Lie Group and Lie Algebra

by DaDouBi@NJU

May 15, 2016

Just for fun

先把参考文献列出来，就不写那么正式了：

- Brian C.Hall, GTM 222
- Daniel Bump, GTM 225
- R.W.Sharpe, GTM 166
- S Kobayashi & K Nomizu, Foundations of Differential Geometry. Vol. I
- V.S.Varadarajan, GTM 102
- W.Y.Hsiang, Lectures on Lie Groups
- Shlomo Sternberg, Lie Algebras
- Shlomo Sternberg, Semi–Riemann Geometry and General Relativity
- Yvette Kosmann–Schwarzbach, Groups and Symmetries
- J.F.Cornwell, Group Theory in Physics
- Steven Weinberg, The Quantum Theory of Fields. Vol. I

1 Basic Representation Theory

群表示使得我们把群进行了“外部线性化”，粗略地来说就是我们把群元素看做了一个线性变换。

Definition 1. 令 V 是一个域 k 上的有限维矢量空间，群 G 的一个表示 U 指存在这样的一个群同态 $U : G \to \mathrm{Gl}(V)$，使得

$$\pi(g)\pi(g') = \pi(gg'), \quad \pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}, \quad \pi(e_G) = e_{\mathrm{Gl}(V)}$$

成立。表示 π 的维度被定义为 V 的维度。

如果没什么会混淆的话，就直接略去 π，写 gx 来表达 $\pi(g)x$. 如果要用不会混淆的说法来表达群表示的话，就应该用 (π, V) 二元组，π 代表的是 $\pi(g)$，V 是被作用的空间。

Definition 2. 如果 π 是一个一对一的同态，那么我们称这个表示为忠实表示。

Definition 3. 设 G 是一个群，(π, V) 是他的一个表示，$W \subset V$ 是一个子空间，如果

$$\pi(G)W = \{\pi(g)v \mid g \in G, v \in W\} \subset W$$

则 W 称为不变子空间。

$\{0\}$ 和 V 是显然的两个不变子空间，略去这两个平凡不变子空间，如果没有其他不变子空间了，则 V 被称为是不可约的，表示被称为不可约表示。

Definition 4. 同一个群 G 的两个表示 (π_1, V_1) 和 (π_2, V_2) 可以：

(1) 直和：$(\pi_1 \oplus \pi_2, V_1 \oplus V_2)$ 即满足

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(g)(x, y) = (\pi_1(g)x, \pi_2(g)y).$$

或者简单地写作 $g(x, y) = (gx, gy)$.

(2) 直积：$(\pi_1 \otimes \pi_2, V_1 \otimes V_2)$ 即满足

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(x \otimes y) = (\pi_1(g)x) \otimes (\pi_2(g)y).$$

或者简单地写作 $g(x \otimes y) = (gx) \otimes (gy)$.

Definition 5. 如果一个表示能被分解成几个不可约表示的直和，则称该表示为完全可约的。

下面的一系列定义涉及表示的等价，当然还有很重要的 Schur 引理。

Definition 6. 设 G 有两个表示 (π_1, V_1) 和 (π_2, V_2)，如果存在线性映射 $T : V_1 \to V_2$，对任意的 $g \in G$ 都满足

$$\pi_2(g) \circ T = T \circ \pi_1(g).$$

这样的 T 被称为缠结映射。当缠结映射是双射的时候，两个表示被称为是等价的。

Proposition 7. 如果 π_1 和 π_2 之间存在缠结映射 T，那么 $\ker T$ 是 π_1 的不变子空间，而 $\mathrm{Im}\, T$ 是 π_2 的不变子空间。

因为 $T(\pi_1(g)x)=\pi_2(g)Tx$ 对于任何 x 使得 $Tx=0$ 的，都有 $\pi_1(g)x$ 使得 $T(\pi_1(g)x)=0$，所以前半句话证明完了。对于 $\operatorname{Im} T$ 中的元素 y 可以找到原象 x，由于 $\pi_2(g)y=\pi_2(g)Tx=T(\pi_1(g)x)$，则 $\pi_2(g)y$ 也在 $\operatorname{Im} T$ 中，后半句话证完。

Theorem 8. *Schur* 引理：假设在复数域上讨论，如果 (π_1,V_1) 和 (π_2,V_2) 都是不可约表示，且两者之间存在缠结映射 T：

(1) 如果 (π_1,V_1) 和 (π_2,V_2) 不等价，则 $T=0$.

(2) 如果 $V_1=V_2=V$ 和 $\pi_1=\pi_2=\pi$，则 $T=\lambda I$，其中 λ 是一个常数。

如果两个表示不等价，则 T 不是双射，所以 $\ker T\neq\{0\}$，而他是不变子空间，由不可约性，则 $\ker T=V_2$，同理 $\operatorname{Im} T=\{0\}$，这就是说 $T=0$。

由于在复数域上，所以 T 一定存在一个本征值 λ，令 E_λ 是 λ 的本征空间，他在 π 的作用下不变，由不可约性，所以他要么是零空间，要么是全空间。而本征值的存在性说明了零空间不可能，所以本征空间就是全空间，这也就是说 $T=\lambda I$.

如果我们遇到的群 Abel 群，那么他的群表示也是可交换的，同时其本身就构成了一个缠结映射，于是我们可以得到：

Proposition 9. *Abel* 群的不可约表示都是一维的。

如果 $(\bullet,\bullet)$ 是 V 上的一个内积，如果对任意的 $g\in G$,$u,v\in V$ 有 $(u,v)=(gu,gv)$，则我们称呼这个表示为幺正表示。

对于有限群我们总可以找到幺正表示，因为我们可以重新构造内积

$$(u,v)'=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gu,gv),$$

那么

$$(hu,hv)'=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(hgu,hgv)=\frac{1}{|G|}\sum_{hg\in G}(hgu,hgv)=\frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}(ku,kv)=(u,v)'.$$

幺正表示的好处是，一个不变子空间的正交空间也是不变的。对于一个有限维的幺正表示，如果不是完全可约的，那么就分解出一个不变子空间，他是不可约的，然后对这个不变子空间的正交空间，我们又得到了一个可约或不可约的不变子空间，靠着有限归纳（因为有限维），我们就得到了如果群存在一个有限维幺正表示，则这个表示一定是完全可约的。结合上面所说的，下面的结论是显然的。

Theorem 10. *Maschke* 定理：有限群的有限维表示总是完全可约的。

Proposition 11. 紧 *Lie* 群上存在幺正表示。

换而言之，我们可以找到内积 $(\bullet,\bullet)$ 使得 $(gx,gy)=(x,y)$。假设原本存在内积 $\langle\bullet,\bullet\rangle$，那么再设 $\mathrm{d}g$ 是 G 上的 Haar 测度（因为紧所以存在，而且已经归一化），那么

$$(x,y)=\int_G\langle gx,gy\rangle\mathrm{d}g$$

就满足了要求。

Definition 12. 令 $\phi:G\to\mathrm{GL}(V)$ 是一个 G 的复表示，那么复值函数

$$\chi_\phi:G\xrightarrow{\phi}\mathrm{GL}(V)\xrightarrow{\mathrm{tr}}\mathbb{C}:g\mapsto\mathrm{tr}(\phi(g))$$

被称为 ϕ 的特征标。

Theorem 13. *如果 G 是一个紧 Lie 群，那么两个表示 π_1, π_2 等价当且仅当 $\chi_{\pi_1} = \chi_{\pi_2}$.*

从左到右是简单的，假若 π_1 和 π_2 等价，那么存在 A 使得 $A\pi_1(g) = \pi_2(g)A$，于是

$$\mathrm{tr}(\pi_1(g)) = \mathrm{tr}(A^{-1}\pi_2(g)A) = \mathrm{tr}(\pi_2(g)).$$

而证明从右到左需要一些准备，我们首先对于 $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$，定义群表示 $(\pi_1^* \otimes \pi_2, \mathrm{Hom}(V, W))$ 如下

$$\pi_1^* \otimes \pi_2(g)A = \pi_2(g)A\pi_1(g)^{-1},$$

这还是很容易猜出来的，譬如，我们找一个矢量 $v \in V$，则

$$\pi_2(g)(Av) = (\pi_2(g)A\pi_1(g)^{-1})(\pi_1(g)v),$$

如果 A 是 $\varphi(g)$ 的不动点，那么就一定有

$$A\pi_1(g) = \pi_2(g)A.$$

此时 A 就是一个缠结映射。假如 π_1, π_2 都是不可约的且不等价的，则 Schur 引理可以改写为：群表示 $(\pi_1^* \otimes \pi_2, \mathrm{Hom}(V, W))$ 的不动点集为零。

现在我们考虑紧 Lie 群上的平均

$$\int_G \pi_1^* \otimes \pi_2(g)A\mathrm{d}g,$$

显然，他是一个不动点，因此

$$\int_G \pi_1^* \otimes \pi_2(g)A\mathrm{d}g = \int_G \pi_2(g)A\pi_1(g)^{-1}\mathrm{d}g = 0.$$

特别地，如果 $A = E_{ab}$ 且 π_1 是幺正表示，记 $(\pi_2(g))_{ij} = \pi_2(g)_{ij}E_{ij}$, $\left(\pi_1(g)^{-1}\right)_{kl} = \pi_1(g)^{-1}_{kl}E_{kl}$，则

$$0 = \int_G (\pi_2(g))_{ij}E_{ab}\left(\pi_1(g)^{-1}\right)_{kl}\mathrm{d}g = \int_G \pi_2(g)_{ia}\pi_1(g)^{\dagger}_{bk}\mathrm{d}g,$$

对任意的 i, a, b, k 都满足。

现在如果 π_1, π_2 等价，此时不妨就直接记 $\pi = \pi_1 = \pi_2$，那么由 Schur 引理

$$\int_G \pi(g)A\pi(g)^{-1}\mathrm{d}g = \lambda_A I.$$

两边求迹，就有

$$\int_G \mathrm{tr}(A)\mathrm{d}g = \mathrm{tr}(A) = \lambda_A \dim V.$$

类似地，如果 $A = E_{ab}$，我们也有

$$\int_G \pi(g)_{ia}\pi(g)^{\dagger}_{bk}\mathrm{d}g = \delta_{ik}\lambda_{E_{ab}}I = \delta_{ik}\frac{\mathrm{tr}(E_{ab})}{\dim V}I = \frac{\delta_{ik}\delta_{ab}}{\dim V}I.$$

