Chapter 1

Hamilton 形式化

前面一章主要讨论了经典场论的 Lagrange 形式化，正如在 Noether 定理那里看到的一样，在 Lagrange 形式化下，对称性是比较容易分析的。这章我们来讨论 Hamilton 形式化，当我们想要量子化一个经典场，Hamilton 形式化就会更加实用，一方面因为 Hamilton 算子在量子力学里面是自然的，另一方面，Possion 括号和对易子存在方便的对应。这章假设 $c = 1$。

1.1 正则方程和 Possion 括号

从经典力学中已经得知，对于 L_t，运动方程即 Lagrange 方程写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_t}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L_t}{\partial q^a} = 0.$$

广义坐标 q^a 对应的广义动量定义为

$$p_a = \frac{\partial L_t}{\partial \dot{q}^a}.$$

而 Hamiltonian 定义为

$$H(p_a, q^a) = p_a \dot{q}^a - L_t,$$

其中所有的量都应该写成 p_a 和 q^a 的函数。此时运动方程，即 Hamilton 方程写作

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}, \quad \dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}.$$

这些都是大家熟悉的。

Possion 括号 $[\star, \star]_{\mathrm{P}}$ 定义如下[1]

$$[F, G]_{\mathrm{P}} = \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q^a},$$

[1] 量子化时，$\hbar[\star, \star]_{\mathrm{P}} \to [\star, \star]/i$，后者是算符之间的对易子。

所以 $[p_a,q^b]_{\mathrm{P}}=-\delta_a^b$ 以及

$$\dot f(t,p,q)=\frac{\partial f}{\partial t}-[H,f]_{\mathrm{P}},$$

此时运动方程写作

$$\dot p_a=[p_a,H]_{\mathrm{P}},\quad \dot q^a=[q^a,H]_{\mathrm{P}}.$$

用一个例子，我们来演示如何将这套用在场论里。假设有 N 个质点，他们处于一条直线上且相距为 a，之间有劲度系数相同的轻弹簧相连，静止时总长为 L。对于这样一个系统，选取每个质点离开原点的的位移量 x_n 作为广义坐标，此时的 Lagrangian 写作

$$L_t=\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\dot x_i^2-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{m\omega^2}{2}(x_{i+1}-x_i-a)^2,$$

设 $x_i=(i-1)a+\phi_i$，这就是说 ϕ_i 是第 i 个质点偏离其初始位置的位移，此时 Lagrangian 写作

$$L_t=\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\dot\phi_i^2-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{m\omega^2}{2}(\phi_{i+1}-\phi_i)^2.$$

现在假设 N 很大，做变换

$$\phi_n\to\sqrt{a}\phi(x)\big|_{x=na},\quad \phi_{n+1}-\phi_n\to a^{3/2}\partial_x\phi(x)\big|_{x=na},\quad \sum_i\to\frac{1}{a}\int_0^L\mathrm{d}x,$$

则系统的 Lagrangian 可以近似写作

$$L_t=\int_0^L\mathrm{d}x\left(\frac{m}{2}\dot\phi^2-\frac{m\omega^2a^2}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2\right),$$

即

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\dot\phi^2-\frac{m\omega^2a^2}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2. \tag{1.1}$$

计算原来系统的广义动量

$$\pi_n=\frac{\partial L_t}{\partial\dot\phi_n}=m\dot\phi_n, \tag{1.2}$$

所以 Hamilton 写作

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{\pi_i^2}{2m}+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{m\omega^2}{2}(\phi_{i+1}-\phi_i)^2,$$

一样得，在大 N 下作变换可以得到近似

$$H=\int_0^L\mathrm{d}x\left(\frac{\pi^2}{2m}+\frac{m\omega^2a^2}{2}\left(\partial_x\phi\right)^2\right). \tag{1.3}$$

从(1.2)来看，在大 N 下，有 $\pi(x)=m\dot\phi(x)$，广义坐标们变成了场 $\phi(x)$ 而广义动量则变成了另一个场 $\pi(x)$，从(1.1)中容易读出

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} \tag{1.4}$$

以及从(1.3)中读出

$$H = \int_0^L \mathrm{d}x\, \pi\dot{\phi} - L_t.$$

可见，到了场论，为了完成 Hamilton 形式化，就必须利用(1.4)去寻找 ϕ 的对偶场 π，这就如同在经典力学里面去寻找广义动量一样。找到对偶场之后，将原本的场关于时间的导数反解出来，就写出了 Hamiltonian.

