Manifold

by Buwai Lee@Shanghai Nanyang Model High School

August 2, 2016

Just for fun

Table of Contents

Chapter 1

Calculus

1.1 Foundation

(1.1.1) 一个局部 n 维欧几里得空间是一个 Hausdorff 空间 M 满足，对每一个点 $p \in M$，存在一个 p 的邻域 $U \underset{\text{open}}{\subset} M$ 和一个同胚 $\varphi : U \to V$, 其中 V 是一个 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。这个同胚有时候被称为一个坐标、坐标映射等，而资料 (U, φ) 被称为一个坐标卡。坐标 φ 经常写成分量形式，$\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$，其中 $x^i : U \to \mathbb{R}$.

一个局部 n 维欧几里得空间是局部紧的，这是因为他局部同胚于欧式空间, 而欧式空间是局部紧的。

(1.1.2) 局部欧几里得空间 M 上的一个光滑微分结构 $\mathscr{F}$ 是这样一族坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，满足：$\{U_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖，$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ 是光滑映射，后者被称为坐标卡的相容性条件。此外，如果有一个坐标卡 (U, φ) 和每一个坐标卡都相容，那么可以推断出他在 $\mathscr{F}$ 中，这样的微分结构被称为极大微分结构。极大微分结构当然不一定是唯一的，不过我们不担心这个，因为我们往往是固定一个微分结构来研究流形的，下面假设出现的微分结构总是极大的。

(1.1.3) 一个 n 维光滑流形 (smooth manifold)$(M, \mathscr{F})$ 是一个赋予我们想要做一个范畴，现在已经有了对象，那么自然需要态射，态射被如下定义：

(1.1.4) 设 $(M, \mathscr{F})$ 和 $(N, \mathscr{G})$ 是两个光滑流形，连续函数 $f : M \to N$ 被称为一个光滑映射，如果 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是一个光滑函数对任意的 $\mathscr{F}$ 中的坐标卡 (U, φ) 和 $\mathscr{G}$ 中的坐标卡 (V, ψ) 成立。

这样，光滑流形就构成了一个范畴，其中态射是流形间的光滑映射。他是拓扑空间范畴的子范畴。

从此以后，我们对一个固定的流形 $(M, \mathscr{F})$，常常会略去他的微分结构，只写作 M。对于一个光滑流形 M 的非空开子集 U，显然，他有继承自 M 的一个拓扑结构和微分结构，所以 U 也是一个光滑流形。很容易看到，$\mathbb{R}^n$ 是一个光滑流形，按照上面的结论，我们可以得到一类光滑流形，$\mathbb{R}^n$ 的开子集。比如把 $n \times n$ 矩阵放入 $\mathbb{R}^{n^2}$ 内，那么行列式不为零的那些矩阵就构成一个光滑流形，记作 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，称作一般线性群。

特别地，$\mathbb{R}$ 也是一个光滑流形。我们称光滑映射 $f : M \to \mathbb{R}$ 是一个 M 上的光滑函数。光滑函数 f 限制在 $U \underset{\text{open}}{\subset} M$ 上也是一个光滑函数 $f|_U$.

(1.1.5) 设 M 是一个光滑流形，$U \underset{\text{open}}{\subset} M$ 上的光滑函数的集合记作 $\mathcal{F}(U)$，$\mathcal{F}$ 被称为 M 上的光滑函数层。由于可以逐点定义加法和乘法，所以 $\mathcal{F}(U)$ 拥有 $\mathbb{R}$-代数结构。设 $p \in M$，我们定义如下等价关系：设 U 和 V 都是 p 的邻域，以及 $f \in \mathcal{F}(U)$ 和 $g \in \mathcal{F}(V)$，如果在一个 $W \underset{\text{open}}{\subset} U \cap V$ 上，$f|_W = g|_W$，则 $f \sim g$. 所有这样的等价类记作 $\mathcal{F}_p$，称为 p 处的光滑函数茎，他的代表元素可以写成 $f_p = \langle U, f \rangle$，称为芽

. 显然 $\mathcal{F}_p$ 有继承自 $\mathcal{F}(U)$ 的自然的 $\mathbb{R}$-代数结构。上述过程也可以用 colimit 表示为 $\mathcal{F}_p = \varinjlim_{U\ni p}\mathcal{F}(U)$，其中 p 的邻域以包含形成归纳系。

设 $p\in M$，茎 $\mathcal{F}_p$ 是一个局部环。实际上，$\langle U,f\rangle\in\mathcal{F}_p$ 且 $f(p)=0$ 的元素构成了 $\mathcal{F}_p$ 的一个理想。不在这个理想内的 $\langle U,f\rangle$，由于 $f(p)\neq 0$，那么适当缩小 U 到 V，由 f 的连续性，总可以找到 V 使得 $f|_V$ 处处不为零，这样 $\langle V,1/f|_V\rangle$ 便是 $\langle U,f\rangle$ 的一个逆。因此上面这个理想即 $\mathcal{F}_p$ 唯一的极大理想，我们其记作 $\mathfrak{m}_p$。容易看到 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p\cong\mathbb{R}$，实际上，对每一个芽 $f_p\in\mathcal{F}_p$，都成立 $f_p=f_p-f(p)+f(p)$，在 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$ 中看，他和 $f(p)\in\mathbb{R}$ 也就没区别了。

