

# Chapter 1

## Manifold

### 1.1 Foundation

(1.1.1) 一个局部  $n$  维欧几里得空间是一个 Hausdorff 空间  $M$  满足, 对每一个点  $p \in M$ , 存在一个  $p$  的邻域  $U \subset M$  和一个同胚  $\varphi: U \rightarrow V$ , 其中  $V$  是一个  $\mathbb{R}^n$  中的开集。这个同胚有时候被称为一个坐标、坐标映射等, 而资料  $(U, \varphi)$  被称为一个坐标卡。

坐标  $\varphi$  经常写成分量形式,  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , 其中  $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

(1.1.2) 局部欧几里得空间  $M$  上的一个光滑微分结构  $\mathcal{F}$  是这样一族坐标卡  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , 满足:  $\{U_\alpha\}$  构成  $M$  的开覆盖,  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{U_\alpha \cap U_\beta}$  是光滑映射, 后者被称为坐标卡的相容性条件。此外, 如果有一个坐标卡  $(U, \varphi)$  和每一个坐标卡都相容, 那么可以推断出他在  $\mathcal{F}$  中, 这样的微分结构被称为极大微分结构。极大微分结构当然不一定是唯一的, 不过我们不担心这个, 因为我们往往是固定一个微分结构来研究流形的, 下面假设出现的微分结构总是极大的。

(1.1.3) 一个  $n$  维光滑流形  $(M, \mathcal{F})$  是一个赋予了光滑微分结构  $\mathcal{F}$  的第二可数的局部欧几里得空间  $M$ .

我们想要做一个范畴, 现在已经有了对象, 那么自然需要态射, 态射被如下定义:

(1.1.4) 设  $(M, \mathcal{F})$  和  $(N, \mathcal{G})$  是两个光滑流形, 连续函数  $f: M \rightarrow N$  被称为一个光滑映射, 如果  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  是一个光滑函数对任意的  $\mathcal{F}$  中的坐标卡  $(U, \varphi)$  和  $\mathcal{G}$  中的坐标卡  $(V, \psi)$  成立。

这样, 光滑流形就构成了一个范畴, 其中态射是流形间的光滑映射。他是拓扑空间范畴的子范畴。

从此以后, 我们对一个固定的流形  $(M, \mathcal{F})$ , 常常会略去他的微分结构, 只写作  $M$ 。对于一个光滑流形  $M$  的非空开子集  $U$ , 显然, 他有继承自  $M$  的一个拓扑结构和微分结构, 所以  $U$  也是一个光滑流形。很容易看到,  $\mathbb{R}^n$  是一个光滑流形, 按照上面的结论, 我们可以得到一类光滑流形,  $\mathbb{R}^n$  的开子集。比如把  $n \times n$  矩阵放入  $\mathbb{R}^{n^2}$  内, 那么行列式不为零的那些矩阵就构成一个光滑流形, 记作  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , 称作一般线性群。

特别地,  $\mathbb{R}$  也是一个光滑流形。我们称光滑映射  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  是一个  $M$  上的光滑函数。光滑函数  $f$  限制在  $U \subset M$  上也是一个光滑函数  $f|_U$ 。

(1.1.5) 设  $M$  是一个光滑流形,  $U \subset M$  上的光滑函数的集合记作  $\mathcal{F}(U)$ ,  $\mathcal{F}$  被称为  $M$  上的光滑函数层。由于可以逐点定义加法和乘法, 所以  $\mathcal{F}(U)$  拥有  $\mathbb{R}$ -代数结构。设  $p \in M$ , 我们定义如下等价关系: 设  $U$  和  $V$  都是  $p$  的邻域, 以及  $f \in \mathcal{F}(U)$  和  $g \in \mathcal{F}(V)$ , 如果在一个  $W \subset U \cap V$  上,  $f|_W = g|_W$ , 则  $f \sim g$ 。所有这样的等价类记作  $\mathcal{F}_p$ , 称为  $p$  处的光滑函数茎, 他的代表元素可以写成  $f_p = \langle U, f \rangle$ , 称为芽。

显然  $\mathcal{F}_p$  有继承自  $\mathcal{F}(U)$  的自然的  $\mathbb{R}$ -代数结构。

设  $p \in M$ , 茎  $\mathcal{F}_p$  是一个局部环。实际上,  $\langle U, f \rangle \in \mathcal{F}_p$  且  $f(p) = 0$  的元素构成了  $\mathcal{F}_p$  的一个理想。不在这个理想内的  $\langle U, f \rangle$ , 由于  $f(p) \neq 0$ , 那么适当缩小  $U$  到  $V$ , 由  $f$  的连续性, 总可以找到  $V$  使得  $f|_V$  处处不为零, 这样  $\langle V, 1/f|_V \rangle$  便是  $\langle U, f \rangle$  的一个逆。因此上面这个理想即  $\mathcal{F}_p$  唯一的极大理想, 我们记作  $\mathfrak{m}_p$ 。容易看到  $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{R}$ , 实际上, 对每一个芽  $f_p \in \mathcal{F}_p$ , 都成立  $f_p = f_p - f(p) + f(p)$ , 在  $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$  中看, 他和  $f(p) \in \mathbb{R}$  也就没区别了。

**Lemma (1.1.6)** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  光滑, 则

$$f(x) = f(0) + \partial_i f(0)x^i + \frac{1}{2}g_{ij}(x)x^i x^j,$$

其中  $g_{ij}$  光滑。

**Proof:** 利用微积分基本定理

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 f'(tx)dt = \int_0^1 \partial_i f(tx)x^i dt = h_i(x)x^i,$$

可以得到  $h_i(0) = \partial_i f(0)$ , 然后再对  $h_i$  使用上面的步骤即可得到我们想要的表达式。  $\square$

**(1.1.7)** 使用一个局部坐标  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  且  $\varphi(p) = 0$ , 可以将上面的引理翻译到流形上。设  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  光滑, 则在  $p$  的一个邻域  $V$  上对任意的  $q \in V$  成立

$$f(q) = f(p) + \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}(p)x^i(q) + \frac{1}{2}g_{ij}(q)x^i(q)x^j(q),$$

其中  $g_{ij}$  在  $V$  上光滑, 以后我们就将那个偏微分记作  $\partial_i f(p)$ 。

**(1.1.8)** 设  $p \in M$ ,  $p$  处的茎为  $\mathcal{F}_p$ , 他的极大理想为  $\mathfrak{m}_p$ , 此时  $p$  处的余切空间被定义为自然的矢量空间  $T_p^*M := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 。余切空间的元素被称为余切矢量。

$\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  确实是一个矢量空间。首先它显然是一个  $\mathcal{F}_p$ -模, 然后任取  $a \in \mathfrak{m}_p$ , 由于  $a\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = 0$ , 所以  $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  是一个  $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$ -模, 即  $\mathbb{R}$ -矢量空间。这样定义的余切空间, 可以看到, 是的所有的那些一阶小量构成的集合, 即其中的元素为“微分”。

**(1.1.9)** 设  $p \in M$ ,  $M$  是一个  $n$  维流形, 则  $T_p^*M := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  是  $n$  维的。

我们可以选取一组局部坐标来算维数, 由于选取不同的局部坐标都是通过同胚联系的, 所以不同的选取对维数没什么影响。由上面的引理, 设  $f_p \in \mathfrak{m}_p$ , 则他可以写作

$$f_p = \partial_i f(p)x_p^i + \frac{1}{2}g_{ij}(q)x_p^i x_p^j$$

考虑一个局部坐标  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , 设自然同态  $d_p: \mathfrak{m}_p \rightarrow \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ , 很简单就可以看到  $d_p(x_p^i) \neq 0$ 。实际上, 如果  $x_p^i \in \mathfrak{m}_p^2$ , 那么  $x_p^i = rs$ , 其中  $r, s \in \mathfrak{m}_p$ , 然后根据上面的引理  $r = a_i x_p^i + \dots$  以及  $s = b_i x_p^i + \dots$ , 于是  $x_p^i = rs = a_j b_k x_p^j x_p^k + \dots$ , 但显然这是不可能的。

所以, 如果  $f_p \in \mathfrak{m}_p$ , 则

$$d_p(f_p) = \partial_i f(p)d_p(x_p^i). \quad (1.1)$$

这样所有的  $T_p^*M = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  中的元素都可以由  $d_p(x_p^i)$  展开, 他们都是非零的, 而且容易证明是线性无关的, 所以这是  $T_p^*M$  的一组基, 余切空间的维数计算完毕。