上面这个例子挺有趣的, 他用经典理论建立了一个简单的一维固体的模型, 可以看作将场论引入凝聚态中的一个最简单的例子。继续他的求解只要写出场方程（是声波的波动方程）即可，这里略去。下面转而使用变分法给出场的 Hamilton 形式化的推导。

对于任何场 $Q^a(\boldsymbol{x},t)$ 的泛函 $F\big[Q^a(t)\big]$，通过

$$\delta F\big[Q^a(t)\big] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\delta F\big[Q^a(t)\big]}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)}\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)$$

可以定义变分算符

$$\frac{\delta F\big[Q^a(t)\big]}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)}, \tag{1.5}$$

对于固定的 $\boldsymbol{x}$，那么 $Q^a(\boldsymbol{x},t)$ 也是一种泛函[2]，所以很容易从定义中得到

$$\frac{\delta Q^a(\boldsymbol{x}',t)}{\delta Q^b(\boldsymbol{x},t)} = \delta^a_b \delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}).$$

如果有不止一个可以独立变分的场（比如 Lagrangian 中的 $\dot{Q}^a$ ），那么(1.5)中就有对其他可以独立变分的场的项。

下面开始正式推导。首先作用量是场的泛函

$$S[Q^a,\dot{Q}^a] = \int \mathrm{d}t\, L_t\big[Q^a(t),\dot{Q}^a(t)\big],$$

做变分应该有

$$\delta S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \left(\frac{\delta L_t}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)}\delta Q^a(\boldsymbol{x},t) + \frac{\delta L_t}{\delta \dot{Q}^a(\boldsymbol{x},t)}\delta\dot{Q}^a(\boldsymbol{x},t)\right),$$

使用分部积分，然后去掉边界项，就得到了

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\, \left(\frac{\delta L_t}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta L_t}{\delta \dot{Q}^a(\boldsymbol{x},t)}\right)\delta Q^a(\boldsymbol{x},t),$$

作用量原理告诉我们，场方程写作

$$\frac{\delta L_t}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta L_t}{\delta \dot{Q}^a(\boldsymbol{x},t)} = 0. \tag{1.6}$$

---

[2]或者写作

$$Q^a(\boldsymbol{x},t) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\, Q^a(\boldsymbol{x}',t)\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}),$$

所以对于固定的 $\boldsymbol{x}$，$Q^a(\boldsymbol{x},t)$ 是一个泛函。

按照一般的假设，$x=(\boldsymbol{x},t)$ 和

$$L_t=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{L}\big[Q^a(x),\nabla Q^a(x),\dot{Q}^a(x)\big],$$

对他变分

$$\delta L_t=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^a}\delta Q^a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i Q^a}\delta\partial_i Q^a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}^a}\delta\dot{Q}^a\right),$$

分部积分并去掉边界项

$$\delta L_t=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^a}-\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i Q^a}\right)\delta Q^a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}^a}\delta\dot{Q}^a\right],$$

所以

$$\frac{\delta L_t}{\delta Q^a}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^a}-\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i Q^a},\quad \frac{\delta L_t}{\delta\dot{Q}^a}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}^a}. \tag{1.7}$$

观察(1.7)的第二项为

$$\frac{\delta L_t}{\delta\dot{Q}^a(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}^a}(x)=P_a(x).$$

至此，利用变分算符，我们重新改写了对偶场的定义。从(1.7)和对偶场的定义可以看到，粒子的 Lagrange 描述到场的 Lagrange 描述，只需要将偏导数算符转为变分算符就可以了。如果利用(1.7)，代入场方程(1.6)就得到了熟知的场方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^a}-\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu Q^a}=0.$$