那么直接计算特征标就可以得到，对于紧 Lie 群的不可约幺正表示，我们有

$$\int_G \chi_\pi \chi_\pi^* \mathrm{d}g = 1,$$

对于两个不可约的不等价表示，我们有

$$\int_G \chi_\pi \chi_\rho^* \mathrm{d}g = 1,$$

其中上标 $*$ 表示复共轭。

令 $\hat{G}$ 是紧 Lie 群 G 的复不可约表示的等价类，那么由于是紧 Lie 群，有限维表示必然是完全可约的，就是说任何一个有限维表示能写作

$$\rho = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m(\rho, \pi)\pi,$$

其中 $m(\rho; \pi)$ 是乘数，就是说分解出来的等价的 π 各数。直接计算就可以得到

$$m(\rho, \pi) = \int_G \chi_\rho \chi_\pi^* \mathrm{d}g,$$

以及

$$\int_G \chi_{\rho_1} \chi_{\rho_2}^* \mathrm{d}g = \sum_{\pi \in \hat{G}} m(\rho_1, \pi) m(\rho_2, \pi).$$

现在证明上面的定理的从右到左，如果两个表示 ρ_1, ρ_2 特征标相等，则

$$m(\rho_1, \pi) = \int_G \chi_{\rho_1} \chi_\pi^* \mathrm{d}g = \int_G \chi_{\rho_2} \chi_\pi^* \mathrm{d}g = m(\rho_2, \pi),$$

对任意的 $\pi \in \hat{G}$ 都成立，因此 ρ_1, ρ_2 等价。

Proposition 14. *一个复有限维表示 π 是不可约的当且仅当*

$$\int_G \chi_\pi \chi_\pi^* \mathrm{d}g = 1.$$

从左到右前面已经算过了，从右到左是因为

$$\int_G \chi_\pi \chi_\pi^* \mathrm{d}g = \sum_{\pi \in \hat{G}} m(\rho, \pi)^2 = 1,$$

因此存在一个 $\psi \in \hat{G}$ 使得 $m(\rho, \psi) = 1$, 而其他的 $\pi \in \hat{G}$ 都有 $m(\rho, \psi) = 0$.

2 Foundation

Lie 群是一个可微群，即是他一方面有着群的结构，而另一方面还是一个可微流形，其中群的运算乘法和逆是可微的。因为 Lie 群有着可微结构，那么我们就可以对其局部线性化，特别地，单位元附近的局部线性化就构成了 Lie 代数的内容。

Definition 15. *一个 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 就是其单位元处的切空间。*

下面还将要陈述另外两个 Lie 代数的等价形式，从不同的等价形式，可以比较轻松地得到 Lie 代数的不同性质。

Definition 16. *现在有一个 Lie 群 G，我们称可微同态 $\phi : \mathbb{R} \to G$ 是 G 的一个单参子群，其中 $\mathbb{R}$ 当做加法群。*

注意和单参（可微）变换群的区别。此外，$\phi(0) = e$.

Definition 17. *记左平移 $l_a : x \mapsto ax$，如果矢量场 X_x 满足 $(l_a)_* X_a = X_{ax}$，则称 X_a 是一个左不变矢量场。*

令 X 是一个左不变矢量场，对于每一个群元 x，我们都有 $X_x = (l_x)_* X_e$. 反过来，我们一定有 $X_e = (l_{x^{-1}})_* X_x = (l_x)_*^{-1} X_x$，这样我们就建立了单位元处的切矢量 X_e 和左不变矢量场之间的一一对应。

Proposition 18. *Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 和 G 上面的左不变矢量场构成的矢量空间之间存在着线性同构。*

设 $f: G \to G$ 是一个微分同胚，那么从

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y - (\varphi_t)_* Y \right),$$

其中 φ_t 由矢量场 X 生成，即对于变换。可以得到

$$f_*[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f_* Y - f_* (\varphi_t)_* (f_*)^{-1} f_* Y \right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f_* Y - (f \circ \varphi_t \circ f^{-1})_* f_* Y \right),$$

而 $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ 由 $f_* X$ 生成，所以

$$f_*[X, Y] = [f_* X, f_* Y].$$

若 $f = l_a$，那么我们立刻就得到了左不变矢量场的对易子也是左不变的。因此对于 Lie 代数来说，他容许一个二元线性运算 $[\bullet, \bullet] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，所以 Lie 代数确实是一个代数。

Proposition 19. *Lie 代数上还满足：*

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

第一条反对称性从矢量场的 $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ 来看是显然的。而第二条称为 Jacobi 恒等式，直接计算即可验证。可以如下记忆 Jacobi 恒等式，X, Y, Z 的三种右手方向构成的置换和为 0，或者说，$[X_i, [X_j, X_k]]$ 中 ijk 是 123 的偶置换。

适当改写 Jacobi 恒等式，我们可以得到

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]],$$

如果记 $A(X) : Y \mapsto [X, Y]$, 于是

$$A(X)[Y, Z] = [A(X)Y, Z] + [Y, A(X)Z],$$

因此 $A(X)$ 就是一个 Lie 代数上面的导子。

应用一阶微分方程解的存在和唯一性定理，则过每一点 x 存在唯一的积分曲线，他的速度矢量都属于 X. 令 $\phi : \mathbb{R} \to G$ 是 X 的积分曲线且 $\phi(0) = e$. 使用 X 的左不变性可以得到 $l_a \circ \phi : t \mapsto a\,\phi(t)$ 是 X 的积分曲线且 a 是其起点。因此

$$\phi(s)\phi(t) = \phi(s + t),$$

ϕ 是 G 的一个单参子群。这样，我们建立了单参子群和左不变矢量场之间的联系。由于左不变矢量场和 Lie 代数之间的同构，我们也建立了单参子群和 Lie 代数之间的联系。

Definition 20. 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$，令 $\exp(X) = e^X = \phi_X(1)$，其中 ϕ_X 是唯一的以 X 为初始速度矢量的单参子群。映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 被称为 G 的指数映射。

可以看到 $\exp(tX) = \phi_{tX}(1) = \phi_X(t)$. 因此

$$\exp(tX)\exp(sX) = \phi_X(t)\phi_X(s) = \phi_X(t+s) = \exp((t+s)X).$$

就和一般的指数表现得那样。但如果 $[X,Y] \neq 0$，一般来说

$$\exp(X)\exp(Y) \neq \exp(X+Y).$$

我们找一个函数 f，他是 G 上的一个光滑函数，那么 $g(t) = f(xe^{tX})$ 就是一个 $\mathbb{R}$ 上的函数，我们来归纳证明他的 n 阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} g(t) = (X^n f)(xe^{tX}),$$

$n = 0$ 是显然的，$n = 1$ 需要直接计算验证

$$(Xf)(x) = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(xe^{tX})\right\}_{t=0},$$

这个的计算只要使用链式法则

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(xe^{tX})\right\}_{t=0} = f_{*x}(e^{tX})_{*0} = f_{*x}X = (Xf)(x).$$

注意最后一个等式要依赖于 f 是矢量值的，某种程度来说这就是 $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ 的结果。由于矩阵也可以看成在欧氏空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 里，所以 f 也可以取值为矩阵。

假设 $n = k$ 是成立的，那么因为 $X^{k+1} = X \circ X^k$,

$$\begin{aligned}
(X^{k+1}f)(xe^{tX}) &= (X(X^k f))(xe^{tX}) \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(X^k f)(xe^{(s+t)X})\right\}_{s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X^k f)(xe^{tX}) \\
&= \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} g(t).
\end{aligned}$$

那么使用 Taylor 公式

$$f(xe^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k + O(t^{n+1}),$$

或者

$$f(xe^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(tX)^k}{k!} f(x) + O(t^{n+1}),$$

如果可以展开无数项，那么

$$f(xe^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} f(x).$$

从中可以看到类似于指数函数的展开

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

这使得我们可以更加坚定指数映射和指数函数的关系。

Theorem 21. *对于 $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$，指数映射有如下级数展开*

$$e^A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

对于任意的矩阵 A 都是收敛的。

这个只要让 $f(A) = A, x = I, t = 0$ 就可以了。至于收敛性，因为对于任意一个矩阵，A 的范数都是有界的，那么 e^A 就被 A 的范数的级数控制，因此收敛。

当然可以用其他的方式猜出这个关系，我们考虑 e^{tA}, 将其在 $t = 0$ 附近展开，有

$$e^{tA} = I + tA + O(t^2),$$

然后对于任意的正整数 n 和固定的 t 我们有

$$e^{tA} = \left(e^{tA/n}\right)^n = \left(I + \frac{t}{n}A + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n,$$

然后令 $n \to \infty$，就有

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^n.$$

使用二项式展开，就可以得到其级数展开

$$e^{tA} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

最后 $t = 1$ 即可。

上面的过程可能不怎么严谨，在矩阵的情况下，直接用级数定义指数映射反而可能更加简单。

Lie 群 G 的切丛 TG 倒是相当有趣，因为我们可以定义 $(l_{a^{-1}})_*$ 把 T_aG 始终映射到 $T_eG = \mathfrak{g}$ 来考虑，所以切丛就被平凡化了。与这相关的概念即 Maurer-Cartan 形式。

Definition 22. *G 是一个 Lie 群，他的切丛记做 TG，形式 $\omega_G : v \mapsto (l_{g^{-1}})_* v$ 被称为 Maurer-Cartan 形式。*

可以看到 $\omega_G : TG \to \mathfrak{g}$，因此 Maurer-Cartan 形式可以看做一个 $\mathfrak{g}$ 值函数。且对于任意的 l_h^*，我们都有

$$(l_h^* \omega_G)v = \omega_G((l_h)_* v) = (l_{(hg)^{-1}})_*(l_h)_* v = (l_{(g)^{-1}})_* v = \omega_G(v).$$

所以 Maurer-Cartan 形式是左不变的。

现在来看具体的例子，设所有 $n \times n$ 的实（复）矩阵构成的集合为 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$（$\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$），其中 $\det A \neq 0$ 的矩阵按矩阵乘法构成一个群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$（$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$），我们称为一般线性群，单位元是 I。一般线性群是一个 Lie 群，矩阵群上的微分定义使得我们可以直接计算一般线性群的 Lie 代数。在一般线性群 G 上

$$(l_g)_{*a} v = \frac{1}{t}(l_g(a+tv) - l_g(a)) = \frac{1}{t}(l_g(tv)) = l_g(v) = gv.$$

其中 $v \in T_aG$.

