

Chapter 1

Manifold

1.1 Foundation

(1.1.1) 一个局部 n 维欧几里得空间是一个 Hausdorff 空间 M 满足, 对每一个点 $p \in M$, 存在一个 p 的邻域 $U \subset M$ 和一个同胚 $\varphi: U \rightarrow V$, 其中 V 是一个 \mathbb{R}^n 中的开集。这个同胚有时候被称为一个坐标、坐标映射等, 而资料 (U, φ) 被称为一个坐标卡。

坐标 φ 经常写成分量形式, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 其中 $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$.

(1.1.2) 局部欧几里得空间 M 上的一个光滑微分结构 \mathcal{F} 是这样一族坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 满足: $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ 是光滑映射, 后者被称为坐标卡的相容性条件。此外, 如果有一个坐标卡 (U, φ) 和每一个坐标卡都相容, 那么可以推断出他在 \mathcal{F} 中, 这样的微分结构被称为极大微分结构。极大微分结构当然不一定是唯一的, 不过我们不担心这个, 因为我们往往是固定一个微分结构来研究流形的, 下面假设出现的微分结构总是极大的。

(1.1.3) 一个 n 维光滑流形 (M, \mathcal{F}) 是一个赋予了光滑微分结构 \mathcal{F} 的第二可数的局部欧几里得空间 M .

我们想要做一个范畴, 现在已经有了对象, 那么自然需要态射, 态射被如下定义:

(1.1.4) 设 (M, \mathcal{F}) 和 (N, \mathcal{G}) 是两个光滑流形, 连续函数 $f: M \rightarrow N$ 被称为一个光滑映射, 如果 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是一个光滑函数对任意的 \mathcal{F} 中的坐标卡 (U, φ) 和 \mathcal{G} 中的坐标卡 (V, ψ) 成立。

这样, 光滑流形就构成了一个范畴, 其中态射是流形间的光滑映射。他是拓扑空间范畴的子范畴。

从此以后, 我们对一个固定的流形 (M, \mathcal{F}) , 常常会略去他的微分结构, 只写作 M 。对于一个光滑流形 M 的非空开子集 U , 显然, 他有继承自 M 的一个拓扑结构和微分结构, 所以 U 也是一个光滑流形。很容易看到, \mathbb{R}^n 是一个光滑流形, 按照上面的结论, 我们可以得到一类光滑流形, \mathbb{R}^n 的开子集。比如把 $n \times n$ 矩阵放入 \mathbb{R}^{n^2} 内, 那么行列式不为零的那些矩阵就构成一个光滑流形, 记作 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, 称作一般线性群。

特别地, \mathbb{R} 也是一个光滑流形。我们称光滑映射 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 M 上的光滑函数。光滑函数 f 限制在 $U \subset M$ 上也是一个光滑函数 $f|_U$ 。

(1.1.5) 设 M 是一个光滑流形, $U \subset M$ 上的光滑函数的集合记作 $\mathcal{F}(U)$, \mathcal{F} 被称为 M 上的光滑函数层。由于可以逐点定义加法和乘法, 所以 $\mathcal{F}(U)$ 拥有 \mathbb{R} -代数结构。设 $p \in M$, 我们定义如下等价关系: 设 U 和 V 都是 p 的邻域, 以及 $f \in \mathcal{F}(U)$ 和 $g \in \mathcal{F}(V)$, 如果在一个 $W \subset U \cap V$ 上, $f|_W = g|_W$, 则 $f \sim g$ 。所有这样的等价类记作 \mathcal{F}_p , 称为 p 处的光滑函数茎, 他的代表元素可以写成 $f_p = \langle U, f \rangle$, 称为芽。

显然 \mathcal{F}_p 有继承自 $\mathcal{F}(U)$ 的自然的 \mathbb{R} -代数结构。

设 $p \in M$, 茎 \mathcal{F}_p 是一个局部环。实际上, $\langle U, f \rangle \in \mathcal{F}_p$ 且 $f(p) = 0$ 的元素构成了 \mathcal{F}_p 的一个理想。不在这个理想内的 $\langle U, f \rangle$, 由于 $f(p) \neq 0$, 那么适当缩小 U 到 V , 由 f 的连续性, 总可以找到 V 使得 $f|_V$ 处处不为零, 这样 $\langle V, 1/f|_V \rangle$ 便是 $\langle U, f \rangle$ 的一个逆。因此上面这个理想即 \mathcal{F}_p 唯一的极大理想, 我们记作 \mathfrak{m}_p 。容易看到 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{R}$, 实际上, 对每一个芽 $f_p \in \mathcal{F}_p$, 都成立 $f_p = f_p - f(p) + f(p)$, 在 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$ 中看, 他和 $f(p) \in \mathbb{R}$ 也就没区别了。

Lemma (1.1.6) 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 光滑, 则

$$f(x) = f(0) + \partial_i f(0)x^i + \frac{1}{2}g_{ij}(x)x^i x^j,$$

其中 g_{ij} 光滑。

Proof: 利用微积分基本定理

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 f'(tx)dt = \int_0^1 \partial_i f(tx)x^i dt = h_i(x)x^i,$$

可以得到 $h_i(0) = \partial_i f(0)$, 然后再对 h_i 使用上面的步骤即可得到我们想要的表达式。□

(1.1.7) 使用一个局部坐标 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ 且 $\varphi(p) = 0$, 可以将上面的引理翻译到流形上。设 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 光滑, 则在 p 的一个邻域 V 上对任意的 $q \in V$ 成立

$$f(q) = f(p) + \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}(p)x^i(q) + \frac{1}{2}g_{ij}(q)x^i(q)x^j(q),$$

其中 g_{ij} 在 V 上光滑, 以后我们就将那个偏微分记作 $\partial_i f(p)$ 。

(1.1.8) 设 $p \in M$, p 处的茎为 \mathcal{F}_p , 他的极大理想为 \mathfrak{m}_p , 此时 p 处的余切空间被定义为自然的矢量空间 $T_p^*M := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 。余切空间的元素被称为余切矢量。