利用变分算符，对于场论的 Hamilton 形式化就可以如下进行，首先寻找对偶场

$$\frac{\delta L_t}{\delta\dot{Q}^a(x)}=P_a(x),$$

然后使用 P_a 和 Q^a 反解出 $\dot{Q}^a$，构造 Hamiltonian

$$H\big[Q^a(t),P_a(t)\big]=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,P_a(x)\dot{Q}^a(x)-L_t\big[Q^a(t),\dot{Q}^a(t)\big],$$

此时正则方程写作

$$\dot{P}_a(x)=-\frac{\delta H}{\delta Q^a(x)},\quad \dot{Q}^a(x)=\frac{\delta H}{\delta P_a(x)}.$$

我们还可以如下定义场论的 Possion 符号

$$\big[F[Q^a(t),P_a(t)],G[Q^a(t),P_a(t)]\big]_{\mathrm{P}}=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left(\frac{\delta F}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)}\frac{\delta G}{\delta P_a(\boldsymbol{x},t)}-\frac{\delta F}{\delta P_a(\boldsymbol{x},t)}\frac{\delta G}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)}\right),$$

此时

$$\big[F,P_a(\boldsymbol{x},t)\big]=\frac{\delta F}{\delta Q^a(\boldsymbol{x},t)},\quad \big[Q^a(\boldsymbol{x},t),F\big]=\frac{\delta F}{\delta P_a(\boldsymbol{x},t)}.$$

1.2 Hamilton 形式化的困难：约束系统

强匀强磁场中的电荷

前面已经知道，电磁场中的电荷的 Lagrangian 写作

$$L_t = -mc^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - e\varphi,$$

如果磁场足够大，那么就可以无视掉动能项，只留下

$$L_t = e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - e\varphi,$$

假设磁场是匀强，且方向为 $\hat{\boldsymbol{z}}$，设

$$\boldsymbol{A} = \frac{B_0}{2}(x\hat{\boldsymbol{y}} - y\hat{\boldsymbol{x}}) - e\varphi,$$

所以

$$L_t = \frac{eB_0}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - e\varphi.$$

假设 φ 不显含 z 坐标，这样就可以顺便无视掉 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向的匀速运动。我们考察这样一个二维系统。

首先 Lagrange 方程写作

$$B_0\dot{y} = \partial_x\varphi, \quad B_0\dot{x} = -\partial_y\varphi.$$

这就是正确的运动方程。

按照标准的 Legendre 变换，先计算正则动量

$$p_x = \partial_{\dot{x}}L_t = -\frac{eB_0}{2}y, \quad p_y = \partial_{\dot{y}}L_t = \frac{eB_0}{2}x.$$

然后

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L_t = \frac{eB_0}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) - L_t = e\varphi(x,y).$$

不用继续做下去了，首先 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 不能用 p_x 和 p_y 反解出来，此外，即使写出了 Hamiltonian，因为他不显含正则动量，利用正则方程得到的运动方程是 $\dot{x}=0$ 和 $\dot{y}=0$，显然这和上面使用 Lagrange 方程确定的正则方程是不同的。

重新审视正则动量 $p_x = -eB_0y/2$ 和 $p_y = eB_0x/2$，他所有的变量不是正则坐标就是正则动量，所以这两个方程

$$f_1(x,y,p_x,p_y) = p_x + \frac{eB_0}{2}y = 0,$$
$$f_2(x,y,p_x,p_y) = p_y - \frac{eB_0}{2}x = 0,$$

在相空间确定了一个曲面，而 Hamiltonian 是在这个曲面上写成 $e\varphi(x,y)$. 因此，在整个相空间上，Hamiltonian 具有形式

$$H = e\varphi + \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2.$$

这样去写正则方程，给出

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= -\partial_x H = -e\partial_x\varphi - f_1\partial_x\eta_1 - f_2\partial_x\eta_2 + \frac{eB_0}{2}\eta_2,\\ \dot{x} &= \partial_{p_x} H = f_1\partial_{p_x}\eta_1 + f_2\partial_{p_x}\eta_2 + \eta_1,\end{aligned}$$

