad C = (-1, 4, 5)$$

Знайдемо спочатку координати вектора $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \{-1 - (-3); (4 - 2); (5 - 4)\} = \{2; 2; 1\}$$

Рівняння площини, що проходе через точку $A(x_a; y_a; z_a)$ перпендикулярно вектору $\overline{BC} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$:

$$\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) = 2(x + 8) + 2(y + 0) + 1(z - 7) = \boxed{2x + 2y + z + 9}$$

$\square$ Глава 9 - 9

Знайти кут між площинами

$$3x - y + 2z + 17 = 0 \qquad 5x + 9y - 3z + 1 = 0$$

Кут мід площинами - це кут між перпендикулярами до лінії їх перетину, проведеним в ціх площинах. ІНшими словами, в площині α проведемо пряму a перпендикулярну c. В площині β пряму b перпендикулярну c, Кут між площинами α та β дорівнєю куту між площинами a і b
Векторами площін наразі будуть

$$\overline{A} = \{3; -1; +2\}; \qquad \overline{B} = \{5; 9; -3\}$$

$$\cos\widehat{\overline{A}, \overline{B}} = \frac{(\overline{A}, \overline{B})}{|\overline{A}| \cdot |\overline{B}|} = \frac{3 \cdot 5 + -1 \cdot 9 + 2 \cdot -3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + 9^2 + (-3)^2}} = \frac{15 - 9 - 6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{115}} = \frac{0}{\sqrt{1610}} = \boxed{0}$$

Так як $\cos\widehat{\overline{A}, \overline{B}}$ дорівнє 0, можемо зробити висновок що кут $\widehat{\overline{A}, \overline{B}}$ дорівнєю $\boxed{90^\circ}$

$\square$ Глава 9 - 12

Написати канонічне рівняння прямої

$$x + y + z - 2 = 0 \qquad x - y - 2z + 2 = 0$$

Пряма задана у вигляді пересічення двох площин (вектора площиг $\overline{A} = \{1;1;1\}$ $\overline{B} = \{1;-1;-2\}$), і лежить в обох площинах (тобто перендикулярна обом векторам), звідси вектор $\overline{a} = [\overline{A}, \overline{B}]$ і є канонічним рівнянм прямої.

$$\overline{a} = [\overline{A}, \overline{B}] = \begin{bmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -i + 3j - 2k$$

$$\begin{cases} x + y + z - 2 & = 0 \\ x - y - 2z + 2 & = 0 \end{cases} \text{припустимо що } z = 0 \begin{cases} x + y - 2 & = 0 \\ x - y + 2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y & = 2 \\ x - y & = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 2 \end{cases}$$

Тобто пряма направлена вздовж вектору $\overline{a} = \{-1;3;-2\}$ і проходе через точку $P(0,2,0)$, таким чином канонічне рівняння цієї прямої прийме вигляд:

$$\boxed{-\frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{3} = -\frac{z-0}{2}}$$

$\boxed{\square \text{ Глава 9 - 13}}$ Знайти точку перетину прямої та площини

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2} \qquad 2x - y + 4z = 0$$

Кординати перетину мають задовольняти як рівнянню площини так і рівнянню прямої, тому потрібно вирішити систему рівняннь що включає рівння прямої та рівняння площини

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{2} \\ 2x - y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 = z + 3 \\ y = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x - 5 \\ y = 0 \\ x = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = -4z - 5 \\ y = 0 \\ x = -2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5z = -5 \\ y = 0 \\ x = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \\ x = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Таким чином точка перетину прямої і площини має координати $\boxed{(2;0;-1)}$

$\boxed{\square \text{ Глава 9 - 14}}$ Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой

$$M\,(1,2,3) \qquad \frac{x-2}{0} = \frac{y+1.5}{-1} = \frac{z+0.5}{1}$$

Ми спробуємо знайти точку M' спочатку знайшовши M_0 що буде точкою перетину відрізка MM' прямої заданої параметричним рівнянням. Для цього ми спочатку знайдемо перпендикулярну площину що перетинає задані точку і пряму.
Проведемо перепендикулярну площину через точку M і пряму. І так як площина перпендикулярна прямій ми можемо взяти напрявляючий вектор прямої $\{0;-1;1\}$ і в такому разі ми можемо відновити рівняння перпендикулярної площини

$$0(x-1) - 1(y-2) + 1(z-3) = -y + z + 2 - 3 = -y + z - 1 = 0$$

Наступним кроком - ми спробуємо знайти точку M_0 точку перетину прямої та площини.
Запишемо параметричне рівнння прямої

$$\frac{x-0.5}{0}=\frac{y+1.5}{-1}=\frac{z-1.5}{1}=t \iff \begin{cases} x=0.5 \\ y=-1.5-t \\ z=1.5+t \end{cases}$$