$\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 确实是一个矢量空间。首先它显然是一个 \mathcal{F}_p -模, 然后任取 $a \in \mathfrak{m}_p$, 由于 $a\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = 0$, 所以 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 是一个 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$ -模, 即 \mathbb{R} -矢量空间。这样定义的余切空间, 可以看到, 是所有的那些一阶小量构成的集合, 即其中的元素为“微分”。

(1.1.9) 设 $p \in M$, M 是一个 n 维流形, 则 $T_p^*M := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 是 n 维的。

我们可以选取一组局部坐标来算维数, 由于选取不同的局部坐标都是通过同胚联系的, 所以不同的选取对维数没什么影响。由上面的引理, 设 $f_p \in \mathfrak{m}_p$, 则他可以写作

$$f_p = \partial_i f(p)x_p^i + \frac{1}{2}g_{ij}(p)x_p^i x_p^j$$

考虑一个局部坐标 $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, 设自然同态 $d_p: \mathfrak{m}_p \rightarrow \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, 很简单就可以看到 $d_p(x_p^i) \neq 0$ 。实际上, 如果 $x_p^i \in \mathfrak{m}_p^2$, 那么 $x_p^i = rs$, 其中 $r, s \in \mathfrak{m}_p$, 然后根据上面的引理 $r = a_i x_p^i + \dots$ 以及 $s = b_i x_p^i + \dots$, 于是 $x_p^i = rs = a_j b_k x_p^j x_p^k + \dots$, 但显然这是不可能的。

所以, 如果 $f_p \in \mathfrak{m}_p$, 则

$$d_p(f_p) = \partial_i f(p)d_p(x_p^i). \quad (1.1)$$

这样所有的 $T_p^*M = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 中的元素都可以由 $d_p(x_p^i)$ 展开, 他们都是非零的, 而且容易证明是线性无关的, 所以这是 T_p^*M 的一组基, 余切空间的维数计算完毕。

以后我们用 $d_p(f)$ 乃至 $d_p f$ 来记 $d_p(f_p)$ 。实际上, 我们可以将 d_p 定义在 \mathcal{F}_p 上, 设 a 是一个常值芽, 补充定义 $d_p a = 0$, 可以看到, 此时式(1.1)依旧满足。以后我们就这样来看 $d_p: \mathcal{F}_p \rightarrow T_p^*M$, 他被称为外微分算子。

(1.1.10) 此时

$$d_p(fg) = d_p((f - f(p))(g - g(p)) + f(p)(g - g(p)) + (f - f(p))g(p)) = f(p)d_p g + d_p f g(p).$$

(1.1.11) 设 $f : M \rightarrow N$ 是一个光滑映射，上面的光滑函数层分别为 \mathcal{F} 和 \mathcal{G} 。任取 $\varphi \in \mathcal{G}(V)$ ，可以通过 $f^*\varphi = \varphi \circ f$ 定义 $f^*\varphi \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ 。

下面我们考虑两个流形余切空间之间的映射。设 $\langle V, \varphi \rangle \in \mathcal{G}_{f(p)}$ ，于是 $\langle f^{-1}(V), \varphi \circ f \rangle \in \mathcal{F}_p$ ，所以 f^* 诱导了一个 \mathbb{R} -代数同态 $f_p^* : \mathcal{G}_{f(p)} \rightarrow \mathcal{F}_p$ ，特别地，可以看到 $f_p^* : \mathfrak{m}_{f(p)} \rightarrow \mathfrak{m}_p$ ，于是 $f_p^* : \mathfrak{m}_{f(p)}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_p^2$ 。

(1.1.12) 设 $f : M \rightarrow N$ 是一个光滑映射，他诱导了一个线性映射¹ $f_p^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ 。

(1.1.13) 对于复合， $(f \circ g)_p^* = g_p^* \circ f_{g(p)}^*$ 。很容易看到 $\text{id}_p^* = \text{id}_{T_p^* M}$ ，所以如果 $f : M \rightarrow N$ 是同胚，则 $f_p^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ 是同构。

(1.1.14) 利用复合公式，设 $f : M \rightarrow N$ 是光滑映射，则 $f_p^*(d_{f(p)}g) = d_p(f^*g) = d_p(g \circ f)$ 。

(1.1.15) 设 $p \in M$ ， M 是 n 维光滑流形，则切空间 $T_p M$ 被定义为余切空间 $T_p^* M$ 的对偶空间。切空间的元素被称为切矢量。由于余切空间是有限维的，他的对偶空间也和有着相同的维度，即 n 维。

(1.1.16) 由于切空间是余切空间的对偶空间，所以他是余切空间上的线性函数构成的空间，反过来，由于是有限维的，所以可以认为对偶空间的对偶空间就是原本的空间，这就是说可以将余切空间的矢量看成切空间矢量的线性函数：设 $d_p f \in T_p^* M$ 和 $v \in T_p M$ ，定义 $d_p f(v) := v(d_p f)$ 。

虽然上面这些个定义都很短也很清楚，不过操作上却没有那么简单。下面，我们将一个切矢量扩张到 \mathcal{F}_p^* 上面去。

(1.1.17) 设 f 是在 p 附近的光滑函数，而 $v \in T_p M$ ，可以通过 $D_v(f_p) := v(f_p - f(p))$ 定义线性映射 $i_p : v \mapsto i_p(v) = D_v \in \mathcal{F}_p^*$ ，他是一个单射。

注意到 $(fg)_p = f_p g_p$ ，所以

$$\begin{aligned} D_v(f_p g_p) &= v(f_p g_p - f(p)g(p)) \\ &= v((f_p - f(p))(g_p - g(p)) + f(p)(g_p - g(p)) + (f_p - f(p))g(p)) \\ &= f(p)D_v(g_p) + D_v(f_p)g(p), \end{aligned}$$

我们将满足这条性质的线性映射 $D_v \in \mathcal{F}_p^*$ 称为 p 处的导子，所有 p 处的导子构成的空间暂时记作 V_p ，而他其实和 $T_p M$ 是同构的。

