一些基础拓扑什么的

理不歪

2016 年 2 月 13 日

基础拓扑的性质决定了这个笔记老多老多的定义，估摸着可以用来当字典查 2333. 本笔记是 GTM 202 的笔记。

Definition 1. 现设有集合 X，其上的一个拓扑 *(topology)* 是他的一个子集族 $\mathcal{J}$，子集族中的元素称为开集，我们说某个集 U 是开集就是说 $U \in \mathcal{J}$。子集族，或者这里说开集族，满足下面的性质：

(1) 全集和空集都是开集：$X \in \mathcal{J}$ 以及 $\varnothing \in \mathcal{J}$.

(2) 开集的有限交是开集：假如 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{J}$，那么 $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{J}$.

(3) 开集的任意并是开集：任意的（有限或无限的）开集族 $\{U_\alpha\}$ 的并 $\cup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{J}$.

有一个拓扑的集合我们称为拓扑空间。

空间中的元素通常被称呼为一个点，虽然这是 $\mathbb{R}^3$ 来的几何直观，但是拓扑空间的元素可以是很随意的东西，比如一条直线，但是我们还是称呼其为一个点。一个点的一个邻域就是包含这个点的一个开集。

上面的定义在操作上并不是那么实用的，所以下面的拓扑基 (basis) 在很多时候更加常用一些。

Definition 2. 假设 X 是任意集合，所谓的拓扑基 $\mathcal{B}$ 是他上的子集族，满足下列条件：

(1) 集合上的任意点都在拓扑基的某一个元素里，即任取 $p \in X$，那么存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $p \in B$. 这就是说 $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

(2) 如果 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$，而且 $x \in B_1 \cap B_2$，那么存在 $B_3 \in \mathcal{B}$，使得 $x \in B_2 \subset B_1 \cap B_2$.

Theorem 1. 如果集合 X 有一个拓扑基 $\mathcal{B}$，那么令 $\mathcal{J}$ 为所有 $\mathcal{B}$ 中元素的任意并的集族，则 $\mathcal{J}$ 是 X 的一个拓扑。此时 $\mathcal{J}$ 被称 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑。

一个集合 U 被称为满足基的判别法则就是说，如果对于任意一点 $x \in U$ 都存在一个集 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in W$ 且 $W \subset U$.

Theorem 2. 如果集合 X 有一个拓扑基 $\mathcal{B}$，那么其生成的拓扑 $\mathcal{J}$ 为 X 中所以满足基的判别法则的集合构成的集族。简单来说，就是满足基的判别法则的集合是开集。

上面的定理给出了判别一个集合是开集的实用方法。下面的定理则类似基生成拓扑的逆定理。

Theorem 3. 如果 X 是一个拓扑空间，$\mathcal{B}$ 是其所有开集的集族。如果 X 的每一个开集都对 $\mathcal{B}$ 满足基的判别法则，然后 $\mathcal{B}$ 是 X 这个拓扑的拓扑基。

拓扑结构的引入，允许我们谈论一些分析上的基本概念，比如收敛和连续。当然，这就要涉及映射，涉及映射就要涉及两个拓扑空间。

Definition 3. 拓扑空间 X 上面的点序列 $\{q_n\}$ 称有极限 $q \in X$ 的，就是对于 q 的任意邻域 U，都存在 N，当 $n > N$ 的时候，所有的 q_n 都属于 U. 极限一般记做 $\lim_{n \to \infty} q_n = q$.