і підставимо в рівняння площини:

$$-(-1.5-t)+(1.5+t)-1=1.5+t+1.5+t-1=3+2t-2=2+2t=0 \Rightarrow \boxed{t=-1}$$

Координати M_0 таким чином будуть дорівнювати

$$\begin{cases} x=0.5 \\ y=-1.5-(-1)=-0.5 \\ z=1.5+(-1)=0.5 \end{cases} \Rightarrow M_0(0.5;-0.5;0.5)$$

Так як M_0 це середина відрізку MM'

$$\begin{cases} x_{M_0}=\dfrac{x_{M'}+x_M}{2} \\ y_{M_0}=\dfrac{y_{M'}+y_M}{2} \\ z_{M_0}=\dfrac{z_{M'}+z_M}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_{M'}=2\cdot x_{M_0}-x_M \\ y_{M'}=2\cdot y_{M_0}-y_M \\ z_{M'}=2\cdot z_{M_0}-z_M \end{cases} = \begin{cases} x_{M'}=2\cdot 0.5-1 \\ y_{M'}=2\cdot(-0.5)-2 \\ z_{M'}=2\cdot 0.5-3 \end{cases} = \begin{cases} x_{M'}=0 \\ y_{M'}=-3 \\ z_{M'}=-2 \end{cases}$$

$$\boxed{M'=(0;-3;-2)}$$

$\boxed{\square \text{ Глава 10 - 4}}$ Знайти координати вектору $\overline{x}$ у базисі (e_1', e_2', e_3'), якщо він заданий в базисі (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1'=e_1+e_2+\dfrac{3}{2}e_3 \\ e_2'=3e_1-e_2 \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3 \end{cases} \quad x=\{2,4,1\}$$

Складемо матрицю переходу, стовбі якої будуть кординатами стовбиів векторів.

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det S=-1+\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-3=-1 \qquad S^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{5}{2} & 2 \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{9}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

І координати ветору $\overline{x}$ ми знайдемо за формулою $\overline{x}^{-1}=S^{-1}\overline{x}$

$$\overline{x}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{5}{2} & 2 \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{9}{2} & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1\cdot 2 & + & 3\cdot 4 & + & -2\cdot 1 \\ -\dfrac{1}{2}\cdot 2 & + & -\dfrac{5}{2}\cdot 4 & + & 2\cdot 1 \\ -\dfrac{3}{2}\cdot 2 & + & -\dfrac{9}{2}\cdot 4 & + & 4\cdot 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & + & 12 & - & 2 \\ -1 & - & 10 & + & 2 \\ 3 & - & 18 & + & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ -9 \\ -17 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overline{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ -9 \\ -17 \end{bmatrix}}$$

$\square$ Глава 10 - 7

Знайти матрицю лінійного оператора у базисі (e_1, e_2, e_3), где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3, e_2' = e_1 + e_2 - 2e_3, e_3' = e_1 + 2e_2 + e_3$ якщо вона задана (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_3' = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Матриця лінійного базису (e_1, e_2, e_3) знаходиться по формулі $A' = S^{-1}AS$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \det S = \begin{bmatrix} 1 - 2 - 2 + 1 - 1 + 4 = 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \quad (-1)^2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad = (1+4) \quad = 5$$

$$S_{12} = \quad (-1)^3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad = -(-1-2) \quad = 3$$

$$S_{13} = \quad (-1)^4 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad = (2-1) \quad = 1$$

$$S_{21} = \quad (-1)^3 \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad = -(-3) \quad = 3$$

$$S_{22} = \quad (-1)^4 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad = (1+1) \quad = 2$$

$$S_{23} = \quad (-1)^5 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad = -(-2+1) \quad = 1$$

$$S_{31} = \quad (-1)^4 \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad = (-2+1) \quad = -1$$

$$S_{32} = \quad (-1)^5 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad = -(1) \quad = -1$$

$$S_{33} = \quad (-1)^6 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad = (1-1) \quad = 0$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} S^{*T} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & -2 \\ 11 & 7 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\square \text{ Глава 10 - 9}}$ Знайти власні значення та вектора матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A - \lambda E = \left\| \begin{matrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{matrix} \right\| = (5-\lambda)(4-\lambda)^2 - (5-\lambda) = (5-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) = 0.$$

$$(5-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) = 0$$

Варіанти власних значеннь для λ (при яких значення виразу дорівнюватиме нулю).