为了证明这点，任取导子 $D \in V_p$ ，由于 $D(1) = D(1 \times 1) = 2D(1)$ ，所以 $D(1) = 0$ ，继而靠着 D 的线性性，对于常值函数的芽 a 来说， $D(a) = aD(1) = 0$ 。因为每一个 \mathcal{F}_p 中的元素 f_p 都可以写成 $f_p - f(p) + f(p)$ 的形式，所以 $D(f_p) = D(f_p - f(p))$ ，这就是说，一个导子的性质完全由他在 \mathfrak{m}_p 上的值决定，这种关系是一一对应的。即 $\pi_p : D \mapsto D|_{\mathfrak{m}_p}$ 是一个线性同构。

同时，设 $f_p, g_p \in \mathfrak{m}_p$ ，则 $\pi_p(D)(f_p g_p) = f(p)\pi_p(D)(g_p) + g(p)\pi_p(D)(f_p) = 0$ ，于是 $\pi_p(D)(\mathfrak{m}_p^2) = 0$ ，所以， $\pi_p(D) \in T_p M$ ，即 $D|_{\mathfrak{m}_p}$ 是一个切矢量，因此导子 D 完全由一个切矢量 $D|_{\mathfrak{m}_p} = \pi_p(D)$ 决定。这样， $i_p : T_p M \rightarrow V_p$ 也是一个满射，所以他是一个同构。当然我们也可以直接计算验证 $\pi_p \circ i_p = \text{id}_{T_p M}$ 以及 $i_p \circ \pi_p = \text{id}_{V_p}$ 。

因有这个同构，所以以后我们用 $T_p M$ 来标记导子构成的矢量空间，一个导子才是一个切矢量。这样的好处是，我们在具体计算的时候，可以直接在 \mathcal{F}_p 上进行而非 \mathfrak{m}_p 上，特别地，现在对于一个切向量 v 来说，成立 $d_p f(v) = v(f_p)$ ，这是因为对一个导子 v 来说 $v(f_p) = v(d_p f)$ 。

(1.1.18) 设 $f : M \rightarrow N$ 是一个光滑映射，定义它在 $p \in M$ 处的导数为 $T_p f = f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 使得对任意的 $v \in T_p M$ 和任意的 $g_{f(p)} \in \mathfrak{m}_{f(p)}$ 成立 $(f_{*p}v)(g_{f(p)}) = v(f_p^* g_{f(p)})$ 。

¹这里我们滥用一下记号。

为以后的处理方便,不妨通过等同 ∂_i 和标准基 e_i 来等同 $T_p\mathbb{R}^n$ 和 \mathbb{R}^n . 此外,通过坐标卡上的同胚 φ ,我们用 ∂_i 来标记 $\varphi_{*p}^{-1}(e_i)$, 这显然是 T_pM 处的一组基。

(1.1.19) 设 f 是在 p 附近的光滑函数,任取 $v \in T_pM$. 因为 $f_{*p}: T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$, 所以 $f_{*p}(v)$ 是一个数,故而

$$f_{*p}(v) = f_{*p}(v)(\text{id}_{\mathbb{R}}) = v((\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f)_p) = v(f_p) = d_p f(v).$$

因为对所有的切矢量 v 都成立上式,所以 $f_{*p} = d_p f$.

选定一个局部坐标,因为 $d_p x^i(\partial_j) = \partial_j x^i(p) = \delta_j^i$, 所以 $d_p x^i$ 就是 ∂_i 的对偶基。下面我们来计算一个特别的例子,设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个流形 M 上的矢量值光滑函数,则 $f^i: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数,那么 $f_{*p} = d_p f^i e_i$, 其中 e_i 是 \mathbb{R}^n 的标准基。再设 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则 $d_p f^i = \partial_j f^i(p) dx^j = \partial_j f^i(p) e^j$. 写成矩阵即

$$(f_{*p})^i_j = \partial_j f^i(p),$$

此即 f 的 Jacobian.

(1.1.20) 复合函数求导法则: $(f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}$. 抽象表现出来是线性映射复合,表现在矩阵(即 Jacobian)上就是两个矩阵相乘。

(1.1.21) 设 U 上光滑曲线 $\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, 在时间为零的时候经过点 p , 即 $\sigma(0) = p$, 于是 $\sigma_{*0} = \dot{\sigma}(0) \in T_pM$. 局部来说,他可以写作

$$\dot{\sigma}(0) = \frac{dx^i \circ \sigma}{dt}(0) \partial_i = \dot{\sigma}^i(0) \partial_i,$$

当他作用在一个光滑函数上时,写作

$$\dot{\sigma}(0)(f) = \dot{\sigma}^i(0) \partial_i f(p).$$

对于固定的 f , $\dot{\sigma}(0)(f)$ 可以看做 f 沿着 σ 在点 p 切矢量的方向导数,实际上,在 \mathbb{R}^n 中,我们通常将上式写作 $\dot{\sigma}(0)(f) = v \cdot \nabla f$, 其中 $v = \dot{\sigma}^i(0) e_i$.

(1.1.22) 反过来,给定一个点 p 处的切矢量 v ,我们可以找到一个光滑曲线 σ 使得在他点 p 的切矢量就是 v . 这是局部结论,在欧式空间里去证明就可以了。在欧式空间中, $\sigma(t) = p + vt$ 就是我们需要的光滑曲线。

(1.1.23) 由于 $v(f_p)$ 可以看做 f 沿着 v 方向在 p 点的方向导数,以及等式 $d_p f(v) = v(f_p)$, 所以 $d_p f(v)$ 也理解为 f 沿着 v 方向在 p 点的方向导数。

1.2 Submanifold

(1.2.1) $\varphi: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射, (a). 称 φ 是一个浸入, 如果 φ_{*p} 处处非退化. (b). 称 (M, φ) 是一个子流形, 如果 φ 是单的. 不是所有浸入都是子流形, 比如圆周的参数表示 $(\cos t, \sin t)$ 是一个浸入, 但不是单的。

显然,对于光滑流形的一个开子集,他可以继承大流形的流形结构而形成一个新的流形,他是一个子流形,被称为开子流形。

后面我们经常会说“设流形 M 上有某某”这样的话,但一般来说,某某在流形上的整体存在性是很难保证的,往往他只是局部存在,即可以在流形 M 的某个开集上存在。但是注意到 M 的开集现在也有流形结构,即开子流形结构,于是我们的命题就可以在这个新的流形上正常工作了。所以经常为了方便,对于不少命题的陈述,我们会把对象直接定义到整个流形上。