以后我们用  $d_p(f)$  乃至  $d_p f$  来记  $d_p(f_p)$ 。实际上, 我们可以将  $d_p$  定义在  $\mathcal{F}_p$  上, 设  $a$  是一个常值芽, 补充定义  $d_p a = 0$ , 可以看到, 此时式(1.1)依旧满足。以后我们就这样来看  $d_p: \mathcal{F}_p \rightarrow T_p^*M$ , 他被称为外微分算子。

**(1.1.10)** 此时

$$d_p(fg) = d_p((f - f(p))(g - g(p)) + f(p)(g - g(p)) + (f - f(p))g(p)) = f(p)d_p g + d_p f g(p).$$

(1.1.11) 设  $f : M \rightarrow N$  是一个光滑映射，上面的光滑函数层分别为  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{G}$ 。任取  $\varphi \in \mathcal{G}(V)$ ，可以通过  $f^*\varphi = \varphi \circ f$  定义  $f^*\varphi \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ 。

下面我们考虑两个流形余切空间之间的映射。设  $\langle V, \varphi \rangle \in \mathcal{G}_{f(p)}$ ，于是  $\langle f^{-1}(V), \varphi \circ f \rangle \in \mathcal{F}_p$ ，所以  $f^*$  诱导了一个  $\mathbb{R}$ -代数同态  $f_p^* : \mathcal{G}_{f(p)} \rightarrow \mathcal{F}_p$ ，特别地，可以看到  $f_p^* : \mathfrak{m}_{f(p)} \rightarrow \mathfrak{m}_p$ ，于是  $f_p^* : \mathfrak{m}_{f(p)}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_p^2$ 。

(1.1.12) 设  $f : M \rightarrow N$  是一个光滑映射，他诱导了一个线性映射<sup>1</sup>  $f_p^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ 。

(1.1.13) 对于复合， $(f \circ g)_p^* = g_p^* \circ f_{g(p)}^*$ 。很容易看到  $\text{id}_p^* = \text{id}_{T_p^* M}$ ，所以如果  $f : M \rightarrow N$  是同胚，则  $f_p^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$  是同构。

(1.1.14) 利用复合公式，设  $f : M \rightarrow N$  是光滑映射，则  $f_p^*(d_{f(p)}g) = d_p(f^*g) = d_p(g \circ f)$ 。

(1.1.15) 设  $p \in M$ ， $M$  是  $n$  维光滑流形，则切空间  $T_p M$  被定义为余切空间  $T_p^* M$  的对偶空间。切空间的元素被称为切矢量。由于余切空间是有限维的，他的对偶空间也和有着相同的维度，即  $n$  维。

(1.1.16) 由于切空间是余切空间的对偶空间，所以他是余切空间上的线性函数构成的空间，反过来，由于是有限维的，所以可以认为对偶空间的对偶空间就是原本的空间，这就是说可以将余切空间的矢量看成切空间矢量的线性函数：设  $d_p f \in T_p^* M$  和  $v \in T_p M$ ，定义  $d_p f(v) := v(d_p f)$ 。

虽然上面这些个定义都很短也很清楚，不过操作上却没有那么简单。下面，我们将一个切矢量扩张到  $\mathcal{F}_p^*$  上面去。

(1.1.17) 设  $f$  是在  $p$  附近的光滑函数，而  $v \in T_p M$ ，可以通过  $D_v(f_p) := v(f_p - f(p))$  定义线性映射  $i_p : v \mapsto i_p(v) = D_v \in \mathcal{F}_p^*$ ，他是一个单射。

注意到  $(fg)_p = f_p g_p$ ，所以

$$\begin{aligned} D_v(f_p g_p) &= v(f_p g_p - f(p)g(p)) \\ &= v((f_p - f(p))(g_p - g(p)) + f(p)(g_p - g(p)) + (f_p - f(p))g(p)) \\ &= f(p)D_v(g_p) + D_v(f_p)g(p), \end{aligned}$$

我们将满足这条性质的线性映射  $D_v \in \mathcal{F}_p^*$  称为  $p$  处的导子，所有  $p$  处的导子构成的空间暂时记作  $V_p$ ，而他其实和  $T_p M$  是同构的。

为了证明这点，任取导子  $D \in V_p$ ，由于  $D(1) = D(1 \times 1) = 2D(1)$ ，所以  $D(1) = 0$ ，继而靠着  $D$  的线性性，对于常值函数的芽  $a$  来说， $D(a) = aD(1) = 0$ 。因为每一个  $\mathcal{F}_p$  中的元素  $f_p$  都可以写成  $f_p - f(p) + f(p)$  的形式，所以  $D(f_p) = D(f_p - f(p))$ ，这就是说，一个导子的性质完全由他在  $\mathfrak{m}_p$  上的值决定，这种关系是一一对应的。即  $\pi_p : D \mapsto D|_{\mathfrak{m}_p}$  是一个线性同构。

同时，设  $f_p, g_p \in \mathfrak{m}_p$ ，则  $\pi_p(D)(f_p g_p) = f(p)\pi_p(D)(g_p) + g(p)\pi_p(D)(f_p) = 0$ ，于是  $\pi_p(D)(\mathfrak{m}_p^2) = 0$ ，所以， $\pi_p(D) \in T_p M$ ，即  $D|_{\mathfrak{m}_p}$  是一个切矢量，因此导子  $D$  完全由一个切矢量  $D|_{\mathfrak{m}_p} = \pi_p(D)$  决定。这样， $i_p : T_p M \rightarrow V_p$  也是一个满射，所以他是一个同构。当然我们也可以直接计算验证  $\pi_p \circ i_p = \text{id}_{T_p M}$  以及  $i_p \circ \pi_p = \text{id}_{V_p}$ 。

因有这个同构，所以以后我们用  $T_p M$  来标记导子构成的矢量空间，一个导子才是一个切矢量。这样的好处是，我们在具体计算的时候，可以直接在  $\mathcal{F}_p$  上进行而非  $\mathfrak{m}_p$  上，特别地，现在对于一个切向量  $v$  来说，成立  $d_p f(v) = v(f_p)$ ，这是因为对一个导子  $v$  来说  $v(f_p) = v(d_p f)$ 。

(1.1.18) 设  $f : M \rightarrow N$  是一个光滑映射，定义它在  $p \in M$  处的导数为  $T_p f = f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  使得对任意的  $v \in T_p M$  和任意的  $g_{f(p)} \in \mathfrak{m}_{f(p)}$  成立  $(f_{*p}v)(g_{f(p)}) = v(f_p^* g_{f(p)})$ 。

<sup>1</sup>这里我们滥用一下记号。

为以后的处理方便,不妨通过等同  $\partial_i$  和标准基  $e_i$  来等同  $T_p\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^n$ . 此外,通过坐标卡上的同胚  $\varphi$ , 我们用  $\partial_i$  来标记  $\varphi_{*p}^{-1}(e_i)$ , 这显然是  $T_pM$  处的一组基。

(1.1.19) 设  $f$  是在  $p$  附近的光滑函数, 任取  $v \in T_pM$ . 因为  $f_{*p}: T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ , 所以  $f_{*p}(v)$  是一个数, 故而

$$f_{*p}(v) = f_{*p}(v)(\text{id}_{\mathbb{R}}) = v((\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f)_p) = v(f_p) = d_p f(v).$$

因为对所有的切矢量  $v$  都成立上式, 所以  $f_{*p} = d_p f$ .

选定一个局部坐标, 因为  $d_p x^i(\partial_j) = \partial_j x^i(p) = \delta_j^i$ , 所以  $d_p x^i$  就是  $\partial_i$  的对偶基. 下面我们来计算一个特别的例子, 设  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个流形  $M$  上的矢量值光滑函数, 则  $f^i: M \rightarrow \mathbb{R}$  是一个光滑函数, 那么  $f_{*p} = d_p f^i e_i$ , 其中  $e_i$  是  $\mathbb{R}^n$  的标准基. 再设  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 则  $d_p f^i = \partial_j f^i(p) dx^j = \partial_j f^i(p) e^j$ . 写成矩阵即

$$(f_{*p})^i_j = \partial_j f^i(p),$$

此即  $f$  的 Jacobian.

