Розрахункова Робота - 1-3

з предмету "Математичний Аналіз"

студента групи ІСзп 71
Бутузова О. В.

Варіант №4

Розрахункова робота - 1

- В данній розрахунковій роботі відсутній розв'язок завдання 7б (07.02)

Розрахункова робота - 2

- В деяких задачах фінальна відповідь подана в рамці. Інколи фінальна відповідь включена до розрахунків (тобто є останньою в ланцюжку перетворень), інколи відповідь і являє собою останній ланцюжок перетворення. Це (рамка) було запроваджена щоб виділити відповідь і спробувати розгрузити усі перетворення.

Завдання: Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\epsilon)$ такий що

B4 - PP1 - 01.01

$|a_n - a| < \epsilon$ ∀n>N(ϵ), якщо а $a_n = \dfrac{2n+5}{3n+5}$.

$$a_n \frac{2n+5}{3n+5} \to \frac{2}{3} \qquad \text{тому що} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2n+5}{3n+5} = \frac{2}{3}$$

$$|\text{a}| \text{ розкривається як } \begin{cases} -a, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ +a, & a>0 \end{cases}$$

$$\varepsilon > \frac{2n+5}{3n+5} - (+\frac{2}{3}) \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{3(2n+5)-2(3n+5)}{3(3n+5)} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{6n+15-6n-10}{3(3n+5)} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{9n+5}$$

$$n > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{15}{9} \Leftrightarrow n > \frac{5-15\varepsilon}{9\varepsilon} + 1$$

Візьмемо, наприклад, $\epsilon = 0,0001$. Тоді $N(\epsilon) = \dfrac{5 - 5\cdot 0.0001}{(9\cdot 0.0001)} = 5555$. Це означає, що, починаючи з номера $n = 5556$ всі наступні члени послідовності $\left\{\dfrac{2n+5}{3n+5}\right\}$ будуть знаходитись в 0,0001-околі точки $\dfrac{2}{3}$.

B4 - PP1 - 02.01

Знайти Границю функції

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)^2+(n+4)^2}{(n+3)^3-(n-2)^3} = [\frac{\infty}{\infty}]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)^2+(n+4)^2}{(n+3)^3-(n-2)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)(n+5)+(n+4)(n+4)}{(n+3)(n+3)(n+3)-(n-2)(n-2)(n-2)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+10n+25)+(n^2+8n+16)}{(n^3+9n^2+27n+27)-(n^3-6n^2+12n-8)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+18n+41}{15n^2+15n+35} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{18}{n}+\dfrac{41}{n^2}}{15+\dfrac{15}{n}+\dfrac{35}{n^2}} = \frac{2}{15}.$$

B4 - PP1 - 02.02

Знайти Границю функції

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+5}-\sqrt{n}) = [\infty - \infty]$$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+5}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+5-\sqrt{n(n+5)}+\sqrt{n(n+5)}-n)}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

B4 - PP1 - 02.03

Знайти Границю функції

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+3}{n-1})^{n+4}=[1^\infty]$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+(\frac{n+3}{n-1})-1)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(n+3)-(n-1)}{n-1}\right)^{n+4}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{4}}\right]^{(\frac{4}{n-1})(\frac{n+4}{1})}=$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(n+4)}{n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(n+4)}{x-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(1+\frac{4}{n})}{1-\frac{1}{n}}}=e^{4\frac{1}{1}}=e^4.$$

B4 - PP1 - 02.04 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}=[\frac{0}{0}]$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+x)(1+x)-(1+3x)}{x+x^5}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x+x^2)-(1+3x)}{x+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x+x^2+x+2x^2+x^3)-(1+3x)}{x+x^5}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2}{x^5+x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+3x)}{x(x^4+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^4+1}=\frac{0}{1}=0$$

B4 - PP1 - 02.05 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{x^2-x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{2-x}-2)}{(x+2)(x-3)}*\frac{(\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{2-x-4}{(x-3)(x+2)(\sqrt{(2-x)}+2)}=$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{-1(x+2)}{(x-3)(x+2)(\sqrt{(2-x)}+2)}=\frac{-1}{(-2-3)(2+2)}=\frac{-1}{-5\cdot4}=\frac{1}{20}.$$

B4 - PP1 - 02.06 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\pi x+cos3\pi x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot(\lim_{x\to0}\cos\pi x+\lim_{x\to0}\cos3\pi x)=(1+1)\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=2\cdot\infty=\infty$$

B4 - PP1 - 02.07 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\lim_{x\to0}(1+\cos\pi x-1)^{\frac{1}{x\sin x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+\cos\pi x-1)\right]^{\frac{1}{x\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[(1+\cos\pi x-1)^{\frac{1}{\cos\pi x-1}}\right]^{\frac{1}{x\sin x}\frac{\cos\pi x-1}{1}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\cos\pi x-1}{x\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos \pi x - 1}{x \sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos \pi x - 1)'}{(x \sin x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin \pi x (\pi x)'}{(x)' \sin x + x(\sin x)'}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\pi \sin \pi x}{\sin x + x \cos x}} = e^{\pi \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin \pi x}{\sin x + x \cos x}}$$

$$\left| \begin{array}{lcl} \sin\alpha \sim \alpha & , & \alpha \to 0 \\ \cos\alpha \sim 1 - \dfrac{\alpha^2}{2} & , & \alpha \to 0 \end{array} \right|$$

$$= e^{\pi \lim\limits_{x\to 0} \frac{-(\pi x)'}{(\sin x + (x \cos x))'}} = e^{\pi \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\pi}{(\cos x + (\cos x - x \sin x))}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2\cos x - x \sin x}}$$

$$= e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2(1+\frac{x^2}{2}) - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2+\frac{2x^2}{2} - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{\lim\limits_{x\to 0} 2+x^2 - x^2}} = e^{\frac{-\pi^2}{2}}.$$

B4 - PP1 - 02.08 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^x - 3^{2x}}{\operatorname{arctg} 4x - \sin x} = [\frac{1-1}{0+0}] = [\frac{0}{0}] = \left| \begin{array}{ccll} \sin\alpha & \sim & \alpha & ,\alpha \to 0 \\ \operatorname{arctg}\alpha & \sim & \alpha & ,\alpha \to 0 \\ \alpha^x - 1 & \sim & x\ln\alpha & ,\alpha \to 0 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{(6^x - 1) - (3^{2x} - 1)}{\operatorname{arctg} 4x - \sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6^x - 1) - (3^{2x} - 1)}{\operatorname{arctg} 4x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln 6 - 2x\ln 3}{4x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln 6}{3x} - \lim_{x\to 0} \frac{2x\ln 3}{3x} = \frac{\ln 6}{3} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} - \frac{2\ln 3}{3} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$$

$$= \frac{\ln 6}{3} - \frac{2\ln 3}{3} = \frac{1}{3}(\ln 6 - \ln 9) = \frac{1}{3}\ln\frac{6}{9} = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}.$$

B4 - PP1 - 02.09 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - sin2x)}{(\pi - 4x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} t = x - \pi/4, \quad t \to 0 \\ x = t + \pi/4 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{(1 - \sin(2t + \frac{2\pi}{4}))}{(\pi - 4(t + \frac{\pi}{4}))^2}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1 - \sin(2t + \frac{2\pi}{4}))}{(\pi - 4(t + \frac{\pi}{4}))^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(1 - \sin(2t + \frac{\pi}{2}))}{(\pi - 4t - \pi 4)^2}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1 - (\sin 2t \cos\frac{\pi}{2} + \cos 2t \sin\frac{\pi}{2}))}{(4t)^2} = \left| \begin{array}{l} \sin\pi/2 = 1 \\ \cos\pi/2 = 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos 2t}{16t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(1 - \cos 2t)'}{(16t^2)'} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{-\sin 2t (2t)'}{32t} = -\lim_{t\to 0} \frac{2\sin 2t}{32t} = |\sin 2t \sim 2t, t \to 0| = -\lim_{t\to 0} \frac{4t}{32t} = -\frac{1}{8}$$

B4 - PP1 - 02.10 Знайти Границю функції

$$\lim_{x\to 0}(-\ln x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(-\ln x)^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln(-\ln x)} = \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln(-\ln x)}{\dfrac{1}{\sin x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{(\ln(-\ln x))'}{(\dfrac{1}{\sin x})'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{\ln x}\cdot(-\ln x)'}{\dfrac{-\cos x}{(\sin x)^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{\ln x}\cdot -\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{(\sin x)^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\dfrac{1}{x\ln x}}{\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\sin^2 x}{x\ln x\cos x}} = e^{(\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\sin x}{\ln x})\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}}$$

$$e^{0\cdot 1\cdot 1} = e^0 = 1.$$

В4 - РР1 - 03.01	Визначити порядок малості

Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$ якщо $\alpha(x) = \sin 3x - \sin x$, $\beta(x) = 5x$

Для того щоб визначити порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$, треба встановити, при якому числу k границя $\lim \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}$ буде дорівнювати числу, відмінному від нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - \sin x}{(5x)^k} = \left|\begin{array}{cccc} \sin\alpha & \sim & \alpha & \alpha\to 0 \\ \sin 3x & \sim & 3x & \alpha\to 0 \\ \sin x & \sim & x & \alpha\to 0 \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x - x}{(5x)^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(5x)^k} = \left|\ k=1\ \right| = \frac{2}{5}$$

$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ безкінечно малі одного порядку

.