(1.2.2) 设 $\varphi: M \rightarrow N$, 如果 M 微分同胚于 N 的开子流形 $\varphi(M)$, 则称子流形 (M, φ) 是一个嵌入。

浸入子流形不一定是嵌入子流形, 比如秩为 1 的单一的光滑曲线 $f(t) = ((t^3+t)/(t^4+1), (t^3-t)/(t^4+1))$, 在 \mathbb{R}^2 中他的图像看起来是可以有自交点的。

(1.2.3) 设 U 是 M 的一个子集, 但 U 本身有一个流形的结构, 如果此时 $i: U \hookrightarrow M$ 是一个嵌入, 则称 U 是 M 的一个正则子流形。

所谓的正则子流形就是说, 它本身的流形结构和从大的流形那里继承来的流形结构是相同的。

(1.2.4) 设 M 和 N 是光滑流形, $f: M \rightarrow N$ 是一个单浸入。我们可以赋予 $f(M)$ 一个微分结构通过把 $f: M \rightarrow f(M)$ 做成一个微分同胚。此时, $f(M)$ 是 N 的正则子流形当且仅当 f 是一个嵌入。

(1.2.5) 反函数定理: 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集, 映射 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 光滑, 如果 Jacobian 在 p 处非奇异, 即 f_{*p} 可逆, 则存在 p 的一个邻域 $V \subset U$, 使得 $f|_V: V \rightarrow f(V)$ 是一个 (光滑) 同胚。

证明见微积分教材, 常见的证明有比如压缩映像定理。该定理说明, 如果函数局部线性化后性质不错, 那么在那点附近性质也不错。由于是局部性质, 所以可以直接翻译到流形上没什么改变。

Theorem (1.2.6) 流形上的反函数定理: 设 M 和 N 的维度相同, 映射 $f: M \rightarrow N$ 光滑, 如果 f_{*p} 可逆, 则存在 p 的一个邻域 U , 使得 $f|_U: U \rightarrow f(U) \subset N$ 是一个 (光滑) 同胚。换句话说, 浸入局部是嵌入。

(1.2.7) 称一族 M 上的光滑函数 $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ 在点 p 相互无关, 即指 $\{d_p(f_i) = (f_i)_{*p} \in T_p^*M \mid 1 \leq i \leq n\}$ 们线性无关。

如果 $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ 相互无关, 则函数 $f = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在点 p 上的导数 f_{*p} 可逆, 所以按照反函数定理, 可以在 p 附近找一个领域, 使得 $f|_V$ 是一个 V 到 \mathbb{R}^n 中开集的同胚, 这样 $(V, f|_V)$ 就是一张坐标卡。如果 $\{f_i\}$ 个数不到 n , 那么补几个进去, 照样可以找到一张坐标卡, 其中前几个分量是 $\{f_i\}$ 。

Lemma (1.2.8) 设 $f_*: V \rightarrow W$ 是一个有限维向量空间间的线性映射以及他的对偶映射是 $f^*: W^* \rightarrow V^*$, 则 $\text{rank}(f_*) = \text{rank}(f^*)$ 。特别地, 当 f_* 是单 (满) 的时候, f^* 是满 (单) 的。

(1.2.9) 设 $\varphi: M \rightarrow N$ 光滑, 且 φ_{*p} 是单射。令 (x_1, \dots, x_n) 是 $\varphi(p)$ 附近的一个坐标, 那么 $x_i \circ \varphi$ 是 p 附近的一个坐标。特别地, φ 在 p 附近是一个单射。如果 φ_{*p} 是满射, 则 $x_i \circ \varphi$ 是 p 附近的一个坐标中的一部分。

若 φ_{*p} 是单射, 他的对偶映射 φ_p^* 就是满射, 于是 $\varphi_p^*(x_i)_{* \varphi(p)} = (x_i \circ \varphi)_{*p} = d_p(x_i \circ \varphi)$ 张成了 T_p^*M , 在其中选出一组极大线性无关组 (不妨设为前 m 个), 这就构成了 p 附近的一组坐标。而 $(x_1, \dots, x_m) \circ \varphi$ 局部是同胚, 所以 φ 局部是单射。

若 φ_{*p} 是满射, 他的对偶映射 φ_p^* 就是单射, 于是 $\varphi_p^* d_{\varphi(p)} x_i = d_p(x_i \circ \varphi)$ 相互独立, 一般来说, 他数量不够构成坐标, 但是却可以构成坐标中的一部分。

(1.2.10) 设 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射, 则 $\text{rank}_p f$ 被定义为 $\text{rank}_p f_{*p}$ 。取 p 和 $f(p)$ 附近的坐标 φ 和 ψ 且使得 $\varphi(p) = 0$, 则 f 在点 p 的秩就是 Jacobian 矩阵 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{*0}$ 的秩。

选取 $f(p)$ 附近的坐标 ψ , 则 $\psi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, 不妨将其写作 (f_1, \dots, f_n) , 则 $\text{rank}_p f$ 就是 $d_p f_1, \dots, d_p f_n$ 张成的线性空间的维度。实际上, 因为这是局部结果, 所以可以直接假设 $N = \mathbb{R}^n$, 而此时 $f_{*p} = (d_p f_1, \dots, d_p f_n)$ 。

Theorem (1.2.11) 设 M 是一个 m 维流形且 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射, 如果存在常数 l 使得 $\text{rank}_p f$ 处处等于 l , 那么对于 $q \in N$, $f^{-1}(q)$ 要么是空集, 要么是 M 的一个正则子流形, 维度为 $m-l$ 。

这个定理我们就不证明了。特别当 $N = \mathbb{R}$ 的时候, f 如果是一个秩处处为 1 的光滑函数 (即 $d_p f$ 处处不为零), 则 $f^{-1}(a)$ 或者是一个空集, 或者是一个 $m-1$ 维正则子流形。这就是所谓的等能面, 或等势面。