Definition 4. 我们说映射 $f : X \to Y$ 是连续的，就是对于任意开集 $U \in Y$，他的原象集 $f^{-1}(U) \in X$ 也是开的。

下面的定理给出了整体连续和局部连续之间的关系。

Theorem 4. 一个函数 $f : X \to Y$ 是连续的，当且仅当他在每一点 $x \in X$ 都存在一个邻域 U_x，在这个邻域上的限制 $f|_{U_x}$ 也是连续的。

两个拓扑空间 X, Y 被称为同胚的，就是说存在连续双射 $f : X \to Y$，其逆也是连续的。同胚是拓扑空间范畴的同构，也就是说两个拓扑空间存在同胚映射的话，两个空间有相同的拓扑性质。连续函数的复合也是连续的，所以同胚的复合还是同胚的，那么同胚的拓扑空间就构成一个等价类。直观上，两个空间是同胚的，就是说我们可以连续变形之使两者相同。

很简单可以证明，$\mathbb{R}^n$ 中的单位开球和 $\mathbb{R}^n$ 同胚。所以说“有界”并不是拓扑性质。同样，单位开立方体也同胚于单位开球，所以有没有棱角也不是拓扑性质。但是怎么变，一个洞也不会连续变没了，所以有没有洞才是拓扑性质。当然还有其他拓扑性质。拓扑学就是研究这些性质的。

Definition 5. 一个集是闭集当他补集是开集。

用集合论熟知的并的补和交的补的公式，我们很自然可以得到，任意闭集的交是闭集，有限闭集的并是开集。此外，连续函数也可以改写成闭集版。

Theorem 5. 映射 $f : X \to Y$ 是连续的，当且仅当就是对于任意闭集 $U \in Y$，他的原象集 $f^{-1}(U) \in X$ 也是闭的。

Definition 6. 一个集 A 的闭包 $\overline{A}$ 为包含他的最小闭集，一个集的开核（或内部）$\mathrm{Int}A$ 为他包含的最大开集。

这样我们就可以定义一个集的拓扑边界了。

Definition 7. 一个集 $A \in X$ 的拓扑边界 ∂A 定义为：$\partial A = \overline{A} - \mathrm{Int}A$.

Definition 8. 一个集 $A \in X$ 的外部 $\mathrm{Ext}A$ 定义为：$\mathrm{Ext}A = X - \overline{A}$.

很容易看出 $\mathrm{Ext}A$ 是一个开集，因为他是 $\overline{A}$ 的补集，而且 $\mathrm{Int}A$ 也是开集。所以这就给出了判别一个点是不是在内部或者外部的方式，即是否存在一个邻域含于 $\mathrm{Ext}A$ 或 $\mathrm{Int}A$，如果都不是，那么就是在 ∂A 上了，因为 $X = \mathrm{Int}A \cup \partial A \cup \mathrm{Ext}A$.

Definition 9. 一个拓扑空间被称为 *Hausdorff* 的，就是说，对于任意两个不相同的点，存在其两个不相交的邻域。这样的空间被称为 *Hausdorff* 空间。

这个定义看上去有些突兀，不过确实存在非 Hausdorff 空间的拓扑空间。比如集 $\{1, 2, 3\}$，上面的一个拓扑为 $\{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$，虽然 2 和 3 是不想同的点，但是他们却不存在不相交的邻域。

Hausdorff 性一般被理解为分离性，但他也保证了拓扑空间有足够多的开集，在上面的例子里面，就是邻域不够用才出现不存在不相交的邻域。

Hausdorff 空间内的单点集是闭集。非 Hausdorff 空间这个结论不一定成立，比如上面的 $\{2\}$，他的补不是开集。

一般来说，一个非 Hausdorff 空间我们是不感兴趣的。因为这个时候，一个收敛的点序列可能有着两个极限。比如在上面的例子里面，一个全是 2 的序列，他可能的极限为 2 还有 3.