Lemma (1.1.6) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 光滑，则

$$f(x)=f(0)+\partial_i f(0)x^i+\frac{1}{2}g_{ij}(x)x^ix^j,$$

其中 g_{ij} 光滑。

Proof: 利用微积分基本定理

$$f(x)-f(0)=\int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t=\int_0^1\partial_i f(tx)x^i\mathrm{d}t=h_i(x)x^i,$$

可以得到 $h_i(0)=\partial_i f(0)$，然后再对 h_i 使用上面的步骤即可得到我们想要的表达式。 □

(1.1.7) 使用一个局部坐标 $\varphi=(x^1,\cdots,x^n)$ 且 $\varphi(p)=0$，可以将上面的引理翻译到流形上。设设 $f:U\to\mathbb{R}$ 光滑，则在 p 的一个邻域 V 上对任意的 $q\in V$ 成立

$$f(q)=f(p)+\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(p)x^i(q)+\frac{1}{2}g_{ij}(q)x^i(q)x^j(q),$$

其中 g_{ij} 在 V 上光滑，以后我们就将那个偏微分记作 $\partial_i f(p)$.

(1.1.8) 设 $p\in M$，p 处的茎为 $\mathcal{F}_p$，他的极大理想为 $\mathfrak{m}_p$，此时 p 处的余切空间被定义为自然的矢量空间 $T_p^*M:=\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$。余切空间的元素被称为余切矢量。

$\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 确实是一个矢量空间。首先它显然是一个 $\mathcal{F}_p$-模，然后任取 $a\in\mathfrak{m}_p$，由于 $a\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2=0$，所以 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 是一个 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$-模，即 $\mathbb{R}$-矢量空间。这样定义的余切空间，可以看到，是所有的那些一阶小量构成的集合，即其中的元素为“微分”。

(1.1.9) 设 $p\in M$，M 是一个 n 维流形，则 $T_p^*M:=\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 是 n 维的。

我们可以选取一组局部坐标来算维数，由于选取不同的局部坐标都是通过同胚联系的，所以不同的选取对维数没什么影响。由上面的引理，设 $f_p\in\mathfrak{m}_p$，则他可以写作

$$f_p=\partial_i f(p)x_p^i+\frac{1}{2}g_{ij}(q)x_p^ix_p^j$$

考虑一个局部坐标 $\varphi=(x^1,\cdots,x^n)$，设自然同态 $\mathrm{d}_p:\mathfrak{m}_p\to\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$，很简单就可以看到 $\mathrm{d}_p(x_p^i)\neq 0$. 实际上，如果 $x_p^i\in\mathfrak{m}_p^2$，那么 $x_p^i=rs$，其中 $r,s\in\mathfrak{m}_p$，然后根据上面的引理 $r=a_ix_p^i+\cdots$ 以及 $s=b_ix_p^i+\cdots$，于是 $x^i=rs=a_jb_kx_p^jx_p^k+\cdots$，但显然这是不可能的。

所以，如果 $f_p\in\mathfrak{m}_p$，则

$$\mathrm{d}_p(f_p)=\partial_i f(p)\mathrm{d}_p(x_p^i). \tag{1.1}$$

这样所有的 $T_p^*M=\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 中的元素都可以由 $\mathrm{d}_p(x_p^i)$ 展开，他们都是非零的，而且容易证明是线性无关的，所以这是 T_p^*M 的一组基，余切空间的维数计算完毕。

以后我们用 $\mathrm{d}_p(f)$ 乃至 d_pf 来记 $\mathrm{d}_p(f_p)$。实际上，我们可以将 d_p 定义在 $\mathcal{F}_p$ 上，设 a 是一个常值芽，补充定义 $\mathrm{d}_pa=0$，可以看到，此时式 (1.1) 依旧满足。以后我们就这样来看 $\mathrm{d}_p:\mathcal{F}_p\to T_p^*M$，他被称为外微分算子。

(1.1.10) 此时

$$\mathrm{d}_p(fg)=\mathrm{d}_p\big(\big(f-f(p)\big)\big(g-g(p)\big)+f(p)\big(g-g(p)\big)+\big(f-f(p)\big)g(p)\big)=f(p)\mathrm{d}_pg+\mathrm{d}_pfg(p).$$

(1.1.11) 设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，上面的光滑函数层分别为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$。任取 $\varphi \in \mathcal{G}(V)$，可以通过 $f^*\varphi = \varphi \circ f$ 定义 $f^*\varphi \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

下面我们考虑两个流形余切空间之间的映射。设 $\langle V, \varphi\rangle \in \mathcal{G}_{f(p)}$，于是 $\langle f^{-1}(V), \varphi \circ f\rangle \in \mathcal{F}_p$，所以 f^* 诱导了一个 $\mathbb{R}$-代数同态 $f_p^*: \mathcal{G}_{f(p)} \to \mathcal{F}_p$，特别地，可以看到 $f_p^*: \mathfrak{m}_{f(p)} \to \mathfrak{m}_p$，于是 $f_p^*: \mathfrak{m}_{f(p)}^2 \to \mathfrak{m}_p^2$.

(1.1.12) 设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，他诱导了一个线性映射[1] $f_p^*: T_{f(p)}^*N \to T_p^*M$.