1.3 Vector Field

和我们以前的直观一样，所谓的矢量场就是每一点赋予一个矢量。

(1.3.1) 设 $U \subset M$, U 上的映射 $X: p \mapsto X(p) \in T_p M$ 被称为 U 上的 (切) 矢量场。因为在 U 的每一个局部 V (至少一个坐标卡内), 矢量场 X 都可以写作 $X = X^i \partial_i$, 其中 X^i 是 V 上的实值函数, 而 ∂_i 在不同的点分属不同的切空间。如果 $\{X^i\}$ 在点 p 是光滑函数, 则称 X 在 p 处光滑。如果 X 在 U 处光滑, 则称 X 是 U 上的一个光滑矢量场。

对矢量场而言, 他可以作用在光滑函数上得到一个函数, 在局部的作用效果即 $Xf = X^i \partial_i f$. 显然, 如果 X 是要给光滑矢量场, 则 Xf 是一个光滑函数。反过来, 如果 $X^i \partial_i f$ 对任意的光滑函数都光滑, 则 X^i 自然也是光滑的, 所以有下面一个结论。

(1.3.2) 设 X 是一个 U 上的矢量场, 如果 Xf 对任意的光滑函数 f 也是光滑的, 那么 X 是一个光滑矢量场。

这个命题可以看作矢量场光滑性的一个坐标无关的定义。

(1.3.3) 设 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑单射, 而 X 是 M 上的一个光滑矢量场, 则 $f_* X: p \mapsto f_{*f^{-1}(p)} X_{f^{-1}(p)}$ 是 N 上的一个矢量场。因为 $(f_* X)g = X(g \circ f)$ 成立, 所以这这也是一个光滑矢量场。

(1.3.4) 设 X 是一个 U 上的光滑矢量场, 如果一条光滑曲线 $\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ 且 $\sigma(0) = p$, 满足 $X(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t)$, 则称 σ 是 X 在 p 附近的一条积分曲线。

将矢量场局部写出来, $X(\sigma(t)) = X^i(\sigma(t))\partial_i$, 所以问题归结到了求解微分方程

$$\frac{dx^i \circ \sigma}{dt}(t) = X^i(\sigma(t)),$$

他的初值为 $\sigma(0) = p$ 。微分方程的 (光滑) 解在局部存在且唯一, 所以我们得到了:

(1.3.5) 在 p 附近, 对 X 存在唯一的积分曲线 $\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ 。

设 X 是 U 上的光滑矢量场, 对 U 上的每一点 p , 都可以在 p 附近找到他的一条光滑积分曲线 σ_p , 上面的点 $\sigma_p(t)$ 我们也记作 $\sigma_t(p)$, 这样我们就得到了一个新的一族映射 $\{\sigma_t: U \rightarrow U\}$, 当 $t = 0$ 的时候, $\sigma_0 = \text{id}$. 这样的一族映射 $\{\sigma_t\}$ 被称为矢量场 X 的流。如果需要明确是那个矢量场的时候写作 $\{\sigma_t^X\}$. 由微分方程解的唯一性可以发现 $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{s+t}$.

对于一个矢量场, 整体流的存在性是不能保证的, 比如对 $t = 1$ 的时候, 是否对每一个 p 变换 σ_1 都有意义? 但是, 至少在局部, 我们可以保证在一定范围内的参数都是有意义的, 对于局部的问题, 这个存在性已经基本够使了。

(1.3.6) 光滑流形 M 上的光滑矢量场 X 的支集被定义那些使 X 不为 0 的点集的闭包。如果 X 有紧支集, 则 X 的流的参数可以全局定义到 \mathbb{R} 上面去。特别地, 如果流形是紧的, 则对每一个光滑矢量场都成立。

设支集为 K , 找一个他的开覆盖, 使得每一个开覆盖内 σ_t 都对某一个小区间 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 上有定义, 由于紧, 所以可以找到有限的子覆盖, 所以在这些子覆盖里面, 把最小的 ϵ_{\min} 挑出来, 则在 K 上, 对 $t \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$, σ_t 都有定义。现在对 $p \notin K$ 定义 $\sigma_t(p) = p$, 容易检验 ϵ_t 定义良好且还是光滑映射。最后, 对 $t > \epsilon_{\min}$, 我们可以从某个 $t_0 \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$ 反复复合 $\sigma_{\epsilon_{\min}/2}$, 反之对 $t < -\epsilon$ 亦然。

现在我们将积分曲线的问题稍稍拓展一下, 比如我们现在有两个矢量场 X 和 Y , 他们在每一点张成一个平面, 类比于积分曲线, 我们要问是否存在一个光滑曲面, 使得这个曲面在每一点的切空间都是这俩矢量场张成的平面?

可以直接想象一下怎么处理这样的问题, 直观来看, 积分曲面可以由积分曲线拼成, 即在 p 附近, X 的一条一条积分曲线和 Y 的一条积分曲线编成一张网, 这张网其实应该就在积分曲面上。因此积分曲面存在与否当且仅当这张网足够光滑, 不能突然错开。此时的错开, 就是说, 从网格的一个端点处, 沿着两条路径走到的终点处于积分曲面的两侧。

为简单见, 我们看看这样一个曲边四边形。从 p 出发, 沿着 X 的积分曲线走 s , 走到了 $\sigma_s^X(p)$, 再从这点出发, 沿着 Y 的积分曲线走 t , 走到 $\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)$ 。同样, 从 p 出发, 沿着 Y 的积分曲线走 t , 走到了 $\sigma_t^Y(p)$, 再从这点出发, 沿着 X 的积分曲线走 s , 走到 $\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p)$ 。

这样我们就得到了弯曲的四边形, p 是其中一个端点, 但是一般来说, 沿着两条路径并不会会有相同的终点, 即 p 的对角线方向的另一端点不存在, 此时两条路径并不能闭合成一个弯曲的四边形。甚至, 即使积分曲面存在, 我们也不能得到一个闭合的四边形 (网格), 但是, 如果沿着两条路径的终点是错开的, 则积分曲面依然不存在。