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5 \quad \text{для } 5 - \lambda = 0 \\ \lambda_2 &= 5 \quad \text{для } (4-\lambda)^2 = 1 \\ \lambda_3 &= 3 \quad \text{для } (4-\lambda)^2 = 1 \end{aligned}$$

1) При $\lambda = 5$ власним вектором буде

$$(A - \lambda E)\overline{x} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

x_2 основна змінна, x_3 - вільна.

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} - \Rightarrow \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} - \Rightarrow \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Надаємо вільним членам довільні значення.

$$x_1 = C_1 \qquad x_3 = C_3 \qquad \begin{cases} \overline{x} = (C_1; -C_3; C_3) \text{ або } (0; -1; 1) \\ \overline{x} = (C_1; -C_3; C_3) \text{ або } (1; 0; 0) \end{cases}$$

2) При $\lambda_{1,2} = 3$ власним вектором буде

$$(A - \lambda E)\overline{x} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

x_1 та x_2 основні змінні, x_3 - вільна.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Надаємо вільним членам довільні значення.

$$x_3 = C_3 \qquad \overline{x} = (C_3; C_3; C_3) \text{ або } (1;1;1)$$

Власні значення $\boxed{\lambda_{1,2} = 5}$ та $\boxed{\lambda_3 = 3}$ Власні вектора $\begin{cases} \overline{x} = (C_1; -C_3; C_3) & \text{або } (0;-1;1) \\ \overline{x} = (C_1; -C_3; C_3) & \text{або } (1;0;0) \\ \overline{x} = (C_3; C_3; C_3) & \text{або } (1;1;1) \end{cases}$

$\boxed{\square \text{ Екстра 1}}$ Розв'язати матричне рівняння. Знайти розв'язок в загальному вигляді, а потім обчислити його матричне значення.

$$(BA^T)^T(AX^{-1})^{-1} = A(A^TB)^T(AB)^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} n-1 & n+4 \\ n-2 & n+3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} n+2 & n-4 \\ n+3 & n-3 \end{bmatrix}$$

де n номер у списку (тобто)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Розвязуємо рівняння спочатку в загальному вигляді:

$$\begin{aligned} (BA^T)^T(AX^{-1})^{-1} &= A(A^TB)^T(AB)^{-1} \\ AB^TXA^{-1} &= AB^TAB^{-1}A^{-1} \\ X &= AB^{-1} \end{aligned}$$

Перщ ніж шукати обернену матрицю B знайдемо дискримінант

$$\det B = -6 \qquad B^* = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^{*T} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ -7/6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = AB^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ -7/6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \cdot 1/6 + 8 \cdot -7/6) & (3 \cdot 0 + 8 \cdot -1) \\ (2 \cdot 1/6 + 7 \cdot -7/6) & (2 \cdot 0 + 7 \cdot -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53/6 & -8 \\ -47/6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{bmatrix} -53/6 & -8 \\ -47/6 & -7 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{\square \text{ Екстра 2}}$ Знайти обернену матрицю двома методами: за формулою та методом елементарних перетворень. Зробити перевірку

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det A = -4 + 6 + 1 = 3$$

Знаходження оберненої матриці за методом приєднаної матриці

$$A_{1,1} = \quad -1^2 \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad = 1 \qquad A_{1,2} = \quad -1^3 \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad = -(-3-(-2)) \quad = 1$$

$$A_{1,3} = \quad -1^4 \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad = 3 \qquad A_{2,1} = \quad -1^3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad = -(-2) \quad = 2$$

$$A_{2,2} = \quad -1^4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad = -1 \qquad A_{2,3} = \quad -1^5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad = -(1-4) \quad = 3$$

$$A_{3,1} = \quad -1^4 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad = -2 \qquad A_{3,2} = \quad -1^5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad = -(-1) \quad = 1$$

$$A_{3,3} = \quad -1^6 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad = -6$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{1,1}}{\det A} & \frac{A_{2,1}}{\det A} & \frac{A_{3,1}}{\det A} \\ \frac{A_{1,2}}{\det A} & \frac{A_{2,2}}{\det A} & \frac{A_{3,2}}{\det A} \\ \frac{A_{1,3}}{\det A} & \frac{A_{2,3}}{\det A} & \frac{A_{3,3}}{\det A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{-6}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Знаходження оберненої матриці методом елементарних перетворень