(1.1.13) 对于复合，显然 $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$，以及在一点处，$(f \circ g)_p^* = g_p^* \circ f_{g(p)}^*$. 很容易看到 $\mathrm{id}_p^* = \mathrm{id}_{T_p^*M}$，所以如果 $f: M \to N$ 是同胚，则 $f_p^*: T_{f(p)}^*N \to T_p^*M$ 是同构。

(1.1.14) 利用复合公式，设 $f: M \to N$ 是光滑映射，则 $f_p^*\big(\mathrm{d}_{f(p)}g\big) = \mathrm{d}_p(f^*g) = \mathrm{d}_p(g \circ f)$.

(1.1.15) 设 $p \in M$，M 是 n 维光滑流形，则*切空间* T_pM 被定义为余切空间 T_p^*M 的对偶空间。切空间的元素被称为*切矢量*。由于余切空间是有限维的，他的对偶空间也和他有着相同的维度，即 n 维。

(1.1.16) 由于切空间是余切空间的对偶空间，所以他是余切空间上的线性函数构成的空间，反过来，由于是有限维的，所以可以认为对偶空间的对偶空间就是原本的空间，这就是说可以将余切空间的矢量看成切空间矢量的线性函数：设 $\mathrm{d}_pf \in T_p^*M$ 和 $v \in T_pM$，定义 $\mathrm{d}_pf(v) := v(\mathrm{d}_pf)$.

虽然上面这些个定义都很短也很清楚，不过操作上却没有那么简单。下面，我们将一个切矢量扩张到 $\mathcal{F}_p^*$ 上面去。

(1.1.17) 设 f 是在 p 附近的光滑函数，而 $v \in T_pM$，可以通过 $D_v(f_p) := v(f_p - f(p))$ 定义线性映射 $i_p: v \mapsto i_p(v) = D_v \in \mathcal{F}_p^*$，他是一个单射。

注意到 $(fg)_p = f_pg_p$，所以

$$\begin{aligned}
D_v(f_pg_p) &= v(f_pg_p - f(p)g(p)) \\
&= v\big((f_p - f(p))(g_p - g(p)) + f(p)(g_p - g(p)) + (f_p - f(p))g(p)\big) \\
&= f(p)D_v(g_p) + D_v(f_p)g(p),
\end{aligned}$$

我们将满足这条性质的线性映射 $D_v \in \mathcal{F}_p^*$ 称为 p 处的导子，所有 p 处的导子构成的空间暂时记作 V_p，而他其实和 T_pM 是同构的。

为了证明这点，任取导子 $D \in V_p$，由于 $D(1) = D(1 \times 1) = 2D(1)$，所以 $D(1) = 0$，继而靠着 D 的线性性，对于常值函数的芽 a 来说，$D(a) = aD(1) = 0$。因为每一个 $\mathcal{F}_p$ 中的元素 f_p 都可以写成 $f_p - f(p) + f(p)$ 的形式，所以 $D(f_p) = D(f_p - f(p))$，这就是说，一个导子的性质完全由他在 $\mathfrak{m}_p$ 上的值决定，这种关系是一对一的。即 $\pi_p: D \mapsto D|_{\mathfrak{m}_p}$ 是一个线性同构。

同时，设 $f_p, g_p \in \mathfrak{m}_p$，则 $\pi_p(D)(f_pg_p) = f(p)\pi_p(D)(g_p) + g(p)\pi_p(D)(f_p) = 0$，于是 $\pi_p(D)(\mathfrak{m}_p^2) = 0$，所以，$\pi_p(D) \in T_pM$，即 $D|_{\mathfrak{m}_p}$ 是一个切矢量，因此导子 D 完全由一个切矢量 $D|_{\mathfrak{m}_p} = \pi_p(D)$ 决定。这样，$i_p: T_pM \to V_p$ 也是一个满射，所以他是一个同构。当然我们也可以直接计算验证 $\pi_p \circ i_p = \mathrm{id}_{T_pM}$ 以及 $i_p \circ \pi_p = \mathrm{id}_{V_p}$。

因为有这个同构，所以以后我们用 T_pM 来标记导子构成的矢量空间，一个导子才是一个切矢量。这样的好处是，我们在具体计算的时候，可以直接在 $\mathcal{F}_p$ 上进行而非 $\mathfrak{m}_p$ 上，特别地，现在对于一个切向量 v 来说，成立 $\mathrm{d}_pf(v) = v(f_p)$，这是因为对一个导子 v 来说 $v(f_p) = v(\mathrm{d}_pf)$.

(1.1.18) 设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，定义它在 $p \in M$ 处的导数为 $T_pf = f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$ 使得对任意的 $v \in T_pM$ 和任意的 $g_{f(p)} \in \mathfrak{m}_{f(p)}$ 成立 $(f_{*p}v)(g_{f(p)}) = v(f_p^*g_{f(p)})$.

为以后的处理方便，不妨通过等同 ∂_i 和标准基 e_i 来等同 $T_p\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$。此外，通过坐标卡上的同胚 φ，我们用 ∂_i 来标记 $\varphi_{*p}^{-1}(e_i)$，这显然是 T_pM 处的一组基。

(1.1.19) 设 f 是在 p 附近的光滑函数，任取 $v \in T_pM$. 因为 $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$，所以 $f_{*p}(v)$

[1] 这里我们滥用一下记号。

是一个数，故而

$$f_{*p}(v) = f_{*p}(v)(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = v\big((\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f)_p\big) = v(f_p) = \mathrm{d}_p f(v).$$

因为对所有的切矢量 v 都成立上式，所以 $f_{*p} = \mathrm{d}_p f$.