实际上, 因为 X 和 Y 的光滑, 我们可以适当延长 (或缩短) 相比 s 和 t 小量的在一条路径上走的时间使得弯曲的四边形变成一个网格 (此时局部积分曲面存在), 或者, 永远是错开的 (此时局部积分曲面不存在)。

我们现在需要比较两条路径两个终点的差, 在欧式空间里面, 我们可以比较这两个点的距离。但是在流形上这样做是不方便的, 我们可能连一个很直接的计算两个点距离的手段都没有。为了克服这个困难, 我们可以采用 “表示” 的手段, 取一个 U 上的光滑函数 f , 比较 $f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p))$ 和 $f(\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p))$ 。但光取一个 f 肯定是不够的, 取而代之, 我们可以取遍 U 上所有的光滑函数, 如果我们关于所有的光滑函数都计算出了 $f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)) - f(\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p))$ (在 s, t 都很小时), 那么就可以确认这两个坐标相差很小的程度。所以现在就是要计算在 s, t 都很小时的

$$g(s, t) = f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)) - f(\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p)).$$

因为 g 是光滑函数, 我们在 $(0, 0)$ 局部展开他, 求导就可以得到系数。显然, 他到二阶为止的导数都为 0, 并且 $\partial_s^2 g(0, 0) = \partial_t^2 g(0, 0) = 0$, 所以他最低阶不为零的只可能是 $\partial_s \partial_t g(0, 0)$, 这就是说, 我们要求 $\lim_{s, t \rightarrow 0} g(s, t)/st$ 。

(1.3.7) 在 t 很小的时候, $f(\sigma_t^X p) = f(p) + tXf(p) + o(t^2)$ 。为了证明他, 只要求 p 处的导数就行了, 设 $\sigma^X(t)$ 是 $\sigma^X(0) = p$ 的 X 的积分曲线, 则

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\sigma_t^X p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \sigma^X(t) = f_{*p} X = Xf(p).$$

所以 (暂时在记号上略去高阶项)

$$f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)) = f(\sigma_s^X(p)) + tYf(\sigma_s^X(p)) = f(p) + sXf(p) + tY(\sigma_s^X \circ f(p)),$$

以及

$$g(s, t) = sXf(p) + tY(\sigma_s^X \circ f(p)) - tYf(p) - sX(\sigma_t^Y \circ f(p)),$$

其中

$$Y(\sigma_s^X \circ f(p)) - Yf(p) = sX(Y(f))(p),$$

所以

$$g(s, t) = st(X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p)),$$

这就是说 $\partial_s \partial_t g(0, 0) = X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p)$.

(1.3.8) 定义两个矢量场 X, Y 的 Lie 括号为 $[X, Y]$, 他满足 $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ 。

如果采用局部表示 $X = X^i \partial_i$ 和 $Y = Y^j \partial_j$, 则我们可以计算出

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X^i \partial_i (Y^j \partial_j f) - Y^j \partial_j (X^i \partial_i f) \\ &= X^i \partial_i Y^j \partial_j f - Y^j \partial_j X^i \partial_i f \\ &= (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j f. \end{aligned}$$

因此, 尽管形式上是二阶的, 但 $[X, Y]$ 还是一个切矢量场, 局部写作 $[X, Y] = (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j = (X(Y^j) - Y(X^j)) \partial_j$.

(1.3.9) 设 X_1, \dots, X_k 是一族切矢量场, 记

$$D = \{f_1 X_1 + \dots + f_k X_k : \forall 1 \leq i \leq k, f_i \in \mathcal{F}(M)\},$$

称他为流形 M 上的一个被 $\{X_i\}$ 张成的分布。

(1.3.10) 设 X 和 Y 张成一个分布 D , 则局部积分曲面存在当且仅当在 $[X, Y] \in D$.

如果局部积分曲面存在, 那么曲边四边形完全处于积分曲面上面, 尽管沿着两条路径得到的终点可能不同, 但是这两个点的连线 (或者他的切矢量) 应该在 $s \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ 的时候确定了一个切矢量 (由于 X 和 Y 的光滑性, 所以这个切矢量并不依赖于连线的选取), 他处于积分曲面的切子空间 (由 X_p 和 Y_p 张成) 里面, 且正比于 $[X, Y]_p$, 所以 $[X, Y]_p = a(p)X_p + b(p)Y_p$. 而 a 和 b 的光滑性是显然的。

如果不存在, 就是说两个端点分处 X_p 和 Y_p 张成的切子空间两侧, 所以两个点的连线确定的那个切矢量应该不在和 X_p 和 Y_p 张成的切子空间里, 即 $[X, Y]_p \neq aX_p + bY_p$.

(1.3.11) 问题可以问得更广一点, 设 X_1, \dots, X_k 是一族切矢量场, 他们是否 (至少在局部) 有积分 “曲面” 存在? 回答是 Frobenius 定理: 设 X_1, \dots, X_k 在点 p 张成的分布为 D , 则局部存在积分 “曲面” 当且仅当对任意的 i 和 j 成立 $[X_i, X_j] \in D$.

当然, 这个结论可以更加形式地证明他, 如果不信任上面的直观想法, 则可以参看任何一本微分流形的教材, 我这里就略去了。

(1.3.12) 令 φ 是流形 M 上的光滑可逆变换, 设矢量场 X 的流为 σ_t , 则 $\varphi_* X$ 的流为 $\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi$.

设在 p 处的切矢量为 X_p , 经过 p 的 X 的积分曲线为 $\sigma(t)$, 使用变换 φ , 变成了 $q = \varphi(p)$, q 处的切矢量 $\varphi_* X_p = (\varphi_* X)_q$ 以及积分曲线 $\varphi(\sigma(t)) = \varphi(\sigma_t q) = \varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1}(p)$. 此即结论。

(1.3.13) 所以, $\varphi_* X = X$ 当且仅当 $\varphi \circ \sigma_t^X = \sigma_t^X \circ \varphi$ 成立。

(1.3.14) 直接的计算, 我们有:

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (\sigma_t^X)_* Y).$$

所以, 如果 σ_t^X 和 σ_s^Y 可交换, 即 $\sigma_t^X \circ \sigma_s^Y = \sigma_s^Y \circ \sigma_t^X$, 则 $(\sigma_t^X)_* Y = Y$ 以及 $[X, Y] = 0$.