代入约束 $f_1 = 0, f_2 = 0$，那么给出第一组正则方程为

$$\dot{p}_x = -e\partial_x\varphi + \frac{eB_0}{2}\eta_2, \quad \dot{x} = \eta_1,$$

同理可以给出第二组曲面上的正则方程

$$\dot{p}_y = -e\partial_x\varphi - \frac{eB_0}{2}\eta_1, \quad \dot{y} = \eta_2.$$

再利用约束 $p_x = -eB_0 y/2$ 和 $p_y = eB_0 x/2$，就得到了

$$\begin{aligned}-\frac{eB_0}{2}\dot{y} &= -e\partial_x\varphi + \frac{eB_0}{2}\dot{y},\\ \frac{eB_0}{2}\dot{x} &= -e\partial_y\varphi - \frac{eB_0}{2}\dot{x},\end{aligned}$$

这正是正确的运动方程。

电磁场

也许上面一个系统是因为我们无视掉了二次的动能项而导致的约束，那么电磁场的约束更加本质而且难以避免，即 $F^{00} = 0$。

写出电磁场的 Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 1A_\mu J^\mu,$$

求其对偶场

$$\Pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0 A_\mu} = -\frac{1}{8\pi}F^{\rho\nu}\frac{\partial}{\partial\partial_0 A_\mu}F_{\rho\nu} = -\frac{1}{4\pi}F^{0\mu},$$

所以有自然的约束 $\Pi^\mu = 0$. 这就意味着接下来如果用

$$H = \int \mathrm{d}^4\boldsymbol{x}\,\left(\Pi^\mu\dot{A}_\mu - \mathcal{L}\right)$$

来写出 Hamiltonian 时，无法用 Π^μ 和 A_μ 解出全部的 $\dot{A}_\mu$.

1.3 Dirac 括号

假设一些数学上可能出现的问题这里都不会出现，再假设系统的 Hamiltonian 不含时，即这是一个能量守恒系统。对于经典力学而言，广义动量和广义坐标之间的约束就是确定了一个相空

间之中的曲面，如果（至少在局部）能够选取新的广义动量和广义坐标，那么我们就又得到了一个无约束系统，他的运动方程直接由新坐标和动量的正则方程确定，这样、就解决了约束问题。这节的主要内容基于 Toshihide Maskawa 和 Hideo Nakajima 的论文 *Singular Lagrangian and the Dirac-Faddeev Method— Existence Theorem of Constraints in 'Standard Form'*.

为描述 Hamilton 力学，辛几何是方便的。辛几何默认存在了一个闭的非退化 2-形式

$$\Omega = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p^i \wedge \mathrm{d}q^i, \tag{1.8}$$

通过这个 2-形式，可以定义一个从光滑函数到矢量场的映射 $f \mapsto X_f$ 通过

$$\Omega(X_f, Y) = \mathrm{d}f(Y) = Yf, \tag{1.9}$$

其中 Y 是任意矢量场，而 f 是一个光滑函数。

在局部，选取一个坐标卡，2-形式 Ω 写作

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j,$$

其中 $\Omega_{ij} = [x^i, x^j]$，不妨再通过 $\Omega^{ij}\Omega_{jk} = -\delta^i_k$ 定义 Ω^{ij}，这样 X_f 就写作

$$X_f = \Omega^{ij}\partial_j f \partial_i.$$

对于这样一个矢量场，可以通过

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g^t_f(x) = X_f(x)$$

给出他的相流（单参同胚映射）g^t_f.