Hausdorff 性说开集不能太少，那么可数性就限制开集不能太多。

Definition 10. *一个拓扑空间，如果在每一点的邻域，拓扑基是可数的，那么这个拓扑空间被称为第一可数的。如果一个拓扑空间的拓扑基是可数的，那么这个拓扑空间被称为第二可数的。*

第二可数比第一可数限制更强一些。

Definition 11. *一个第二可数的 Hausdorff 空间，如果对他的任意一点，都存在一个邻域，这个邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$，那么这个空间被称为一个 n 维拓扑流形，或者简称流形。*

现在转向从老空间构造新空间。先说从大到小的。

从子集 $A \subset X$ 到原集 X 有一个自然的映射 $\iota : A \hookrightarrow X$ 满足 $\iota(x) = x$. 子集作为一个集合，自然可以有着子集的拓扑。一方面，我们自然希望 $\iota : A \hookrightarrow X$ 是一个连续函数，那么任意在 X 上连续的函数 f，都有 $f \circ \iota$ 在 A 上是连续的。另一方面，我们自然也希望映到 X 上的连续函数也要是一个映到 A 上的函数。前者要求 A 要有足够多的开集，后者要求这样的开集不能太多。下面要定义的拓扑，则是一个同时满足上面两点的拓扑，所以他享有子空间拓扑这样的名字。

Definition 12. *子空间拓扑：对于拓扑空间 X 的子集 A,$\mathcal{J}_A = \{U \subset A : U = A \cap V 对于某个开集 V \subset X\}$ 被称为子空间拓扑。赋予了子空间拓扑的 A 被称为子空间。*

上面定义的合理性要证明 $\mathcal{J}_A$ 确实是一个拓扑。

Theorem 6. *假设 $A \subset X$ 是一个子空间，对于任意的拓扑空间 Y，一个映射 $f : Y \to A$ 是连续的当且仅当 $Y \xrightarrow{f} A \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ 是连续的。*

这个定理很本质地刻画了子空间拓扑，下面的唯一性定理直接表明了这点。

Theorem 7. *假设 $A \subset X$ 是一个子集，A 上的子空间拓扑是唯一的拓扑使得上面的定理成立。*

现在转向从小到大的拓扑，积拓扑。假设 $X_1, \ldots, X_n$ 为 n 个拓扑空间，则积拓扑是集合 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上的拓扑。

Definition 13. *积拓扑的基：定义 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上的集族 $\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_1 在 X_i 是开集, i = 1, \ldots, n\}$ 称为积拓扑的基。由这组基生成的拓扑就是积拓扑。赋予了积拓扑的 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 被称为积空间。*

积空间上也自然有一个映射 $\pi_i : X \to X_i$，我们当然希望这个映射是连续的。和上面的子空间拓扑一样，也有一个定理本质地刻画了积拓扑。

Theorem 8. 假设 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 是一个积空间。对于任意的拓扑空间 B，一个映射 $f : B \to X_1 \times \cdots \times X_n$ 是连续的当且仅当任意的 $f_i = \pi_i \circ f$ 是连续的：

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[d, "\pi_i"] \\
B \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i.
\end{tikzcd}$$

正因为和子空间的相似性，我们也有理由相信积拓扑也成立唯一性定理。

现在转向商拓扑，这个拓扑依然是从大到小的一个拓扑。商拓扑的名字来自类似于商群，经常用来粘合等价类，所以很容易可以看到应该是从大到小的。

Definition 14. 令 X 是一个拓扑空间，Y 是一个集合。称满射 π 给予了 Y 商拓扑就是说对于任意的集合 U 是开的当且仅当原象集 $\pi^{-1}(U)$ 是开的。该满射被称为商映射。

因为确定等价类的映射都是满射，类似于 $\pi : p \mapsto [p]$ 这种映射，所以等价类构成的空间 $X/\sim$ 的拓扑由 π 引入。一个点的原象 $\pi^{-1}(p)$ 有个特殊的名字，称为在 p 点的纤维。

Theorem 9. 假设 $\pi : X \to Y$ 是商映射，对于任意拓扑空间 B，映射 $f : Y \to B$ 是连续的当且仅当 $f \circ \pi$ 是连续的。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\
Y \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Theorem 10. 对于任意满射 $\pi : X \to Y$，满足上面定理的就是商映射。