选定一个局部坐标，因为 $\mathrm{d}_p x^i(\partial_j) = \partial_j x^i(p) = \delta^i_j$，所以 $\mathrm{d}_p x^i$ 就是 ∂_i 的对偶基。下面我们来计算一个特别的例子，设 $f : M \to \mathbb{R}^n$ 是一个流形 M 上的矢量值光滑函数，则 $f^i : M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，那么 $f_{*p} = \mathrm{d}_p f^i e_i$，其中 e_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。再设 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，则 $\mathrm{d}_p f^i = \partial_j f^i(p)\mathrm{d}x^j = \partial_j f^i(p)e^j$. 写成矩阵即

$$(f_{*p})^i{}_j = \partial_j f^i(p),$$

此即 f 的 Jacobian.

(1.1.20) 复合函数求导法则：$(f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}$. 抽象表现出来是线性映射复合，表现在矩阵（即 Jacobian）上就是两个矩阵相乘。

(1.1.21) 设 U 上光滑曲线 $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$，在时间为零的时候经过点 p，即 $\sigma(0) = p$，于是 $\sigma_{*0} = \dot\sigma(0) \in T_pM$. 局部来说，他可以写作

$$\dot\sigma(0) = \frac{\mathrm{d}x^i \circ \sigma}{\mathrm{d}t}(0)\partial_i = \dot\sigma^i(0)\partial_i,$$

当他作用在一个光滑函数上时，写作

$$\dot\sigma(0)(f) = \dot\sigma^i(0)\partial_i f(p).$$

对于固定的 f，$\dot\sigma(0)(f)$ 可以看做 f 沿着 σ 在点 p 切矢量的方向导数，实际上，在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们通常将上式写作 $\dot\sigma(0)(f) = v \cdot \nabla f$，其中 $v = \dot\sigma^i(0)e_i$.

(1.1.22) 反过来，给定一个点 p 处的切矢量 v，我们可以找到一个光滑曲线 σ 使得在他点 p 的切矢量就是 v。这是局部结论，在欧式空间里去证明就可以了。在欧式空间中，$\sigma(t) = p + vt$ 就是我们需要的光滑曲线。

(1.1.23) 由于 $v(f_p)$ 可以看做 f 沿着 v 方向在 p 点的方向导数，以及等式 $\mathrm{d}_p f(v) = v(f_p)$，所以 $\mathrm{d}_p f(v)$ 也理解为 f 沿着 v 方向在 p 点的方向导数。

(1.1.24) 正如我们前面提到的，切矢量的几何直观可以靠曲线的切矢量来想象，那么余切矢量呢？为了做出适当的想象，不妨回到欧式空间里面，固定一个切矢量，方向导数 $\mathrm{d}_p f(v)$ 可以写作 $v \cdot \nabla f(p)$，所以（在欧式空间的内积结构下）我们可以认为 $\mathrm{d}_p f$ 就是 $\nabla f(p)$。现在改变 p，我们得到了一个矢量场 ∇f，这是 $\{f = \mathrm{const}\}$ 确定的等能面的法矢量场，法矢量场和等能面一一联系。所以为了避免引入内积结构，我们可以认为 $\mathrm{d}_p f$ 就是局部的一族等能面。

1.2 Submanifold

(1.2.1) 设 $\varphi : M \to N$ 是一个光滑映射，(a). 称 φ 是一个浸入，如果 φ_{*p} 处处非退化。(b). 称 (M, φ) 是一个子流形，如果 φ 是单的。不是所有浸入都是子流形，比如圆周的参数表示 $(\cos t, \sin t)$ 是一个浸入，但不是单的。

显然，对于光滑流形的一个开子集，他可以继承大流形的流形结构而形成一个新的流形，他是一个子流形，被称为开子流形。

后面我们经常会说“设流形 M 上有某某”这样的话，但一般来说，某某在流形上的整体存在性是很难保证的，往往他只是局部存在，即可以在流形 M 的某个开集上存在。但是注意到 M 的开集现在也有

流形结构，即开子流形结构，于是我们的命题就可以在这个新的流形上正常工作了。所以经常为了方便，对于不少命题的陈述，我们会把对象直接定义到整个流形上。

(1.2.2) 设 $\varphi : M \to N$，如果 M 微分同胚于 N 的开子流形 $\varphi(M)$，则称子流形 (M, φ) 是一个嵌入。

浸入子流形不一定是嵌入子流形，比如秩为 1 的单的光滑曲线 $f(t) = ((t^3+t)/(t^4+1), (t^3-t)/(t^4+1))$，在 $\mathbb{R}^2$ 中他的图像看起来是可以有自交点的。

(1.2.3) 设 U 是 M 的一个子集，但 U 本身有一个流形的结构，如果此时 $i : U \hookrightarrow M$ 是一个嵌入，则称 U 是 M 的一个正则子流形。

所谓的正则子流形就是说，它本身的流形结构和从大的流形那里继承来的流形结构是相同的的。

(1.2.4) 设 M 和 N 是光滑流形，$f : M \to N$ 是一个单浸入。我们可以赋予 $f(M)$ 一个微分结构通过把 $f : M \to f(M)$ 做成一个微分同胚。此时，$f(M)$ 是 N 的正则子流形当且仅当 f 是一个嵌入。