В4 - РР1 - 04.01	Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leqslant 0 \\ -(x-1)^2 & 0 < x < 2 \\ x-3 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

1) Сробуємо знайти границі функції зліва та зправа точки 0 в якій функція не визначена

$$\lim_{x\to 0\ -0} -x = 0 \qquad \lim_{x\to 0\ +0} -(x-1)^2 = -(0-1)^2 = -1$$

Висновок - функція в точкі 0 являє собою **розрив першого роду**, оскільки границі функції зліва та зправа дорівнюють одна одній і є скінченними.

2) Сробуємо знайти границі функції зліва та зправа точці 2 (в якій функція не визначена)

$$\lim_{x\to 2\ -0} -(x-1)^2 = -(2-1)^2 = -1 \qquad \lim_{x\to 2\ +0}(x-3) = (2-3) = -1$$

Висновок - функція в точкі 2 являє собою **усувний розрив**, оскільки границі функції зліва та зправа не дорівнюють одна одній і є скінченними.

$\boxed{\text{B4 - PP1 - 04.02}}$ Дослідити функцію на неперервність

$$y = 3^{\dfrac{2x}{3x+1}}$$

Дослідимо функцію в точкі $-\dfrac{1}{3}$ де вона можливо має точку розриву.

$$\lim_{x\to -1/3-0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} \qquad \lim_{x\to(-1/3-0.001)-0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} = \infty$$

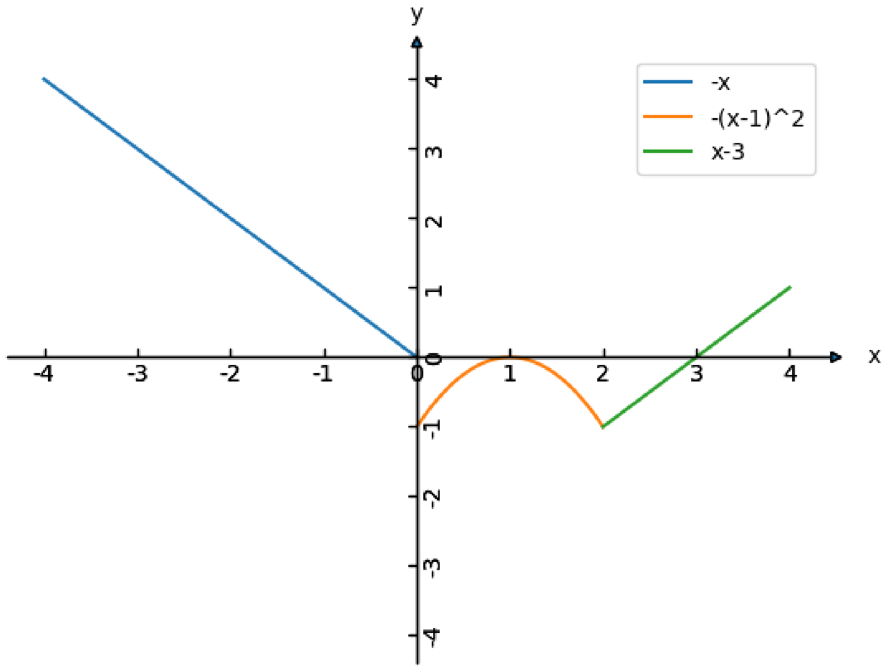


Рис. 1: Графік функції

$$\lim_{x\to -1/3+0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} \qquad \lim_{x\to (-1/3+0.001)+0} 3^{\dfrac{2x}{3x+1}} = \infty$$

Висновок - функція в точкі $-\dfrac{1}{3}$ тосить характер розриву **другого роду**, оскільки границі функції зліва та зправа прямують у нескінченність.

$\boxed{\text{В4 - РР1 - 05.01}}$ Знайти похідну функції:

$$y = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \operatorname{tg} e^{x}$$

$$y' = \frac{1}{2}(\ln(e^{2x}+1))' + (\operatorname{tg} e^{x})' = \ln(e^{2x}+1)\cdot(e^{2x}+1)' + \frac{1}{\cos e^{x}}(e^{x})' = \ln(e^{2x}+1)\cdot(e^{2x}\cdot(2x)') + \frac{1}{\cos e^{x}}e^{x}$$

$$y' = \ln(e^{2x}+1)2e^{2x} + \frac{e^{x}}{\cos e^{x}}$$

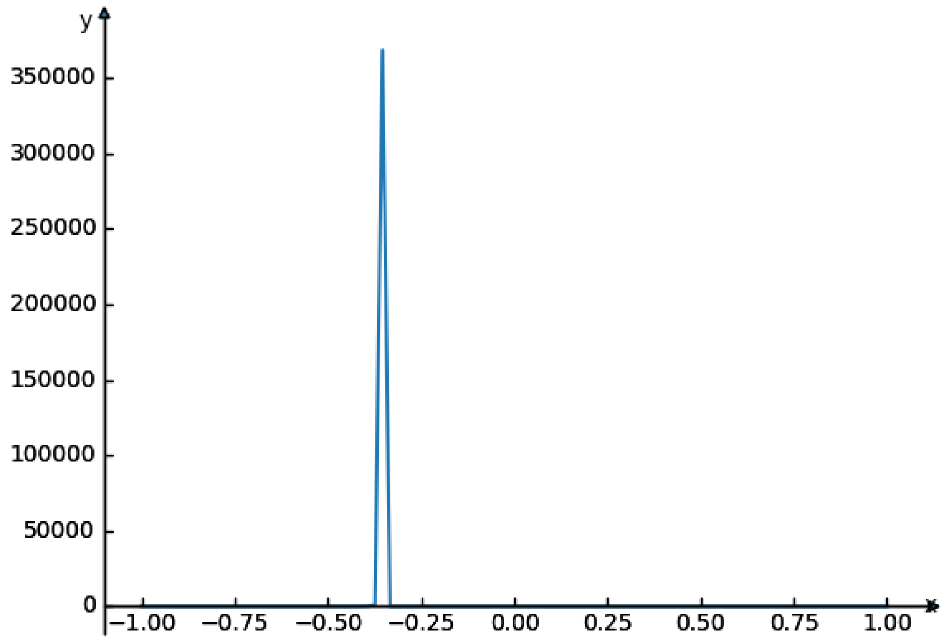


Рис. 2: Графік функції

B4 - PP1 - 05.02 Знайти похідну функції:

$$y = \sqrt{x^3 + 2x + \frac{1}{x}} = (x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = ((x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})' = \frac{1}{2}(x^3 + 2x + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})$$

$$y' = \frac{3x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{(x^3 + 2x + \frac{1}{x})}}$$

B4 - PP1 - 05.03 Знайти похідну функції:

$$y = \frac{\arccos\sqrt{x}}{x}$$

$$y' = \frac{(\arccos\sqrt{x})'(x) - (\arccos\sqrt{x})(x)'}{x^2} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}(\sqrt{x})' - \arccos\sqrt{x}}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(x)}} - \arccos\sqrt{x}}{x^2} = -\frac{\frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \arccos\sqrt{x}}{x^2}.$$

B4 - PP1 - 05.04

Знайти похідну функції:

$$\begin{aligned} y &= (x^3 - x^2)^x \\ y' &= ((x^3 - x^2)^x)' \\ (\ln y)' &= (\ln(x^3 - x^2)^x)' \end{aligned}$$

$$\frac{1}{y}y' = x\frac{1}{x^3 - x^2}(x^3 - x^2)'$$

$$y' = x(x^3 - x^2)^x \frac{1}{x^3 - x^2}(3x^2 - 2x) = \frac{x(x^3 - x^2)^x(3x^2 - 2x)}{x^3 - x^2}$$

$$y' = (x^3 - x^2)^{x-1}(3x^3 - 2x^2).$$

B4 - PP1 - 05.05

Знайти похідну функції:

$$y = 5^{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$y' = (5^{\operatorname{tg}^2 x})' = 5^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln 5 \cdot ((\operatorname{tg} x)^2)' = 5^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \ln 5 \cdot 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

B4 - PP1 - 05.06

Знайти похідну функції:

$$x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x = 2$$

$$x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x - 2 = 0$$

$$0 = (x \operatorname{tg} y)' - (y \operatorname{tg} x)' - (2)' = ((x)' \operatorname{tg} y + x(\operatorname{tg} y)') - ((y)' \operatorname{tg} x + y(\operatorname{tg} x)') = (x' \operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y}) - (y' \operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x})$$

$$y' \operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x} = x' \operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y}$$

$$y' \operatorname{tg} x = x' \operatorname{tg} y + \frac{x}{\cos^2 y} - \frac{y}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} + \frac{x}{\operatorname{tg} x \cos^2 y} - \frac{y}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}$$

B4 - PP1 - 05.07 Знайти похідну функції:

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1}{t+2} \\ y = & \dfrac{t^2}{(t+2)^2} \end{cases} \qquad y'_x = ? \qquad y''_x x = ?$$

$$y'_x = \frac{y'}{x'} \qquad y''_x x = \frac{y'_x}{x'}$$

$$x' = \left(\frac{1}{t+2}\right)' = \frac{1}{(t+2)^2}(t+2)' = \frac{1}{(t+2)^2}$$

$$y' = \left(\frac{t^2}{(t+2)^2}\right)' = \frac{(t^2)'(t+2)^2 - (t^2)((t+2)^2)'}{(t+2)^4} = \frac{2t(t+2)^2 - 2t^2(t+2)}{(t+2)^4} = \frac{(2t(t+2) - 2t^2)(t+2)}{(t+2)^4}$$

$$y' = \frac{2t(t+2) - 2t^2}{(t+2)^3} = \frac{2t((t+2) - t)}{(t+2)^3} = \frac{4t}{(t+2)^3}$$

$$y'_x = \frac{y'}{x'} = \frac{\dfrac{4t}{(t+2)^3}}{\dfrac{1}{(t+2)^2}} = \frac{4t(t+2)^2}{(t+2)^3} = \frac{4t}{t+2}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x'} = \frac{\left(\dfrac{4t}{t+2}\right)'}{\dfrac{1}{(t+2)^2}} = (t+2)^2 \frac{(4t)'(t+2) - (4t)(t+2)'}{(t+2)^2} = \frac{(4t+8-4t)(t+2)^2}{(t+2)^2} = 8$$

| B4 - PP1 - 06.01 | Обчислити наближено за допомогою диференціала.

$$y = x^{11}, x0.998$$

$$f(x + \triangle x) = f(x) + f'(x) \triangle x$$

Тоді для $\triangle x = 0.102$

$$f(1.1) = x^{11} + 11x^{10} \cdot \triangle x = 0.998^{11} + 11 \cdot 0.998^{10} \cdot 0.102 \approx 2.0779$$

| B4 - PP1 - 07.01 | Провести повне дослідження функції і побудувати графік

$$y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

1) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$

2) Графік не перетинає ось x.

3) Функція непарна оскільки

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2 + 2(-x)} = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

4) Обидві точки -2 та 0 носить характер розриву другого роду оскільки вони прямують в безмежність.

$$\lim_{x \to -2\ \pm 0} \frac{2}{x^2 + 2x} = \mp\infty \qquad \lim_{x \to 0\ \pm 0} \frac{2}{x^2 + 2x} = \pm\infty$$

5) Похідна

$$y' = (\frac{2}{x^2 + 2x})' = \frac{2'(x^2 + 2x) - 2(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x)^2}$$

Функція не існує в точках $x = -2$ та $x = 0$, а $x = -1$ є критичною (такою що є підозрілою на екстремум мінімум або максимум). На інтервалі $(-\infty; +\infty)$ матимемо:

x	(-∞; -2)	-2	(-2;-1)	-1	(-1:0)	0	(0; $+\infty$)
f'(x)	$+$	не існує	$+$	0	-	не існує	-
f(x)	$\nearrow$	не існує	$\nearrow$	y$_{max} = -2$	$\searrow$	не існує	$\searrow$

6) Друга похідна

$$y'' = (\frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x)^2})' = \frac{(-4x - 4)'(x^2 + 2x)^2 - (-4x - 4)((x^2 + 2x)^2)'}{(x^2 + 2x)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2 + 2x) + 4(2x + 2)^2}{(x^2 + 2x)^3} = \frac{-4x^2 - 8x + 16x^2 + 32x + 16}{(x^2 + 2x)^3} = \frac{12x^2 + 24x + 16}{(x^2 + 2x)^3}$$

x	(-∞; -2)	-2	(-2:0)	0	(0:+∞)
f"(x)	+	не існує	-	не існує	+
f(x)	∪	не існує	∩	не існує	∪

7) з пункта (4) випливає що фунція має вертикальні асимптоти в точках $x = -2$ та $x = 0$.

Знаходимо горизонтальні асимптоти за формулами (через границі функції):

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x(x^2+2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2}{x(1+2/x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2}{1+2/x} = \frac{0}{1} = 0$$

8) Враховуючи висновки ослідження функції будуємо графік:

B4 - PP1 - 07.02

Провести повне дослідження функції і побудувати графік

$$\rho = \alpha(1 - cos2\varphi)$$

B4 - PP2 - 01.01

Знайти Інтеграл

$$\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}\Big) + C = \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9\arcsin\dfrac{x}{3}}{2} + C.$$

$$\boxed{\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9\arcsin\dfrac{x}{3}}{2} + C}$$

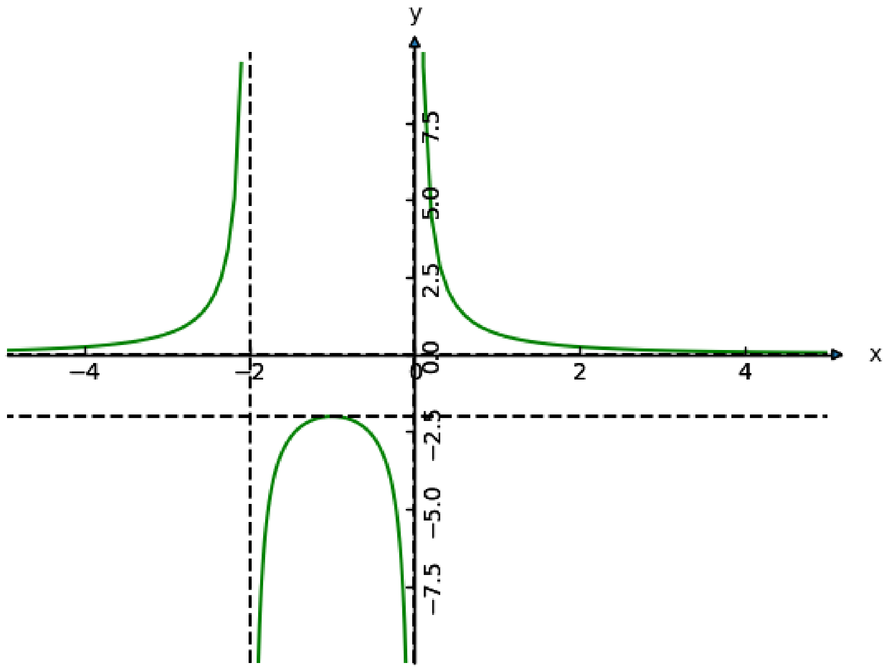


Рис. 3: Графік функції $y = \dfrac{2}{x^2+2x}$

B4 - PP2 - 01.02

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+cos2x} = \left| \begin{array}{rl} \cos^2 x = & \dfrac{1+cos2x}{2} \\ 2\cos^2 x = & 1+cos2x \end{array} \right|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{tg} x + C = \frac{tgx}{2} + C.$$

$$\boxed{\frac{tgx}{2} + C}$$

B4 - PP2 - 01.03

Знайти Інтеграл

$$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^4+3} = \int 2x \frac{1}{x^4+3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = x^2 & \mathrm{d}x = (x)'dt \\ x = \sqrt{t} & \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$2\int \frac{\sqrt{t}}{2(t^2+3)(\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2}\int \frac{\sqrt{t}}{(t^2+3)(\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+\sqrt{3}^2}\,\mathrm{d}t = \frac{arctg\dfrac{t}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C = \frac{arctg\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\boxed{\frac{arctg\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + C}$$

B4 - PP2 - 01.04 Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x}} = \left| \begin{array}{ll} t = 3-2x & \mathrm{d}x = (x)'\,\mathrm{d}t \\ x = \dfrac{3-t}{2} & \mathrm{d}x = (\dfrac{3}{2} - \dfrac{t}{2})' = \dfrac{\mathrm{d}t}{2} \end{array} \right|$$

$$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\sqrt{t} + C = \sqrt{t} + C = \left| \; t = 3-2x \; \right| = \sqrt{3-2x} + C.$$

$$\boxed{\sqrt{3-2x} + C}$$

B4 - PP2 - 01.05 Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int \ln \operatorname{tg} x \frac{1}{2\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x$$

Якщо провести заміну $t = \ln \operatorname{tg} x$ і позначити $\mathrm{d}t$ як $t' \,\mathrm{d}x$ то можемо бачити що:

$$\mathrm{d}u = (\ln \operatorname{tg} x)' \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x' \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sin x \cos x} \,\mathrm{d}x$$

Як бачимо цей вираз вже присутній під інтегралом, отож можемо провести заміну:

$$\frac{1}{2} \int t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{t^2}{4} + C == \frac{(\ln \operatorname{tg} x)^2}{4} + C.$$

$$\boxed{\frac{(\ln \operatorname{tg} x)^2}{4} + C}$$

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 01.06}}$ Знайти Інтеграл

$$\int \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} = \int \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}}} = \left| \begin{array}{llll} t = & x + \frac{3}{2} & \mathrm{d}x = & (x)' \,\mathrm{d}t \\ & & & \\ x = & t - \frac{3}{2} & \mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t - \frac{3}{2}}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} \,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} - \int \frac{\frac{3}{2} \,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} = \int \frac{t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} - \frac{3}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} =$$

