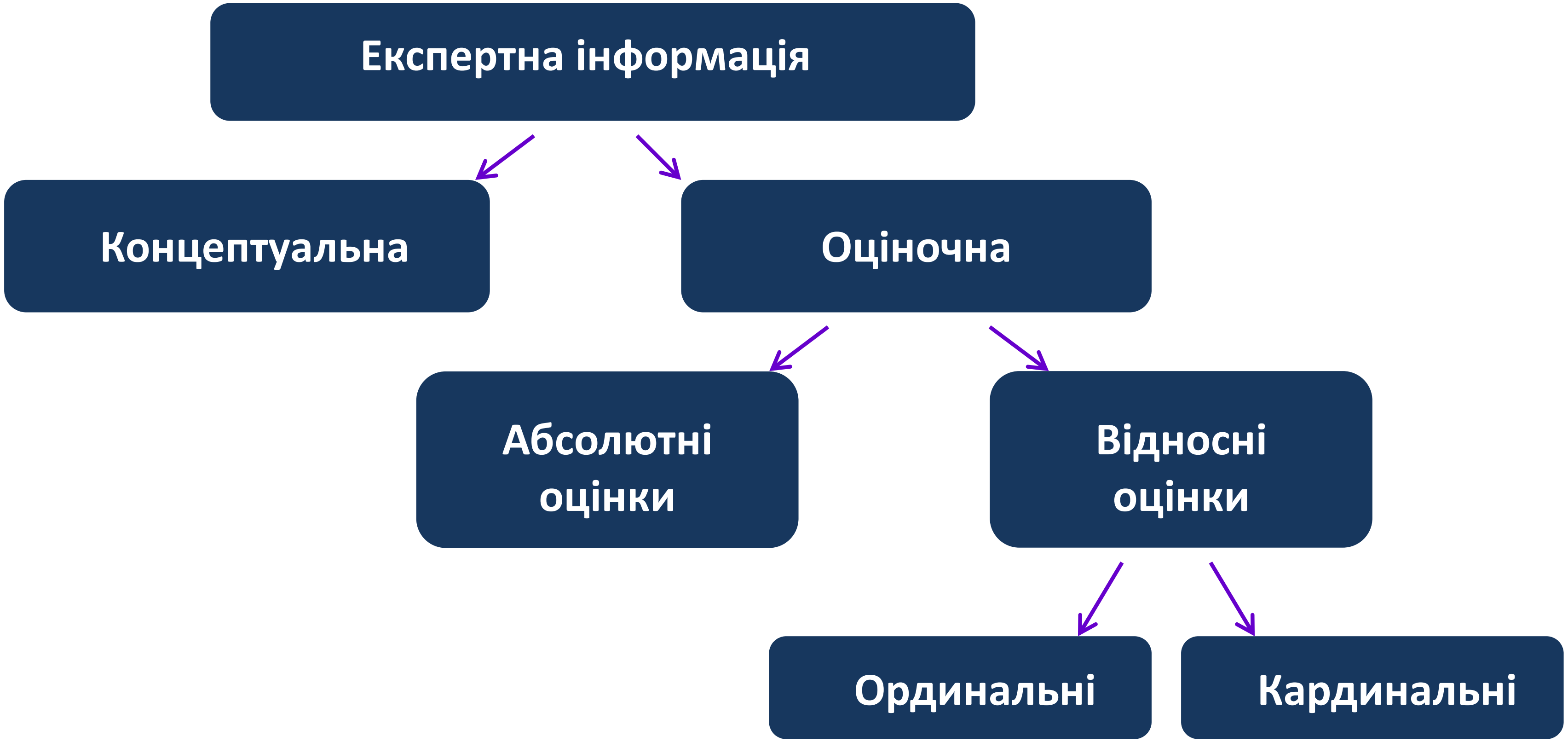
Основи системного аналізу

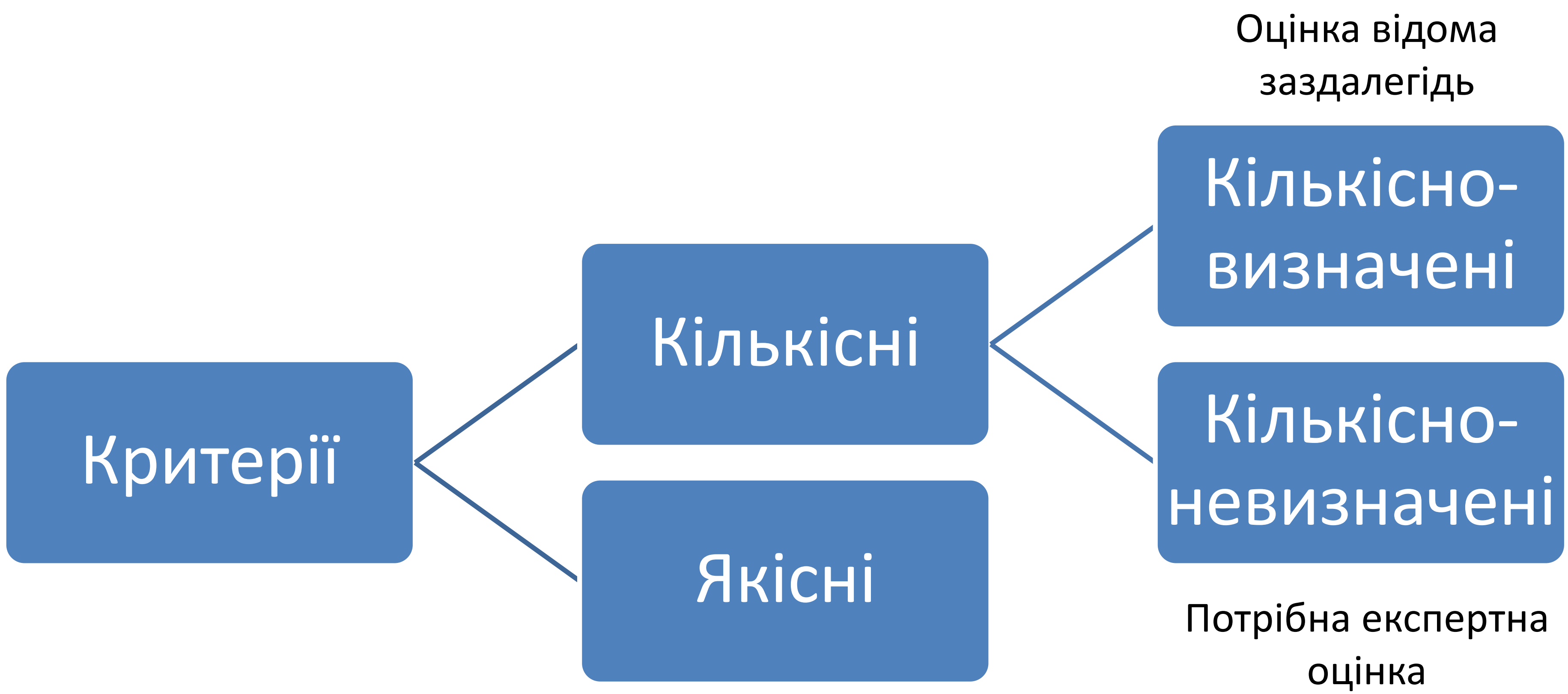
Методи однокритеріального оцінювання альтернатив

Савченко Ілля Олександрович
ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

Види експертної інформації



Види критеріїв



Постановка задачі оцінювання альтернатив

Пріоритет

Коефіцієнт відносної важливості $w \in R,\ w > 0$

Більше значення свідчить про більшу важливість відповідного об'єкту

Ваги $\{w_i \mid i = 1,...,n\}$ є нормованими, якщо $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

- Дано:

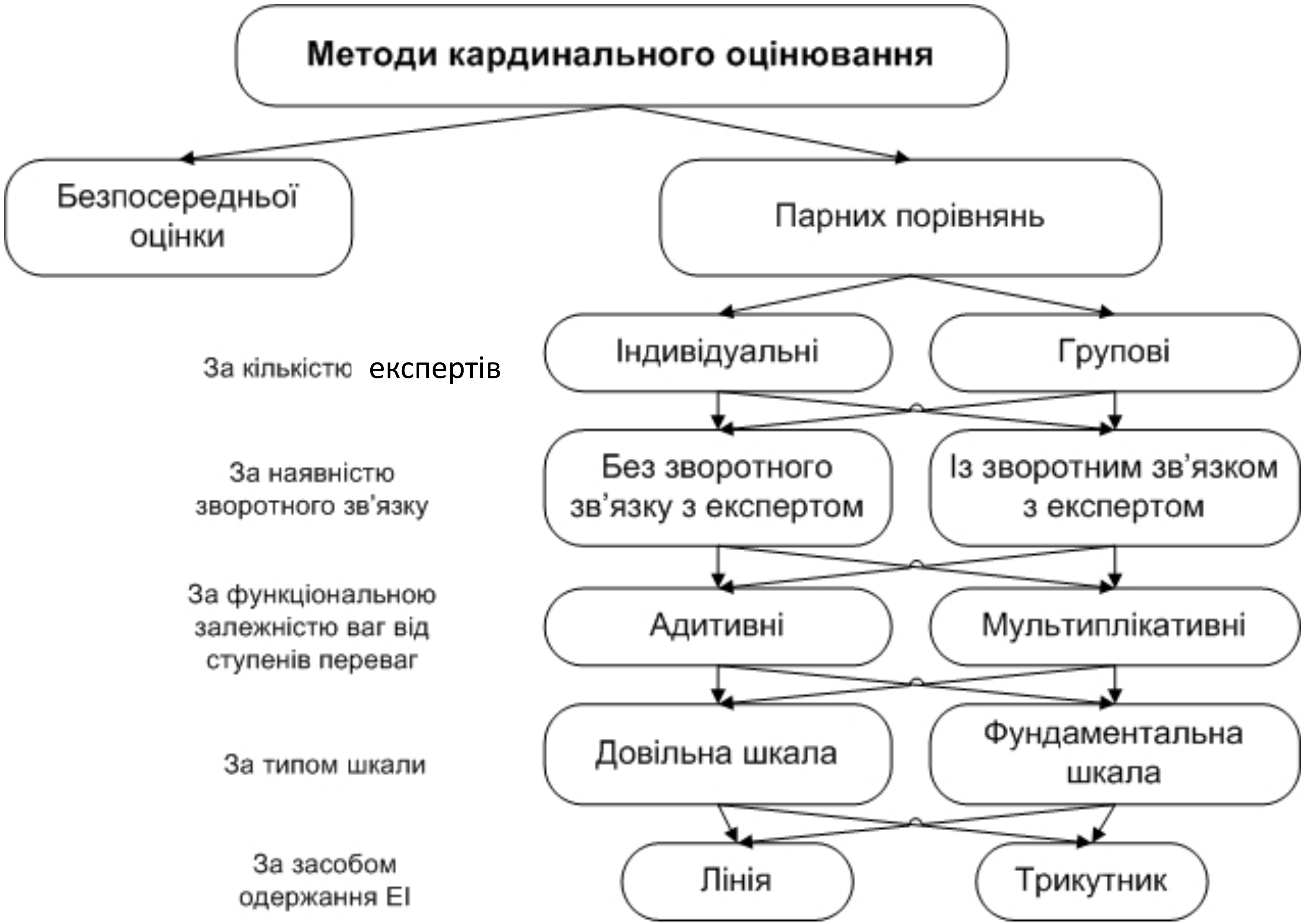
$A = \{a_i \mid i = 1,...,n\}$ – множина альтернатив рішень;

C – критерій.

- Знайти:

$W = \{w_i \mid i = 1,...,n\}$ – ваги альтернатив

Методи розв’язання задачі



Метод безпосереднього оцінювання

1. Експерт привласнює кожній альтернативі a_i число (ранг, бал, вагу) v_i за певною шкалою, яке, на його думку, відбиває ступінь властивості, представленої критерієм C

$$a_i \to v_i,\ i \in [1, n]$$

2. Нормування $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$

Метод безпосереднього оцінювання

Недоліки:

- значні похибки, коли альтернативи досить близькі
- психологічно важче дати об’єктивну абсолютну оцінку
- різний результат при зміщенні оцінок по шкалі
- різні представлення у різних людей про значення шкали

Матриця попарних порівнянь

$$A = \{a_i \mid i = 1,\dots,n\}$$

$$D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,\dots,n\}$$

матриця парних порівнянь (МПП)

$d_{ij} \in R$ – величина переваги a_i над a_j відносно заданого критерію

Шкала вербальних суджень

Шкала вербальних суджень (S, X, f)

$S = \{s_k \mid k = 1, \ldots, K\}$ - градації шкали (судження)

$X = \{x_k \mid k = 1, \ldots, K\}$ - кількісні вираження градацій

$x_k \in R$

$d_{ij} = x_k$, якщо порівняння a_i з a_j описується судженням s_k

Фундаментальна шкала

Кількісні вираження градацій x_k	Градації шкали (судження s_k)	Пояснення
1	Однаково важливі	Елементи рівні за своїм значенням
3	Слабка перевага	Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного елементу над іншим, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Сильна перевага	Існують докази та логічні критерії, які можуть показати, що один з елементів більш важливий
7	Дуже сильна перевага	Існує переконливий доказ великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим
9	Абсолютна перевага	Усвідомлення пріоритету одного елементу над іншим максимально підтверджується
2, 4, 6, 8	Проміжні значення	

Функціональна залежність ваг від величин переваг

$$d_{ij} \approx f(w_i, w_j)$$

$$f(w_i, w_j) = w_i / w_j$$

Мультиплікативні
парні порівняння

$$f(w_i, w_j) = w_i - w_j$$

Адитивні
парні порівняння

Властивість оберненої симетричності

$$d_{ji} = 1 / d_{ij}$$

$$d_{ij} > 0$$

$$d_{ji} = -d_{ij}$$

Узгоджена МПП

Мультиплікативна

$$\forall i, j, k \quad d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$$

Твердження. МПП

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

є узгодженою.