(1.2.5) 反函数定理：设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，映射 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 光滑，如果 Jacobian 在 p 处非奇异，即 f_{*p} 可逆，则存在 p 的一个邻域 $V \underset{\text{open}}{\subset} U$，使得 $f|_V : V \to f(V)$ 是一个（光滑）同胚。

证明见微积分教材，常见的证明有比如压缩映像定理。该定理说明，如果函数局部线性化后性质不错，那么在那点附近性质也不错。由于是局部性质，所以可以直接翻译到流形上没什么改变。

Theorem (1.2.6) 流形上的反函数定理：设 M 和 N 的维度相同，映射 $f : M \to N$ 光滑，如果 f_{*p} 可逆，则存在 p 的一个邻域 U，使得 $f|_U : U \to f(U) \subset N$ 是一个（光滑）同胚。换句话说，浸入局部是嵌入。

(1.2.7) 称一族 M 上的光滑函数 $\{f_i\}_{1\le i\le n}$ 在点 p 相互无关，即指 $\{\mathrm{d}_p(f_i) = (f_i)_{*p} \in T_p^*M : 1 \le i \le n\}$ 们线性无关。

如果 $\{f_i\}_{1\le i\le n}$ 相互无关，则函数 $f = (f_1, \cdots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ 在点 p 上的导数 f_{*p} 可逆，所以按照反函数定理，可以在 p 附近找一个领域，使得 $f|_V$ 是一个 V 到 $\mathbb{R}^n$ 中开集的同胚，这样 $(V, f|_V)$ 就是一张坐标卡。如果 $\{f_i\}$ 个数不到 n，那么补几个进去，照样可以找到一张坐标卡，其中前几个分量是 $\{f_i\}$.

Lemma (1.2.8) 设 $f_* : V \to W$ 是一个有限维矢量空间间的线性映射以及他的对偶映射是 $f^* : W^* \to V^*$，则 $\mathrm{rank}(f_*) = \mathrm{rank}(f^*)$. 特别地，当 f_* 是单（满）的时候，f^* 是满（单）的。

(1.2.9) 设 $\varphi : M \to N$ 光滑，且 φ_{*p} 是单射。令 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\varphi(p)$ 附近的一个坐标，那么 $x_i \circ \varphi$ 是 p 附近的一个坐标。特别地，φ 在 p 附近是一个单射。如果 φ_{*p} 是满射，则 $x_i \circ \varphi$ 是 p 附近的一个坐标中的一部分。

若 φ_{*p} 是单射，他的对偶映射 φ_p^* 就是满射，于是 $\varphi_p^*(x_i)_{*\varphi(p)} = (x_i \circ \varphi)_{*p} = \mathrm{d}_p(x_i \circ \varphi)$ 张成了 T_p^*M，在其中选出一组极大线性无关组（不妨设为前 m 个），这就构成了 p 附近的一组坐标。而 $(x_1, \cdots, x_m) \circ \varphi$ 局部是同胚，所以 φ 局部是单射。

若 φ_{*p} 是满射，他的对偶映射 φ_p^* 就是单射，于是 $\varphi_p^* \mathrm{d}_{\varphi(p)} x_i = \mathrm{d}_p(x_i \circ \varphi)$ 相互独立，一般来说，他数量不够构成坐标，但是却可以构成坐标中的一部分。

(1.2.10) 设 $f : M \to N$ 是一个光滑映射，则 $\mathrm{rank}_p f$ 被定义为 $\mathrm{rank}_p f_{*p}$. 取 p 和 $f(p)$ 附近的坐标 φ 和 ψ 且使得 $\varphi(p) = 0$，则 f 在点 p 的秩就是 Jacobian 矩阵 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{*0}$ 的秩。

选取 $f(p)$ 附近的坐标 ψ，则 $\psi \circ f : M \to \mathbb{R}^n$，不妨将其写作 $(f_1, \cdots, f_n)$，则 $\mathrm{rank}_p f$ 就是 $\mathrm{d}_p f_1, \cdots, \mathrm{d}_p f_n$ 张成的线性空间的维度。实际上，因为这是局部结果，所以可以假设 $N = \mathbb{R}^n$，此时 $f_{*p} = (\mathrm{d}_p f_1, \cdots, \mathrm{d}_p f_n)$。

Theorem (1.2.11) 设 M 是一个 m 维流形且 $f : M \to N$ 是一个光滑映射，如果存在常数 l 使得 $\mathrm{rank}_p f$ 处处等于 l，那么对于 $q \in N$，$f^{-1}(q)$ 要么是空集，要么是 M 的一个正则子流形，维度为 $m - l$。

这个定理我们就不证明了。特别当 $N = \mathbb{R}$ 的时候，f 如果是一个秩处处为 1 的光滑函数（即 $\mathrm{d}_p f$ 处处不为零），则 $f^{-1}(a)$ 或者是一个空集，或者是一个 $m-1$ 维正则子流形。这就是所谓的等能面，或等势面。

1.3 Vector Field

和我们以前的直观一样，所谓的矢量场 (vector field) 就是每一点赋予一个矢量。

(1.3.1) 设 $U \underset{\text{open}}{\subset} M$，$U$ 上的映射 $X : p \mapsto X(p) \in T_pM$ 被称为 U 上的（切）矢量场。因为在 U 的每一个局部 V（至少一个坐标卡内），矢量场 X 都可以写作 $X = X^i\partial_i$，其中 X^i 是 V 上的实值函数，而 ∂_i 在不同的点分属不同的切空间。如果 $\{X^i\}$ 在点 p 是光滑函数，则称 X 在 p 处光滑。如果 X 在 U 处处光滑，则称 X 是 U 上的一个光滑矢量场。