(1.1.20) 复合函数求导法则:  $(f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}$ . 抽象表现出来是线性映射复合, 表现在矩阵 (即 Jacobian) 上就是两个矩阵相乘。

(1.1.21) 设  $U$  上光滑曲线  $\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , 在时间为零的时候经过点  $p$ , 即  $\sigma(0) = p$ , 于是  $\sigma_{*0} = \dot{\sigma}(0) \in T_pM$ . 局部来说, 他可以写作

$$\dot{\sigma}(0) = \frac{dx^i \circ \sigma}{dt}(0) \partial_i = \dot{\sigma}^i(0) \partial_i,$$

当他作用在一个光滑函数上时, 写作

$$\dot{\sigma}(0)(f) = \dot{\sigma}^i(0) \partial_i f(p).$$

对于固定的  $f$ ,  $\dot{\sigma}(0)(f)$  可以看做  $f$  沿着  $\sigma$  在点  $p$  切矢量的方向导数, 实际上, 在  $\mathbb{R}^n$  中, 我们通常将上式写作  $\dot{\sigma}(0)(f) = v \cdot \nabla f$ , 其中  $v = \dot{\sigma}^i(0) e_i$ .

(1.1.22) 反过来, 给定一个点  $p$  处的切矢量  $v$ , 我们可以找到一个光滑曲线  $\sigma$  使得在他点  $p$  的切矢量就是  $v$ . 这是局部结论, 在欧式空间里去证明就可以了. 在欧式空间中,  $\sigma(t) = p + vt$  就是我们需要的光滑曲线。

(1.1.23) 由于  $v(f_p)$  可以看做  $f$  沿着  $v$  方向在  $p$  点的方向导数, 以及等式  $d_p f(v) = v(f_p)$ , 所以  $d_p f(v)$  也理解为  $f$  沿着  $v$  方向在  $p$  点的方向导数。

(1.1.24) 正如我们前面提到的, 切矢量的几何直观可以靠曲线的切矢量来想象, 那么余切矢量呢? 为了做出适当的想象, 不妨回到欧式空间里面, 固定一个切矢量, 方向导数  $d_p f(v)$  可以写作  $v \cdot \nabla f(p)$ , 所以 (在欧式空间的内积结构下) 我们可以认为  $d_p f$  就是  $\nabla f(p)$ . 现在改变  $p$ , 我们得到了一个矢量场  $\nabla f$ , 这是  $\{f = \text{const}\}$  确定的等能面的法矢量场, 法矢量场和等能面一一联系. 所以为了避免引入内积结构, 我们可以认为  $d_p f$  就是局部的一族等能面。

## 1.2 Submanifold

(1.2.1)  $\varphi: M \rightarrow N$  是一个光滑映射, (a). 称  $\varphi$  是一个浸入, 如果  $\varphi_{*p}$  处处非退化. (b). 称  $(M, \varphi)$  是一个子流形, 如果  $\varphi$  是单的. 不是所有浸入都是子流形, 比如圆周的参数表示  $(\cos t, \sin t)$  是一个浸入, 但不是单的。

显然, 对于光滑流形的一个开子集, 他可以继承大流形的流形结构而形成一个新的流形, 他是一个子流形, 被称为开子流形。

后面我们经常会说“设流形  $M$  上有某某”这样的话, 但一般来说, 某某在流形上的整体存在性是很难保证的, 往往他只是局部存在, 即可以在流形  $M$  的某个开集上存在。但是注意到  $M$  的开集现在也有流形结构, 即开子流形结构, 于是我们的命题就可以在这个新的流形上正常工作了。所以经常为了方便, 对于不少命题的陈述, 我们会把对象直接定义到整个流形上。

**(1.2.2)** 设  $\varphi: M \rightarrow N$ , 如果  $M$  微分同胚于  $N$  的开子流形  $\varphi(M)$ , 则称子流形  $(M, \varphi)$  是一个嵌入。

浸入子流形不一定是嵌入子流形, 比如秩为 1 的圆的光滑曲线  $f(t) = ((t^3+t)/(t^4+1), (t^3-t)/(t^4+1))$ , 在  $\mathbb{R}^2$  中他的图像看起来是可以有自交点的。

**(1.2.3)** 设  $U$  是  $M$  的一个子集, 但  $U$  本身有一个流形的结构, 如果此时  $i: U \hookrightarrow M$  是一个嵌入, 则称  $U$  是  $M$  的一个正则子流形。

所谓的正则子流形就是说, 它本身的流形结构和从大的流形那里继承来的流形结构是相同的。

**(1.2.4)** 设  $M$  和  $N$  是光滑流形,  $f: M \rightarrow N$  是一个单浸入。我们可以赋予  $f(M)$  一个微分结构通过把  $f: M \rightarrow f(M)$  做成一个微分同胚。此时,  $f(M)$  是  $N$  的正则子流形当且仅当  $f$  是一个嵌入。

**(1.2.5)** 反函数定理: 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是一个开集, 映射  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  光滑, 如果 Jacobian 在  $p$  处非奇异, 即  $f_{*p}$  可逆, 则存在  $p$  的一个邻域  $V \subset U$ , 使得  $f|_V: V \rightarrow f(V)$  是一个 (光滑) 同胚。

证明见微积分教材, 常见的证明有比如压缩映像定理。该定理说明, 如果函数局部线性化后性质不错, 那么在那点附近性质也不错。由于是局部性质, 所以可以直接翻译到流形上没什么改变。

**Theorem (1.2.6)** 流形上的反函数定理: 设  $M$  和  $N$  的维度相同, 映射  $f: M \rightarrow N$  光滑, 如果  $f_{*p}$  可逆, 则存在  $p$  的一个邻域  $U$ , 使得  $f|_U: U \rightarrow f(U) \subset N$  是一个 (光滑) 同胚。换句话说, 浸入局部是嵌入。

**(1.2.7)** 称一族  $M$  上的光滑函数  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$  在点  $p$  相互无关, 即指  $\{d_p(f_i) = (f_i)_{*p} \in T_p^*M \mid 1 \leq i \leq n\}$  们线性无关。

如果  $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$  相互无关, 则函数  $f = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$  在点  $p$  上的导数  $f_{*p}$  可逆, 所以按照反函数定理, 可以在  $p$  附近找一个领域, 使得  $f|_V$  是一个  $V$  到  $\mathbb{R}^n$  中开集的同胚, 这样  $(V, f|_V)$  就是一张坐标卡。如果  $\{f_i\}$  个数不到  $n$ , 那么补几个进去, 照样可以找到一张坐标卡, 其中前几个分量是  $\{f_i\}$ 。

**Lemma (1.2.8)** 设  $f_*: V \rightarrow W$  是一个有限维向量空间间的线性映射以及他的对偶映射是  $f^*: W^* \rightarrow V^*$ , 则  $\text{rank}(f_*) = \text{rank}(f^*)$ 。特别地, 当  $f_*$  是单 (满) 的时候,  $f^*$  是满 (单) 的。

**(1.2.9)** 设  $\varphi: M \rightarrow N$  光滑, 且  $\varphi_{*p}$  是单射。令  $(x_1, \dots, x_n)$  是  $\varphi(p)$  附近的一个坐标, 那么  $x_i \circ \varphi$  是  $p$  附近的一个坐标。特别地,  $\varphi$  在  $p$  附近是一个单射。如果  $\varphi_{*p}$  是满射, 则  $x_i \circ \varphi$  是  $p$  附近的一个坐标中的一部分。

若  $\varphi_{*p}$  是单射, 他的对偶映射  $\varphi_p^*$  就是满射, 于是  $\varphi_p^*(x_i)_{* \varphi(p)} = (x_i \circ \varphi)_{*p} = d_p(x_i \circ \varphi)$  张成了  $T_p^*M$ , 在其中选出一组极大线性无关组 (不妨设为前  $m$  个), 这就构成了  $p$  附近的一组坐标。而  $(x_1, \dots, x_m) \circ \varphi$  局部是同胚, 所以  $\varphi$  局部是单射。

若  $\varphi_{*p}$  是满射, 他的对偶映射  $\varphi_p^*$  就是单射, 于是  $\varphi_p^* d_{\varphi(p)} x_i = d_p(x_i \circ \varphi)$  相互独立, 一般来说, 他数量不够构成坐标, 但是却可以构成坐标中的一部分。

**(1.2.10)** 设  $f: M \rightarrow N$  是一个光滑映射, 则  $\text{rank}_p f$  被定义为  $\text{rank}_p f_{*p}$ 。取  $p$  和  $f(p)$  附近的坐标  $\varphi$  和  $\psi$  且使得  $\varphi(p) = 0$ , 则  $f$  在点  $p$  的秩就是 Jacobian 矩阵  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{*0}$  的秩。