所以一般线性群上面的 Maurer-Cartan 形式即为

$$\omega_G(v) = l_{g^{-1}}(v) = g^{-1}v.$$

其中 g 和 v 都是矩阵，矩阵乘矩阵还是矩阵，所以 Lie 代数也是矩阵的形式。设 $\mathrm{d}g = (\mathrm{d}x_{ij})$，那么 v 就可以写成 $\mathrm{d}g(v)$，因为 $\mathrm{d}x_{ij}(v) = v_{ij}$，则

$$\omega_G = g^{-1}\mathrm{d}g.$$

由于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的微分结构是熟知的，我们可以直接计算其 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 上的交换子形式。设 $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 而 $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$，容易验证 $A_g = gA$ 是左不变矢量场，因为

$$(l_h)_* A_g = (l_h)_* gA = hgA = A_{hg}.$$

记 $g = (x_{ij})$，考虑与 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 相关的左不变矢量场为

$$A_g = \sum_{i,j,k} x_{ij} a_{jk} \partial_{ik}, \quad B_g = \sum_{i,j,k} x_{ij} b_{jk} \partial_{ik},$$

于是

$$[A_g, B_g] = \left[\sum_{i,j,k} x_{ij} a_{jk} \partial_{ik}, \sum_{i,j,k} x_{ij} b_{jk} \partial_{ik} \right] = \sum_{i,k} \left(\sum_j x_{ij} \sum_r (a_{jr} b_{rk} - b_{jr} a_{rk}) \right) \partial_{ik},$$

或者

$$[A_g, B_g] = (AB - BA)_g.$$

所以 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 上的对易子为

$$[A, B] = AB - BA.$$

Definition 23. *以下矩阵构成一般线性群的子群:*

(1) *特殊线性群:* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$;

(2) *正交群:* $\mathrm{O}(n) = \{Q \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid Q^T Q = QQ^T = I\}$;

(3) *酉群:* $\mathrm{U}(n) = \{Q \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid Q^\dagger Q = QQ^\dagger = I\}$;

(4) *特殊正交群:* $\mathrm{SO}(n) = \{Q \in \mathrm{O}(n) \mid \det Q = 1\}$;

(5) *特殊酉群:* $\mathrm{SU}(n) = \{Q \in \mathrm{U}(n) \mid \det Q = 1\}$;

我们来考虑最简单的一个群 $\mathrm{SO}(2)$，他的群元素由矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

构成。这是一个 Abel 群，而且可以注意到，他同构于群 $\mathrm{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$，这是一个圆周。

Proposition 24. *对于矩阵群构成的空间，我们可以使用 Heine-Borel 定理断言有界闭子群是紧的。所以正交群是紧的，但是一般线性群不是紧的。*

但是对于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的子群来说，正交群就是极大的紧子群了。

Proposition 25. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *的子群 G 如果是紧的，那么存在可逆矩阵 A 使得 $AGA^{-1} \subset \mathrm{O}(n)$.*

Proof. 设 $A \in G$，则序列 $A, A^2, \cdots, A^n, \cdots$ 都在 G 里面。如果 $|\det A| > 1$，那么 $|\det A^n| = |\det A|^n$ 就可以任意大，和紧性对应的有界性相悖。如果 $|\det A| < 1$，那么由 G 的紧性，其 A^n 这个序列收敛到 G 内，但 $|\det A^n| = |\det A|^n$ 却又小于任意的正数，所以 A 不可逆但在 G 内，则和 G 作为一般线性群的子群相悖。所以 $|\det A| = 1$.

现在只考虑 $\det A = 1$，这就是特殊线性群的情况。然后还设 $\mathrm{SO}(3)$ 在我们的子群里。由于我们总可以将特殊线性群的元素唯一分解为 $A = RP$，其中 $R \in \mathrm{SO}(3)$，而 P 是正定对称矩阵，且 $\det P = 1$。由于正定对称一定可以对角化，适当选择基，我们使得 P 就是对角的，所以 $\det P = \lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$.

那么 $P = R^{-1}A$，由于 R 在我们的群内，那么 R^{-1} 也是，因此 P 也是。如果存在一个 $|\lambda_i| > 1$，不妨假设就是 λ_1，此时

$$P^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$$

中的 $|\lambda_1|^k$ 会比任意正数大，这和紧性相悖。所以所有的 $|\lambda_i| = 1$，但是由于是正定的，所以 $P = I$. 因此 $A = R \in \mathrm{SO}(3)$.

对于 $\det A = -1$ 的情况类似，对于共轭，也是显然的。 $\square$

现在我们来求这个极大的紧子群 $\mathrm{O}(n)$ 的 Lie 代数，因为 Maurer-Cartan 形式取 $\mathfrak{g}$ 值，所以我们只要整理出 Maurer-Cartan 形式就可以了。对恒等式 $AA^T = I$ 求导有

$$\mathrm{d}AA^T + A(\mathrm{d}A)^T = 0,$$

或者

$$A^{-1}\mathrm{d}A + (A^{-1}\mathrm{d}A)^T = 0,$$

$A^{-1}\mathrm{d}A$ 就是 Lie 代数。$\mathrm{O}(n)$ 的 Lie 代数就是满足方程 $B + B^T = 0$ 的矩阵，换而言之，反对称矩阵。

此外，由矩阵恒等式，$AA^{-1} = I$，对其求导我们有

$$0 = \mathrm{d}AA^{-1} + A\mathrm{d}(A^{-1}),$$

所以

$$\mathrm{d}(A^{-1}) = -A^{-1}(\mathrm{d}A)A^{-1}.$$

如果 $A(t) : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是一个单参子群，那么有类似的

$$(A^{-1}(t))' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

以上就是微积分里面 $(1/x)' = -1/x^2$ 的矩阵对应。

下面陈述 Lie 群和 Lie 代数的联系，有些证明是朴实的，有些证明是困难的，然而我都是略去了。首先给出一般的 Lie 代数定义。

Definition 26. 设有一个实数域上面的矢量空间 V，他上面赋予了一个双线性映射 $[\bullet, \bullet] : V \times V \to V$，且满足

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

则此时 V 以及上面的双线性映射构成一个代数，即 *Lie* 代数。

一个古典的例子，$(\mathbb{R}^3, \times)$ 构成一个 Lie 代数，其中 $\times$ 是矢量的叉乘。

Definition 27. 如果对于 V 的一个子集 H，成立 $[H, H] \subset H$，则 H 就被称为 *Lie* 代数的子代数。

Theorem 28. 设 H 是 G 的 *Lie* 子群，那么 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 *Lie* 子代数。

下面这个定理来自 Ado，就像流形中的 Whitney 嵌入定理一样，告诉我们，对于有限维 Lie 代数，其实我们只需要考虑 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的子代数就可以了。（记得 Arnold 用 Whitney 嵌入定理来说“根本没有抽象的流形”。）

Theorem 29. *任何 $\mathbb{R}$ 上的有限维 Lie 代数总可以同构于 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的一个子代数，n 为一个足够大的整数。*

考虑了子代数，现在来看看两个 Lie 群和 Lie 代数的联系。

Definition 30. *两个 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 间的同态 f 首先是一个线性映射，其次满足*

$$f([a,b]_1) = [fa, fb]_2.$$

Theorem 31. *设 $\varphi: G_1 \to G_2$ 是 Lie 群间的群同态（同构），则其诱导了 Lie 代数间的同态（同构）$\varphi_{*e}: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$.*

上面对于微分同胚我们已经证明了 $\varphi_{*e}[u,v] = [\varphi_{*e}u, \varphi_{*e}v]$，但 Lie 群之间的群同态使得我们可以做得更好。

让 $u,v \in \mathfrak{g}_1$，那么我们拓展到 G_1 上的对应的左不变矢量场 X,Y 上。因为 φ 是一个群同态，故 $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$. 使用这个关系，

$$\varphi_*(X_g) = \varphi_*((l_g)_* u) = (l_{\varphi(g)})_*(\varphi_*(u)) = (\varphi_* X)_{\varphi(g)}.$$

设 f 是 G_2 上任意的可微实函数，那么

$$\varphi_*(X_g)f = X_g(f \circ \varphi),$$

或者使用 $\varphi_{*g}(X_g) = (\varphi_* X)_{\varphi(g)}$ 写作

$$(\varphi_*(X)f) \circ \varphi = X(f \circ \varphi),$$

同理有 $(\varphi_*(Y)f) \circ \varphi = Y(f \circ \varphi)$. 所以

$$\begin{aligned}
([\varphi_*(X), \varphi_*(Y)]f) \circ \varphi &= ((\varphi_*(X) \circ \varphi_*(Y) - \varphi_*(Y) \circ \varphi_*(X))f) \circ \varphi \\
&= X((\varphi_*(Y)f) \circ \varphi) - Y((\varphi_*(X)f) \circ \varphi) \\
&= X(Y(f \circ \varphi)) - Y(X(f \circ \varphi)) \\
&= [X,Y](f \circ \varphi).
\end{aligned}$$

这就是说对任意的 g 都有

$$\varphi_{*g}([X,Y]_g) = [\varphi_{*g}(X_g), \varphi_{*g}(Y_g)]$$

特别地 $g = e$，则

$$\varphi_{*e}[u,v] = [\varphi_{*e}u, \varphi_{*e}v].$$

上面基本都是从 Lie 群去得到 Lie 代数，而且是唯一确定的。那么反过来，我们是否可以从 Lie 代数得到 Lie 群，如果可以得到，又能确定到哪种程度？这些内容是下面两个定理的内容。

Theorem 32. *我们有一个任意的有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，那么在同构意义下有唯一的单连通 Lie 群 G，他的 Lie 代数就是 $\mathfrak{g}$.*

如果两个 Lie 群有着相同的有限维 Lie 代数，我们虽然不能判断他们是同构的，但是我们可以找到同构的单连通 Lie 群。而下面的定义告诉我们，这个单连通 Lie 群就是原 Lie 群的万有覆叠空间。

Theorem 33. *一个连通 Lie 群 G，记 G' 为其万有覆叠空间，覆叠映射为 $\pi : G' \to G$. 对于任意的选择 $e' \in \pi^{-1}(e)$，总有唯一的 G' 上的 Lie 群结构使得 e' 是单位元且 π 是群同态。*

本节的最后，讲一下 Lie 群的结构方程，我们将 Maurer-Cartan 形式求一下外微分，可以得到

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) = X(\omega_G(Y)) - Y(\omega_G(X)) - \omega_G([X,Y]).$$

假设，X 和 Y 是左不变矢量场，则 $\omega_G(Y)$ 和 $\omega_G(X)$ 都是常数，那么得到

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) + \omega_G([X,Y]) = 0.$$

因为 $[X,Y]$ 在点 e 的值是在 $\mathfrak{g}$ 里面的，所以这一项也等于 $\omega_G([X,Y]) = [\omega_G(X), \omega_G(Y)]$，最后就得到了 Lie 群的结构方程

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) + [\omega_G(X), \omega_G(Y)] = 0.$$

由于这个方程是微分过的结果，可以看成是微分方程，他确定了 Lie 群的局部结构。虽然我们的证明是选取了两个左不变矢量场，但是每一个矢量场在在局部都可以变成左不变矢量场的限制，所以我们的方程总是成立的。如果群是 Abel 群，那么方程的第二项为 0，即 $\mathrm{d}\omega_G = 0$.