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & {\scriptstyle -3\cdot I} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & {\scriptstyle -2\cdot I} & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & {\scriptstyle -1/2\cdot II} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & {\scriptstyle \times(-2)} & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & {\scriptstyle +III} & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 2 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & {\scriptstyle /(-6)} & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & {\scriptstyle -2\times II} & 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

☐ Екстра 3 Знайти ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 10 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 7 & 3 & 1 & 4 & 2 & -2\times II \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & \\ -2 & 10 & 6 & 4 & 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -5 & -3 & -2 & 0 & +1/2\times III \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & \\ -2 & 10 & 6 & 4 & 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & II \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & III \\ -2 & 10 & 6 & 4 & 0 & I \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc:c} 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & \\ -2 & 10 & 6 & 4 & 0 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{rankA = 2}$$

☐ Екстра 4

Написати розлад вектора x по векторам p, q, r , тобто, знайти такі α, β, γ що $\alpha p+\beta q+\gamma r = x$. Отриману систему розв'язати методом оберненої матриці, методом приєднаної матриці та за формулами Крамера.

$$x = \{-9, 5, 5\} \qquad p = \{4, 1, 1\} \qquad q = \{2, 0, -3\} \qquad r = \{-1, 2, 1\}$$

$\alpha p + \beta q + \gamma r = x$ може бути поданоу вигляді системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4\alpha + 1\beta + 1\gamma = -9 \\ 2\alpha - 3\gamma = 5 \\ -1\alpha + 2\beta + 1\gamma = 5 \end{cases}$$

Спробуйємо розвязати систему рівнянь трьомарізними способами.

Метод оберненої матриці

Метод полягає у знайденні оберненої матриці і множенні оберненої матриці на матрицю вільних членів, це допомогає знайти совбчик невідомих. Зазвичай використовують метод приєднаної матриці щоб знайти обернену, але так як це окреме завдання - знайдемо обернену матрицю методом Гауса.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 3 + 4 - 2 - (-32) = 29$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & 1 & {\scriptstyle III} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & {\scriptstyle I} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & {\scriptstyle +2\cdot I} & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c|rrr} -1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & {\scriptstyle +4\cdot I} & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|c|rrr} -1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & {\scriptstyle III} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & {\scriptstyle II} & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c|rrr} -1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -29/9 & {\scriptstyle -(4\cdot II)/9} & -4/9 & 1 & 2/9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|c|rrr} -1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & {\scriptstyle \cdot -9/29} & 4/29 & -9/29 & -2/29 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c|rrr} -1 & 2 & 0 & {\scriptstyle -III} & -4/29 & 9/29 & 31/29 \\ 0 & 9 & 0 & {\scriptstyle -5\cdot III} & 9/29 & 45/29 & 126/29 \\ 0 & 0 & 1 & & 4/29 & -9/29 & -2/29 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|c|rrr} -1 & 2 & 0 & & -4/29 & 9/29 & 31/29 \\ 0 & 1 & 0 & {\scriptstyle /9} & 1/29 & 5/29 & 14/29 \\ 0 & 0 & 1 & & 4/29 & -9/29 & -2/29 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c|rrr} -1 & 0 & 0 & {\scriptstyle -2\cdot II} & -6/29 & -1/29 & 3/29 \\ 0 & 1 & 0 & & 1/29 & 5/29 & 14/29 \\ 0 & 0 & 1 & & 4/29 & -9/29 & -2/29 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|c|rrr} 1 & 0 & 0 & {\scriptstyle \cdot -1} & 6/29 & 1/29 & -3/29 \\ 0 & 1 & 0 & & 1/29 & 5/29 & 14/29 \\ 0 & 0 & 1 & & 4/29 & -9/29 & -2/29 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 14 \\ 4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

Після знаходження оперненої матриці можна переходити до її множення на стопчик вільних коофіцієнтів щоб отримати стовпчик невідомих.