Окремо проінтегруємо обидва інтеграли:

$$1) \int \frac{t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}} = \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot t \,\mathrm{d}t = \frac{2}{2} \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^2 - \frac{13}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}(t^2 - \frac{13}{4}) = \frac{2\sqrt{t^2 - \frac{13}{4}}}{2} + C = \sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}} + C = \sqrt{x^2 + 3x - 1} + C.$$

$$2) -\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-\frac{13}{4}}} = -\frac{3}{2}ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{13}{4}}\right| + C = -\frac{3}{2}ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}}\right| + C$$

Підставимо обидва розвязки назад в нашу формулу і отримаємо рішення:

$$\sqrt{x^2+3x-1} - \frac{3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-1}\right|}{2} + C$$

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 01.07}}$ Знайти Інтеграл

$$\int (x+5)\ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} u & = \ln x & v & = \frac{x^2}{2}+5x \\ u' & = \frac{1}{x} & v' & = x+5 \end{array}\right|$$

$$\int (x+5)\ln x\,\mathrm{d}x = \ln x(\frac{x^2}{2}+5x) - \int(\frac{x^2}{2}+5x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln x(\frac{x^2}{2}+5x) - \int\frac{x^2+10x}{2x}\,\mathrm{d}x = \ln x(\frac{x^2}{2}+5x) - \frac{1}{2}\int\frac{x(x+10)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln x(\frac{x^2}{2}+5x) - \frac{1}{2}(\int x\,\mathrm{d}x + \int 10\,\mathrm{d}x) = \ln x(\frac{x^2}{2}+5x) - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}+10x) + C$$

$$= \ln x(\frac{x^2}{2}+5x) - (\frac{x^2}{4}+5x) + C = 5x\ln x + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - 5x + C = 5x(\ln x - 1) + \frac{1}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C$$

$$\boxed{5x(\ln x - 1) + \frac{1}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C}$$

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 01.08}}$ Знайти Інтеграл

$$\int (x+1)2^x\,\mathrm{d}x = \int x2^x\,\mathrm{d}x + \int 2^x\,\mathrm{d}x = \int x2^x\,\mathrm{d}x + \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\int x2^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v = \dfrac{2^x}{\ln 2} \\ & \\ u' = 1 & v' = 2^x \end{array} \right| = x\frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,\mathrm{d}x = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\int (x+1)2^x\,\mathrm{d}x = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^x}{\ln 2}\Big(x - \frac{1}{\ln 2} + 1\Big) + C$$

$$\boxed{\frac{2^x}{\ln 2}\Big(x - \frac{1}{\ln 2} + 1\Big) + C}$$

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 01.09}}$ Знайти Інтеграл

$$\int \frac{2x^4 - 9x^2 - 1}{x^3 - 7x - 6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x^4 - 9x^2 - 1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

Розкладаємо многочлен:

$$\begin{array}{r|l} 2\mathrm{x}^4 - 9x^2 + 0x - 1 & \mathrm{x}^3 - 7x - 6 \\ \cline{2-2} -\quad 2\mathrm{x}^4 - 14x^2 - 12x + 0 & 2\mathrm{x} \\ \cline{1-1} 5\mathrm{x}^2 + 12x - 1 & \end{array}$$

В свою чергу розкладаємо многочлен що залишився:

$$\frac{5x^2 + 12x - 1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$5x^2+12x-1=A(x^2-3x+2x-6)+B(x^2-3x+x-3)+C(x^2+2x+1x+2)$$

$$\begin{array}{c|c|r} x^2 & 5 & A+B+C \\ x^1 & 12 & -A-2B+3B \\ x^0 & -1 & -6A-3B+2C \end{array}$$ з чого виходить що $A=2, B=-1, C=4$

З чого (після підстановки) отримуємо спрощений інтеграл:

$$\int 2x+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x-3}\,\mathrm{d}x=2\int x\,\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}$$

$$\boxed{x^2+2\ln|x+1|-\ln|x+2|+4\ln|x-3|+C}.$$

B4 - PP2 - 01.10

Знайти Інтеграл

$$\int\frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{4x^4+8x^3-1}{(x-1)(x+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{4x^4+8x^3-1}{x^3+x^2-x^1-1}\,\mathrm{d}x$$

Розкладаємо многочлен:

$$\begin{array}{rr|l} & 4x^4+8x^3+0x^2+0x-1 & x^3+x^2-x^1-1 \\ \cline{3-3} - & 4x^4+4x^3-4x^2-4x-0 & 4x+4 \\ \cline{2-2} & 4x^3+4x^2+4x-1 & \\ - & 4x^3+4x^2-4x-4 & \\ \cline{2-2} & 8x+3 & \end{array}$$

В свою чергу розкладаємо многочлен що залишився:

$$\frac{8x+3}{(x-1)(x+1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+1)}$$

$$8x+3=A(x^2+2x+1)+B(x^2-1)+C(x-1)$$

$$\begin{array}{c|c|r} x^2 & 0 & A+B \\ x^1 & 8 & 2A-C \\ x^0 & 3 & A-B-C \end{array} \text{ з чого виходить що } A=\frac{11}{4}, B=-\frac{11}{4}, C=\frac{5}{2}$$

З чого (після підстановки) отримуємо спрощений інтеграл:

$$\int 4x+4+\frac{\frac{11}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{11}{4}}{x+1}+\frac{\frac{5}{2}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int 4x+4+\frac{11}{4(x-1)}-\frac{11}{4(x+1)}+\frac{5}{2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$4\int x\,\mathrm{d}x+4\int\,\mathrm{d}x+\frac{11}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)}-\frac{11}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)}+\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x+1}{(x+1)^2}=$$

$$\boxed{2x^2+4x+\frac{11}{4}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+\frac{5}{2(x+1)}+C}$$

B4 - PP2 - 01.11 Знайти Інтеграл

$$\int\frac{(x^2+23)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+6x+13)}$$

Спершу, спрощуємо многочлен:

$$\frac{(x^2+23)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+6x+13)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+6x+13)}=\frac{A(x^2+6x+13)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+6x+13)}$$

$$(x^2+23)=A(x^2+6x+13)+(Bx+C)(x+1)=Ax^2+6Ax+13A+Bx^2+Bx+Cx+C$$

$$\begin{array}{lll} x^2 & 0 & A+B \\ x^1 & 1 & 6A+B+C \\ x^0 & 23 & 13A+C \end{array}$$

з чого виходить що $A=3, B=-2, C=-16$

$$\int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-1(2x+16)}{x^2+6x+13} = 3\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x+16}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x - \int \frac{10}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\ln|x+1| + C - \int \frac{\mathrm{d}x^2+6x+13}{x^2+6x+13} - 10\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C + 10\int \frac{1}{(x+3)^2+4}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{llll} t= & x+3 & \mathrm{d}x= & (x)'\,\mathrm{d}t \\ x= & t-3 & \mathrm{d}x= & \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= 3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - 10\int \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$$

$$= 3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - \frac{10}{4}\int \frac{1}{\frac{t^2}{4}+1}\,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{llll} u= & \frac{t}{2} & \mathrm{d}t= & (t)'\,\mathrm{d}u \\ t= & 2u & \mathrm{d}t= & 2\,\mathrm{d}u \end{array} \right|$$

$$= 3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - \frac{10}{4}\int \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| + C - 5\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$

$$= 3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| - 5\,\mathrm{arctg}\,u + C = 3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| - 5\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C$$

$$\boxed{3\ln|x+1| - \ln|x^2+6x+13| - 5\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+3}{2} + C}$$

B4 - PP2 - 01.12 Знайти Інтеграл

$$\int \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} t = \dfrac{x}{2} & \mathrm{d}x = (x)'\,\mathrm{d}t \\ x = 2t & \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \mathrm{tg}^2\,t \cdot 2\,\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{tg}^2\,t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{tg}\,t - 2t + C = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - x + C$$

$$\boxed{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - x + C}$$

B4 - PP2 - 01.13 Знайти Інтеграл

$$\int \sin^5 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{llll} \sin x = & t & x = & \arcsin t \\ \cos x = & \sqrt{1-t^2} & \mathrm{d}x = & \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \end{array}\right| = \int \frac{t^5 \cdot (\sqrt{1-t^2})^3\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int t^5 \cdot (\sqrt{1-t^2})^2\,\mathrm{d}t = \int t^5 \cdot (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int t^5\,\mathrm{d}t - \int t^7\,\mathrm{d}t = \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + C = \frac{\sin x^6}{6} - \frac{\sin x^8}{8} + C.$$

$$\boxed{\frac{\sin x^6}{6} - \frac{\sin x^8}{8} + C}$$

B4 - PP2 - 01.14 Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+\cos x}\left|\begin{matrix} t = & \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & \mathrm{d}x = & \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ x = & 2\operatorname{arctg} x & \cos x = & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{4+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{\dfrac{(4(1+t^2)+(1-t^2))(1+t^2)}{1+t^2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(4(1+t^2)+(1-t^2))} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(4+4t^2+1-t^2)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{5+3t^2}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{\dfrac{5}{5}+\dfrac{3t^2}{5}} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{\dfrac{3t^2}{5}+1}\left|\begin{matrix} u = & \sqrt{3/5}t & \mathrm{d}t = & (t)'\,\mathrm{d}u \\ t = & \dfrac{u}{\sqrt{3/5}} & \mathrm{d}t = & \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{3/5}} \end{matrix}\right| = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(\sqrt{\dfrac{3}{5}})}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{5}}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{25}{1}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{5}}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{75}{5}}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$$

$$\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg} u + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}t + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C}$$

B4 - PP2 - 01.15 Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

$\lhd I = x^-1(x^3+1)^{-1/3}$ то $m=0$, $n=3$, $p=-\dfrac{1}{3}$ з чого випливає щомає місце $\dfrac{0+1}{3}+(-\dfrac{1}{3})=0, 0\in\mathbb{Z}$,

а отже ми використаємо підстановку $a+bx^n = x^n\cdot t^s$ (спрощено $\dfrac{a}{x^n}+b=t^s$), де s знаменник s .