3 More on Algebraic Structure

这节稍稍谈谈 Lie 代数的代数构造，很重要的一点就是其为矢量空间，这样我们就可以谈直和直积复化什么的。

我们这里感兴趣的是群表示是一种矢量空间为 $\mathfrak{g}$ 的表示。这需要从伴随作用开始。

Lie 群 G 的伴随和他的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的联系来自于伴随 $\mathbf{Ad}(g) : h \mapsto ghg^{-1}$ 在单位元上的导数 $\mathrm{Ad}_g = \mathbf{Ad}(g)_* : T_eG \to T_eG$，但注意到 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 就是 Lie 群在单位元的切空间 T_eG，所以 $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$。我们将 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 称为 Lie 群的伴随表示。

Proposition 34. *对于伴随，我们有*

(1) $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *是一个 Lie 代数间的同构，而* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *是一个 Lie 群间的同态。*

(2) *如果 X 是 G 上的左不变矢量场，那么 $\mathrm{Ad}_g X$ 对于任意 $g \in G$ 也是。*

(3) *记右作用为 r，那么 $r_g^*\omega_G = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_G$.*

第一个是显然的。第二个首先注意到左作用和右作用是可交换的，因此他们的导数也是可以交换的，那么：

$$(l_h)_*(\mathrm{Ad}_g X) = (l_h)_*(l_g)_*(r_{g^{-1}})_* X = (r_{g^{-1}})_* X = (r_{g^{-1}})_*(l_g)_* X = \mathrm{Ad}_g X.$$

第三个设 $v \in T_hG$, 因此 $(r_g)_* v \in T_{hg}G$，于是

$$(r_g)^*\omega_G(v) = \omega_G((r_g)_* v) = (l_{hg^{-1}})_*(r_g)_* = (l_{g^{-1}})_*(r_g)_*(l_{h^{-1}})_* v = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_G.$$

Definition 35. *设 $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数，那么*

(1) $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}) = \{T \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \,|\, T[u,v] = [Tu, Tv], \forall u, v \in \mathfrak{g}\}$

(2) $\mathfrak{gl}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}) = \{T \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \,|\, T[u,v] = [Tu, v] + [u, Tv], \forall u, v \in \mathfrak{g}\}$

Proposition 36. *如下陈述成立：*

(1) $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$ *是一个 Lie 群。*

(2) $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$ *的 Lie 代数是* $\mathfrak{gl}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$.

(3) *令* G *的 Lie 代数为* $\mathfrak{g}$，*那么* $\mathrm{ad}(u)v=[u,v]$ *是* $\mathrm{Ad}:G\to \mathrm{GL}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$ *在* e *的导数* $\mathrm{ad}=\mathrm{Ad}_{*e}:\mathfrak{g}\to \mathfrak{gl}_{\mathrm{Lie}}$.

在第三点中，我们看到了曾经在 Jacobi 恒等式那边指出的导子，可以看到，这确确实实就是一个导数。

我们拿一般线性群举个例子，前面已经计算过了 $(l_g)_*=l_g$，那么同样 $(r_g)_*=r_g$，所以

$$\mathrm{Ad}_g=(l_g)_*(r_{g^{-1}})_*=l_g r_{g^{-1}}.$$

那么

$$\mathrm{Ad}_g(v)=(l_g)_*(r_{g^{-1}})_*v=l_g r_{g^{-1}}v=gvg^{-1}.$$

我们现在求他的 Lie 代数，考虑 $u,v\in\mathfrak{g}$，我们令 $u(t)$ 是一个以 u 为初速度的单参子群，那么我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Ad}_{u(t)}(v))=u'(t)vu^{-1}(t)+u(t)v(u^{-1}(t))'=u'(t)vu^{-1}(t)-u(t)vu^{-1}(t)u'(t)u^{-1}(t).$$

然后令 $t=0$，那么 $u(0)=u^{-1}(0)=I$，而 $u'(0)=u$，那么就得到了单位元处的切矢量，也就是 Lie 代数

$$\mathrm{ad}(u)v=uv-vu=[u,v].$$

类似的手段譬如

$$T(t)[u,v]=[T(t)u,T(t)v],$$

求个导，然后在 $t=0$ 处的值为

$$T'(0)[u,v]=[T'(0)u,T(0)v]+[T(0)u,T'(0)v],$$

注意到 $T(0)$ 是恒等变换，而 $T'(0)$ 就是我们需要的 Lie 代数 B，他需要满足的关系就是

$$B[u,v]=[Bu,v]+[u,Bv],$$

其显然是 Lie 代数上面的一个导子。

Definition 37. *令* $\mathfrak{g}$ *是一个 Lie 代数，那么他的有限维表示* (π,V) *就是一个映射* $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$.

所以说 ad 就是一个 Lie 代数的表示。

一个 Lie 群的表示可以引出他的 Lie 上面的一个表示如下：

$$\pi_*(X)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi(e^{tX})\right|_{t=0},$$

或者

$$\pi(e^{tX})=e^{\pi_*(X)}.$$

Proposition 38. π *是不可约的当且仅当* π_* *是不可约的；*π *是完全可约的当且仅当* π_* *是完全可约的；两个* π *和* η *是等价的当且仅当* π_* *和* η_* *是等价的。*

对两个 Lie 群的表示的直积求导，就得到了 Lie 代数表示的直积形式应该满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(g)\otimes\eta(g))\bigg|_{t=0} = \pi_*(g)\otimes I + I\otimes\eta_*(g) = (\pi_*\otimes I + I\otimes\eta_*)(g),$$

我们就将其作为 Lie 代数表示直积的定义。

迄今为止，我们都只谈论了实数域上面的 Lie 代数，当然，我们可以直接拓展到复数域上面去，但是复化的手段也是常用的。

Definition 39. 如果 V 是有限维实的矢量空间，那么所有 $v_1 + iv_2$ 所构成的空间被称为他的复化，记做 $V_\mathbb{C}$，其中 $v_1, v_2 \in V$. 如果我们再定义

$$i(v_1 + iv_2) = -v_2 + iv_1,$$

那么 $V_\mathbb{C}$ 就是有限维的复矢量空间。

由于 Lie 代数也是矢量空间，我们可以对其复化，显然，我们希望复化后对易子满足

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = ([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]),$$

也就是说对易子对 i 也是线性的。可以直接验证，我们这样定义的确实是对易子且是唯一的。

因为 Lie 代数是矢量空间，所以作为矢量空间，两个 Lie 代数可以直积，如果有两个 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$，我们在 $\mathfrak{g}_1\otimes\mathfrak{g}_2$ 如下定义交换子：

$$[a_1\otimes b_1, a_2\otimes b_2] = [a_1, b_1]\otimes[a_2, b_2],$$

那么很容易看到 $\mathfrak{g}_1\otimes\mathfrak{g}_2$ 也变成了 Lie 代数。

同样，两个 Lie 代数也可以直和。如果有两个 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$，那么直和的 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ 上的交换子写作

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]).$$

上面的直积直和的 Lie 代数结构的验证，尤其是 Jacobi 恒等式的验证就略去了。谈了直积和直和，我们就可以谈论 Lie 代数的分类和分解。

Definition 40. 令 $\mathfrak{g}$ 是一个实（复）*Lie* 代数，如果他的实（复）子代数 $\mathfrak{h}$ 满足对所有的 $X\in\mathfrak{g}, H\in\mathfrak{h}$ 都有 $[X, H]\in\mathfrak{h}$，则称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想。[1]

一个代数 $\mathfrak{g}$ 显然有两个理想，一个是 0 一个是 $\mathfrak{g}$，我们称这两个为平凡理想。

Definition 41. 一个实（复）*Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 如果没有非平凡理想，则称其为不可分解的。如果一个 *Lie* 代数的维度大于 1 且是不可分解的，则称其为单的。

从定义来看，不可分解但非单的 Lie 代数只可能是一维的。对于一维 Lie 代数来说，他没有非平凡的子代数，其中任意两个元素的交换子为 0，从而可以看到他是不可分解的。

我们可以将有限群和有限维 Lie 代数类比。Lie 代数的子代数就对应有限群的子群，Lie 代数的理想就对应有限群的正规子群，一维 Lie 代数就对应素数阶的循环群（他是没有子群的，这个很简单就可以证明，使用 Lagrange 公式还可以得知素数阶的有限群一定是循环群）。

[1] 可以搜一搜 ring 和 ideal 的笑话。

Definition 42. 一个实（复）*Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 如果同构于不可分解 *Lie* 代数的直和，那么称呼其为可约的。如果其同构于单 *Lie* 代数的直和，就称呼其为半单的。

下面的定理连接了紧矩阵 Lie 群以及半单 Lie 代数。

Theorem 43. 一个复 *Lie* 代数是半单的当且仅当他同构于一个单连通的紧矩阵 *Lie* 群的 *Lie* 代数的复化。

我们已经做过了从实 Lie 代数复化得到一个复 Lie 代数，那么自然地，我们可以问反问题，对一个复 Lie 代数是否可以寻找一个实 Lie 代数，那个实 Lie 代数的复化就是原本的复 Lie 代数。

Definition 44. 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个复的半单 *Lie* 代数，那么 $\mathfrak{g}$ 的紧实形式（*compact real form*）是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{k}$ 使得对任意的 $X \in \mathfrak{g}$ 都可以找到两个 $X_1, X_2 \in \mathfrak{k}$ 满足 $X = X_1 + iX_2$. 因此，存在一个单连通的紧矩阵 *Lie* 群 K_1 使得 K_1 的 *Lie* 代数同构于 $\mathfrak{g}$ 的紧实形式。

上面一个定理告诉我们上面这个反问题在半单 Lie 代数的情况下始终是有解的。

Proposition 45. 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个实的 *Lie* 代数，那么他是半单的当且仅当他的复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是半单的。

从这个可以推知，紧的单连通矩阵 Lie 群的实 Lie 代数是半单的。当然，反过来，不是任何半单实 Lie 代数都可以找到紧的单连通矩阵 Lie 群。

Definition 46. 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个复的半单 *Lie* 代数，那么 $\mathfrak{g}$ 的一个子空间 $\mathfrak{h}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 的 *Cartan* 子代数，如果满足：

(1) 对于任意的两个元素 $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$，都有 $[H_1, H_2] = 0$;

(2) 对于任意的 $X \in \mathfrak{g}$，如果有 $[X, H] = 0$ 对全部 $H \in \mathfrak{h}$ 都成立，则 $X \in \mathfrak{h}$.