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k} \frac{w_k}{w_j} = d_{ik} d_{kj}$$

Властивість узгодженості

Адитивна

$$\forall i, j, k \quad d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$$

Твердження. МПП

$$d_{ij} = w_i - w_j$$

є узгодженою.

$$d_{ij} = w_i - w_j =$$

$$= (w_i - w_k) + (w_k - w_j) = d_{ik} + d_{kj}$$

Приклади

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Порушення транзитивності

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$a_1 \succ a_2, a_2 \succ a_3$ але $a_1 \prec a_3$

- Найбільш неузгоджені експертні оцінки, які призводять до нетранзитивних ранжувань, будемо називати <u>викидами</u>.

Метод ЕМ (eigenvector method) розрахунку ваг альтернатив

- Використовується мультиплікативна МПП

- Вектором ваг w є власний вектор заповненої експертом мультиплікативної МПП D, який відповідає її найбільшому власному числу

$$Dw = \lambda_{\max} w$$

Метод ЕМ для узгодженої МПП

$$Dw = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw$$

$$Dw = nw \quad \Leftrightarrow \quad (D - nI)w = 0$$

$\det(D - nI) = 0 \quad \Leftrightarrow$ Система рівнянь має нетривіальний розв'язок

Побудова міри узгодженості МПП

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij} \qquad \varepsilon_{ij} > 0, \quad \varepsilon_{ii} = 1 \qquad \varepsilon_{ji} = d_{ji}\frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{d_{ij}}\frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}}$$

$$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\frac{w_j}{w_i} = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}$$ (i-й компонент матричної рівності $Dw = \lambda_{\max} w$)

$$n\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}\right) \geq n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2$$

$$\lambda_{\max} \geq n$$

$$\mu = -\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i$$ (середнє значення неголовних власних чисел МПП D із знаком “–”)

$$\sum_{i}\lambda_i = trD = n \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

Відношення узгодженості CR

$$CR = \frac{CI}{MRCI} \qquad CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

- CI - індекс узгодженості МПП, заповненої експертом
- $MRCI$ - індекс випадкової узгодженості

n	Порогове значення CR
3	0,05
4	0,08
≥5	0,1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$MRCI$	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59

Теоретична і практична узгодженість

- Теоретична узгодженість: виконується властивість узгодженості

$$\forall i, j, k \quad d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$$

- Практична узгодженість (припустима неузгодженість): значення показника узгоженості не перевищує порогове

$$CR \leq CR_{поріг}$$

Методи оптимізації парних порівнянь

$$d_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}$$

Методи найменших квадратів

Задача 1

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} - w_i / w_j)^2$$

Задача 2

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} w_j - w_i)^2$$

Задача 3

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln d_{ij} - \ln v_i + \ln v_j)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad w_i > 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\prod_{i=1}^{n} v_i = 1 \qquad v_i > 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

Метод RGMM (row geometric mean method) парних порівнянь

- **Твердження.** Розв'язок задачі 3

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}$$

ненормовані ваги

$$w_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}}$$

нормовані ваги

Методи EM і RGMM

Твердження. Для будь-якої мультиплікативної МПП 3x3 ваги, розраховані за RGMM і EM, співпадають.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}$$

$$Dv = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{ab} \\ \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}} \\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{bc}} \end{pmatrix} = \left(1 + \sqrt[3]{\frac{ac}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{ca}} \right) \begin{pmatrix} \sqrt[3]{ab} \\ \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}} \\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{bc}} \end{pmatrix} = \lambda v$$

Методи EM і RGMM

$$Dv=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 1/a & 1 & c\\ 1/b & 1/c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt[3]{ab}\\ \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{bc}}\end{pmatrix}=\left(1+\sqrt[3]{\frac{ac}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{ca}}\right)\begin{pmatrix}\sqrt[3]{ab}\\ \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}\\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{bc}}\end{pmatrix}=\lambda v$$

$$\lambda=\left(1+\sqrt[3]{\frac{ac}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{ca}}\right)\ge 1+2\sqrt{\sqrt[3]{\frac{ac}{b}}\sqrt[3]{\frac{b}{ca}}}=3=n \qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n$$

$$\lambda_{\max}=1+\sqrt[3]{\frac{ac}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{ca}}$$

Твердження. Якщо мультиплікативна МПП D узгоджена, тоді ваги, розраховані за RGMM і EM, співпадають.