通过 2-形式 Ω，Possion 括号就可以写成坐标无关的形式

$$[f, g]_{\mathrm{P}} = \Omega(X_f, X_g) = -X_f g. \tag{1.10}$$

使用 Possion 括号，则

$$\Omega^{ij} = \left[x^i, x^j\right]_{\mathrm{P}}, \quad X_f = -[f, x^i]\partial_i,$$

且 Possion 括号和矢量场之间的 Lie 括号的关系为

$$[X_f, X_g] = -X_{[f,g]_{\mathrm{P}}}. \tag{1.11}$$

靠着相流的语言，可以证明

$$[F, G]_{\mathrm{P}}(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F\big(g^t_G(x)\big),$$

如果 $[F, G]_{\mathrm{P}} = 0$，则称 F 和 G 相互对合。从相流方面来看，F 和 G 相互对合就是指 F 是 G 的相流的首次积分，这个很容易从上面式子的右侧看出来，同时，因为 $[G, F]_{\mathrm{P}} = -[F, G]_{\mathrm{P}} = 0$，所以 G 也是 F 的相流的首次积分，因此称为相互。

现在有 N 个约束 $\{f^i\}$，他决定了一个曲面 $M = M(f)$，我们只考虑矩阵 $[f^i, f^j]_{\mathrm{P}}$ 在 M 上的限制 $[f^i, f^j]_{\mathrm{P}}|_M$ 常秩的情况，设他的秩为 m。适当对约束进行线性组合，不妨将 $[f^i, f^j]_{\mathrm{P}}|_M$ 看作块对角矩阵，除去右下角的 $m \times m$ 矩阵之外的矩阵元都是 0，他的行列式不为 0，但因为他是反对称的，所以 m 必须是偶数，记 $m = 2s$ 以及 $r = N - 2s$，此时我们称这个约束 M 是 (r, s) 型约束。其中 r 指的是第一类约束，对应于 $[f^i, \eta]_{\mathrm{P}}|_M = 0$ 的情况，其中 $\eta = a_i f^i$，a_i 是任意函数。而 s 指的是第二类约束，即除了第一类约束的约束。

现在假设有 (r, s) 型约束 $\{\phi^i, \psi^\alpha\}$，其中 $\{\phi^i\}$ 是第一类约束，而 $\{\psi^\alpha\}$ 是第二类约束，定义

$$V = \left\{c_i \phi^i + d_\alpha \psi^\alpha : c_i,\, d_\alpha \text{ are arbitrary functions.}\right\},$$

那么

$$A = \left\{g : [g, V]_{\mathrm{P}} \subseteq V\right\}$$

是那些满足 $[g, V]_{\mathrm{P}}|_M = 0$ 的函数的集合，他构成一个代数，加法乘法显然，至于 Possion 括号来自于 Jacobi 恒等式。可以看到，第一类约束属于 $V_0 = A \cap V$. 他是 A 的子代数且满足 $AV_0 \subseteq V_0$ 和 $[A, V_0]_{\mathrm{P}} \subseteq V_0$，所以 V_0 是 A 的理想，可以顺便搞一个商代数 $A^* = A/V_0$. 值得一提的是，在 V_0 中还能有第二类约束的高阶项。

设第一类约束 ϕ^i 以及 $f \in A$, 则 $[f, \phi^i]_{\mathrm{P}}|_M = 0$。反过来，如果有一个函数 g 满足 $g|_M = f|_M$ 且对所有的第一类约束都有 $[g, \phi^i]_{\mathrm{P}}|_M = 0$，可以计算有

$$[g, \psi^\alpha]_{\mathrm{P}}|_M = [g, \psi^\mu]_{\mathrm{P}}|_M \delta_\mu^\alpha,$$

定义矩阵 $D_{\mu\nu}$ 是矩阵 $[\psi^\mu, \psi^\nu]_{\mathrm{P}}$ 的逆矩阵，即满足 $D_{\mu\nu}[\psi^\nu, \psi^\alpha]_{\mathrm{P}} = \delta_\mu^\alpha$，那么

$$[g, \psi^\alpha]_{\mathrm{P}}|_M = \big([g, \psi^\mu]_{\mathrm{P}} D_{\mu\nu} [\psi^\nu, \psi^\alpha]_{\mathrm{P}}\big)|_M,$$