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left| \begin{array}{llll} t^3 = & \dfrac{1}{x^3}+1 & \mathrm{d}x = & (x)'\,\mathrm{d}t \\ x^3 = & \dfrac{1}{t^3-1} & \mathrm{d}x = & t^{-4}\cdot(t^{-3}-1)^{-1/3}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int (1+\frac{1}{t^3-1})^{-1/3}\cdot t^{-4}\cdot(t^{-3}-1)^{-1/3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{t^3-1}}}\cdot\frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{t^3}-1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\dfrac{1}{t^3-1})(\dfrac{1}{t^3}-1)}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(\dfrac{(t^3-1)+1}{t^3-1})(\dfrac{1-t^3}{t^3})}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(\dfrac{t^3}{t^3-1})(\dfrac{1-t^3}{t^3})}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1-t^3}{t^3-1}}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{-t^3+1}{t^3-1}}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{-(t^3-1)}{t^3-1}}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{-1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4}\cdot -\frac{1}{1}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3t^3}+C = -\frac{1}{3(\dfrac{1}{x^3}+1)}+C = -\frac{1}{\dfrac{3+3x^3}{x^3}}+C$$

$$\boxed{-\frac{x^3}{3+3x^3}+C}$$

B4 - PP2 - 01.16 Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{llll} u = & \sqrt{x^2-9} & v = & 1/x \\ u' = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}} & v' = & 1/x^2 \end{array} \right| = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \ln|x+\sqrt{x^2-9}|+C$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \ln|x+\sqrt{x^2-9}| + C}$$

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 01.17}}$ Знайти Інтеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$$

$\lhd I = x^{-1}\cdot(x^3+1)^{-1/4}$ то $m=-1$, $n=3$, $p=-\dfrac{1}{4}$ з чого випливає щомає місце $\dfrac{-1+1}{3}=0, 0\in\mathbb{Z}$, а отже ми використаємо підстановку $a+bx^n=t^s$, де s знаменник дробу p .

$$\left|\begin{array}{llll} t^4 = & 1+x^3 & \mathrm{d}x = & (x)'\,\mathrm{d}t \\ x = & \sqrt[3]{t^4-1} & \mathrm{d}x = & \dfrac{4t^3}{3\sqrt[3]{(t^4-1)^2}}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{4t^3}{\sqrt[3]{t^4-1}\cdot\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{t^4-1}^3}\cdot 3\sqrt[3]{(t^4-1)^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{4t^3}{3\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{t^4-1}^3}\cdot\sqrt[3]{t^4-1}\cdot\sqrt[3]{(t^4-1)^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t^3}{3\sqrt[4]{1+t^4-1}\cdot\sqrt[3]{(t^4-1)^3}}\,\mathrm{d}t$$

Розкладаємо многочлен до прийнятної форми

$$= \frac{4}{3}\int \frac{t^3}{t\cdot(t^4-1)}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int \frac{t^2}{(t^4-1)}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)(t+1)+B(t^2+1)(t-1)+(Ct+D)(t+1)(t-1)}{(t^2+1)(t+1)(t-1)}$$

$$t^2 = A(t^3+t^2+t+1)+B(t^3-t^2+t-1)+(Ct+D)(t^2+t-t-1)$$

$$\begin{array}{c|c|c} x^3 & 0 & A+B+C \\ x^2 & 1 & A-B+D \\ x^1 & 0 & A+B-C \\ x^0 & 0 & A-B-D \end{array}$$ з чого виходить що $A=\dfrac{1}{4}, B=-\dfrac{1}{4}, C=0, D=\dfrac{1}{2}$

Підставивши значення маємо:

$$\frac{4}{3}\int\frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\left(\int\frac{1}{4(t-1)}\,\mathrm{d}t-\int\frac{1}{4(t+1)}\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{4}{12}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}-\frac{4}{12}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\frac{4}{6}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{\ln|t-1|}{3}-\frac{\ln|t+1|}{3}+\operatorname{arctg}t+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t^2-1}{t^2+1}\right|+\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right|+\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+C$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right|+\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+C}$$

B4 - PP2 - 02.01 Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^e\frac{\ln^5x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^e\ln^5x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{llllll} t= & \ln x & x= & e^t & x_2=e & t_2=1 \\ \mathrm{d}t= & (\ln x)'\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}t= & \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x & x_1=1 & t_1=0 \end{array}\right|=\int_0^1 t^5\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 t^5\,\mathrm{d}t=\left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{0}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

B4 - PP2 - 02.02 Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\left|x^2+1\right|}{2}\Bigg|_0^1 - \operatorname{arctg} x\Bigg|_0^1$$

$$(\frac{\ln\left|x^2+1\right|}{2} - \operatorname{arctg} x)\Bigg|_0^1 = (\frac{\ln 1^2+1}{2} - \operatorname{arctg} 1) - (\frac{\ln 0^2+1}{2} - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$\left(\frac{\ln\left|x^2+1\right|}{2} - \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\ln|2|}{2} - \operatorname{arctg} 1 - \frac{\ln|1|}{2} + \operatorname{arctg} 0 = \frac{\ln|2|}{2} - \operatorname{arctg} 1$$

$$\boxed{\frac{\ln|2|}{2} - \operatorname{arctg} 1}$$

B4 - PP2 - 02.03 Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(\sin -x + \sin 3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x - \sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^{\pi} \sin 3x\,\mathrm{d}3x - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{6}\cdot - \cos 3x\Bigg|_0^{\pi}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot - \cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\Big(\cos 3\pi - \cos 0\Big) + \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\Big) = -\frac{1}{6}(-1-1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) = \frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$\boxed{\frac{1}{12}}$$

B4 - PP2 - 02.04 Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-2}^{-\sqrt[3]{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^3}}$$

$\lhd I = x^{-1}\cdot(1-x^3)^{-1/2}$ то $m=-1$, $n=3$, $p=-\dfrac{1}{2}$ з чого випливає щомає місце $\dfrac{-1+1}{3} = 0, 0 \in \mathbb{Z}$, а отже ми використаємо підстановку $a + bx^n = t^s$, де s знаменник дробу p .

$$\left| \begin{array}{llllllll} t^2 = & 1 - x^3 & \mathrm{d}x = & (x)'\,\mathrm{d}t & x_2 = & -\sqrt[3]{3} & t_2 = & \sqrt{1 - (-\sqrt[3]{3})^3} = 2 \\ x = & \sqrt[3]{1 - t^2} & \mathrm{d}x = & -\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{3\sqrt[3]{(1-t^2)^2}} & x_1 = & -2 & t_1 = & \sqrt{1 - (-2)^3} = 3 \end{array} \right|$$

$$= \int_3^2 -\frac{2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1-t^2} \cdot 3\sqrt[3]{(1-t^2)^2}} = -\int_3^2 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{3\sqrt[3]{(1-t^2)^3}} = -\frac{1}{3}\int_3^2 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\frac{1}{3}\int_3^2 \frac{\mathrm{d}(t^2-1)}{-1(t^2-1)} = \frac{1}{3}\int_3^2 \frac{\mathrm{d}(t^2-1)}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln t^2 - 1\bigg|_3^2 = \frac{1}{3}(\ln|4-1| - \ln|9-1|) = \frac{1}{3}\ln\frac{|4-1|}{|9-1|} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{8}\right|$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{8}\right|}$$

B4 - PP2 - 02.05 — Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^2 (x+1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{llllllll} t = & x+1 & \mathrm{d}x = & (x)'dt & x_2 = & 2 & y_2 = & 3 \\ x = & t-1 & \mathrm{d}x = & dt & x_1 = & 0 & y_1 = & 1 \end{array} \right| = \int_1^3 t\ln t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^3 t\ln t\,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{llll} u = & \ln t & v = & t \\ u' = & \dfrac{1}{t} & \int v = & \dfrac{t^2}{2} \end{array} \right| = \ln t \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{t^2\ln t}{2}\bigg|_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2\ln t}{2}\bigg|_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2\ln t}{2}\bigg|_1^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\bigg|_1^3 =$$

$$\left(\frac{t^2\ln t}{2} - \frac{t^2}{4}\right)\bigg|_1^3 = \left(\frac{2(t^2\ln t) - t^2}{4}\right)\bigg|_1^3 = \frac{2(3^2\ln 3) - 3^2}{4} - \frac{2(1^2\ln 1) - 1^2}{4} =$$

$$\frac{(18\ln 3-18)-(2\ln 1-2)}{4}=\frac{18\ln 3-18-2\ln 1+2}{4}=\frac{18\ln 3-2\ln 1-16}{4}=\frac{9\ln 3-\ln 1-8}{2}=\frac{9\ln 3-8}{2}$$

$$\boxed{\frac{9\ln 3-8}{2}}$$

B4 - PP2 - 02.06 Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-2}^{-1}\sqrt{2-7x}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{llll} t=2-7x & \mathrm{d}x=(x)'dt & x_2=-1 & t_2=9 \\ x=(2-t)/7 & \mathrm{d}x=(2/7-t/7)'=\dfrac{dt}{7} & x_1=-2 & t_1=16 \end{array}\right|=\int_{16}^{9}\sqrt{t}\frac{dt}{7}$$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\bigg|_{16}^{9}=\frac{3\sqrt{t^3}}{14}\bigg|_{16}^{9}=\frac{3}{14}(\sqrt{9^3}-\sqrt{16^3})=\frac{3}{14}(\sqrt{3^{2+3}}-\sqrt{4^{2+3}})=\frac{3}{14}(3^3-4^3)=\frac{3(27-64)}{14}=7\frac{13}{14}.$$

$$\boxed{7\frac{13}{14}}$$

B4 - PP2 - 03.01 Обчислити невласний інтеграл або довести розбіжність

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Спочатку спрощуємо інтеграл (для підстановки), а потім знаходимо різницю границь.