Геометричний індекс узгодженості

- При використанні методу RGMM мірою неузгодженості МПП слугує незміщена оцінка дисперсії збурень

$$d_{ij} \approx \frac{v_i}{v_j} \qquad s^2 = \frac{S}{d.f} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\ln d_{ij} - \ln\frac{v_i}{v_j}\right)^2}{(n-1)(n-2)}$$

$d.f = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ – кількість ступенів свободи, яка дорівнює різниці між кількістю оцінок $n(n-1)/2$ і кількістю оцінюваних параметрів $n-1$.

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\ln^2 e_{ij} \qquad e_{ij} = d_{ij}v_j / v_i$$

Властивості GCI

- **Твердження**. Математичне сподівання GCI для заповненої випадковим чином МПП D при умові, що елементи МПП є незалежними у сукупності, обернено симетричними і мають однаковий розподіл, є постійною величиною, рівною $E(GCI) = Var(\ln d_{ij})$

Порогові значення GCI		
n=3	n=4	n≥5
0.1573	0.3526	0.370

Метод адитивної нормалізації (AN) парних порівнянь

$$D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,\dots,n\} \qquad s_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}$$

Метод AN: $v_i = 1 / s_i$

$$\widetilde{D} = \{\widetilde{d}_{ij} \mid i, j = 1,\dots,n\} \qquad \widetilde{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{s_j}$$

- **Твердження**. Матриця D узгоджена т.т.т.к. $\tilde{d}_{ij} = \tilde{d}_{i1} \quad \forall i, j$

Гармонічне відношення узгодженості *HCR*

- Гармонічна середня $$HM(s) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}}$$
  $s = \left\{ s_j \,\middle|\, j \in [1; n] \right\}$

- Гармонічний індекс узгодженості $$HCI(n) = \frac{\left(HM(s) - n\right)(n+1)}{n(n-1)}$$

- Гармонічне відношення узгодженості $$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)}$$

Порогові значення такі ж, як і для CR.

Метод “лінія” парних порівнянь

1. Експерт обирає еталонну альтернативу $a_e \in A$
   і порівнює з нею всі інші альтернативи $a_i \in A,\ i \neq e$

$$D_e = \{d_{ie} \mid i = 1,\ldots,n,\ i \neq e\}$$

2. $a_e \to v_e$
3. $v_i = \varphi(v_e, d_{ie})$ – монотонна функція

$v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ie})$ $\varphi_{mult}(1) = 1$ мультиплікативні порівняння $v_i = v_e d_{ie}$

$v_i = v_e + \varphi_{ad}(d_{ie})$ $\varphi_{ad}(0) = 0$ адитивні порівняння $v_i = v_e + d_{ie}$

4. Нормування: $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$

Спектральний підхід

Спектральний метод був початково розроблений для оцінювання узгодженості оцінок множини альтернатив за критерієм, наданих групою експертів при безпосередньому оцінюванні.

Розглянемо спочатку цей метод.

Потім розглянемо як цей метод використано для оцінювання узгодженості МПП, коли для розрахунку ваг використовується метод “лінія”.

Постановка задачі

Дано:

- $A = \{a_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ – множина альтернатив,
- C – критерій,
- $E = \{e_{ij} \mid i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m\}$ – множина (матриця) експертних оцінок (ЕО), m – кількість експертів.

Потрібно:

- кількісно оцінити узгодженість ЕО для a_i,
- визначити припустимість рівня неузгодженості ЕО для a_i.

Спектр експертних оцінок

Нехай S_N – шкала з N поділками.

Означення. Спектром ЕО E, які представлені в шкалі S_N, називається

$$R = \{r_k \mid k = 1, \dots, N\},$$

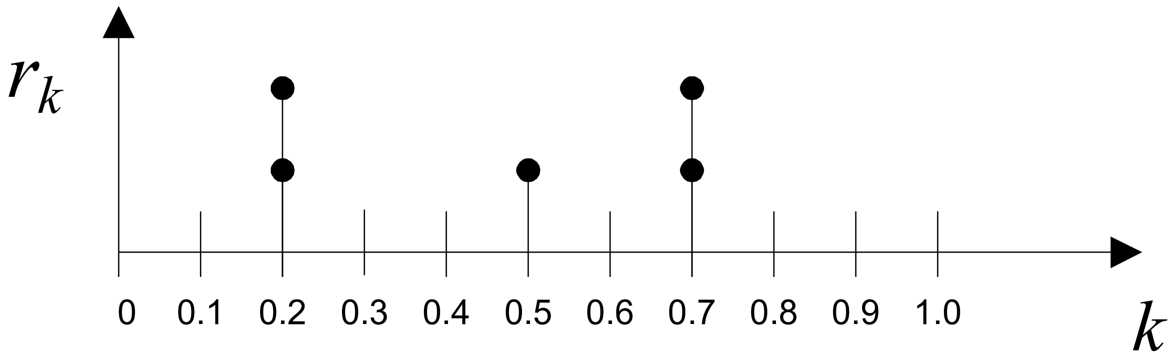
де r_k - кількість експертів, які вказали k-у поділку шкали в якості оцінки.