构造

$$g^* = g - [g, \psi^\mu]_{\mathrm{P}} D_{\mu\nu} \psi^\nu,$$

容易验证 $[g^*, \psi^\mu]_{\mathrm{P}}|_M = 0$，即 $g^* \in A$，以及 $g^*|_M = g|_M = f_M$，所以 g^* 和 f 最多只是差了一个 V_0 中的元素，而在 A^* 是唯一确定的。这样我们就看到，所有满足 $[g, \phi^i]_{\mathrm{P}}|_M = 0$ 中的函数 g 都唯一确定了 A^* 中的元素 g^*。

下面首先要消除所有的第一类约束。

Theorem 1. *如果 M 是 (r, s) 型约束，那么存在一套正则坐标使得*

$$M = M(q^1, \cdots, q^{r+s}; p^{r+1}, \cdots, p^{r+s}).$$

即 M 由方程 $q^1 = 0, \cdots, q^{r+s} = 0$ 和 $p^{r+1} = 0, \cdots, p^{r+s} = 0$ 确定。

这个定理在原则上将一大类约束简化到了某些正则坐标为 0 的情况。对于原本的约束 $M = M(\phi^1, \cdots, \phi^r; \psi^1, \cdots, \psi^{2s})$，应该有

$$\phi^i = \sum_{j=1}^{r} A_j^i q^j + \sum_{k=1}^{2s} B_k^i \xi^k,$$

其中 $\{\xi^k\}=\{q^{r+1},\cdots,q^{r+s},p^{r+1},\cdots,p^{r+s}\}$，以及 $B^i_k\in A$ 且 $\det(A^i_j)\neq 0$.

如果函数 f（当然最重要的就是 H）满足 $[f,\phi^i]_{\mathrm{P}}|_M=0$，那么

$$[f,\phi^i]_{\mathrm{P}}|_M=\sum_{j=1}^r A^i_j|_M[f,q^j]_{\mathrm{P}}|_M=-\sum_{j=1}^r A^i_j|_M\left.\frac{\partial f}{\partial p^j}\right|_M,$$

所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial p^j}\right|_M=0.$$

对所有 $j\le r$ 成立，而 p^j 不是约束，那么

$$\frac{\partial f|_M}{\partial p^j}=\left.\frac{\partial f}{\partial p^j}\right|_M=0,$$

这就是说 $f|_M$ 不显含 p^j，所以我们可以对 $j\le r$ 取 $p^j=0$. 设对 $j\le r$ 选定 $p^j=0$ 构成的约束为 M'，那么系统就应该在约束 $M_0=M'\cap M=M_0(q^1,\cdots,q^{r+s};p^1,\cdots,p^{r+s})$ 内，这是一个 $(0,r+s)$ 型约束。这样我们就通过添加几个约束消去了全部的第一类约束。对任意的 g 都可以通过

$$g^*=g-[g,\psi^\mu]_{\mathrm{P}}D_{\mu\nu}\psi^\nu$$

构造一个 A^* 中的元素 g^*。他对 $i\le r+s$ 成立

$$g^*|_{M_0}=g|_{M_0},\quad \left.\frac{\partial g^*}{\partial q^i}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial g^*}{\partial p^i}\right|_{M_0}=0. \tag{1.12}$$

所以 g^* 就可以看成形式上无约束系统的物理量。

更一般地,如果系统已经选定了一套坐标 $\{\chi^1,\cdots,\chi^r,\eta^{s+1},\cdots,\eta^{2n}\}$,如果在 M 只有 $[\chi^i,\phi^j]_{\mathrm{P}}$ 可能不为零，那么按照上面的思路

$$[f,\phi^i]_{\mathrm{P}}|_M=\sum_{j=1}^r\left.\frac{\partial f}{\partial\chi^j}\right|_M[\chi^j,\phi^i]_{\mathrm{P}}|_M=0,$$

如果附加条件 $\det\big([\chi^j,\phi^i]_{\mathrm{P}}\big)|_M\neq 0$，那么自然就有

$$\frac{\partial f|_M}{\partial\chi^j}=\left.\frac{\partial f}{\partial\chi^j}\right|_M=0,$$