对矢量场而言，他可以作用在光滑函数上得到一个函数，在局部的作用效果即 $Xf = X^i\partial_i f$. 显然，如果 X 是要给光滑矢量场，则 Xf 是一个光滑函数。反过来，如果 $X^i\partial_i f$ 对任意的光滑函数都光滑，则 X^i 自然也是光滑的，所以有下面一个结论。

(1.3.2) 设 X 是一个 U 上的矢量场，如果 Xf 对任意的光滑函数 f 也是光滑的，那么 X 是一个光滑矢量场。这个命题可以看作矢量场光滑性的一个坐标无关的定义。

(1.3.3) 设 $f : M \to N$ 是一个光滑单射，而 X 是 M 上的一个光滑矢量场，则 $f_*X : p \mapsto f_{*f^{-1}(p)}X_{f^{-1}(p)}$ 是 N 上的一个矢量场。因为 $(f_*X)g = X(g \circ f)$ 成立，所以这也是一个光滑矢量场。

下面我们用（光滑）纤维丛的语言来抽象地定义场。

(1.3.4) 设 E, B, F 是三个光滑流形，$\pi : E \to B$ 是一个光滑映射，若在每一点 $p \in B$，都存在一个邻域 U 和光滑同胚 φ 使得 $\pi^{-1}(U)$ 同胚于 $U \times F$，且如下交换图成立。则称 (E, B, π, F) 是一个以 B 为底，以 F 为纤维的纤维丛 (fiber bundle)。

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

一般称呼 $B \times F$ 为平凡丛。如果 F 是一个矢量空间，则 (E, B, π, F) 被称为一个矢量丛。显然，$\mathcal{F}(M)$ 是以 M 为底 $\mathbb{R}$ 为纤维的纤维丛。

(1.3.5) 设 (E, B, π, F) 是一个纤维丛，设 $U \subset B$ 是一个开集，则 U 上的光滑截面 (section) 定义为一个光滑映射 $s : B \to E$ 满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_U.E$ 上所有截面的集合通常记做 $\Gamma(E)$.

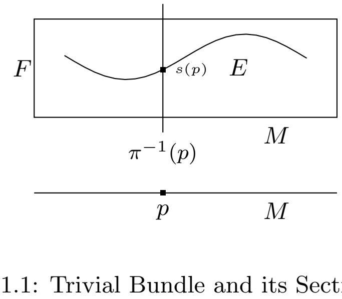

图 1.1: Trivial Bundle and its Section

一个纤维丛不一定有整体截面，但是一定有局部截面，因为纤维丛在局部都是平凡丛，而平反丛一定有截面，比如常值截面 $s(x) = a \in F$。对于一个纤维丛，直观来看，就是在底流形 B 每一点 p，都放一个 $\pi^{-1}(p) \cong F$，而所谓的截面，就是在每一点 p，都选定 $\pi^{-1}(p) \cong F$ 中的一个元素，这其实也就是矢量场的基本想法。

反过来，如果给定了每一点的纤维，则我们有可能拼出一个纤维丛。切丛和余切丛正是如此定义的。

(1.3.6) 流形 M 的切丛 (tangent bundle) TM 被在集合上被定义为

$$TM = \coprod_{x\in M} T_xM = \bigcup_{x\in M}\{x\}\times T_xM = \bigcup_{x\in M}\{(x,y)|\ y\in T_xM\}.$$

余切丛 (cotangent bundle)T^*M 在集合上被被定义为

$$T^*M = \coprod_{x\in M} T_x^*M = \bigcup_{x\in M}\{x\}\times T_x^*M = \bigcup_{x\in M}\{(x,y)|\ y\in T_x^*M\}.$$

(1.3.7) 来看切丛，M 显然是底流形，而 π 也可以显然地通过把 $(p,v)\in TM$ 映射到 $p\in M$ 来定义。剩下的，我们要赋予 TM 一个光滑流形结构，然后检验是否满足纤维丛的定义。

为此，对于 $p\in M$，找一个坐标卡 (U,φ)，在这张卡内，T_qM 通过 φ_{*q} 同构于 $\mathbb{R}^n$，我们这样选取 $\pi^{-1}(U)$ 上的微分结构，使得他通过 $\mathrm{id}_U\times\varphi_*$ 光滑同胚于 $U\times\mathbb{R}^n$，这样 TM 就有了一个坐标卡 $(\pi^{-1}(U),\varphi\times\varphi_*)$，于是他是一个光滑流形，也是一个以 M 为底，$\mathbb{R}^n$ 为纤维的纤维丛。同样地，T^*M 也是一个纤维丛。

(1.3.8) 所以 U 上的光滑切矢量场就是 TM 的 U 上的一个光滑截面。

光滑切矢量场，局部依赖坐标 (U,φ)，我们有 $\varphi_*(X|_U)$ 在 $\varphi(U)$ 上写作 $Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，那么通过逆映射 φ_*^{-1}，我们就知道 $X|_U$ 局部写作 $X^i\partial_i$ 的形式。

现在我们自然提出反问题，设 $v\in T_pM$ 是在 p 处的一个切矢量，我们是否可以（至少在局部）找到一个切矢量场 X，使得 $X_p=v$.