选取  $f(p)$  附近的坐标  $\psi$ , 则  $\psi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 不妨将其写作  $(f_1, \dots, f_n)$ , 则  $\text{rank}_p f$  就是  $d_p f_1, \dots, d_p f_n$

张成的线性空间的维度。实际上,因为这是局部结果,所以可以直接假设  $N = \mathbb{R}^n$ ,而此时  $f_{*p} = (d_p f_1, \dots, d_p f_n)$ 。

**Theorem (1.2.11)** 设  $M$  是一个  $m$  维流形且  $f: M \rightarrow N$  是一个光滑映射, 如果存在常数  $l$  使得  $\text{rank}_p f$  处处等于  $l$ , 那么对于  $q \in N$ ,  $f^{-1}(q)$  要么是空集, 要么是  $M$  的一个正则子流形, 维度为  $m-l$ 。

这个定理我们就不证明了。特别当  $N = \mathbb{R}$  的时候,  $f$  如果是一个秩处处为 1 的光滑函数 (即  $d_p f$  处处不为零), 则  $f^{-1}(a)$  或者是一个空集, 或者是一个  $m-1$  维正则子流形。这就是所谓的等能面, 或等势面。

### 1.3 Vector Field

和我们以前的直观一样, 所谓的矢量场就是每一点赋予一个矢量。

**(1.3.1)** 设  $U \subset M$ ,  $U$  上的映射  $X: p \mapsto X(p) \in T_p M$  被称为  $U$  上的 (切) 矢量场。因为在  $U$  的每一个局部  $V$  (至少一个坐标卡内), 矢量场  $X$  都可以写作  $X = X^i \partial_i$ , 其中  $X^i$  是  $V$  上的实值函数, 而  $\partial_i$  在不同的点分属不同的切空间。如果  $\{X^i\}$  在点  $p$  是光滑函数, 则称  $X$  在  $p$  处光滑。如果  $X$  在  $U$  处光滑, 则称  $X$  是  $U$  上的一个光滑矢量场。

对矢量场而言, 他可以作用在光滑函数上得到一个函数, 在局部的作用效果即  $Xf = X^i \partial_i f$ 。显然, 如果  $X$  是要给光滑矢量场, 则  $Xf$  是一个光滑函数。反过来, 如果  $X^i \partial_i f$  对任意的光滑函数都光滑, 则  $X^i$  自然也是光滑的, 所以有下面一个结论。

**(1.3.2)** 设  $X$  是一个  $U$  上的矢量场, 如果  $Xf$  对任意的光滑函数  $f$  也是光滑的, 那么  $X$  是一个光滑矢量场。

这个命题可以看作矢量场光滑性的一个坐标无关的定义。

**(1.3.3)** 设  $f: M \rightarrow N$  是一个光滑单射, 而  $X$  是  $M$  上的一个光滑矢量场, 则  $f_* X: p \mapsto f_{*f^{-1}(p)} X_{f^{-1}(p)}$  是  $N$  上的一个矢量场。因为  $(f_* X)g = X(g \circ f)$  成立, 所以这这也是一个光滑矢量场。

**(1.3.4)** 设  $X$  是一个  $U$  上的光滑矢量场, 如果一条光滑曲线  $\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  且  $\sigma(0) = p$ , 满足  $X(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t)$ , 则称  $\sigma$  是  $X$  在  $p$  附近的一条积分曲线。

将矢量场局部写出来,  $X(\sigma(t)) = X^i(\sigma(t))\partial_i$ , 所以问题归结到了求解微分方程

$$\frac{dx^i \circ \sigma}{dt}(t) = X^i(\sigma(t)),$$

他的初值为  $\sigma(0) = p$ 。微分方程的 (光滑) 解在局部存在且唯一, 所以我们得到了:

**(1.3.5)** 在  $p$  附近, 对  $X$  存在唯一的积分曲线  $\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ 。

**Lemma (1.3.6)** 设  $X$  是  $U$  上的光滑矢量场, 如果  $X_p \neq 0$ , 则存在一个  $p$  的邻域  $V$ , 在  $V$  上存在一组坐标使得  $X$  可以写作  $\partial_1$ 。

**Proof:** 完全是局部的结果, 我们就在欧式空间里面证明, 即找一组新的坐标来把  $X = X^i \partial_i$  变成  $\partial_1$ 。

如果能够证明可以写作  $a\partial_1$ , 那么再令  $x'$  是  $\partial x^1 / \partial x'^1 = a$  的解 (这个解积个分就出来了), 那么自然就有  $\partial'_1 = a\partial_1$ 。

不妨假设  $X^1$  在  $p$  的某个邻域不为零, 现在我们来解常微分方程组

$$\frac{dx^i}{dx^1} = \frac{X^i(x^1, \dots, x^n)}{X^1(x^1, \dots, x^n)},$$

给定初值为  $\{\varphi^i(0; v^2, \dots, v^n) = v^i : 2 \leq i \leq n\}$ , 我们知道解  $\{x^i = \varphi^i(x^1; v^2, \dots, v^n)\}_{2 \leq i \leq n}$  局部存在且光滑依赖于初值  $\{v^2, \dots, v^n\}$  以及  $x^1$ , 所以我们选取新坐标  $\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$  使得

$$\{x^1, x^2, \dots, x^n\} = \{v^1, \varphi^2(v^1, \dots, v^n), \dots, \varphi^n(v^1, \dots, v^n)\},$$

容易计算他在  $v^1 = 0$  处的 Jacobian 行列式  $\det(\partial x / \partial v) = 1$ , 所以这是一个合理的坐标选取。

最后, 注意到  $X^i = X^1 dx^i / dx^1 = X^1 dx^i / dv^1$ , 所以

$$X = X^i \partial_i = X^1 \frac{dx^i}{dv^1} \frac{\partial}{\partial x^i} = X^1 \partial'_1.$$

□

设  $X$  是  $U$  上的光滑矢量场, 对  $U$  上的每一点  $p$ , 都可以在  $p$  附近找到他的一条光滑积分曲线  $\sigma_p$ , 上面的点  $\sigma_p(t)$  我们也记作  $\sigma_t(p)$ , 这样我们就得到了一个新的一族映射  $\{\sigma_t : U \rightarrow U\}$ , 当  $t = 0$  的时候,  $\sigma_0 = \text{id}$ . 这样一族映射  $\{\sigma_t\}$  被称为矢量场  $X$  的流。如果需要明确是那个矢量场的时候写作  $\{\sigma_t^X\}$ . 由微分方程解的唯一性可以发现  $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{s+t}$ .

对于一个矢量场, 整体流的存在性是不能保证的, 比如对  $t = 1$  的时候, 是否对每一个  $p$  变换  $\sigma_1$  都有意义? 但是, 至少在局部, 我们可以保证在一定范围内的参数都是有意义的, 对于局部的问题, 这个存在性已经基本够使了。

**(1.3.7)** 光滑流形  $M$  上的光滑矢量场  $X$  的支集被定义那些使  $X$  不为 0 的点集的闭包。如果  $X$  有紧支集, 则  $X$  的流的参数可以全局定义到  $\mathbb{R}$  上面去。特别地, 如果流形是紧的, 则对每一个光滑矢量场都成立。

设支集为  $K$ , 找一个他的开覆盖, 使得每一个开覆盖内  $\sigma_t$  都对某一个小区间  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  上有定义, 由于紧, 所以可以找到有限的子覆盖, 所以在这些子覆盖里面, 把最小的  $\epsilon_{\min}$  挑出来, 则在  $K$  上, 对  $t \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$ ,  $\sigma_t$  都有定义。现在对  $p \notin K$  定义  $\sigma_t(p) = p$ , 容易检验  $\sigma_t$  定义良好且还是光滑映射。最后, 对  $t > \epsilon_{\min}$ , 我们可以从某个  $t_0 \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$  反复复合  $\sigma_{\epsilon_{\min}/2}$ , 反之对  $t < -\epsilon$  亦然。

现在我们将积分曲线的问题稍稍拓展一下, 比如我们现在有两个矢量场  $X$  和  $Y$ , 他们在每一点张成一个平面, 类比于积分曲线, 我们要问是否存在一个光滑曲面, 使得这个曲面在每一点的切空间都是这俩矢量场张成的平面?