Приклад спектра

$$S_N = \{0, 0.1, 0.2, \ldots, 1\}, \qquad N = 11$$

$$E = (0.16 \quad 0.19 \quad 0.52 \quad 0.70 \quad 0.73) \qquad m = 5$$

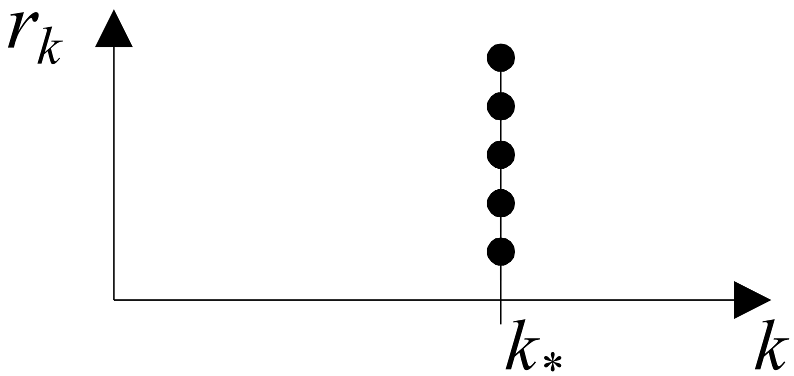
$$R = (0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$$ – спектр



Узгоджений спектр ЕО

- **Означення.** Спектр R називається узгодженим, якщо

$$\exists k_* : r_{k_*} = m$$



Неузгоджений спектр ЕО

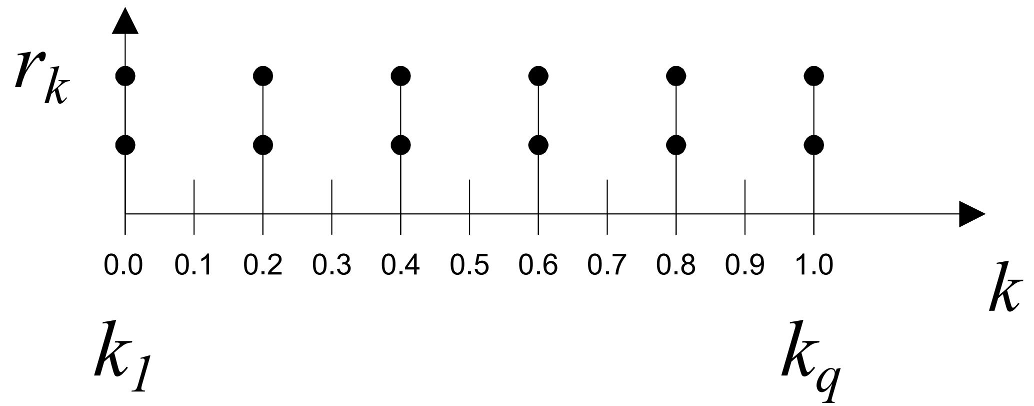
- **Означення.** Неузгодженим називається спектр ЕО, який не несе інформації:

$$R = \{r_k \mid r_{k_d} \neq 0,\ \ d = 1,\ldots,q\}$$

$$r_1 = r_N \neq 0$$

$$\bigwedge_{d=1}^{q-1}(r_{k_d} = r_{k_{d+1}})$$

$$\bigwedge_{d=1}^{q-1}(k_d - k_{d+1} = const)$$

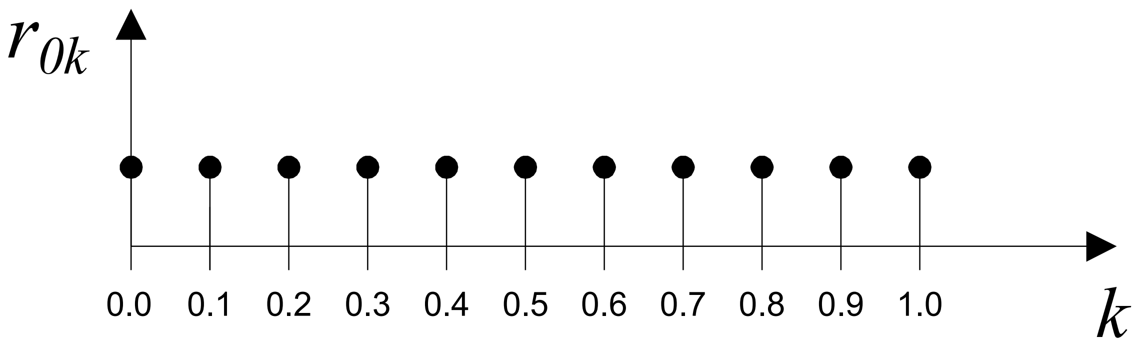


Неузгоджений спектр ЕО

- **Означення.** Неузгодженим нормованим спектром називається

$$R_0 = \{r_{0k} \mid k = 1, \ldots, N\}, \forall k\ r_{0k} = 1$$

$$m = N$$



Спектральний коефіцієнт узгодженості

Перший компонент

Функція ентропії: $H = -\sum_{k=1}^{N} p_k \ln p_k \qquad p_k = \frac{r_k}{m}$

$$\varphi(R) = -\sum_{k=1,\, r_k \neq 0}^{N} \frac{r_k}{m} \ln \frac{r_k}{m}$$

$$\varphi(R^*) = -\frac{m}{m} \ln \frac{m}{m} = 0 \qquad \varphi(R_0) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = \ln N$$

Спектральний коефіцієнт узгодженості

Другий компонент

Сума зважених відстаней до середньої оцінки

$$\psi(R) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} r_k \,|k - a|$$

$$a = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} k r_k$$

$$a_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2m} = \frac{N+1}{2}$$

$$\psi(R_0) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} \left| k - \frac{N+1}{2} \right|$$

Спектральний коефіцієнт узгодженості

$$k_y(R) = f(\varphi(R), \psi(R)) \qquad k_y(R) \in [0; 1]$$

$$k_y(R) = 1 - \frac{\eta(R)}{\eta(R_0)}$$

$\eta(\varphi, \psi)$ – монотонна функція $\qquad \eta(\varphi, \psi) = \varphi + \psi$

$$k_y(R) = 1 - \frac{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} r_k\,|k-a| - \sum_{k=1, r_k \neq 0}^{N} \frac{r_k}{m} \ln \frac{r_k}{m}}{G\sum_{k=1}^{N} |k - \frac{N+1}{2}| + \ln N} \qquad G = \frac{m}{N \ln m \ln N}$$

Приклад

$$E = \begin{pmatrix} 0.207 & 0.182 & 0.400 & 0.182 \\ 0.621 & 0.545 & 0.400 & 0.545 \\ 0.069 & 0.182 & 0.133 & 0.182 \\ 0.103 & 0.091 & 0.067 & 0.091 \end{pmatrix}$$

e_{ij} – оцінка, надана j-м експертом для a_i

$S_N = \{0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots,\ 1\}$ – шкала з N=11 поділками

$$R_1 = (0,0,3,0,1,0,0,0,0,0,0) \qquad k_y(R_1) = 0,769$$

$$R_2 = (0,0,0,0,1,2,1,0,0,0,0) \qquad k_y(R_2) = 0,729$$

$$R_3 = (0,2,2,0,0,0,0,0,0,0,0) \qquad k_y(R_3) = 0,790$$

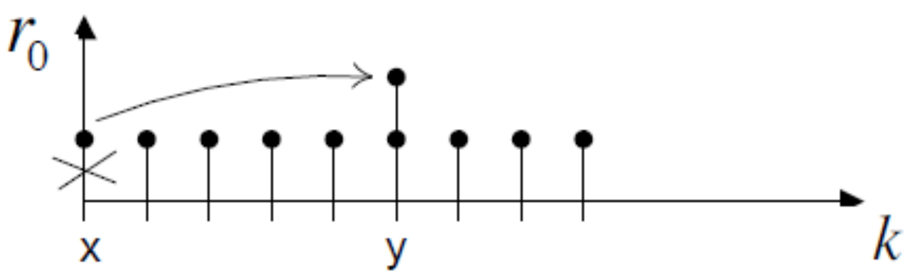
$$R_4 = (0,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0) \qquad k_y(R_4) = 1,000$$

Порогові значення спектрального коефіцієнта узгодженості

- Чи містять ЕО інформацію, чи є шумом?
- Чи припустимий рівень неузгодженості ЕО?
- Чи забезпечують ЕО отримання агрегованої (групової) оцінки із достатньою точністю?