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{llll} t & =\sqrt{x} & \mathrm{d}x & =(x)'\,\mathrm{d}t \\ x & =t^2 & \mathrm{d}x & =2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right|=\int_{1}^{\infty}\frac{2t\cdot t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\left(\int \frac{t^2+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= 2\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right) = 2\left(t - \operatorname{arctg} t\right) + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$$

Переходимо, власне, до підстановки:

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = (\lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}) - (\lim_{x\to 1} 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x})$$

$$= (\lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to\infty} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}) - (\lim_{x\to 1} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 1} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x})$$

$$= (2\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} - 2\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\sqrt{x}) - (2\lim_{x\to 1} \sqrt{x} - 2\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg}\sqrt{x})$$

$$= (2\cdot\infty - 2\cdot\frac{\pi}{2}) - (2\cdot 1 - 2\cdot\frac{\pi}{4}) = (\infty - \pi) - (2 - \frac{\pi}{2})$$

Маємо ситуацію розбіжності інтегралів, тому що 1-ий (одна з границь) прямує в безмежність.

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 03.02}}$ Обчислити невласний інтеграл або довести розбіжність

$$\int_1^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-1}$$

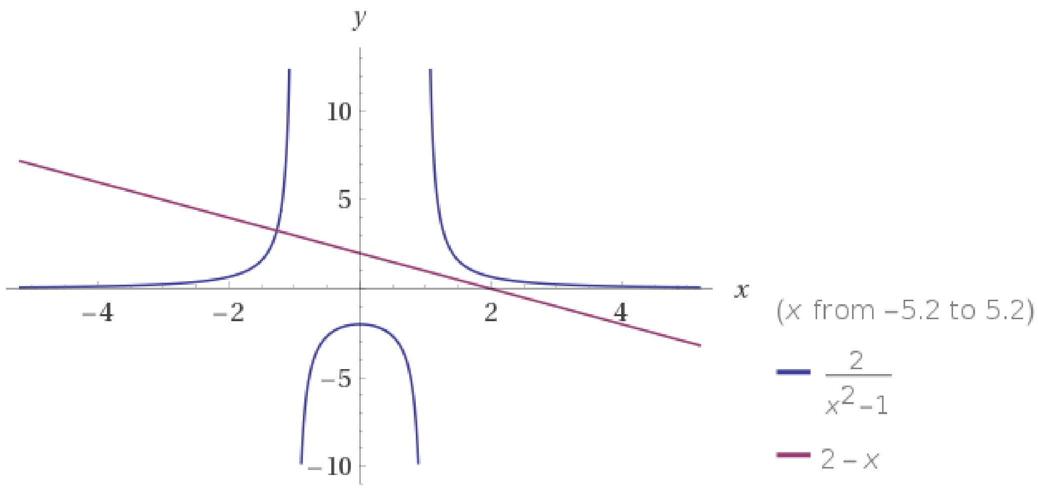
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln|x^2-1|}{2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x^2-1|\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln|2^2-1| - \ln|(1+\varepsilon)^2-1|)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{3}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{3}{2\varepsilon+\varepsilon^2} = \infty$$

Оскільки границя прямує до безмежності, ми можемо стверджувати що невласний інтеграл розбігається - тоюто розбіжність доведено.

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 04.01}}$ Обчислити площу плоскої фігури, обмеженою данними лініями

$$y = \frac{2}{x^2 - 1}, \qquad y = 2 - x$$



Судячи з графіку, задані лінії мають лише 1 точку пересічення $(\frac{2}{x^2-1} = 2 - x)$, тому будемо вважати що таку площу знайти неможливо, оскільки вона нічим не обмежена.

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 04.02}}$ Обчислити площу плоскої фігури, обмеженох данними лініями

$$\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi, \qquad \rho = 2\sin\varphi$$

Якщо функція на відрізку $[a; b]$ задана в параметричніи формі $x = x(t), y = y(t), t \in [\varphi_1; \varphi_2]$, де $x\varphi_1) = a, x = (\varphi_2) = b$ і функції $x(\varphi), y(\varphi)$ неперервно диференціиовні на $[t_1; t_2]$, то площа криволініиної трапеції дорівнює

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(\varphi)x'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Для визначеності, припустимо що параметричні рівняння $\begin{cases} \rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi \\ \rho = 2\sin\varphi \end{cases}$ задають канонічний еліпс з центром на початку координат великою напівосью в точкі $2\sqrt{3}$ і короткою в точкі 2.

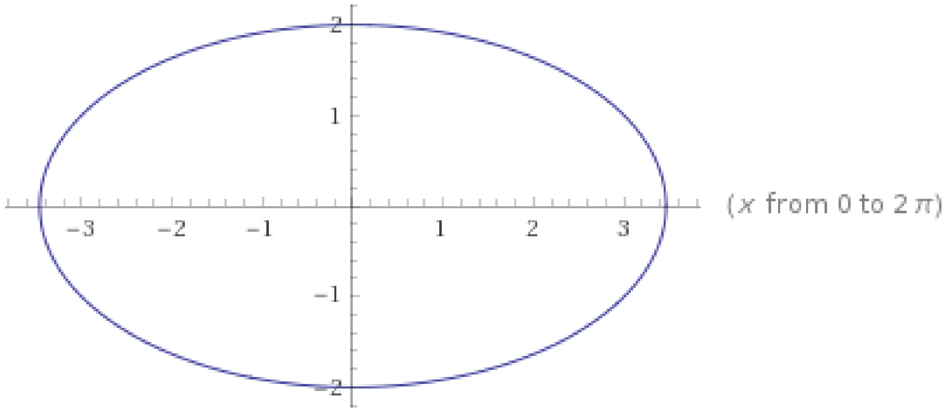


Рис. 4: Параметрично заданий еліпс

Оскільки фігура площу якої ми шукаємо симетрична, ми будемо шукати її площу лише на відрізку її четверті (на відризку з $\pi/2$ до 0), а потім отриману площу просто помножим на 4.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin\varphi(2\sqrt{3}\cos\varphi)'\,\mathrm{d}\varphi = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\varphi \times (-2\sqrt{3})\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -4\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$-4\sqrt{3}(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{4\sqrt{3}}{2}(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -2\sqrt{3}(0 - \frac{\sin 2\times 0}{2} - (\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\times\frac{\pi}{2}}{2}))$$

$$= -2\sqrt{3}(0 - \frac{\sin 0}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}) = -2\sqrt{3}(0 - 0 - \frac{\pi}{2} + 0) = -2\sqrt{3} \times -\frac{\pi}{2} = \boxed{\pi\sqrt{3}}$$

Оскільки ми шукали площу лише четверті еліпсу, домножимо отриману площу на 4 щоб знайти повну площу.

$$\boxed{S = 4\pi\sqrt{3}}$$

B4 - PP2 - 05.01

Обчислити площу поверхні, одержаної при обертанні данної кривої насколо осі OX

$$y = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} \qquad x \in [1; e]$$

Для знаходження поверхні обертання використаємо наступну формулу

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

$$2\pi \int_1^e (-\frac{1}{2}\ln x + \frac{x^2}{4})\sqrt{1+((\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x)')^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_1^e \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}-\ln x)\sqrt{1+(\frac{x^2-1}{2x})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\pi}{2}(\int_1^e (\frac{x^2}{2}-\ln x)\sqrt{1+(\frac{x^2-1}{2x})^2}\,\mathrm{d}x) = \pi \int_1^e \frac{x^2}{2}\sqrt{1+(\frac{x^2-1}{2x})^2}\,\mathrm{d}x - \pi \int_1^e \ln x\sqrt{1+(\frac{x^2-1}{2x})^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^e x^2\sqrt{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}}\,\mathrm{d}x - \pi \int_1^e \ln x\sqrt{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^e \frac{x^2}{2x}\sqrt{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x - \pi \int_1^e \ln x\sqrt{\frac{x^2(x^2+2+\frac{1}{x^2})}{4x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x\sqrt{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \pi \int_1^e \frac{\ln x}{2}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e (x^3+x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_1^e \ln x\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_1^e \frac{(x^2+1)\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}(\int_1^e \frac{x^2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x)$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\left(\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \middle| \begin{array}{cccccc} u = & \ln x & x_1 = & e & y_1 = \ln e & = 1 \\ u' = & \dfrac{1}{x} & x_0 = & 1 & y_0 = \ln 1 & = 0 \end{array} \right|\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}(\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 u\,\mathrm{d}u)$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{cccc} u = & \ln x & v = & x^2/2 \\ u' = & 1/x & v' = & x \end{array} \right|$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}(\frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x)$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}(\frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,\mathrm{d}x)$$