可以直接想象一下怎么处理这样的问题, 直观来看, 积分曲面可以由积分曲线拼成, 即在  $p$  附近,  $X$  的一条一条积分曲线和  $Y$  的一条积分曲线编成一张网, 这张网其实应该就在积分曲面上。因此积分曲面存在与否当且仅当这张网足够光滑, 不能突然错开。此时的错开, 就是说, 从网格的一个端点处, 沿着两条路径走到的终点处于积分曲面的两侧。

为简单见, 我们看看这样一个曲边四边形。从  $p$  出发, 沿着  $X$  的积分曲线走  $s$ , 走到了  $\sigma_s^X(p)$ , 再从这点出发, 沿着  $Y$  的积分曲线走  $t$ , 走到  $\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)$ . 同样, 从  $p$  出发, 沿着  $Y$  的积分曲线走  $t$ , 走到了  $\sigma_t^Y(p)$ , 再从这点出发, 沿着  $X$  的积分曲线走  $s$ , 走到  $\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p)$ 。

这样我们就得到了弯曲的四边形,  $p$  是其中一个端点, 但是一般来说, 沿着两条路径并不会相同的终点, 即  $p$  的对角线方向的另一端点不存在, 此时两条路径并不能闭合成一个弯曲的四边形。甚至, 即使积分曲面存在, 我们也不能得到一个闭合的四边形 (网格), 但是, 如果沿着两条路径的终点是错开的, 则积分曲面依然不存在。

实际上, 因为  $X$  和  $Y$  的光滑, 我们可以适当延长 (或缩短) 相比  $s$  和  $t$  小量的在一条路径上走的时间使得弯曲的四边形变成一个网格 (此时局部积分曲面存在), 或者, 永远是错开的 (此时局部积分曲面不存在)。

我们现在需要比较两条路径两个终点的差, 在欧式空间里面, 我们可以比较这两个点的距离。但是在流形上这样做是不方便的, 我们可能连一个很直接的计算两个点距离的手段都没有。为了克服这个困难, 我们可以采用 “表示” 的手段, 取一个  $U$  上的光滑函数  $f$ , 比较  $f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p))$  和  $f(\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p))$ 。但光取一个  $f$  肯定是不够的, 取而代之, 我们可以取遍  $U$  上所有的光滑函数, 如果我们关于所有的光滑函数都计算出

了  $f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)) - f(\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p))$  (在  $s, t$  都很小时), 那么就可以确认这两个坐标相差很小的程度。所以现在就是要计算在  $s, t$  都很小时的

$$g(s, t) = f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)) - f(\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p)).$$

因为  $g$  是光滑函数, 我们在  $(0, 0)$  局部展开他, 求导就可以得到系数。显然, 他到二阶为止的导数都为 0, 并且  $\partial_s^2 g(0, 0) = \partial_t^2 g(0, 0) = 0$ , 所以他最低阶不为零的只可能是  $\partial_s \partial_t g(0, 0)$ , 这就是说, 我们要求  $\lim_{s, t \rightarrow 0} g(s, t)/st$ .

(1.3.8) 在  $t$  很小的时候,  $f(\sigma_t^X p) = f(p) + tXf(p) + o(t^2)$ . 为了证明他, 只要求  $p$  处的导数就行了, 设  $\sigma^X(t)$  是  $\sigma^X(0) = p$  的  $X$  的积分曲线, 则

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\sigma_t^X p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \sigma^X(t) = f_{*p} X = Xf(p).$$

所以 (暂时在记号上略去高阶项)

$$f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)) = f(\sigma_s^X(p)) + tYf(\sigma_s^X(p)) = f(p) + sXf(p) + tY(\sigma_s^X \circ f(p)),$$

以及

$$g(s, t) = sXf(p) + tY(\sigma_s^X \circ f(p)) - tYf(p) - sX(\sigma_t^Y \circ f(p)),$$

其中

$$Y(\sigma_s^X \circ f(p)) - Yf(p) = sX(Y(f))(p),$$

所以

$$g(s, t) = st(X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p)),$$

这就是说  $\partial_s \partial_t g(0, 0) = X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p)$ .

(1.3.9) 定义两个矢量场  $X, Y$  的 Lie 括号为  $[X, Y]$ , 他满足  $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ 。

如果采用局部表示  $X = X^i \partial_i$  和  $Y = Y^j \partial_j$ , 则我们可以计算出

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X^i \partial_i (Y^j \partial_j f) - Y^j \partial_j (X^i \partial_i f) \\ &= X^i \partial_i Y^j \partial_j f - Y^j \partial_j X^i \partial_i f \\ &= (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_i f. \end{aligned}$$

因此, 尽管形式上是二阶的, 但  $[X, Y]$  还是一个切矢量场, 局部写作  $[X, Y] = (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j = (X(Y^j) - Y(X^j)) \partial_j$ .

(1.3.10) 设  $X_1, \dots, X_k$  是一族切矢量场, 记

$$D = \{f_1 X_1 + \dots + f_k X_k : \forall 1 \leq i \leq k, f_i \in \mathcal{F}(M)\},$$

称他为流形  $M$  上的一个被  $\{X_i\}$  张成的分布。

(1.3.11) 设  $X$  和  $Y$  张成一个分布  $D$ , 则局部积分曲面存在当且仅当在  $[X, Y] \in D$ .

如果局部积分曲面存在, 那么曲边四边形完全处于积分曲面上面, 尽管沿着两条路径得到的终点可能不同, 但是这两个点的连线 (或者他的切矢量) 应该在  $s \rightarrow 0, t \rightarrow 0$  的时候确定了一个切矢量 (由于  $X$  和  $Y$  的光滑性, 所以这个切矢量并不依赖于连线的选取), 他处于积分曲面的切子空间 (由  $X_p$  和  $Y_p$  张成) 里面, 且正比于  $[X, Y]_p$ , 所以  $[X, Y]_p = a(p)X_p + b(p)Y_p$ . 而  $a$  和  $b$  的光滑性是显然的。



如果不存在, 就是说两个端点分处  $X_p$  和  $Y_p$  张成的切子空间两侧, 所以两个点的连线确定的那个切矢量应该不在和  $X_p$  和  $Y_p$  张成的切子空间里, 即  $[X, Y]_p \neq aX_p + bY_p$ .

(1.3.12) 问题可以问得更广一点, 设  $X_1, \dots, X_k$  是一族切矢量场, 他们是否 (至少在局部) 有积分“曲面”存在? 回答是 Frobenius 定理: 设  $X_1, \dots, X_k$  在点  $p$  张成的分布为  $D$ , 则局部存在积分“曲面”当且仅当对任意的  $i$  和  $j$  成立  $[X_i, X_j] \in D$ .

当然, 这个结论可以更加形式地证明他, 如果不信任上面的直观想法, 则可以参看任何一本微分流形的教材, 我这里就略去了。

(1.3.13) 令  $\varphi$  是流形  $M$  上的光滑可逆变换, 设矢量场  $X$  的流为  $\sigma_t$ , 则  $\varphi_*X$  的流为  $\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi$ .

设在  $p$  处的切矢量为  $X_p$ , 经过  $p$  的  $X$  的积分曲线为  $\sigma(t)$ , 使用变换  $\varphi$ , 变成了  $q = \varphi(p)$ ,  $q$  处的切矢量  $\varphi_*X_p = (\varphi_*X)_q$  以及积分曲线  $\varphi(\sigma(t)) = \varphi(\sigma_t q) = \varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1}(p)$ . 此即结论。

(1.3.14) 所以,  $\varphi_*X = X$  当且仅当  $\varphi \circ \sigma_t^X = \sigma_t^X \circ \varphi$  成立。

(1.3.15) 直接的计算, 我们有:

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (\sigma_t^X)_* Y).$$

所以, 如果  $\sigma_t^X$  和  $\sigma_s^Y$  可交换, 即  $\sigma_t^X \circ \sigma_s^Y = \sigma_s^Y \circ \sigma_t^X$ , 则  $(\sigma_t^X)_* Y = Y$  以及  $[X, Y] = 0$ .

设  $\varphi: M \rightarrow N$  是一个光滑映射,  $X$  和  $Y$  分布是  $M$  和  $N$  上的光滑函数, 称他们是  $\varphi$  相关的, 如果  $\varphi_*X(f) = Y(f) \circ \varphi$  对任意光滑函数  $f$  成立。局部来看,  $X_p(f \circ \varphi) = Y_{\varphi(p)}(f)$ .