于是可以选定 $\chi^j=0$. 此时 $(0,r+s)$ 型约束写作 $M_0\big(\psi^1,\cdots,\psi^{2(r+s)}\big)$。这种约束最常见的是某个正则坐标为常数的情况，对于这种约束，直接将他的对偶坐标取作零即可。

运动方程的确定靠 Possion 括号，正如前面知道的，在没有约束的时候，运动方程写作 $\dot p=[p,H]_{\mathrm{P}}$。因为现在处理是约束系统，对物理量而言，需要改成形式上没有约束的物理量，这样我们应该处理的是 $[f^*,g^*]_{\mathrm{P}}|_{M_0}$，直接计算易得

$$[f^*,g^*]_{\mathrm{P}}|_{M_0}=\big([f,g]_{\mathrm{P}}-[f,\psi^\mu]_{\mathrm{P}}D_{\mu\nu}[\psi^\nu,g]_{\mathrm{P}}\big)|_{M_0},$$

定义所谓的 Dirac 括号 $[*,*]_{\mathrm{D}}$ 如下

$$[f,g]_{\mathrm{D}}=[f,g]_{\mathrm{P}}-[f,\psi^{\mu}]_{\mathrm{P}}D_{\mu\nu}[\psi^{\nu},g]_{\mathrm{P}}, \tag{1.13}$$

他满足

$$[f,g]_{\mathrm{D}}|_{M_0}=[f^*,g^*]_{\mathrm{P}}|_{M_0}.$$

如果采用约束的标准形式 $M_0(q^1,\cdots,q^{r+s};p^1,\cdots,p^{r+s})$，此时 Dirac 括号 $[*,*]_{\mathrm{D}}$ 写作

$$[f,g]_{\mathrm{D}}|_{M_0}=\sum_{i=r+s+1}^{n}\left(\frac{\partial f|_{M_0}}{\partial q^i}\frac{\partial g|_{M_0}}{\partial p^i}-\frac{\partial f|_{M_0}}{\partial p^i}\frac{\partial g|_{M_0}}{\partial q^i}\right), \tag{1.14}$$

可以看到这就是对于后 $n-(r+s)$ 组正则变量的 Possion 括号。结合(1.12)和(1.14)，我们所做的就是对约束系统选取了一套正则坐标，使得他形式上变成了没有最后几组正则坐标的无约束系统一样。

总结一下 Hamilton 形式化一个约束系统的步骤，首先写出所有约束，然后加进几个新的约束去掉所有的第一类约束，最后计算出 Dirac 括号就可以得到正确的运动方程。

回到强匀强磁场中的电荷的例子，两个约束分别为

$$f_1=p_x+\frac{eB_0}{2}y,$$
$$f_2=p_y-\frac{eB_0}{2}x,$$

因为 $[f_1,f_2]_{\mathrm{P}}=eB_0\neq 0$，所以他们都是第二类约束，直接的计算就得到了

$$D=\frac{1}{eB_0}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

然后运动方程应该为

$$\begin{aligned}\dot{p}_x&=[p_x,H]_{\mathrm{D}}\\&=[p_x,H]_{\mathrm{P}}-[p_x,f_1]_{\mathrm{P}}D_{12}[f_2,H]_{\mathrm{P}}-[p_x,f_2]_{\mathrm{P}}D_{21}[f_1,H]_{\mathrm{P}}\\&=-\frac{e}{2}\partial_x\varphi,\end{aligned}$$

代入约束 $p_x=-eB_0y/2$ 就得到一个运动方程

$$B_0\dot{y}=\partial_x\varphi.$$

剩下一个运动方程同理由 $\dot{p}_y=[p_y,H]_{\mathrm{D}}$ 给出。

尽管这节的全部内容都是在经典力学框架内的，但是通过导数到变分算符的转变，可以将其完全形式地移动到场论中去。对于约束系统场的量子化，Possion 括号与对易子的转变这里应该改成 Dirac 括号与对易子的改变。

1.4 带电粒子的运动

这节开始