答案自然是有的，在局部，切矢量写作 $X^i(p)(\partial_i)_p$，我们令 X^i 是常值的，则 $x\mapsto X^i(x)(\partial_i)_x$ 就是一个我们所需的局部切矢量场。

(1.3.9) 设 X 是一个 U 上的光滑矢量场，如果一条光滑曲线 $\sigma:(-\epsilon,\epsilon)\to U$ 且 $\sigma(0)=p$，满足 $X(\sigma(t))=\dot\sigma(t)$，则称 σ 是 X 在 p 附近的一条积分曲线。

将矢量场局部写出来，$X(\sigma(t))=X^i(\sigma(t))\partial_t$，所以问题归结到了求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^i\circ\sigma}{\mathrm{d}t}(t)=X^i(\sigma(t)),$$

他的初值为 $\sigma(0)=p$。微分方程的（光滑）解在局部存在且唯一，所以我们得到了：

(1.3.10) 在 p 附近，对 X 存在唯一的积分曲线 $\sigma:(-\epsilon,\epsilon)\to U$.

Lemma (1.3.11) 设 X 是 U 上的光滑矢量场，如果 $X_p\neq 0$，则存在一个 p 的邻域 V，在 V 上存在一组坐标使得 X 可以写作 ∂_1.

Proof: 完全是局部的结果，我们就在欧式空间里面证明，即找一组新的坐标来把 $X=X^i\partial_i$ 变成 ∂_1'. 此外，如果我们证明了可以写作 $a\partial_1$，那么再令 x' 是 $\partial x^1/\partial x'^1=a$ 的解（这个解积个分就出来了），那么自然就有 $\partial_1'=a\partial_1$.

不妨假设 X^1 在 p 的某个邻域不为零，现在我们来解常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^1}=\frac{X^n(x^1,\cdots,x^n)}{X^1(x^1,\cdots,x^n)},$$

给定初值为 $\{\varphi^i(0;v^2,\cdots,v^n)=v^i:2\le i\le n\}$，我们知道解 $\{x^i=\varphi^i(x^1;v^2,\cdots,v^n)\}_{2\le i\le n}$ 局部存在且光滑依赖于初值 $\{v^2,\cdots,v^n\}$ 以及 x^1，所以我们选取新坐标 $\{v^1,v^2,\cdots,v^n\}$ 使得

$$\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}=\{v^1,\varphi^2(v^1,\cdots,v^n),\cdots,\varphi^n(v^1,\cdots,v^n)\},$$

容易计算他在 $v^1=0$ 处的 Jacobian 行列式 $\det(\partial x/\partial v)=1$，所以这是一个合理的坐标选取。

最后，注意到 $X^i = X^1 \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}x^1 = X^1 \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}v^1$，所以

$$X = X^i \partial_i = X^1 \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}v^1} \frac{\partial}{\partial x^i} = X^1 \partial_1'.$$

□

设 X 是 U 上的光滑矢量场，对 U 上的每一点 p，都可以在 p 附近找到他的一条光滑积分曲线 σ_p，上面的点 $\sigma_p(t)$ 我们也记作 $\sigma_t(p)$，这样我们就得到了一个新的一族映射 $\{\sigma_t : U \to U\}$，当 $t = 0$ 的时候，$\sigma_0 = \mathrm{id}$. 这样的一族映射 $\{\sigma_t\}$ 被称为矢量场 X 的流。如果需要明确是那个矢量场的时候写作 $\{\sigma_t^X\}$. 由微分方程解的唯一性可以发现 $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{s+t}$.

对于一个矢量场，整体流的存在性是不能保证的，比如对 $t = 1$ 的时候，是否对每一个 p 变换 σ_1 都有意义？但是，至少在局部，我们可以保证在一定范围内的参数都是有意义的，对于局部的问题，这个存在性已经基本够使了。

(1.3.12) 光滑流形 M 上的光滑矢量场 X 的支集被定义那些使 X 不为 0 的点集的闭包。如果 X 有紧支集，则 X 的流的参数可以全局定义到 $\mathbb{R}$ 上面去。特别地，如果流形是紧的，则对每一个光滑矢量场都成立。

设支集为 K，找一个他的开覆盖，使得每一个开覆盖内 σ_t 都对某一个小区间 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 上有定义，由于紧，所以可以找到有限的子覆盖，所以在这些子覆盖里面，把最小的 $\epsilon_{\min}$ 挑出来，则在 K 上，对 $t \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$，$\sigma_t$ 都有定义。现在对 $p \notin K$ 定义 $\sigma_t(p) = p$，容易检验 ϵ_t 定义良好且还是光滑映射。最后，对 $t > \epsilon_{\min}$，我们可以从某个 $t_0 \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$ 反复复合 $\sigma_{\epsilon_{\min}/2}$，反之对 $t < -\epsilon$ 亦然。

(1.3.13) 现在我们将积分曲线的问题稍稍拓展一下，比如我们现在有两个矢量场 X 和 Y，他们在每一点张成一个平面，类比于积分曲线，我们要问是否存在一个光滑曲面，使得这个曲面在每一点的切空间都是这俩矢量场张成的平面？