若  $X_1$  与  $Y_1$  是  $\varphi$  相关的,  $X_2$  与  $Y_2$  是  $\varphi$  相关的, 则  $[X_1, X_2]$  和  $[Y_1, Y_2]$  是  $\varphi$  相关的, 因为

$$\begin{aligned} \varphi_*[X_1, X_2](f) &= X_1(X_2(f \circ \varphi)) - [1 \leftrightarrow 2] \\ &= X_1(Y_2(f) \circ \varphi) - [1 \leftrightarrow 2] \\ &= Y_1(Y_2(f)) \circ \varphi - [1 \leftrightarrow 2] \\ &= [Y_1, Y_2](f) \circ \varphi. \end{aligned}$$

因为对于一个同胚而言,  $\varphi_*(X)$  被定义为  $p \mapsto \varphi_*\varphi^{-1}(p)X_{\varphi^{-1}(p)}$ , 或者  $\varphi(p) \mapsto \varphi_*X_p$ , 这就是说

$$X_p(f) = \varphi_*(X)_{\varphi(p)}(f),$$

因此  $X$  与  $\varphi_*X$  是  $\varphi$  相关的。

(1.3.16) 令  $\varphi$  是  $U$  上的光滑同胚  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ,  $X$  和  $Y$  是  $U$  上的矢量场, 则在  $U$  上  $\varphi_*[X, Y] = [\varphi_*X, \varphi_*Y]$ .

因此, 作为局部的同胚,  $\sigma_s^X$  可以适用

$$(\sigma_s^X)_*[X, Y] = [X, (\sigma_s^X)_*Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\sigma_s^X)_*Y - (\sigma_{s+t}^X)_*Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\sigma_t^X)_*Y.$$

如果  $[X, Y] = 0$ , 则  $(\sigma_t^X)_*Y$  是一个常矢量 (局部来看, 系数为常数), 因此  $Y$  在  $(\sigma_t^X)_*$  作用下不变, 这就是说  $Y = (\sigma_t^X)_*Y$ , 于是  $\sigma_t^X$  和  $\sigma_s^Y$  可交换。

(1.3.17)  $[X, Y] = 0$  当且仅当  $\sigma_t^X$  和  $\sigma_s^Y$  可交换。

既然流是可交换的, 那么以前我们谈的那个曲边四边形总是可以闭合的, 所以这种情况下积分流形局部肯定存在, 因为在局部我们可以一块一块曲边四边形拼起来。由于显然的  $[\partial_i, \partial_j] = 0$ , 如果我们能够选取局部坐标使得一族矢量场  $\{X_i: 1 \leq i \leq k\}$  变成  $\{\partial_i: 1 \leq i \leq k\}$ , 则积分曲面存在。那么什么时候  $\{X_i\}$  是

可以变成  $\{\partial_i\}$  呢? 答案前面已经有了,  $[X_i, X_j] \in D$ , 分布  $D$  由  $\{X_i\}$  生成。当然, 这可以直接证明, 所以这也是证明积分曲面存在性的一种思路。

最后给个例子,  $n$  维欧氏空间,  $\{\partial_i : 1 \leq i \leq k\}$  的可能的积分曲面  $\{x_i = c_i : k+1 \leq i \leq n\}$ , 其中  $c_i$  是常数。如果这个积分曲面还是连通的, 设  $\pi$  是往最后  $n-k$  个坐标的投影, 则  $\pi_* \partial_i = 0$ , 其中  $1 \leq i \leq k$ , 因此  $(\pi \circ i)_* = 0$ , 其中  $i$  是积分流形往欧氏空间的嵌入, 此时由积分流形的连通性,  $\pi \circ i$  是常值映射。此时的积分流形就是上面的  $\{x_i = c_i : k+1 \leq i \leq n\}$ 。

## 1.4 Cotangent Vector Field

(1.4.1) 设  $U \subset M$ ,  $U$  上的映射  $\omega : p \mapsto \omega(p) \in T_p^* M$  被称为  $U$  上的余切矢量场。因为在  $U$  的每一个局部  $V$  (至少一个坐标卡内), 余切矢量场  $\omega$  都可以写作  $\omega = a_i dx^i$ , 其中  $a_i$  是  $V$  上的实值函数, 而  $dx^i$  在不同的点分属不同的余切空间。如果  $\{a_i\}$  在点  $p$  是光滑函数, 则称  $\omega$  在  $p$  处光滑。如果  $\omega$  在  $U$  处光滑, 则称  $\omega$  是  $U$  上的一个光滑余切矢量场 (或者叫做一个 1-形式场)。

一个余切矢量场和一个切矢量场之间存在作用  $\omega(X) = X(\omega)$  可以得到一个光滑函数, 具体来说就是在每一点  $p$ ,  $\omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$ 。

(1.4.2) 正如切矢量场, 对余切矢量场  $\omega$ , 光滑性也有如下判据:  $\omega$  是光滑的, 当且仅当  $\omega(X)$  是光滑的对  $U$  上的任意光滑切矢量场  $X$  成立。

(1.4.3) 设  $f$  是  $U$  上的光滑函数, 显然  $df$  是一个  $U$  上的光滑余切矢量场。记  $U$  上的光滑函数的集合为  $\Omega^0(U)$ , 记  $U$  上的光滑余切矢量场的集合为  $\Omega^1(U)$ , 则  $d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ 。

下面我们要把 Frobenius 定理改写成余切矢量场的形式, 这就变成了经典的 Pfaff 方程, 正是当年关于 Pfaff 方程的研究, Cartran 第一次提出了 (高阶) 外微分和微分形式的概念 (我们现在只谈了一阶的情况), 在他那里, 1-形式之间的乘法被定义成反对称的。从前一节谈论 Frobenius 定理来看, Pfaff 方程是一个关于积分曲面的问题, 所以从这个角度来看, 反对称的来由归根结底是为了积分。

(1.4.4) 称一个 1-形式  $\omega$  是完全可积的, 如果存在两个光滑函数  $f$  和  $g$  使得  $\omega = f dg$ , 此时  $f$  被称为  $\omega$  的积分因子。

1-形式的完全可积性联系着所谓的首次积分问题。设  $f$  是一个光滑函数且  $d_p f$  处处不为零, 则  $f(p) = a$  (如果解存在) 决定了  $M$  中的一个正则子流形  $N_a$  (有时候叫做一个曲面)。再设  $X$  是  $M$  内的光滑矢量场, 则  $df(X) = 0$  恒成立当且仅当处处成立  $X_p \in T_p N_{f(p)}$ 。

实际上, 任取一点  $p \in M$ , 只要检验  $X_p(f) = 0$  即可, 选一条  $N_{f(p)}$  上的一条光滑曲线  $c$ , 使得  $c(0) = p$  且  $c'(0) = X_p \in T_p N_{f(p)}$ , 由于  $f(c(t)) = f(p)$  恒成立, 对其在  $t = 0$  处求导就得到了  $d_p f(X_p) = X_p(f) = 0$ 。反过来, 如果在一点处  $X_p \notin T_p N_{f(p)}$ , 则  $X_p(f) \neq 0$ 。

固定  $f$ , 将所有  $df(X) = 0$  的  $X$  拿出来, 他组成一个  $n-1$  维的分布,  $\{N_a\}$  就是这个分布的一族积分流形, 因为  $X$  在每一点都完全位于经过那一点的某个  $N_a$  的切空间内。我们称  $N_a = \{p \in M : f(p) = a\}$  是 Paffa 方程  $df = 0$  的解。从上面来看, 一个 Paffa 方程要有解, 那么解应该是一个积分曲面才是, 即, Paffa 方程  $\omega = 0$  的解是使得  $\omega(X) = 0$  的所有的  $X$  的积分曲面。

现在假设一个 1-形式  $\omega$  是完全可积的, 即他可以写作  $\omega = f dg$ , 那么 Paffa 方程  $\omega = 0$  等价于  $dg = 0$ , 这就确定了一个积分曲面。

(1.4.5) 设  $\omega$  是一个 1-形式, 记分布  $\ker \omega$  是由满足  $\omega(X) = 0$  的所有  $X$  张成的一个分布。记  $\ker(\omega_1, \dots, \omega_r) = \bigcap_{i=1}^r \ker \omega_i$ 。

(1.4.6) 在局部, 对任意一个分布  $L$ , 存在一族余切矢量场  $\{\omega_i : 1 \leq i \leq r\}$  使得  $L = \ker(\omega_1, \dots, \omega_r)$ 。