一个集合 $E \subset X$ 的开覆盖就是说存在 X 中的开集族 $\mathcal{B} = \{B_v\}$（这里指标不是说这是可数的），使得 $E \subset \cup_v B_v$. 所谓子覆盖就是说，一个 $\mathcal{B}$ 的子族也是 E 的开覆盖。一个开覆盖如果是有限的，那么就称呼其为有限开覆盖。一个集合是紧的，就是当他的所有开覆盖都有有限子开覆盖。

紧集就是拓扑意义下的有限集，一个集合如果是紧的，那么这个集合有着很多类似于有限集的优良性质。

Theorem 11. 设 X, Y 都是拓扑空间，而 $f : X \to Y$ 是连续函数。对于 X 中的紧集 E，$f(E)$ 是 Y 中的紧集。

紧集的闭子集也是紧的。Hausdorff 空间的紧集是闭的（注意 Hausdorff 空间的有限集是闭的）。所以在紧 Hausdorff 空间下，紧集和闭集是等价的。当然，紧空间的有限积和商都是紧的。

Definition 15. *令 X 是一个拓扑空间，当他的每一个无穷子集都有一个极限点的时候，他被称为极限点紧致的。当他的任意点列都存在收敛到他的元素的子列的时候，他被称为列紧的。*

可以很简单看出，紧性包含着极限点紧。

Theorem 12. *如果拓扑空间是第一可数的 Hausdorff 空间，那么极限点紧包含着列紧。*

Theorem 13. *如果拓扑空间是第二可数的列紧空间，则他是紧的。*

上面的几个定理使得下面一个推论成立：

Theorem 14. *如果拓扑空间是第二可数的 Hausdorff 空间，则极限点紧、列紧和紧性等价。*

所以说，在流形上，我们不必区分这三种紧性。我们知道，度量空间是第一可数而且是 Hausdorff 的，此外列紧的度量空间是第二可数的，那么从上面的推论可以得到：在度量空间上，三种紧性等价。

Theorem 15. *闭映射引理：设 F 是闭映射且连续。那么如果 F 是单的，那么这是一个拓扑嵌入。如果 F 是满的，那么这是一个商映射。如果是双射，那么 F 是一个同胚。*

Theorem 16. *如果 F 是从一个紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射，那么 F 是闭映射。*

上面说了，紧是很强的条件，可是实际上，我们有时候并没有那么强的条件，可是一些紧的性质确实可以保留下来。所谓的局部紧空间就是如此。如果空间任意一点的都存在一个邻域，他被包含于这个空间中的一个紧集，那么这个空间就被称为局部紧的。

显然紧可以推出局部紧，这是因为每一个邻域的闭包都是紧的。如果当一个集合的闭包是紧的，那么这个集合就被称为预紧的。下面一个定理更为常用一些。

Theorem 17. *在 Hausdorff 空间上，局部紧和每一点都存在一个预紧邻域等价。*

下面这个引理挺常见的。

Theorem 18. *收缩引理：设 X 是一个局部紧的 Hausdorff 空间。如果 $x \in X$ 的一个邻域为 U，那么存在一个 x 的预紧邻域 V 使得 $\overline{V} \subset U$.*

比紧空间性质还好一些的是，局部紧空间的任何开集或者闭集都是局部紧的。

Theorem 19. *如果 $f : X \to Y$ 是两个局部紧空间间的连续函数，如果他的每一个紧集的原象也是紧的（称为 proper 的），那么他是闭映射。*

这使得我们可以使用闭映射引理。

Definition 16. *抽象单纯复形 (simplicial complex) 是抽象单形 (simplex) 的集合。单形就是有限集。单纯复形要求每一个他的单形的非空子集也是它的单形。*