(3) 对于全部 $H \in \mathfrak{h}$，$\mathrm{ad}(H)$ 作为 *Lie* 代数的表示是完全可约的。

Cartan 子代数的维度称为半单 *Lie* 代数的秩。

条件 1 说明了 Cartan 子代数是交换子代数，然后条件 2 就说明这个极大的交换子代数。

Proposition 47. 令 $\mathfrak{g}$ 是一个复的半单 *Lie* 代数，令 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧实形式，再令 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{k}$ 任意的极大交换子代数，定义 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$. 然后，$\mathfrak{h}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的 *Cartan* 子代数。

我们以后下面要谈论 Lie 群和 Lie 代数的表示，但是却只限制在紧 Lie 群，特别是紧的矩阵群上面，从而根据上面的定理，我们也只要去研究半单 Lie 代数就可以了。

4 Matrix Group

这一节限制在矩阵群上面，这节将给出很多可计算的例子，先来求一些矩阵群的 Lie 代数。

Theorem 48. 任意的矩阵 $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 都可以写作 e^X 的形式，其中 $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$。

这个直接从矩阵幂那一套证明并不那么方便，但是直接从 Lie 代数作为单位元附近的 Lie 群与单参子群的对应关系，这个结论就是比清晰的了。

这个定理也可以用来说明，一般线性群的 Lie 代数就是整个方阵构成的集合。

Proposition 49. $e^{DAD^{-1}} = De^AD^{-1}$.

这个结论我们已经证明过了，前面写作

$$\mathrm{Ad}_D(A) = DAD^{-1}.$$

当然也可以直接用矩阵指数映射的展开来证明。

Proposition 50. $\det e^A = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

这个的证明可以将矩阵分解为幂零的和可对角化的两个矩阵的乘积 $A = SN$，因为 S 和 N 可交换，所以

$$\det\left(e^A\right) = \det\left(e^S\right)\det\left(e^N\right).$$

如果可以对角化，那么直接对角化为

$$e^S = e^{D\Lambda D^{-1}} = De^{\Lambda}D^{-1},$$

而 e^{Λ} 是可以直接计算的，即 $\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$. 那么

$$\det\left(e^S\right) = \det\left(De^{\Lambda}D^{-1}\right) = \det\left(e^{\Lambda}\right) = e^{\sum_i \lambda_i} = e^{\mathrm{tr}(\Lambda)} = e^{\mathrm{tr}(S)}$$

对于幂零矩阵来说，容易验证 $\det e^N = 1$，最后就可以得到任意矩阵都有

$$\det e^A = e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

有了上面的一些结论，我们来求特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$。如果 $\det e^A = 1$，那么 $e^A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，而 $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，因为 $e^{\mathrm{tr}(A)} = \det e^A = 1$，所以 $\mathrm{tr}(A) = 0$. 这就是说 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 就是那么迹为 0 的矩阵的集合。

作为 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的子群，$\mathrm{SU}(n)$ 的元素满足 $AA^\dagger = I$，那么

$$\mathrm{d}AA^\dagger + A\mathrm{d}A^\dagger = 0,$$

或者整理成 Maurer-Cartan 形式的样子

$$A^{-1}\mathrm{d}A + (A^{-1}\mathrm{d}A)^\dagger = 0,$$

这就是说，$\mathfrak{su}(n)$ 是由满足 $B + B^\dagger = 0$ 的矩阵零迹矩阵 B 构成的集合。当然，这也可以用矩阵幂来做，我们略去了。

从矩阵幂的形式

$$e^A = \sum_{i=0}^{n} \frac{A^n}{n!},$$

我们当然会去遐想，是否其他函数也有这样的幂函数展开？其中最有趣的展开莫过于 log 了，因为他是 exp 的反函数。就这样，我们定义

$$\log A = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(A-I)^m}{m}.$$

当 $\|A - I\| < 1$ 的时候，这个幂级数显然是收敛且连续的。我们也确实可以证明在收敛的时候他和 exp 是反函数，适当对角化（不能的话就用可对角的矩阵序列趋近）之后就可以直接计算验证。

前面说过 e^{X+Y} 在 X,Y 不对易的时候是一般不等于 e^Xe^Y，这里我们举一个例子：

$$X=\begin{pmatrix}1 & \\ & 2\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} & 1\\ 2 & \end{pmatrix},$$

直接计算就知道 $[X,Y]\neq 0$. 然后 e^X 是容易计算的，因为他是对角的

$$e^X=\begin{pmatrix}e & \\ & e^2\end{pmatrix},$$

后面的 Y 对角化之后也是容易的，

$$Y=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & \\ & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

所以

$$e^Y=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(-\sqrt{2}) & \\ & \exp(\sqrt{2})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

那么

$$e^Xe^Y=\begin{pmatrix}e & \\ & e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\left(\sqrt{2}\right) & \sinh\left(\sqrt{2}\right)/\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\sinh\left(\sqrt{2}\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}.$$

e^{X+Y} 的计算不再重复了

$$e^{X+Y}=\begin{pmatrix}2/3+e^3/3 & e^3/3-1/3\\ 2e^3/3-2/3 & 2e^3/3-2/3\end{pmatrix}.$$

所以 $e^{X+Y}\neq e^Xe^Y$.

Proposition 51. 令 X,Y 都是 $n\times n$ 的矩阵，则

$$e^{X+Y}=\lim_{m\to\infty}\left(e^{X/m}e^{Y/m}\right)^m.$$

这证明挺简单的，所以略去了。下面这个公式更加复杂，因此证明也很复杂，以至于都需要一个名字来标记这个公式了。证明也略去了。

Theorem 52. *Campbell-Baker-Hausdorff* 公式：

$$\log\left(e^Xe^Y\right)=X+\int_0^1\varphi\left(e^{\mathrm{ad}(X)}e^{t\mathrm{ad}(Y)}\right)(Y)\mathrm{d}t,$$

其中

$$\varphi(z)=\frac{z\log z}{z-1}.$$

幂级数展开 $\varphi(z)$ 我们有

$$\varphi(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)(z-1)^{n-1}.$$

带入上面的公式，就可以得到漂亮的展开

$$\log\left(e^Xe^Y\right)=X+Y+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\cdots.$$

级数展开不是上面公式的重点，重点是展开后全是对易子 $[\bullet,\bullet]$ 的形式，直接来自于积分里面的 ad. 所以使用这个公式可以证明矩阵 Lie 群和 Lie 代数关系中的映射关系，因为 Lie 代数同态是可以分配进对易子的但是对于一般的 X 和 Y 的线性组合却是不可以的。

我们现在来对 Lie 代数进行展开，设 Lie 代数的基为 $\{a_i\}$，那么

$$[x,y]=\sum_{i,j}x_iy_j[a_i,a_j].$$

但是因为交换子是封闭的，所以

$$[a_i,a_j]=\sum_k c_{kij}a_k.$$

然后考虑伴随表示的展开

$$\mathrm{ad}(a_i)(a_j)=\sum_k \mathrm{ad}(a_i)_{kj}a_k.$$

对于一般线性群的 Lie 代数来说 $\mathrm{ad}(a_i)(a_j)=[a_i,a_j]$，这就是说

$$[a_i,a_j]=\sum_k \mathrm{ad}(a_i)_{kj}a_k.$$

使用线性性，我们最后得到

$$[x,a_i]=\sum_k \mathrm{ad}(x)_{ki}a_k.$$

这样，我们就可以求得 $\mathrm{ad}(x)$ 的矩阵。

现在来考虑 $\mathfrak{so}(3)$ 的 Lie 代数，因为 $\mathfrak{so}(3)$ 是那些 3×3 的反对称矩阵构成的集合，我们取下面三个矩阵作为基

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

然后可以计算对易子如下

$$[\eta_1,\eta_2]=\eta_3,\quad [\eta_1,\eta_3]=-\eta_2,\quad [\eta_2,\eta_3]=\eta_1.$$

如果建立映射 $\eta_i\mapsto e_i$，其中 e_i 就是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基，而映射将 $[\bullet,\bullet]$ 映射为叉乘，那么这就是一个 Lie 代数同构。

那么我们也可以计算得伴随表示为

$$\mathrm{ad}(\eta_1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}(\eta_2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}(\eta_3)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

有趣的是，在这组基的选取下 $\mathrm{ad}(\eta_i)=\eta_i$.

下面来看看 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，他是所有二阶零迹矩阵构成的群，我们设他的基为

$$h=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

那么

$$[h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f,\quad [e,f]=h.$$

所以

$$\mathrm{ad}(h)=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}(e)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}(f)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}.$$

Definition 53. *定义 Killing 形式为* $(x,y)_K$ *如下*

$$(x,y)_K=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)),$$

其中 x,y *是任意的 Lie 代数元素。*

在选取基的形式下，我们可以得到矩阵 $K_{ij}=(a_i,a_j)_K$.

Theorem 54. *Killing 形式是双线性的，且*

(1) 对于任意的 Lie 代数自同构 φ *我们对任意的* x,y *都有* $(\varphi x,\varphi y)_K=(x,y)_K$*，*

(2) 对于任意的 x,y,z *有* $([x,y],z)_K=(x,[y,z])_K$*，*

(3) 如果 $\mathfrak{h}$ *是* $\mathfrak{g}$ *的理想，那么在* $\mathfrak{h}$ *上的 Killing 形式* $(\bullet,\bullet)_{K_{\mathfrak{h}}}$ *和原本的 Killing 形式* $(\bullet,\bullet)_K$ *对于所有* $x,y\in\mathfrak{h}$ *满足* $(x,y)_{K_{\mathfrak{h}}}=(x,y)_K$.