实际上, 一个分布在局部, 和他在流形一点处 (一个矢量空间内) 是很相似的。设  $L$  是一个分布, 由  $r$  个光滑的切向量场  $\{X_i : 1 \leq i \leq r\}$  张成, 则在局部, 我们可以找到  $n-r$  个光滑向量场  $\{X_i : r+1 \leq i \leq n\}$ , 使得  $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$  处处线性无关。依然在局部, 我们可以找到与其对偶<sup>2</sup>的 1-形式  $\{\omega_i : 1 \leq i \leq n\}$ , 那么那些使得  $\omega(X)$  对  $X \in L$  成立的 1-形式局部由  $\{\omega_i : r+1 \leq i \leq n\}$  张成。因此, 局部上, 一个分布  $L$  可以写作  $L = \ker(\omega_{r+1}, \dots, \omega_n)$ , 等价地, 可以写作一个 Paffa 方程组  $\{\omega_i = 0 : r+1 \leq i \leq n\}$ 。

因为局部存在积分曲面的充要条件是任取  $X, Y \in D$  满足  $[X, Y] \in D$ , 所以如果  $L = \ker(\omega_{r+1}, \dots, \omega_n)$  存在积分曲面, 应该有  $\omega_i([X, Y]) = 0$ 。

(1.4.7) 设  $\omega = f dg$ , 其中  $f$  和  $g$  是光滑函数, 则对一般的光滑向量场  $X, Y$  成立。

$$\begin{aligned} \omega([X, Y]) &= f dg([X, Y]) = f[X, Y](g) \\ &= fX(Y(g)) - fY(X(g)) \\ &= X(fY(g)) - X(f)Y(g) - Y(fX(g)) + Y(f)X(g) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - (X(f)Y(g) - Y(f)X(g)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

对于  $X(f)Y(g) - Y(f)X(g)$ , 我们可以将其改写为  $df(X)dg(Y) - dg(X)df(Y)$ , 因为这是关于  $X$  和  $Y$  的双线性函数, 我们可以引入一个张量  $df \otimes dg$  使得  $df \otimes dg(X, Y) = df(X)dg(Y)$ , 则

$$df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) = df \otimes dg(X, Y) - dg \otimes df(X, Y) = (df \otimes dg - dg \otimes df)(X, Y).$$

记  $df \wedge dg = df \otimes dg - dg \otimes df$ , 其中的  $\wedge$  被称为楔积, 记  $D(f dg) = df \wedge dg$ , 则式 (1.2) 变成了

$$D(f dg)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

从式子右端来看,  $df \wedge dg(X, Y)$  并不依赖于  $\omega$  的具体形式  $\omega = f dg$ 。实际上, 任意一个 1-形式  $\omega$  可以写作  $\omega = \sum_i f_i dg_i$ , 所以对于一般的情况, 式 (1.2) 应该写作

$$\sum_i D(f_i dg_i)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

如果我们把  $D$  看做线性算子, 则对于任意一个 1-形式, 我们都定义了一个线性算子, 满足

$$D(\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \quad (1.3)$$

(1.4.8) 当然, 我们也可以反过来通过式 (1.3) 来定义  $D(\omega)$ , 顺序在这里不是紧要的。紧要的是,  $D(\omega)$  决定了  $\ker \omega$  是否容许一个积分曲面。这是因为, 如果  $X, Y \in \ker \omega$ , 则式 (1.3) 变成了

$$D(\omega)(X, Y) = -\omega([X, Y]),$$

所以  $D(\omega)(X, Y) = 0$  当且仅当  $[X, Y] \in \ker \omega$ 。

这正是 Cartan 当年提出微分形式时候的处境, 那时候, 他从 Frobenius 和 Darboux 那里知道了, 不同的 Pfaff 形式的等价条件就联系在一个 bilinear covariant 上面, 而这个 bilinear covariant 就是我们这里的  $D(\omega)$ 。

从这个角度来看, 正因为有 Frobenius 定理, 或者更本质一点, 我们需要把积分曲线拼成积分曲面, 我们需要考察两个向量场  $X$  和  $Y$  的 Lie 括号  $[X, Y]$ , 而这个 Lie 括号的反对称性来自于我们比较两条路径。

<sup>2</sup>即满足  $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ 。

现在, 这种反对称性反应在了 1-形式之间的楔积, 使得他构成了一个 (吃掉两个矢量场的) 反对称函数。所以, 从 Cartan 这里, 反对称性的来源应该就是为了处理积分曲面的存在性, 而由  $[X, Y]$  自然诱导出来的。

(1.4.9) 外代数的复习在附录, 对于矢量空间  $V$  的  $k$ -次外代数记做  $\Omega^k(V)$ 。在流形上的一点  $p$  处, 记  $\Omega_p^k = \Omega^k(T_p M)$ , 则  $\Omega_p^1 = T_p^* M$ 。

(1.4.10) 设  $U \subset_{\text{open}} M$ ,  $U$  上的映射  $\omega: p \mapsto \omega(p) \in \Omega_p^k$  被称为  $U$  上的一个  $k$ -形式。称他是光滑的, 如果他吃下任意  $k$  个光滑矢量场会得到一个光滑函数。所有  $U$  上的光滑  $k$ -形式的集合记做  $\Omega^k(U)$ 。显然,  $U$  上的光滑函数可以看成是一个光滑 0-形式, 一个光滑余切矢量场是一个光滑 1-形式。如果  $\omega$  是一个光滑 1-形式, 则  $D(\omega)$  是一个光滑 2-形式。下面我们所称的形式都是光滑的, 我们将省略光滑二字。

(1.4.11) 设分布  $L$  由  $\{X_i: 1 \leq i \leq r\}$  张成, 且  $L = \ker(\omega_{r+1}, \dots, \omega_n)$ , 如果  $D(\omega)(X_i, X_j) = 0$  成立, 则  $D(\omega)$  可以写作

$$D(\omega) = \sum_{i=r+1}^n \psi_i \wedge \omega_i,$$

其中  $\psi_i$  是一次微分式。

实际上, 局部地  $\{\omega_i: 1 \leq i \leq n\}$  构成一组基, 则

$$d\omega = \sum_{i=r+1}^n \psi_i \wedge \omega_i + \sum_{i,j=1}^r a_{ij} \omega_i \wedge \omega_j,$$

其中  $\psi_i$  是一次微分式, 而  $a_{ij}$  是光滑函数, 且关于指标是反对称的。因为  $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ , 所以

$$0 = d\omega(X_i, X_j) = \sum_{p,q=1}^r a_{pq} \omega_p \wedge \omega_q(X_i, X_j) = \sum_{p,q=1}^r a_{pq} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{jp} \delta_{iq}) = 2a_{ij}.$$

(1.4.12) 设分布  $L$  由  $\{X_i: 1 \leq i \leq r\}$  张成, 且  $L = \ker(\omega_{r+1}, \dots, \omega_n)$ , 则  $L$  存在积分曲面当且仅当,

$$D(\omega_i) = \sum_{j=r+1}^n \psi_{ij} \wedge \omega_j$$

对每一个  $i$  都成立。

(1.4.13) 在很久很久以前, 对  $U$  上的一个光滑函数  $f$ , 我们定义了外微分  $d$ , 使得  $df$  是一个 1-形式, 而刚刚, 我们对  $U$  上的一个 1-形式  $\omega$ , 定义了  $D$  使得  $D(\omega)$  是一个 2-形式。更一般地, 我们想要去定义如下一个算符

$$d_k: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U),$$

使得  $d_0 = d$ ,  $d_1 = D$ 。我们将  $\{d_k\}$  统称为外微分算符, 统一记做  $d$ , 他完成了一个  $k$ -形式到一个  $(k+1)$ -形式的转变。

## 1.5 Integration

(1.5.1) 对于  $p \geq 0$ , 以及  $\mathbb{R}^{p+1}$  中的  $p+1$  个矢量  $\{v_i: 0 \leq i \leq p\}$  满足  $\{v_i - v_0: 1 \leq i \leq p\}$  是一个线性无关组, 我们定义仿射  $p$ -单形为

$$\Delta^p = \left\{ \sum_{i=0}^p a_i v_i \in \mathbb{R}^{p+1} : \sum_{i=1}^p a_i = 1, \text{ and each } a_i \leq 0 \right\},$$

而流形  $M$  上的一个 (光滑)  $p$ -单形是指一个 (光滑) 映射  $\sigma : \Delta^p \rightarrow M$ 。

一个标准 0-单形是一个点 1, 一个标准 1-单形是一个线段  $(t, 1-t)$ , 端点为  $(0, 1)$  和  $(1, 0)$ , 一个标准 2-单形是一个三角形  $(s, t, 1-s-t)$ , 他的三个顶点位于  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  和  $(1, 0, 0)$ 。记  $M$  上全部  $p$ -单形生成的自由 Abel 群为  $C_p(M)$ 。