单形的元素被称为顶点 (vertex)，任何一个单形的非空子集被称为单形的面 (face)。对于顶点的面，我们还称为顶点。

单形的维度定义为集合的 order -1，比如集合有 $k+1$ 个元素，则被称为 k 维的。单纯复形的维度定义为其所有单形维度的上确界，当然可能是无限的。

单纯复形被称为有限的，如果他是有限集。单纯复形称为局部有限的，如果他的每一个顶点都只包含于有限个单形中。

如果单纯复形的子集也是单纯复形，则被称为子复形。我们称单纯复形的 k-骨架 (skeleton) 为单纯复形的所有维度小于等于 k 的单形的集合，是一个 k 维子复形。0-骨架就是所有顶点的集合。

两个单纯复形之间的映射被称为单形映射 (simplicial map) 如果他将单形映射到单形且将顶点映射到顶点。$f(\{v_0,\ldots,v_k\})=\{f_0(v_0),\ldots,f_0(v_n)\}$，其中 f_0 是 0-骨架到 0-骨架的映射，称为顶点映射。

对于任意的欧几里得单纯复形，可以令一个抽象单纯复形为这个欧几里得单纯复形的 0-骨架的任意有限子集的集族，这个抽象单纯复形被称为顶点系 (vertex scheme)。

不是所有抽象单纯复形都是一个欧几里得单纯复形的顶点系，欧几里得单纯复形要求局部有限且有限维的。

对于任意有限集，我们可以定义自由模 (free module)。为每一个抽象单形 $\{v_0,\ldots,v_k\}$ 定义一个 $\mathbb{R}$ 上的自由模，当然这样就成了一个矢量空间 $\mathbb{R}\langle v_0,\ldots,v_k\rangle$。每一个 $\mathbb{R}\langle v_0,\ldots,v_k\rangle$ 中的元素都可以写作 $t=t_iv^i$，其中 $v^i:\{v_0,\ldots,v_k\}\to\mathbb{R}$，满足 $v^i(v_j)=\delta^i_j$. 其中我们定义抽象单形 $\{v_0,\ldots,v_k\}$ 的几何实现为 $\langle v_0,\ldots,v_k\rangle\subset\mathbb{R}\langle v_0,\ldots,v_k\rangle$，几何实现为所有使得 $0\le t_i\le 1$ 且 $\sum_{i=0}^k t_i=1$ 的 $t=t_iv^i$ 的集合。单形 σ 的几何实现一般记做 $|\sigma|$。

然后定义复形的几何实现，复形 $\mathcal{K}$ 的几何实现 $|\mathcal{K}|$ 定义为他的所有单形的几何实现的并。现在我们对 $|\mathcal{K}|$ 引入拓扑。这个是从所有单形的几何实现的不交并的商拓扑引入的。商映射如下：

$$\pi:\coprod_{\sigma\in\mathcal{K}}|\sigma|\to|\mathcal{K}|.$$

这就是说，$|\mathcal{K}|$ 中的开集当且仅当他交每一个 $|\sigma|$ 的时候也是开集。任意的单形映射 $f:\mathcal{K}\to\mathcal{L}$ 都引入了他们几何实现之间的映射 $|f|:|\mathcal{K}|\to|\mathcal{L}|$，如果 $\mathcal{K}$ 是一个欧几里得单纯复形 K 的顶点系，那么 $|\mathcal{K}|$ 就同胚于 $|K|$。

任何一个同胚于单纯复形几何实现的拓扑空间被称为多面体 (polyhedron)。这样的同胚映射被称为三角剖分 (triangulation)，可以三角剖分的拓扑空间（即任意多面体）被称为可三角剖分的。

我们称呼图为带有三角剖分的 1 维多面体。

Theorem 20. *任意的一维流形都被一个一维单纯复形三角剖分。*

这个定理在二维三维也正确，但是四维就是不正确的了，更高维的性质尚未探索清楚。

下面是一维流形的分类。

Theorem 21. 任意连通的一维流形，如果他是紧的，则同胚于单位圆，如果不是，则同胚于实直线。

被三角剖分之后，如果是周期的就是圆，不是就是实直线。