对于第二点，注意到 $\mathrm{ad}([x,y])=\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)-\mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x)$,

$$\begin{aligned}([x,y],z)_K-(x,[y,z])_K&=\mathrm{tr}\{\mathrm{ad}([x,y])\mathrm{ad}(z)-\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}([y,z])\}\\&=\mathrm{tr}\{\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(z)-\mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(z)\mathrm{ad}(x)\}\\&=0.\end{aligned}$$

Theorem 55. *一个 Lie 代数是半单的当且仅当他没有一个非平凡的交换理想*[2]*。*

这个结论经常也被当成定义，可以看到这种半单的定义自动抛弃了一维理想的存在，因为一维理想一定是交换的。

Theorem 56. *一个 Lie 代数是半单的，当且仅当他的 Killing 形式是非退化的，即矩阵* $K_{ij}=(a_i,a_j)_K$ *是非退化的，或者对任意的* a *都成立* $(a,b)_K=0$ *的话能推出* $b=0$*。*

靠这个定理，我们来看看 $\mathfrak{so}(3)$ 是否是半单的。容易计算得他的 Killing 形式为

$$K_{ij}=(\eta_i,\eta_j)_K=\mathrm{tr}(\eta_i\eta_j)=-2\delta_{ij}.$$

当然是非退化的，所以 $\mathfrak{so}(3)$ 是半单 Lie 代数。同理 $\mathfrak{sl}(2)$ 也是半单 Lie 代数。

5 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(3)$ and $\mathfrak{su}(2)$

在分析一般的半单 Lie 代数之前，我们先来看看几个比较简单的 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(3)$ 和 $\mathfrak{su}(2)$，他们之间存在着紧密的联系。

前面已经证明过 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(3)$ 的基和相互的对易关系有

$$[h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f,\quad [e,f]=h,$$

[2]交换理想首先是一个理想，然后也是一个交换子代数。

$$[\eta_1,\eta_2]=\eta_3,\quad [\eta_1,\eta_3]=-\eta_2,\quad [\eta_2,\eta_3]=\eta_1.$$

现在我们来看 $\mathfrak{su}(2)$ 的表现，他是所有满足 $B+B^\dagger=0$ 的复二阶零迹矩阵 B 的集合。我们选如下三个矩阵作为基：

$$\mu_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \mu_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mu_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}.$$

容易验证

$$[\mu_1,\mu_2]=\mu_3,\quad [\mu_1,\mu_3]=-\mu_2,\quad [\mu_2,\mu_3]=\mu_1.$$

这和 $\mathfrak{so}(3)$ 的对易关系一模一样，于是我们可以引入 $\mathbb{R}$-线性映射建立两者作为实 Lie 代数的同构，也就是 $\mathfrak{so}(3)\cong\mathfrak{su}(2)$.

很容易证明 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 的复化即 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，这就是说 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_\mathbb{C}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 为了分析 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的结构，我们来看 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的结构。

任何一个复可逆 2×2 矩阵都可以唯一分解（极分解）为

$$\lambda=ue^h$$

其中 u 幺正而 h 是 Hermite 矩阵。现在假如 $\det\lambda=1$，则

$$\det(u)e^{\mathrm{tr}(h)}=1$$

于是 $\det(u)=1$ 而 $\mathrm{tr}(h)=0$. 前者的一般形式为

$$u=\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{pmatrix},$$

且满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$，因此其拓扑上等价为 3-球面 $\mathbb{S}^3$. 而前者的一般形式为

$$h=\begin{pmatrix}e & f-ig\\ f+ig & -e\end{pmatrix},$$

拓扑上等价于 $\mathbb{R}^4$，因此 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 在拓扑上等价于 $\mathbb{R}^4\times\mathbb{S}^3$. 当然拓扑上的结论在我们这里暂时没什么用。

这样来看 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的极分解中，令 $b=-ih$，则

$$\mathrm{tr}(b)=0,\quad b^\dagger+b=0,$$

以及 $u=e^a$ 有

$$\mathrm{tr}(a)=0,\quad a^\dagger+a=0,$$

所以 $a,b\in\mathfrak{su}(2)$，且 $\lambda=e^{a+ib}$.

注意到任取一个实数 t 和 $a\in\mathfrak{su}(2)$，还有 $ta\in\mathfrak{su}(2)$，所以任意的一个 $\lambda\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 都可以写成

$$\lambda=e^{ta+itb}$$

他在 $t=0$ 的导数 $a+ib$ 就构成 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，那么任意的 $c\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 都可以写成

$$c=a+ib,$$

其中 $a,b\in\mathfrak{su}(2)$，这就是说 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{su}(2)$ 的复化。

单纯从 Lie 代数来看，我们在 $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ 中引入 $L_n = i\mu_n$，则

$$[L_1, L_2] = iL_3, \quad [L_1, L_3] = -iL_2, \quad [L_2, L_3] = iL_1.$$

再引入 $L_\pm = L_1 \pm iL_2$，则

$$[L_+, L_-] = 2L_3, \quad [L_3, L_+] = L_+, \quad [L_3, L_-] = -L_-.$$

我们令 $h' = 2h, e' = 2e, f' = 2f$，则 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的三个基的对易关系变成

$$[e', f'] = 2h', \quad [h', e'] = e', \quad [h', f'] = -f'.$$

可见一模一样。

这样，三个 Lie 代数之间的关系就清楚了

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3), \quad \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}.$$

现在来看 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示，每一个 Lie 代数的元素 a 都变成了有限维矢量空间 V 上面的线性映射 $\pi(a)$，复数域的代数完备性可以推知 $\pi(h)$ 有一个特征值，即

$$\pi(h)v = \lambda v.$$

那么

$$\pi(h)\pi(e)v = [\pi(h), \pi(e)]v + \pi(e)\pi(h)v = (\lambda + 2)\pi(e)v.$$

所以 $\pi(e)v$ 也是 $\pi(h)$ 的本征矢量，本征值是 $\lambda + 2$，同理 $\pi(f)v$ 也是 $\pi(h)$ 的本征矢量，本征值是 $\lambda - 2$.

我们反复作用 $\pi(e)$ 和 $\pi(f)$ 到 v 上就可以得到

$$\pi(h)\pi(e)^n v = (\lambda + 2n)\pi(e)^n v,$$

所以，要么 $\pi(e)^n v$ 也是一个本征矢，本征值为 $\lambda + 2n$，或者 $\pi(e)^n v = 0$。由于 V 是有限维的，我们不可能有着无穷多个不同的本征值，因此存在一个 $N \geq 0$ 使得

$$\pi(e)^N v \neq 0, \quad \pi(e)^{N+1} v = 0$$

这就是说存在一个 u_0 使得

$$\pi(h)u_0 = \lambda u_0, \quad \pi(e)u_0 = 0.$$

λ 是 $\pi(h)$ 的最大的本征值。

我们再定义 $u_k = \pi(f)^k u_0$，那么

$$\pi(h)u_k = (\lambda - 2k)u_k,$$

也不可能无限地进行下去。就是说存在一个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $k \leq m$ 满足 $u_k \neq 0$ 但 $u_{m+1} = 0$.

使用归纳法和对易关系 $[\pi(e), \pi(f)] = \pi(h)$ 可以算得

$$\pi(e)u_k = (k\lambda - k(k-1))u_{k-1} \quad (k > 0).$$

假如 $u_{m+1} = 0$，那么

$$0 = \pi(e)u_{m+1} = ((m+1)\lambda - m(m+1))u_m = (m+1)(\lambda - m)u_m.$$

这就是说 $\lambda = m$. 那么一个本征值为正整数，其他的本征值可以通过 $\lambda - 2n$ 得到，所以也是整数，这就推出了：

Proposition 57. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 $m+1$ 维不可约表示中 $\pi(h)$ 的本征值都是整数，且可以对角化为 $\mathrm{diag}(m,m-2,\cdots,-m+2,m)$。

到上面为止，唯一留下的就是要证明对任意的 m 上面的表示都是不可约的，而且确实是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示。为此，我们可以证明 $\{u_0,u_1,\cdots,u_m\}$ 构成一组基，这是因为每一个 u_k 都是 $\pi(h)$ 对应不同本征值的本征矢量，于是 $\pi(f)u_k=u_{k+1}$ 保证了不可约性。而他是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示则是可以直接计算验证的，略去之。

将表示的矩阵写出来可能更加清晰，$\pi_m(h)=\mathrm{diag}(m,m-2,\cdots,-m+2,m)$ 和

$$\pi_m(e)=\begin{pmatrix}0 & m & & & \\ & 0 & m-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0\end{pmatrix},\quad \pi_m(f)=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m & 0\end{pmatrix}.$$

在物理上更习惯用整数或者半整数 $j=m/2$ 来表示维度，并且会适当调整 $\pi(h)$ 的系数，这就造成了角动量问题中的半整数的出现。

Proposition 58. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 $2j+1$ 维不可约表示中 $\pi(h)$ 的本征值或者是整数或者是半整数，且可以对角化为 $\mathrm{diag}(-j,-j+1,\cdots,j-1,j)$。

6 Semi-simple Lie Algebras

对于有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，我们可以找到其也是有限维的紧实形式。因为是半单的，所以这个紧实形式也同构于一个紧 Lie 群 H 的 Lie 代数 $\mathfrak{h}$（直接就看成是了），所以 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+i\mathfrak{h}$，那么 $\mathfrak{h}$ 上面存在着内积在表示 $\mathrm{Ad}:H\to\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ 作用下不变，即

$$(e^{t\mathrm{ad}(h)}x,e^{t\mathrm{ad}(h)}y)=(x,y).$$

其中 $x,y\in\mathfrak{h}$，可以把这个内积推广到 $\mathfrak{g}$ 内取复值的内积，让我们还是使用符号 $(\bullet,\bullet)$ 来标记他，那么求导就有

$$(\mathrm{ad}(h)x,y)+(x,\mathrm{ad}(h)y)=0.$$

所以表示 ad 是反 Hermit 的，即

$$\mathrm{ad}(h)+\mathrm{ad}(h)^\dagger=0.$$

此时 $i\mathrm{ad}(h)$ 就是 Hermit 的，因此根据有限维的谱定理，我们一定可以对角化 $i\mathrm{ad}(h)$，也就是说可以对角化 $\mathrm{ad}(h)$ 当 $h\in\mathfrak{h}$，而且是对角元是纯虚的。特别地，如果 h 在 $\mathfrak{h}$ 的极大交换子代数 $\mathfrak{l}$ 里面，$\mathrm{ad}(h)$ 也是可以对角化的。因此如果 $h_1,h_2\in\mathfrak{l}$，$\mathrm{ad}(h_1),\mathrm{ad}(h_2)$ 是可交换的，那么他们的线性组合 $h=h_1+ih_2$ 对应的 $\mathrm{ad}(h)$ 也是可以对角化的[3]。此时 $\mathfrak{l}+i\mathfrak{l}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，所以如果 h 在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数里面，那么 $\mathrm{ad}(h)$ 是可以对角化的。