设 $\varphi: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射, X 和 Y 分布是 M 和 N 上的光滑函数, 称他们是 φ 相关的, 如果 $\varphi_* X(f) = Y(f) \circ \varphi$ 对任意光滑函数 f 成立. 局部来看, $X_p(f \circ \varphi) = Y_{\varphi(p)}(f)$.

若 X_1 与 Y_1 是 φ 相关的, X_2 与 Y_2 是 φ 相关的, 则 $[X_1, X_2]$ 和 $[Y_1, Y_2]$ 是 φ 相关的, 因为

$$\begin{aligned}\varphi_*[X_1, X_2](f) &= X_1(X_2(f \circ \varphi)) - [1 \leftrightarrow 2] \\ &= X_1(Y_2(f) \circ \varphi) - [1 \leftrightarrow 2] \\ &= Y_1(Y_2(f)) \circ \varphi - [1 \leftrightarrow 2] \\ &= [Y_1, Y_2](f) \circ \varphi.\end{aligned}$$

因为对于一个同胚而言, $\varphi_*(X)$ 被定义为 $p \mapsto \varphi_{*\varphi^{-1}(p)}X_{\varphi^{-1}(p)}$, 或者 $\varphi(p) \mapsto \varphi_{*p}X_p$, 这就是说

$$X_p(f) = \varphi_*(X)_{\varphi(p)}(f),$$

因此 X 与 φ_*X 是 φ 相关的。

(1.3.15) 令 φ 是 U 上的光滑同胚 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$, X 和 Y 是 U 上的矢量场, 则在 U 上 $\varphi_*[X, Y] = [\varphi_*X, \varphi_*Y]$.

因此, 作为局部的同胚, σ_s^X 可以适用

$$(\sigma_s^X)_*[X, Y] = [X, (\sigma_s^X)_*Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\sigma_s^X)_*Y - (\sigma_{s+t}^X)_*Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} (\sigma_t^X)_*Y.$$

如果 $[X, Y] = 0$, 则 $(\sigma_t^X)_*Y$ 是一个常矢量 (局部来看, 系数为常数), 因此 Y 在 $(\sigma_t^X)_*$ 作用下不变, 这就是说 $Y = (\sigma_t^X)_*Y$, 于是 σ_t^X 和 σ_s^Y 可交换。

(1.3.16) $[X, Y] = 0$ 当且仅当 σ_t^X 和 σ_s^Y 可交换。

既然流是可交换的, 那么以前我们谈的那个曲边四边形总是可以闭合的, 所以这种情况下积分流形局部肯定存在, 因为在局部我们可以一块一块曲边四边形拼起来。由于显然的 $[\partial_i, \partial_j] = 0$, 如果我们能够选取局部坐标使得一族矢量场 $\{X_i: 1 \leq i \leq k\}$ 变成 $\{\partial_i: 1 \leq i \leq k\}$, 则积分曲面存在。那么什么时候 $\{X_i\}$ 是可以变成 $\{\partial_i\}$ 呢? 答案前面已经有了, $[X_i, X_j] \in D$, 分布 D 由 $\{X_i\}$ 生成。当然, 这可以直接证明, 所以这也是证明积分曲面存在性的一种思路。

最后给个例子, n 维欧氏空间, $\{\partial_i: 1 \leq i \leq k\}$ 的可能的积分曲面 $\{x_i = c_i: k+1 \leq i \leq n\}$, 其中 c_i 是常数。如果这个积分曲面还是连通的, 设 π 是往最后 $n-k$ 个坐标的投影, 则 $\pi_*\partial_i = 0$, 其中 $1 \leq i \leq k$, 因此 $(\pi \circ i)_* = 0$, 其中 i 是积分流形往欧氏空间的嵌入, 此时由积分流形的连通性, $\pi \circ i$ 是常值映射。此时的积分流形就是上面的 $\{x_i = c_i: k+1 \leq i \leq n\}$ 。

1.4 Cotangent Vector Field

(1.4.1) 设 $U \subset M$, U 上的映射 $X: p \mapsto \omega(p) \in T_p^*M$ 被称为 U 上的余切矢量场。因为在 U 的每一个局部 V (至少一个坐标卡内), 余切矢量场 ω 都可以写作 $\omega = a_i dx^i$, 其中 a_i 是 V 上的实值函数, 而 dx^i 在不同的点分属不同的余切空间。如果 $\{a_i\}$ 在点 p 是光滑函数, 则称 ω 在 p 处光滑。如果 ω 在 U 处光滑, 则称 ω 是 U 上的一个光滑余切矢量场 (或者叫做一个 1-形式场)。

一个余切矢量场和一个切矢量场之间存在作用 $\omega(X) = X(\omega)$ 可以得到一个光滑函数, 具体来说就是在每一点 p , $\omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$ 。

(1.4.2) 设 f 是 U 上的光滑函数, 显然 df 是一个 U 上的光滑余切矢量场。记 U 上的光滑函数的集合为 $\Omega^0(U)$, 记 U 上的光滑余切矢量场的集合为 $\Omega^1(U)$, 则 $d: \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ 。

下面我们要把 Frobenius 定理改写成余切矢量场的形式，这就变成了经典的 Pfaff 方程，正是当年关于 Pfaff 方程的研究，Cartran 第一次提出了（高阶）外微分和微分形式的概念（我们现在只谈了一阶的情况），在他那里，1-形式之间的乘法被定义成反对称的。从前一节谈论 Frobenius 定理来看，Pfaff 方程是一个关于积分曲面的问题，所以从这个角度来看，反对称的来由归根结底是为了积分。

(1.4.3) 称一个 1-形式 ω 是完全可积的，如果存在两个光滑函数 f 和 g 使得 $\omega = f dg$ ，此时 f 被称为 ω 的积分因子。

1-形式的完全可积性联系着所谓的首次积分问题。

设 f 是一个光滑函数且 $d_p f$ 处处不为零，则 $f(p) = a$ （如果解存在）决定了 M 中的一个正则子流形 N_a （有时候叫做一个曲面）。再设 X 是 M 内的光滑矢量场，则 $df(X) = 0$ 恒成立当且仅当处处成立 $X_p \in T_p N_{f(p)}$ 。