Поріг виявлення

- **Означення.** Порогом виявлення T_0 називається значення k_y експертних оцінок, які містять мінімальну кількість інформації.



$$a = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} k r_k$$

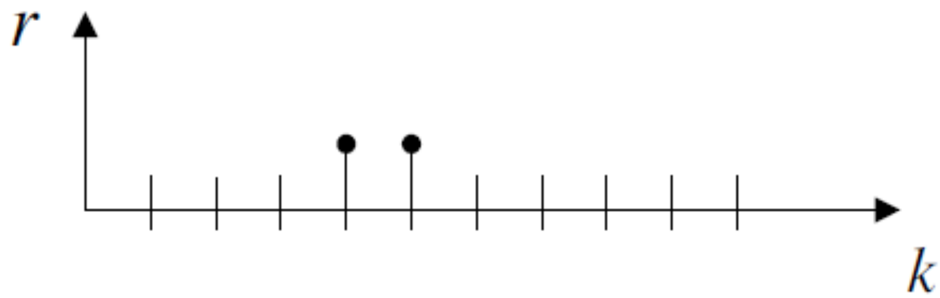
$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N+1}{2}$$

$a - a_0 = \delta$ $\quad (a_0 - \frac{x}{N} + \frac{y}{N}) - a_0 = \delta$ $\quad x = 1$

$\delta := 0,5$ $\quad \frac{y-1}{N} = \frac{1}{2}$ $\quad y = round\left(\frac{N}{2}\right) + 1$

Поріг застосування

- **Означення.** Порогом застосування T_u називається значення k_y експертних оцінок, які забезпечують обчислення агрегованої (групової) оцінки із припустимою точністю



Спектр припустимої точності

Критерії припустимості неузгодженості ЕО

- $k_y(E) < T_0$ – ЕО E не несуть інформації (потрібна організація зворотного зв’язку – перегляд експертом всіх елементів множини E)
- $T_0 \le k_y(E) < T_u$ – інформація в ЕО E є, але недостатньо узгоджена (потрібна організація зворотного зв’язку – перегляд окремих елементів множини E)
- $k_y(E) \ge T_u$ – ЕО припустимо неузгоджені і забезпечують отримання агрегованої (групової) оцінки із достатньою точністю

Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП

Постановка задачі

Дано:

- $A = \{a_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ – множина альтернатив,
- C – критерій,
- $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ – мультиплікативна МПП.

Потрібно:

- Знайти $k_y(D)$

МПП, породжена рядком (стовпчиком)

Означення. МПП, породженою h-м рядком МПП D, називається така матриця $D^{(h)}$:

$$D^{(h)} = \{d_{ij}^{(h)} = d_{ih}d_{hj} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & \frac{9}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad D_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{5} & 3 & 9 \\ \frac{5}{9} & 1 & \frac{5}{3} & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Твердження. Узгоджена МПП D співпадає з усіма своїми породженими матрицями:

$$D = D^{(1)} = D^{(2)} = \ldots = D^{(n)}$$

Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП

Означення. $$k_y(D) = \min_{i=1,\dots,n} k_y(R_i)$$

$$a_i \longrightarrow v_i = \{v_i^{(h)} \mid h = 1,\dots,n\} \longrightarrow k_y(R_i)$$

Ваги – методом “лінія” із h-го стовпчика.

Твердження. Для узгодженої МПП D $k_y(D) = 1$

Приклад

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & \frac{9}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad D_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{5} & 3 & 9 \\ \frac{5}{9} & 1 & \frac{5}{3} & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Ваги методом “лінія”: $(0.552, 0.276, 0.110, 0.061)$ $(0.566, 0.283, 0.094, 0.057)$ $(0.5, 0.278, 0.167, 0.056)$

$(0.536, 0.321, 0.107, 0.036)$

$$S_N = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$$

$v_1 = (0.552, 0.566, 0.536, 0.5)$ $\quad R_1 = (0,0,0,0,0,2,2,0,0,0,0)$ $\quad k_y(R_1) = 0.790$

$v_2 = (0.276, 0.283, 0.321, 0.278)$ $\quad R_2 = (0,0,0,4,0,0,0,0,0,0,0)$ $\quad k_y(R_2) = 1$

$v_3 = (0.110, 0.094, 0.107, 0.167)$ $\quad R_3 = (0,3,1,0,0,0,0,0,0,0,0)$ $\quad k_y(R_3) = 0.835$

$v_4 = (0.061, 0.057, 0.036, 0.056)$ $\quad R_4 = (1,3,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ $\quad k_y(R_4) = 0.835$

$$k_y(D) = \min_{i=1,\dots,4} k_y(R_i) = 0.790$$