Для більшої зручності порведемо обчислення визначених інтегралів окремо (формула вже завелика для копіювання навіть при наборі в LaTeX).

$$1)\frac{\pi}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\times\frac{x^4}{4}\Big|_1^e = \frac{\pi}{16}(x^4)\Big|_1^e = \frac{\pi}{16}(e^4 - 1^4) = \frac{\pi}{16}(e^4 - 1)$$

$$2)\frac{\pi}{4}\int_1^e x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\times\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{\pi}{8}(x^2)\Big|_1^e = \frac{\pi}{8}(e^2 - 1^2) = \frac{\pi}{8}(e^2 - 1)$$

$$3) - \frac{\pi}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{4}(u^2)\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}(1^2 - 0^2) = -\frac{\pi}{4}$$

$$4) - \frac{\pi}{2}\times\frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^e = -\frac{\pi}{4}(e^2\ln e - 1^2\ln 1) = -\frac{\pi}{4}(e^2\times 1 - 1^2\times 0) == -\frac{\pi e^2}{4}$$

$$5)-\frac{\pi}{2}\times-\frac{1}{2}\int_1^e x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\times\frac{x^2}{2}\bigg|_1^e=\frac{\pi}{8}\times(x^2)\bigg|_1^e=\frac{\pi}{8}\times(e^2-1^2)=\frac{\pi}{8}\times(e^2-1)$$

Залишилось лише просумувати отримані площі.

$$\frac{\pi}{16}(e^4-1)+\frac{\pi}{8}(e^2-1)-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi e^2}{4}+\frac{\pi}{8}\times(e^2-1)=\frac{\pi}{16}(e^4-1)+\frac{\pi}{4}(e^2-1)-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi e^2}{4}$$

$$=\frac{\pi((e^4-1)+4(e^2-1)-4-4e^2)}{16}=\frac{\pi(e^4-1+4e^2-4-4-4e^2)}{16}=\frac{\pi(e^4-9)}{16}$$

$$\boxed{Q=\frac{\pi(e^4-9)}{16}}$$

$\boxed{\text{B4 - PP2 - 06.01}}$ Знайти обєм тіла, одержаного прі обертанні криволінійного заданого сектора навколо полярної осі:

$$\rho=\alpha\sqrt{\cos\varphi},\qquad \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Об'єм тіла отирманого обертанням в навколо полярної осі заданого двума поялрними координатами можна знайти за формулою

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sqrt{\cos\varphi})^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\left|\begin{matrix}u= & \sin\varphi & \varphi_2= & \frac{\pi}{2} & u_2=1\\ \mathrm{d}u= & \cos\varphi & \varphi_1= & 0 & u_1=0\end{matrix}\right|=\frac{2\pi a^4}{3}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2\pi a^4}{3}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u=\frac{a^4\pi}{6}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\bigg|_0^1=\frac{a^4\pi}{15}\sqrt{u^5}\bigg|_0^1=\frac{a^4\pi}{15}$$

$$\boxed{V = \frac{a^4\pi}{15}}$$

B4 - PP2 - 07.01 Знайти координати центра мас дуги першої арки циклоїди:

$$x = \alpha(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t), \qquad t \in \left[0; 2\pi\right]$$

Оскільки циклоїда симетрично паралельна осі X ми можемо стверджувати що центр тяжесті лежить на ній, тобто на $\bar{x} = \pi\alpha$, для находження $\bar{y}$ спочатку знайдемо диференціал довжини арки циклоїди

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\alpha(1-\cos t))^2 + (\alpha(\sin t))^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\alpha^2(1-\cos t)^2 + \alpha^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\alpha^2((1-\cos t)^2 + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= a\sqrt{(1 - 2\cos t + cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{1 - 2\cos t + 1}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2(1 - cost)}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{4(\sin^2\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathrm{d}l = 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t}$$

Координати центр мас знаходяться за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \gamma(x)\,\mathrm{d}l}{\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}l} \text{ та } y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \gamma(y)\,\mathrm{d}l}{\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}l}$$

Де m це масса дуги а M_y та M_x це статичні моменти відносно осей X та Y.

$$M_x = \int_0^{2\pi} x' \,\mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a^2\int_0^{2\pi}(\sin\frac{t}{2} - \cos t\sin\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2\Bigg(\int \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \int \cos t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\Bigg)\Bigg|_0^{2\pi} = 2a^2\Bigg(\int \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\Big(\int \sin(\frac{3t}{2})\,\mathrm{d}t + \int \sin(-\frac{t}{2})\Big)\Bigg)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2\Bigg(2\int \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\int \sin(\frac{3t}{2})\,\mathrm{d}\frac{3t}{2} - 2\int \sin(\frac{t}{2})\,\mathrm{d}\frac{t}{2}\Big)\Bigg)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2\Bigg(-2\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2} + 2\cos\frac{t}{2}\Big)\Bigg)\Bigg|_0^{2\pi} = 2a^2\Bigg(-2\cos\frac{t}{2} - \Big(-\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} + \cos\frac{t}{2}\Big)\Bigg)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2\Bigg(-2\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} - \cos\frac{t}{2}\Bigg)\Bigg|_0^{2\pi} = 2a^2\Bigg(\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} - 3\cos\frac{t}{2}\Bigg)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2\Bigg(\frac{1}{3}\cos\frac{3\cdot 2\pi}{2} - 3\cos\frac{2\pi}{2}\Bigg) - 2a^2\Bigg(\frac{1}{3}\cos\frac{3\cdot 0}{2} - 3\cos\frac{0}{2}\Bigg) = 2a^2\Bigg(\frac{1}{3}\cos 3\pi - 3\cos\pi\Bigg) - 2a^2\Bigg(\frac{1}{3}\cos 0 - 3\cos 0\Bigg)$$

$$= 2a^2\Bigg(\frac{1}{3}\cdot(-1) - 3\cdot(-1)\Bigg) - 2a^2\Bigg(\frac{1}{3} - 3\Bigg) = 2a^2\frac{-1+9}{3} - 2a^2\frac{1-9}{3} = 2a^2(\frac{8}{3} - (-\frac{8}{3})) = 2a^2\frac{16}{3} = \frac{32a}{3}$$

Знайдемо массу (довжину дуги)

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}l = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}(\frac{t}{2}) = 4a\cdot -\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\frac{2\pi}{2} - \cos\frac{0}{2})$$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = -4a(-1-1) = 8a$$

З чого випливає що ординатою центру масси по OY буде

$$\bar{y} = \frac{\frac{32a}{3}}{8a} = \frac{32a^2}{24a} = \frac{4a}{3}$$

$$\boxed{\text{Координати центра мас } \pi a \text{ та } \frac{4a}{3}}$$

B4 - PP3 - 01

Знайдіть n-у частинну суму S_n і суму ряду S:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^4+4n^3+4n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\Big)$$

Спробуємо підставити числа і побачити закономірність

$$S_n = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(2+2)^2}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{(3+2)^2}\Big)\ldots + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Bigg(\Big(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\ldots\frac{1}{n^2}\Big) - \Big(\frac{1}{(2+2)^2} + \frac{1}{(3+2)^2}\ldots\frac{1}{(n+2)^2}\Big)\Bigg)$$

$$= \frac{1}{4}\Bigg(\Big(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\ldots\frac{1}{n^2}\Big) - \Big(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\ldots\frac{1}{(n+2)^2}\Big)\Bigg)$$

Тобто n-у частинну суму S_n можна виразити як:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2}) = \boxed{\frac{5}{16}}$$

А сумою ряду, відповідно, буде

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^4 + 4n^3 + 4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}}{1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{4}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0+0} \approx \boxed{0}$$

B4 - PP3 - 03 Дослідіть ряд на збіжність:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n} = b_n, \qquad n \geqslant 2$$

За ознакою порівняння - данний ряд є розбіжним, оскільки гармонічний ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним .

B4 - PP3 - 04 Дослідіть ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(3n)!}$$

Користуючись ознакою Даламбера, дослідимо ряд на збіжність:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big(\dfrac{(n+1)^2+1}{(3(n+1))!}\Big)}{\Big(\dfrac{n^2+1}{(3n)!}\Big)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(3(n+1))!} \times \frac{(3n)!}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(3n+3)!} \times \frac{(3n)!}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(3n+3)!} \times \frac{(3n)!}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} \times \frac{(3n)!}{n^2+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{27n^5 + 54n^4 + 60n^3 + 60n^2 + 33n + 6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2}{n^5} + \dfrac{2n}{n^5} + \dfrac{2}{n^5}}{\dfrac{27n^5}{n^5} + \dfrac{54n^4}{n^5} + \dfrac{60n^3}{n^5} + \dfrac{60n^2}{n^5} + \dfrac{33n}{n^5} + \dfrac{6}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^3}^{\to 0} + \dfrac{2}{n^4}^{\to 0} + \dfrac{2}{n^5}^{\to 0}}{27 + \dfrac{54}{n}^{\to 0} + \dfrac{60}{n^2}^{\to 0} + \dfrac{60}{n^3}^{\to 0} + \dfrac{33}{n^4}^{\to 0} + \dfrac{6}{n^5}^{\to 0}} =$$

$$= \frac{0+0+0}{27+0+0+0+0+0} \approx \boxed{0} < 1$$

А отже ряд є збіжним за ознакою Даламбера:

| В4 - РР3 - 05 |

Дослідіть ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5+1/n} = \frac{3}{5+0} = \frac{3}{5}$$

Ряд є збіжним за ознакою Коші.

| В4 - РР3 - 06 |

Дослідіть ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\ln^2 3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\ln^2 3n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} e^{1/n}-1}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln^2 3n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} e^{1/n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln^2 3n} = \frac{1-1}{\infty} \approx 0$$

Що не доводить ні розбіжність, ні збіжність, але вказує на потенційну збіжність ряду

Оскільки $\dfrac{1}{n} \to 0$ то ми можемо скористатись цим і замінити $e^{1/n}-1$ на $\dfrac{1}{n}$ (це все за допомогою еквівалетним нескінченно малим функціям).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\ln^2 3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 3n}$$

Спробуємо скористатись інтегральною ознакою для дослідження ряду на збіжність:

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 3x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^2 3x} = -\lim_{b \to \infty} \frac{1}{\ln 3x}\Bigg|_1^b = -\lim_{b \to \infty} \frac{1}{\ln 3 \cdot \infty} - \frac{1}{\ln 3} = -\Big(\frac{1}{\ln 3 \cdot \infty} - \frac{1}{\ln 3}\Big)$$

$$= -\Big(0 - \frac{1}{\ln 3}\Big) = \boxed{\frac{1}{\ln 3}}$$

А отже ряд збігається за інтегральною ознакою

B4 - PP3 - 07

Дослідіть ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{4n+1}$$

1) Знайдемо границю

$$\lim_{n \to \infty} \cos \frac{\pi}{4n+1} = \cos(\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{4n+1}) = \cos(\pi \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4n+1}) = \cos(\pi \cdot 0) = \cos 0 = 1$$

Оскільки границя не дорівнює нулю, ряд розходиться за необхідною ознакою.

B4 - PP3 - 08

Знайдіть наближено суму ряду з точністю ε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^{2n}}, \qquad \varepsilon = 0,001$$

1. Знайдемо чому дорівнює границя:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+2)^{2n}} \approx 0$$

2. Спробуємо використати ознаку Діріхлє для доведення збіжності знакозмінного ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{n+2})^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)^2} = \frac{1}{(\infty+2)^2} \approx 0 \Rightarrow \ 0 < 1, \text{ тобто ряд збіжний}$$

3. Перевіримо ряд на ознаки ряду Лейбніца:

- Ряд задовільняє першу умову оскільки ряд є спадаючим (починаючи з n > 1).
- Як вже визначено в пункті 1. границя u_n приблизно дорівнює нулю.

З чого можна зробити висновок що данний ряд є рядом Лейбніца.

Абсолютна похибка від заміни його суми ряду його n-ою чистиною сумою не перевищує модуля першого з його членів, що видкривається:

$$\left|r_n\right| = \left|S - S_n\right| \leqslant \left|u_{n+1}\right| \leqslant \varepsilon$$

Підбираємо значення n, для якого виконується рівння

$$\left(\frac{1}{((n+1)+2)^{2n+1}}\right) \leqslant 0.001 \Rightarrow n = 2 \to \frac{1}{((2+1)+2)^2(2\cdot(2+1))} < 0.001$$

Тому сума перших двох членів ряду дасть нам суму ряду з точністю $\varepsilon = 0.001$:

$$S \approx = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^4} = \boxed{0.1151}$$

| B4 - PP3 - 11 | Знайдіть інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)}{2^n(n^2+1)}(x-2)^n$$

За допомогою ознаки Даламбера значення при якому ряд сходиться по модулю:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)+4)(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}((n+1)^2+1)} : \frac{(n+4)(x-2)^n}{2^n(n^2+1)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)+4)(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}((n+1)^2+1)} \times \frac{2^n(n^2+1)}{(n+4)(x-2)^n}\right| =$$

$$= \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+5)}{((n+1)^2+1)} \times \frac{(n^2+1)}{(n+4)}\right| = \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+5}{n^2+2n+3} \times \frac{n^2+1}{n+4}\right|$$

$$= \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3+5n^2+n+5}{(n^3+2n^2+3n)+(4n^2+8n+12)}\right| = \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3+5n^2+n+5}{n^3+6n^2+11n+12}\right| =$$

$$= \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}+\frac{12}{n^3}}\right| = \frac{|x-2|}{2} \times \frac{1+0+0+0}{1+0+0+0} = \frac{|x-2|}{2}$$

Данний ряд буде сходитись при $\frac{|x-2|}{2} < 1$ тому визначимо інтервал збіжності ряду:

$$\frac{|x-2|}{2} < 1 \Rightarrow |x-2| < 2 \Rightarrow -2 < x-2 < 2 \Rightarrow -2+2 < x-2+2 < 2+2 \Rightarrow 0 < x < 4$$

Тобто ряд збіжний на інтервалі (0:4).

В точці $x = 0$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (n+4)}{2^n \cdot (n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+4)}{n^2+1}$ збіжний абсолютно.

В точці $x = 4$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+4)}{2^n \cdot (n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+1}$ збіжний абсолютно.

Таким чином ряд збігається на інтервалі $\boxed{[0:4]}$

В4 - РР3 - 13 Розвиньте функцію у ряд Тейлора за степенями $x - a$ та вкажіть область збіжності ряду:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{5}}, \qquad a = 0$$

$$\text{Формула ряду Тейлора } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Як ми бачимо ми маємо справу з біноміальним рядом (за умови що ми підставимо x як x^2), що у точці $a = 0$ перетворєються у ряд Маклорена:

$$\text{Формула ряду Маклорена } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$$

Біноміальний ряд

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{n!}x^3$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{5}} = 1 - \frac{\frac{x^2}{5}}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{5} \times -\frac{6}{5}\right)x^4}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{5} \times -\frac{6}{5} \times -\frac{11}{5}\right)x^6}{3!} \ldots + \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1-k}{5}\right)\right)x^{2n}}{n!}$$

Область збіжності ряду визначаємо із нерівності $|x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$

$\boxed{\text{В4 - РР3 - 14}}$ Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчисліть з точністю ε значення функції

$$\lg 3, \qquad e = 10^{-4}$$

Застосовуючи властивості логарифмів виведемо натуральний логарифм через десятичний

$\boxed{\log_a x = \ln x \times \log_a e} \Rightarrow \boxed{\lg n = \log_{10} n = \ln n \times \log_{10} e} \Rightarrow \boxed{\lg 3 = \ln 3 \times \lg e}$ де $\lg e = 0.43429448$

Таким чином ми можемо скористатись рядом для визначення функції $\lg 3$:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$$

$$\frac{1+x}{1-x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

тобто:

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}\right).$$

Число членів ряду n визначається нерівністю:

$$\left|r_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{2}{2^{2n-1}(2n-1)(1-\dfrac{1}{2^2})} < 10^{-4}$$

ця нерівність задовольняється при $n = 6$. Таким чином:

$$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{\cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}}\right) = 1.0985882823773445$$

І фінально підставивши модуль переходу отримаємо значення функції $\lg 3$ з точністю 10^{-4}:

$$\ln 3 \cdot \lg e = 1.0985882823773445 \cdot 0.43429448 = \boxed{0.4771}$$

Рахувалось в мові програмування Python

$\boxed{\text{B4 - PP3 - 15}}$ Обчисліть з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$ інтерграл:

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

Оскільки $x \geqslant 3$ то розвинемо підінтегральну функцію за степенями $\dfrac{1}{x}$:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{x^4} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^4}} = \frac{1}{x^4}\left(1 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{x^{4n}}\right) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^4} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{x^{4(x+1)}} + \ldots, |x| > 1$$

Проінтегруємо цей ряд на порміжку $[3; +\infty)$ який належить області збіжності ряду.

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \sum_{n=0}^\infty \int_3^\infty (-1)^n \frac{1}{x^{4x+4}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{(4n+3)x^{4n+3}}\Bigg|_3^\infty$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{(4n+3)}\left(\frac{1}{\infty^{4n+3}} - \frac{1}{3^{4n+3}}\right) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(4n+3)3^{4n+3}}$$

Знаходимо кількість членів n для яких виконується рівність

$$\left|r_n\right| \leqslant \frac{1}{(4n+3)3^{4n+3}} < 10^{-3} \to n > 1$$

тому:

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \approx \frac{1}{(0+3)3^{0+3}} = \frac{1}{3^4} = \boxed{0.012}$$