实际上，任取一点 $p \in M$ ，只要检验 $X_p(f) = 0$ 即可，选一条 $N_{f(p)}$ 上的一条光滑曲线 c ，使得 $c(0) = p$ 且 $c'(0) = X_p \in T_p N_{f(p)}$ ，由于 $f(c(t)) = f(p)$ 恒成立，对其在 $t = 0$ 处求导就得到了 $d_p f(X_p) = X_p(f) = 0$ 。反过来，如果在一点处 $X_p \notin T_p N_{f(p)}$ ，则 $X_p(f) \neq 0$ 。

固定 f ，将所有 $df(X) = 0$ 的 X 拿出来，他组成一个 $n - 1$ 维的分布， $\{N_a\}$ 就是这个分布的一族积分流形，因为 X 在每一点都完全位于经过那一点的某个 N_a 的切空间内。我们称 $N_a = \{p \in M : f(p) = a\}$ 是 Pfaff 方程 $df = 0$ 的解。从上面来看，一个 Pfaff 方程要有解，那么解应该是一个积分曲面才是，即，Pfaff 方程 $\omega = 0$ 的解是使得 $\omega(X) = 0$ 的所有的 X 的积分曲面。

现在假设一个 1-形式 ω 是完全可积的，即他可以写作 $\omega = f dg$ ，那么 Pfaff 方程 $\omega = 0$ 等价于 $dg = 0$ ，这就确定了一个积分曲面。

(1.4.4) ω 是一个 1-形式，设分布 D 是由满足 $\omega(X) = 0$ 的所有 X 张成的一个分布，则这个 ω 完全可积当且仅当 D 存在积分曲面。

(1.4.5) 因为局部存在积分曲面的充要条件是任取 $X, Y \in D$ 满足 $[X, Y] \in D$ ，所以上式应该有 $\omega([X, Y]) = 0$ 。一般而言，设 $\omega = f dg$ ，其中 f 和 g 是光滑函数，则对一般的光滑矢量场 X, Y 成立

$$\begin{aligned} \omega([X, Y]) &= f dg([X, Y]) = f[X, Y](g) \\ &= fX(Y(g)) - fY(X(g)) \\ &= X(fY(g)) - X(f)Y(g) - Y(fX(g)) + Y(f)X(g) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - (X(f)Y(g) - Y(f)X(g)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

对于 $X(f)Y(g) - Y(f)X(g)$ ，我们可以将其改写为 $df(X)dg(Y) - dg(X)df(Y)$ ，因为这是关于 X 和 Y 的双线性函数，我们可以引入一个张量 $df \otimes dg$ 使得 $df \otimes dg(X, Y) = df(X)dg(Y)$ ，则

$$df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) = df \otimes dg(X, Y) - dg \otimes df(X, Y) = (df \otimes dg - dg \otimes df)(X, Y).$$

记 $df \wedge dg = df \otimes dg - dg \otimes df$ ，其中的 \wedge 被称为楔积，则式 (1.2) 变成了

$$df \wedge dg(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

从式子右端来看， $df \wedge dg(X, Y)$ 并不依赖于 ω 的具体形式 $\omega = f dg$ 。实际上，一个 1-形式 ω 可以写作 $\omega = \sum_i f_i dg_i$ ，所以对于一般的情况，式 (1.2) 应该写作

$$\sum_i df_i \wedge dg_i(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

所以等式左边应该也可以通过 ω 表示, 记 $d\omega = \sum_i df_i \wedge dg_i$, 则最后将式 (1.2) 改写为

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \quad (1.3)$$

当然, 我们也可以反过来通过式 (1.3) 来定义 $d\omega$, 顺序在这里不是紧要的。紧要的是, 我们引入了一个 1-形式之间的楔积, 使得他构成了一个 (吃掉两个矢量场的) 反对称函数, 这里来看反对称性的来源应该都是为了处理积分曲面的存在性, 由 $[X, Y]$ 自然诱导出来的。这样的反对称函数被称为一个 2-形式。

(1.4.6) 现在让我们暂时脱离主线来看看楔积 $\omega \wedge \eta$ 的构造, 他对于 ω 和 η 都是双线性的, 并且满足 $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$ 。显然地, $\omega \wedge \omega = 0$ 。

此外, 设 $\omega' = a\omega + b\eta$ 和 $\eta' = c\omega + d\eta$, 即

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c 和 d 都是光滑函数, 将系数矩阵记做 A , 则可以计算得

$$\omega' \wedge \eta' = (ad - bc)\omega \wedge \eta = \det(A)\omega \wedge \eta.$$

特别地, 如果 $\omega' = dx'$ 和 $\eta' = dy'$, 且 x' 和 y' 可以看做 x 和 y 的函数, 而

$$dx' = \partial_x x' dx + \partial_y x' dy, \quad dy' = \partial_x y' dx + \partial_y y' dy,$$

因此

$$dx' \wedge dy' = \det \left(\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right) dx \wedge dy,$$

其中 $\partial(x', y')/\partial(x, y)$ 是 (x', y') 关于 (x, y) 的 Jacobian. 如果还记得积分学的一些基本事实, 会发现这就是和重积分变量替换公式是如此的相似。实际上, 对于二个变量的重积分变换公式, 他写作

$$\int_S dx' dy' = \int_S \left| \det \left(\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right) \right| dx dy,$$

其中绝对值的引入是因为换变量可能会改变积分区域的定向。

所以, 从这个角度来看, 正如我们对于 dx 是无穷小距离的直观一样, 我们可以认为 $dx \wedge dy$ 是无穷小面积。

(1.4.7) 复习一下外代数的内容。设 V 是一个 n 维矢量空间, 记 $\Omega^k(V)$ 为反对称 k 元 (吃 k 个矢量) 线性函数的集合。这个集合有一个显然的线性结构。这个定义和基没有关系, 但是就计算来说, 选个基就很方便。设 $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$ 是 V^* 的一组基, 则 $\Omega^k(V)$ 由 $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ 张成。

1.5