**(1.5.2)** 一个标准  $p$ -单形的某个  $(p-1)$ -边界是指某个  $a_i = 0$  的情况, 一个  $(p-1)$  边界是自然的  $(p-1)$ -单形。一个  $p$ -单形  $\sigma$  的某个  $(p-1)$ -边界是指某个  $a_i = 0$  的情况。



## Chapter 2

# Appendix: Exterior Algebra

(2.0.1) 这里复习一下外代数的内容。设  $V$  是一个  $n$  维矢量空间, 记  $\Omega^k(V)$  为所有反对称线性函数

$$f: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\uparrow} \rightarrow \mathbb{R}$$

的集合。这个集合有一个显然的线性结构。此外再约定  $\Omega^1(V) = V^*$  和  $\Omega^0(V) = \mathbb{R}$ . 我们将  $\Omega^k(V)$  称为  $V$  的  $k$ -次外代数。

(2.0.2) 设  $\xi \in \Omega^m(V)$  和  $\eta \in \Omega^n(V)$ , 定义  $\xi$  和  $\eta$  的外积  $\xi \wedge \eta \in \Omega^{m+n}(V)$  为

$$\xi \wedge \eta = \frac{1}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(\xi \otimes \eta).$$

其中  $\sigma$  属于  $m+n$  阶置换群且  $\sigma(\xi \otimes \eta)$  被定义为

$$\sigma(\xi \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{m+n}) = (\xi \otimes \eta)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m+n)}).$$

而  $\xi \otimes \eta$  (称为张量积) 被定义为双线性的运算

$$\xi \otimes \eta(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+n}) = \xi(v_1, \dots, v_m) \eta(v_{m+1}, \dots, v_{m+n}).$$

容易验证张量积满足结合律。

**Proposition (2.0.3)** 设  $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Omega^m(V)$  和  $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Omega^n(V)$  还有一个  $\zeta \in \Omega^h(V)$ , 有

(1) 分配律:

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta,$$

$$\xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2.$$

(2) 反变换律:  $\xi \wedge \eta = (-1)^{mn} \eta \wedge \xi$ .

(3) 结合律:  $(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$ .

**Proof:** (1) 由  $\sigma$  线性和张量积线性显然。

(2) 设置换

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m & m+1 & \cdots & m+n \\ 1+n & \cdots & m+n & 1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

容易证明  $(-1)^{\text{sign}(\tau)} = (-1)^{mn}$ .

由线性性, 我们只要对一个分量证明就可以了. 按基打开直接写出

$$\begin{aligned}\xi \wedge \eta &= \frac{\xi^{i_1 \dots i_m} \eta^{j_1 \dots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m} \otimes v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n}) \\ \eta \wedge \xi &= \frac{\xi^{i_1 \dots i_m} \eta^{j_1 \dots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n} \otimes v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m})\end{aligned}$$

注意到  $\sigma$  跑遍所有置换, 那么  $\sigma$  和  $\tau$  的复合  $\sigma' = \sigma \circ \tau$  也跑遍所有置换, 且  $(-1)^{\text{sign}(\sigma')} = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} (-1)^{\text{sign}(\tau)}$ , 所以

$$\begin{aligned}\eta \wedge \xi &= \frac{\xi^{i_1 \dots i_m} \eta^{j_1 \dots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma' \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma')} \sigma'(v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n} \otimes v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m}) \\ &= \frac{\xi^{i_1 \dots i_m} \eta^{j_1 \dots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} (-1)^{\text{sign}(\tau)} \sigma(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m} \otimes v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n}) \\ &= (-1)^{\text{sign}(\tau)} \frac{\xi^{i_1 \dots i_m} \eta^{j_1 \dots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m} \otimes v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_n}) \\ &= (-1)^{\text{sign}(\tau)} \xi \wedge \eta.\end{aligned}$$

代入  $(-1)^{\text{sign}(\tau)} = (-1)^{mn}$  即得证(2).

第三个性质, 也就是结合律的证明就是死算, 略去计算最后得到:

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \frac{1}{m!n!h!} \sum_{\sigma \in S^{m+n+h}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(\xi \otimes \eta \otimes \zeta) = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta).$$

□

(2.0.4) 留意  $v, w \in \Omega^1(V) = V^*$  的外积  $v \wedge w$  是有趣的. 首先, 显然地,  $\omega \wedge \omega = 0$ . 然后容易证明对  $a, b \in V$

$$v \wedge w(a, b) = v(a)w(b) - w(a)v(b) = \begin{vmatrix} v(a) & v(b) \\ w(a) & w(b) \end{vmatrix}.$$

对于多个  $\omega_i \in \Omega^1(V)$  的外积, 我们可以用归纳法证明

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p(v_1, \dots, v_p) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \dots & \omega_p(v_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \dots & \omega_p(v_p) \end{vmatrix}.$$

(2.0.5) 还有一个很类似的结论, 对于多个  $\omega_i \in \Omega^1(V)$  的外积来说我们有  $\omega_i \wedge \omega_j = -\omega_j \wedge \omega_i$ , 而且是线性的. 我们考虑  $p$  个  $\omega_i \in \Omega^1(V)$  之间的外积  $F(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$ , 如果矢量空间  $V^*$  的基是  $\{v_i\}$ , 由于  $F$  是反对称线性映射, 我们有熟知的分解:

$$F(\omega_1, \dots, \omega_p) = \det(\omega_1, \dots, \omega_p) F(v_1, \dots, v_p),$$

或者写作

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1p} & \dots & \omega_{pp} \end{vmatrix} v_1 \wedge \dots \wedge v_p.$$



其中  $\omega_{ij}$  值是  $\omega_i$  在  $v_j$  方向的分量值。从这里可以看到, 若  $\omega_i$  们线性相关的, 则  $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$ . 若  $V^*$  的维度是  $n$ , 而  $p > n$ , 则  $\omega_i$  必然线性相关, 则  $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$ .

(2.0.6) 特别地, 如果  $\omega' = dx'$  和  $\eta' = dy'$ , 且  $x'$  和  $y'$  可以看做  $x$  和  $y$  的函数, 而

$$dx' = \partial_x x' dx + \partial_y x' dy, \quad dy' = \partial_x y' dx + \partial_y y' dy,$$

因此

$$dx' \wedge dy' = \det \left( \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right) dx \wedge dy,$$

其中  $\partial(x', y')/\partial(x, y)$  是  $(x', y')$  关于  $(x, y)$  的 Jacobian. 如果还记得积分学的一些基本事实, 会发现这就是和重积分变量替换公式是如此的相似。实际上, 对于二个变量的重积分变换公式, 他写作

$$\int_S dx' dy' = \int_S \left| \det \left( \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right) \right| dx dy,$$

其中绝对值的引入是因为换变量可能会改变积分区域的定向。

所以, 从这个角度来看, 正如我们对于  $dx$  是无穷小距离的直观一样, 我们可以认为  $dx \wedge dy$  是无穷小面积。

(2.0.7) 设  $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$  是  $V^*$  的一组基, 则  $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}$  是  $\Omega^k(V)$  的一组基。于是当  $k > n$  时  $\Omega^k(V) = 0$ , 当  $0 \leq k \leq n$  时,  $\dim \Omega^k(V) = \binom{n}{k}$ .

**Lemma (2.0.8)** (Cartan 引理) 设  $\{v_i : 1 \leq i \leq r\}$  和  $\{w_i : 1 \leq i \leq r\}$  是  $V^*$  中的两组矢量, 且  $\sum_{i=1}^r v_i \wedge w_i = 0$ 。如果  $\{v_i\}$  线性无关, 则每个  $w_i$  可以由  $\{v_i\}$  线性组合而成  $w_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} v_j$ , 且  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ .

**Proof:** 将  $\{v_i\}$  扩充为一组基, 则  $w_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} v_j$ , 将其代入条件  $\sum_{i=1}^r v_i \wedge w_i = 0$  有

$$0 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} v_i \wedge v_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) v_i \wedge v_j + \sum_{j=r+1}^n \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} v_i \wedge v_j,$$

由于  $v_i \wedge v_j$  是  $\Omega^2(V)$  的一组基, 所以  $\alpha_{ij} = 0$  当  $j > r$ , 且  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  当  $j \leq r$ . □