我们可以分解有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为这样的两个子代数，其中一个是 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}'.$$

[3]这是因为可交换线性变换可以同时对角化。

令有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的秩为 l，那么设 Cartan 子代数 $\mathfrak{l}$ 的基为 $\{h_1, h_2, \cdots, h_l\}$，因为 $\mathrm{ad}(h_j):\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ 且 h_j 在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数里面，所以 $\mathrm{ad}(h_j)$ 是可以对角化的，因此存在 $\mathfrak{g}'$ 的基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-l}\}$ 使得

$$\mathrm{ad}(h_j)v_k = [h_j, v_k] = \alpha_k(h_j)v_k,$$

其中 $\alpha_k(h_j)$ 就是 $\mathrm{ad}(h_j):\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ 的本征值。而 Cartan 子代数作为交换子代数，我们有交换子 $[h_j, h_k] = 0$ 成立。但 Cartan 子代数又是极大的交换子代数，所以对任意的 k，我们总可以找到一个 j 使得 $\alpha_k(h_j) \neq 0$，否则 $[h_j, v_k] = 0$ 就可以推出 v_k 在 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 里面了。

设 $h = \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j$ 是任意的 Cartan 子代数里面的元素，那么

$$\mathrm{ad}(h)v_k = [h, v_k] = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \alpha_k(h_j)v_k,$$

我们定义 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 上的线性函数 $\alpha_k : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ 如下

$$\alpha_k(h) = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \alpha_k(h_j),$$

那么

$$\mathrm{ad}(h)v_k = [h, v_k] = \alpha_k(h)v_k.$$

这样定义的线性函数被称为 $\mathfrak{g}$ 的根，所有根的集合记做 Δ.

Definition 59. *对有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个根 α，我们将满足方程的*

$$[h, v_\alpha] = \alpha(h)v_\alpha$$

矢量 v_α 构成的集合称为对应于根 α 的根子空间。

我们于是把有限维半单复 Lie 代数的分解更加细化为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是诸根子空间。Cartan 子代数的根也可以认为是恒为 0 的，那么 $\mathfrak{h}$ 也可以认为是一个根子空间 $\mathfrak{g}_0$。

两个根子空间可以进行对易子运算，即 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$，设 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, a_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$，则 $[a_\alpha, a_\beta]$ 也是在某个根子空间里面的，为了求他的根，我们用对任意的 $h \in \mathfrak{h}$ 求 $\mathrm{ad}(h)[a_\alpha, a_\beta]$，因为 $\mathrm{ad}(h)$ 是导子，所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(h)[a_\alpha, a_\beta] &= [\mathrm{ad}(h)a_\alpha, a_\beta] + [a_\alpha, \mathrm{ad}(h)a_\beta] \\
&= \alpha(h)[a_\alpha, a_\beta] + [a_\alpha, \beta(h)a_\beta] \\
&= (\alpha(h) + \beta(h))[a_\alpha, a_\beta]
\end{aligned}$$

因此，如果 $\alpha + \beta \in \Delta$，则 $\mathrm{ad}(h)[a_i, a_j] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，于是 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, 否则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$.

Theorem 60. *设 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, a_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$，那么如果 $\alpha + \beta \neq 0$，则 $(a_\alpha, a_\beta)_K = 0$.*

这个证明没什么难度，考虑 $\mathrm{ad}(a_\alpha)\mathrm{ad}(a_\beta)a_\gamma$ 就可以了。特别地，我们考虑 $h \in \mathfrak{h}$ 且 $a \in \mathfrak{g}_\alpha$，则

$$(h, a_\alpha)_K = 0.$$

以此和 Killing 形式在 $\mathfrak{g}$ 上非退化可以推知，Killing 形式在 $\mathfrak{h}$ 上也是非退化的。

那么我们就有可能用非退化的 Killing 形式来表示根，即对根 α 存在 $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ 使得[4]

$$(h_\alpha, h)_K = \alpha(h),$$

因之

$$h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta,$$

因为 Killing 形式是对称的，所以 $(h_\alpha, h_\beta)_K$ 可以推知 $\alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha)$.

Definition 61. 我们定义 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ 如下：

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (h_\alpha, h_\beta)_K.$$

那么 $\alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$. 那么 $\langle -\alpha, \beta \rangle = -\alpha(h_\beta) = -\langle \alpha, \beta \rangle$ 以及

$$[h_\beta, a_\alpha] = \langle \beta, \alpha \rangle a_\alpha.$$

因为 $\mathrm{ad}(h)$ 是对角的，且对角元素为 $\{\alpha(h)\}$，其中 $\alpha \in \Delta$，那么直接根据 Killing 形式的定义，就有

$$(h, h')_K = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \gamma(h) \gamma(h'),$$

特别地，我们有

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (h_\alpha, h_\beta)_K = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \gamma(h_\alpha) \gamma(h_\beta) = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \gamma, \beta \rangle.$$

Proposition 62. 如果 $\alpha \in \Delta$，则 $-\alpha \in \Delta$.

假若 $-\alpha \notin \Delta$，那么对于任何 $\beta \in \Delta$ 都有 $\alpha + \beta \neq 0$，那么就是说，对于任何的 $a \in \mathfrak{g}$ 都有 $(a_\alpha, a)_K = 0$，由 Killing 形式的非退化可以知道此时 $a_\alpha = 0$，这不可能。那么，这样也顺便推出了，对于任意的 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，一定存在一个 $a_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得 $(a_\alpha, a_{-\alpha})_K \neq 0$. 因为 Killing 形式是双线性的，调整系数我们可以使得 $(a_\alpha, a_{-\alpha})_K$ 成为任意的复常数。

Proposition 63. 设 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 和 $a_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$，则 $[a_\alpha, a_{-\alpha}] = (a_\alpha, a_{-\alpha})_K h_\alpha$. 这也说明了，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 是一维的，且由 h_α 张成。

这个直接计算就是了，如果我们选 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 满足 $(E_\alpha, F_\alpha)_K = 2/\langle \alpha, \alpha \rangle$，再选

$$H_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} h_\alpha$$

那么计算对易关系

$$\begin{aligned}
[H_\alpha, E_\alpha] &= \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}[h_\alpha, E_\alpha] = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\langle \alpha, \alpha \rangle E_\alpha = 2E_\alpha, \\
[H_\alpha, F_\alpha] &= \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}[h_\alpha, F_\alpha] = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\langle \alpha, -\alpha \rangle F_\alpha = -2F_\alpha, \\
[E_\alpha, F_\alpha] &= \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} h_\alpha = H_\alpha.
\end{aligned}$$

[4] 使用类似定义对偶空间的方式。

总结一下就是

$$[H_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha, \quad [H_\alpha, F_\alpha] = -2F_\alpha, \quad [E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha.$$

这其实就是 $\mathfrak{sl}(2)$ 的对易关系，所以呢，这三个基 $E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha$ 生成了一个同构于 $\mathfrak{sl}(2)$ 的子代数，我们记做 $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$.

Theorem 64. 如下三个陈述成立：

(1) 如果 $\alpha \in \Delta$，那么 $k\alpha \notin \Delta$，其中 $k \in \mathbb{C}$，除非 $k = -1$.

(2) 如果 $\alpha \in \Delta$，那么 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是一维的。

(3) 对每一个 α，我们都可以找到 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 以及 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 使得对易关系

$$[H_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha, \quad [H_\alpha, F_\alpha] = -2F_\alpha, \quad [E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$$

成立，且 H_α 是唯一的，不依赖于 E_α 和 F_α 的选取。

第三点前面部分刚刚已经证明过了，而我们定义的 H_α 正比于 h_α，所以他就是唯一的。第一第二点基本都是来自于 $\mathfrak{sl}(2)$ 的同构。我们下面用 H 代替 h 来看一些公式是怎么变化的。首先

$$[H_\beta, a_\alpha] = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}[h_\beta, a_\alpha] = 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} a_\alpha.$$

Proposition 65. 对任意的 $\alpha, \beta \in \Delta$，$2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ 是一个整数。

这个是因为 $2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ 是 $\mathrm{ad}(H_\beta)$ 的本征值，而 $\mathfrak{sl}(2)$ 的有限维不可约表示的本征值只能是整数。如果把 $\langle \bullet, \bullet \rangle$ 当成内积，那么 $\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ 就是 β 往 α 方向的投影，可以看到投影只能是整数和半整数。

我们继续做一些计算

$$(H_\alpha, H_\beta)_K = \frac{4\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle},$$

特别地，

$$(H_\alpha, H_\alpha)_K = \frac{4}{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

于是

$$2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2\frac{4\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle}\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{4} = 2\frac{(H_\alpha, H_\beta)_K}{(H_\beta, H_\beta)_K}$$

都是整数。

7 SU(2) and SO(3)

上面看到了 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的 Lie 代数，或者说 $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} \cong \mathfrak{so}(3)_\mathbb{C}$ 的 Lie 代数，现在我们回到 Lie 群 SU(2) 和 SO(3)。

首先复习一下 SO(3) 的一些更细的结构，SO(3) 是三维旋转群，不包括反射。

Proposition 66. 绕着固定单位矢量 $\mathbf{a}$ 右手螺旋的逆时针方向旋转 θ 后的 $\mathbf{x}$ 表示为

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{a}, \theta)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (1 - \cos\theta)\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) + \sin\theta\, \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

为了证明他，首先注意到当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{x}$ 垂直的时候显然有

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mathbf{x} = \cos\theta\,\mathbf{x} + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{x}.$$