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 14 \\ 4 & -9 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} -54+5-15 \\ \\ -9+25+70 \\ \\ -36-45-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{64}{29} \\ \\ \dfrac{86}{29} \\ \\ -\dfrac{91}{29} \end{bmatrix}$$

Метод приєднаної матриці

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 3 + 4 - 2 - (-32) = 29$$

Метод приєднаної матриці являє собою майже повний аналог методу оберненої матриці, але обернена матриця виражається через - приєднану розділену на детермінант.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 6 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -(2-3) = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -1(1-2) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4+1 = 5 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -1(8+1) = -9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = -3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -1(-12-2) = 14$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

Після знаходження оперненої матриці можна переходити до її множення на стопчик вільних коофіцієнтів щоб отримати стовпчик невідомих.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*T} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 14 \\ 4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 14 \\ 4 & -9 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} -54+5-15 \\ -9+25+70 \\ -36-45-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{64}{29} \\ \frac{86}{29} \\ -\frac{91}{29} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{64}{29} \\ \frac{86}{29} \\ -\frac{91}{29} \end{bmatrix}}$$

Метод Крамера

Метод Крамера полягає у визначенні детермінантів окремо для матриць де шуканий стовбичк підміняється результатом.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 3 + 4 - 2 - (-32) = 29$$

$$\det\alpha = \begin{bmatrix} s_1 & q_1 & r_1 \\ s_2 & q_2 & r_1 \\ s_3 & q_3 & r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -64$$

$$\det\beta = \begin{bmatrix} p_1 & s_1 & r_1 \\ p_2 & s_2 & r_1 \\ p_3 & s_3 & r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 86$$

$$\det\gamma = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & s_1 \\ p_3 & q_3 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = -91$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\det\alpha}{\det A} = -\frac{64}{29} \qquad \beta = \frac{\det\beta}{\det A} = \frac{86}{29} \qquad \gamma = \frac{\det\gamma}{\det A} = -\frac{91}{29}}$$

☐ Екстра 5

Знайти загальний розв'язок кожної з наведених систем і проаналізувати його структуру, а саме: вказати фундаментальну систему розв'язків однорідної системи; виокремити частковий розв'язок та загальний розв'язок відповідної однорідної для неоднорідної системи.

$$a)\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Данна система є однорідною оскільки вільний член кожного з рівнянь системи дорівнює нулю. Для розвязку однорідної системи проведмо над матрицею елементарін перетворення для отримання ступінчатої матриці.

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 & -3\times III \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 & +2\times III \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & III \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Big\{ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3x_2 - 7x_3 + x_4 + 4x_5}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Загальне рішення

$$\left(\frac{3x_2 - 7x_3 + x_4 + 4x_5}{2}; x_2; x_3; x_4; x_5\right)$$

Часткове рішення при $x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 1; x_5 = 1$

$$\left(\frac{1}{2};1;1;1;1\right)$$

Фундаментальну систему розвязків:

$$x_2\begin{pmatrix}-3/2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-7/2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

b) Данна система є не однорідною

$$\begin{cases}x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4\\2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7\\x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c}1&-5&3&4&0&4&\\2&-9&2&0&1&7&-III\\1&-4&-1&-4&1&3&\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c|c}1&-5&3&4&0&4&\\1&-5&3&4&0&4&+III\\1&-4&-1&-4&1&3&\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c|c}1&-5&3&4&0&4&\\0&1&-4&-8&1&-1&-I\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4\\x_2-4x_3-8x_4+x_5=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4+5x_2-3x_3-4x_4\\x_2=-1+4x_3+8x_4-x_5\\x_3=x_3\\x_4=x_4\\x_5=x_5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=17x_3+36x_4-5x_5-1\\x_2=4x_3+8x_4-x_5-1\\x_3=x_3\\x_4=x_4\\x_5=x_5\end{cases}\Rightarrow$$

Загальне рішення

$$\left(17x_3+36x_4-5x_5-1;4x_3+8x_4-x_5-1;x_3;x_4;x_5\right)$$

Часткове рішення при $x_3=1;x_4=1;x_5=1$

$$\left(47;10;1;1;1\right)$$