对于一般的 $\mathbf{x}$，分解为平行于 $\mathbf{a}$ 和垂直于 $\mathbf{a}$（设其单位矢量为 $\mathbf{b}$）的两个部分 $\mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$，而平行于 $\mathbf{a}$ 的部分在旋转下不变 $\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$。由于 $\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)$ 的线性性，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mathbf{x} &= \mu\mathbf{a} + \cos\theta\,(\nu\mathbf{b}) + \sin\theta\,\mathbf{a}\times(\nu\mathbf{b})\\ &= \mathbf{x}\cos\theta + (1-\cos\theta)\mu\mathbf{a} + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{x}\\ &= \mathbf{x}\cos\theta + (1-\cos\theta)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a} + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{x},\end{aligned}$$

但是 $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a} - \mathbf{x}$. 所以得证。

现在对 $\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)$ 中的 θ 求 $\theta = 0$ 处的导数即可得到其 Lie 代数

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mathbf{x} = \mathbf{a}\times\mathbf{x}$$

选 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$，得到 Lie 代数的三个基为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \eta_2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \eta_3 = \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

8 Orbital Geometry of the Adjoint Action

上面看过了 Lie 代数的伴随表示，现在来看看 Lie 群的伴随作用，其中担任有趣的角色的就是极大交换子群，类似于 Cartan 子代数是极大交换子代数。

由于我们考虑是紧 Lie 群 G，那么我们总可以得到他的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上伴随作用下不变的内积，因此我们就可以定义 $\mathfrak{g}$ 上面的一组正交基，选定正交基之后我们拓展到对应的左不变矢量场上，我们就得到了一个标架场，也就是确定了 G 上唯一的 Riemann 结构使得那些左不变矢量场在每一个点都相互正交。

这样定义的 Riemann 结构，由于标架场是左不变矢量场，所以左平移 $(l_a)_*$ 是等距同构，而伴随作用因为我们定义的内积也是等距同构，那么右平移作为左平移和伴随作用的复合，也是等距同构。

伴随作用的轨道确定了 Lie 群的共轭类，而又因为伴随作用是等距同构，这就是说共轭类在几何结构上大致是相同的。这节中重要的定理即明确了这个事实。

Definition 67. *一个紧 Lie 群的环子群是一个紧的连通交换 Lie 子群。一个极大环子群就是说这个环子群不能真包含在其他的环子群里面。*

$\mathrm{SO}(2)$ 是 $\mathrm{SO}(3)$ 的极大环子群,$\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2)$ 是 $\mathrm{SO}(4)$ 的极大环子群,环面 $\mathrm{T}^n = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}) : 0\le\theta_i<2\pi\}$ 是 $U(n)$ 的极大环子群。由于 $\mathrm{SO}(2)$ 同构于环 S^1，而 T^n 同构于 $\mathrm{S}^1\times\cdots\times\mathrm{S}^1$，所以环子群的名字是十分形象的。

Proposition 68. *令 T 是 G 的环子群以及 $F(T,\mathfrak{g})$ 或 $F(T,G)$ 是 T 在 $\mathfrak{g}$ 或者 G 上的伴随作用的不动点集，那么 T 是极大环子群当且仅当 $\dim F(T,\mathfrak{g}) = \dim T$ 或者 $F(T,G)$ 包含 T 作为其中之一的连通分支。*

让 $\mathfrak{t}$ 是 T 的 Lie 代数，那么每一个 $t \in T$ 都满足 $\mathrm{Ad}_t \mathfrak{t} = \mathfrak{t}$，这是 Abel 群的自然结果，所以

$$\mathfrak{t} \subset F(T, \mathfrak{g}).$$

如果 T 不是极大的，那么存在一个 T_1 使得 $T \subset T_1$，且他的 Lie 代数满足 $\mathfrak{t}_1 \subset F(T_1, \mathfrak{g})$. 所以

$$\dim T = \dim \mathfrak{t} < \dim \mathfrak{t}_1 \leq \dim F(T, \mathfrak{g}).$$

反过来，如果 $\dim F(T, \mathfrak{g}) > \dim T$，那么存在 $X \in F(T, \mathfrak{g}) - \mathfrak{t}$ 使得分布 $\{X, \mathfrak{t}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Lie 子代数，且上面的交换子都为 0。于是存在一个 Abel 子群 H 其 Lie 代数为 $\{X, \mathfrak{t}\}$，我们现在考虑 H 的闭包，他是一个紧集中的闭集，所以也是紧的（Hausdorff 性是流形保证的），所以他是一个真包含 T 的环子群，这和 T 是极大环子群相悖。

至于剩下的关于 Lie 群的结论，显然来自于其 Lie 代数和 Lie 群的联系。

下面这个定理就是这节的主要内容。

Theorem 69. *Cartan*: *令 T 是紧 Lie 群 G 的极大环子群，那么每个 $g \in G$ 共轭于某个 T 的元素。*

因此所有的极大环子群都是相互共轭的。

令 φ 是 Lie 群 G 的伴随表示在 T 上的限制 $\varphi = \mathrm{Ad}|_T$，且 $\mathfrak{t}$ 是 T 的 Lie 代数。因为 T 是极大环子群，所以从上一个命题可以推知 $F(T, \mathfrak{g}) = \mathfrak{t}$，注意到极大环子群是 Abel 群，所以他的每一个复的不可约有限维表示都是一维的，则实的不可约有限维表示都是二维的，因此

$$\varphi = \dim \mathfrak{t} \cdot 1 \oplus \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_l.$$

其中 1 表示为一维平凡表示，φ_i 是一维非平凡不可约表示，由于 φ_i 都可以表示为一个幺正表示，也即 $e^{i\theta}$，那么 φ_i 也可以看成一个非平凡的从 T 到 $\mathrm{SO}(2)$ 的群同态，那么 φ_i 的核是余维度为 1 的闭 Lie 子群，他们的并 $\cup \ker(\varphi_i)$ 的补集是 T 的一个开子流形，我们记做 W.

令 $t_0 \in W$，则每一个 $\varphi_i(t_0)$ 都是一个不平凡的旋转，因此 $F(\varphi(t_0), \mathfrak{g}) = \mathfrak{t}$，令 $G_{t_0} = \{g \in G : g t_0 g^{-1} = t_0\}$ 是 t_0 的中心化子，以及 e^{sX} 是 G_{t_0} 的任意的单参子群，于是

$$e^{sX} = t_0 e^{sX} t_0^{-1} = e^{s\mathrm{Ad}(t_0)X}$$

对任意的 $s \in \mathbb{R}$ 都成立，于是 $X \in F(\varphi(t_0), \mathfrak{g}) = \mathfrak{t}$. 所以 G_{t_0} 的 Lie 代数就是 $\mathfrak{t}$，那么他带单位元的连通分支就是 T，因此 $\dim G(t_0) = \dim G - \dim G_{t_0} = \dim G - \dim T$，其中 $G(t_0)$ 是 t_0 的共轭作用的轨道，或者说是 t_0 的共轭类。我们下面要证明 $G(t_0)$ 是 T 在 t_0 处的正交补。

注意到两个 $t_0, t \in T$ 是可交换的，因此 $\sigma_t : x \mapsto t x t^{-1}$ 和 l_{t_0} 对任意的 $x \in G$ 都是可以交换的。因此 $(l_{t_0})_*$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $T_{t_0}G$ 对于伴随作用等价的映射，即 $(l_{t_0})_*(\sigma_t)_* = (\sigma_t)_*(l_{t_0})_*$, 这样 $(l_{t_0})_*$ 就类似一个缠结映射。

因为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^{\perp},$$

所以有

$$\varphi|_{\mathfrak{t}} = \dim \mathfrak{t} \cdot 1, \quad \varphi|_{\mathfrak{t}^{\perp}} = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_l.$$

因为 $(l_{t_0})_*\mathfrak{t}$ 就是 T 在 t_0 处的切空间，为了证明 $G(t_0)$ 在 t_0 处的切空间就是 T 在 t_0 处的切空间的正交补，我们可以去证明 T 的伴随作用诱导在切空间上的作用不包含任意固定的方向。

Proposition 70. *令 H 是 G 的紧 Lie 子群，他们的 Lie 代数分别为 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$，则 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^{\perp}$。那么在 G/H 基点处的切空间 $T_0(G/H)$ 诱导的 H 作用等价于 H 的伴随作用在 $\mathfrak{h}^{\perp}$ 上的限制。*

设 $p(x)=xH\in G/H$ 是正则投影，那么

$$p\circ\sigma_h(x)=p(hxh^{-1})=hxh^{-1}\cdot H=hx\cdot H=l_h(x\cdot H)=l_h\circ p(x),$$

对所有 $h\in H$ 都成立。那么

$$p_{*e}:\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^{\perp}\to T_0(G/H)$$

是 $\mathfrak{h}^{\perp}$ 和 $T_0(G/H)$（作为 H-线性空间）间的一个同构映射。

注意到作为群作用的共轭类，该作用的轨道就是共轭类，而给定元素的定点子群就是该元素的中心化子。所以 t_0 的轨道就是 G 和 t_0 的中心化子的商群，即 $G(t_0)=G/G_{t_0}$，那么我们就得到了 $\mathfrak{t}^{\perp}$ 和 $T_0(G/G_{t_0})$ 之间的同构，而这和 $(l_{t_0})_*\mathfrak{t}$ 的正交是显然的。

Theorem 71. *G 上的两个有限维表示 ψ_1,ψ_2 是等价的，当且仅当他们在极大环子群上的限制是等价的。*

ψ_1,ψ_2 等价和 $\chi_{\psi_1}=\chi_{\psi_2}$ 是一个意思，那么因为每一个 $g\in G$ 都共轭于某个 T 的元素，而共轭对迹没影响，所以 $\chi_{\psi_1}=\chi_{\psi_2}$ 和 $\chi_{\psi_1}|_T=\chi_{\psi_2}|_T$ 是一个意思，而 $\chi_{\psi_1}|_T=\chi_{\psi_2}|_T$ 又和 $\psi_1|_T,\psi_2|_T$ 等价是一个意思，所以 ψ_1,ψ_2 等价和 $\psi_1|_T,\psi_2|_T$ 等价是一个意思。

注意到极大环子群是 Abel 群，所以他的有限维不可约表示都是一维的，而紧 Lie 群保证了完全可约性，那么我们只要确定了这些一维不可约表示，也就确定了整个 Lie 群上面的表示。

Definition 72. *群 $W(G)=N_G(T)/T$ 被称为 G 的 Weyl 群，其中 $N_G(T)$ 是 T 的正规化子，就是说是所有和 T 可交换的元素构成的群。*