可以直接想象一下怎么处理这样的问题，直观来看，积分曲面可以由积分曲线拼成，即在 p 附近，X 的一条一条积分曲线和 Y 的一条积分曲线编成一张网，这张网其实应该就在积分曲面上。因此积分曲面存在与否当且仅当这张网足够光滑，不能突然错开。此时的错开，就是说，从网格的一个端点处，沿着两条路径走到的终点处于积分曲面的两侧。

为简单见，我们看看这样一个曲边四边形。从 p 出发[2]，沿着 X 的积分曲线走 s，走到了 $\sigma_s^X(p)$，再从这点出发，沿着 Y 的积分曲线走 t，走到 $\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p)$. 同样，从 p 出发，沿着 Y 的积分曲线走 t，走到了 $\sigma_t^Y(p)$，再从这点出发，沿着 X 的积分曲线走 s，走到 $\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p)$。

这样我们就得到了弯曲的四边形，p 是其中一个端点，但是一般来说，沿着两条路径并不会有相同的终点，即 p 的对角线方向的另一端点不存在，此时两条路径并不能闭合成一个弯曲的四边形。甚至，即使积分曲面存在，我们也不能得到一个闭合的四边形（网格），但是，如果沿着两条路径的终点是错开的，则积分曲面依然不存在。

实际上，因为 X 和 Y 的光滑，我们可以适当延长（或缩短）相比 s 和 t 小量的在一条路径上走的时间使得弯曲的四边形变成一个网格（此时局部积分曲面存在），或者，永远是错开的（此时局部积分曲面不存在）。

我们现在需要比较两条路径两个终点的差，在欧式空间里面，我们可以比较这两个点的距离。但是在流形上这样做是不方便的，我们可能连一个很直接的计算两个点距离的手段都没有。为了克服这个困难，我们可以采用“表示”的手段，取一个 U 上的光滑函数 f，比较 $f(\sigma_t^Y \circ \sigma_s^X(p))$ 和 $f(\sigma_s^X \circ \sigma_t^Y(p))$。但光取一个 f 肯定是不够的，取而代之，我们可以取遍 U 上所有的光滑函数，如果我们关于所有的光滑函数

[2]这就意味着我们现在考虑的是局部问题，最后的解也应该被认为是局部的

都计算出了 $f(\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p))-f(\sigma_s^X\circ\sigma_t^Y(p))$（在 s, t 都很小时），那么就可以确认这两个坐标相差很小的程度。所以现在就是要计算在 s, t 都很小时的

$$g(s,t)=f(\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p))-f(\sigma_s^X\circ\sigma_t^Y(p)).$$

因为 g 是光滑函数，我们在 $(0,0)$ 局部展开他，求导就可以得到系数。显然，他到二阶为止的导数都为 0，并且 $\partial_s^2 g(0,0)=\partial_t^2 g(0,0)=0$，所以他最低阶不为零的只可能是 $\partial_s\partial_t g(0,0)$，这就是说，我们要求 $\lim_{s,t\to 0} g(s,t)/st$.

(1.3.14) 在 t 很小的时候，$f(\sigma_t^X p)=f(p)+tXf(p)+o(t^2)$. 为了证明他，只要求 p 处的导数就行了，设 $\sigma^X(t)$ 是 $\sigma^X(0)=p$ 的 X 的积分曲线，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\sigma_t^X p)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\circ\sigma^X(t)=f_{*p}X=Xf(p).$$

所以（暂时在记号上略去高阶项）

$$f(\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p))=f(\sigma_s^X(p))+tYf(\sigma_s^X(p))=f(p)+sXf(p)+tY(\sigma_s^X\circ f(p)),$$

以及

$$g(s,t)=sXf(p)+tY(\sigma_s^X\circ f(p))-tYf(p)-sX(\sigma_t^Y\circ f(p)),$$

其中

$$Y(\sigma_s^X\circ f(p))-Yf(p)=sX(Y(f))(p),$$

所以

$$g(s,t)=st\big(X(Y(f))(p)-Y(X(f))(p)\big),$$

这就是说 $\partial_s\partial_t g(0,0)=X(Y(f))(p)-Y(X(f))(p)$.

(1.3.15) 定义两个矢量场 X, Y 的 Lie 括号为 $[X,Y]$，他满足 $[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$。

如果采用局部表示 $X=X^i\partial_i$ 和 $X=Y^i\partial_j$，则我们可以计算出

$$\begin{aligned}[X,Y](f)&=X^i\partial_i(Y^j\partial_j f)-Y^i\partial_i(X^j\partial_j f)\\&=X^i\partial_i Y^j\partial_j f-Y^i\partial_i X^j\partial_j f\\&=(X^i\partial_i Y^j-Y^i\partial_i X^j)\partial_j f.\end{aligned}$$

因此，尽管形式上是二阶的，但 $[X,Y]$ 还是一个切矢量场，局部写作 $[X,Y]=(X^i\partial_i Y^j-Y^i\partial_i X^j)\partial_j=(X(Y^j)-Y(X^j))\partial_j$. 同时，我们可以将 $[X,Y]_p$ 定义为 $[X_p,Y_p]$，反过来，因为 X_p 和 Y_p 都可以扩张为局部的光滑切矢量场，所以对于任意的切矢量，我们都定义了一个双线性映射 $[*,*]:T_pM\times T_pM\to T_pM$，他也被称为 Lie 括号。

(1.3.16) 设 $X_1,\cdots,X_k$ 是一族 U 上的切矢量场，记

$$D=\big\{f_1X_1+\cdots+f_kX_k:\forall 1\le i\le k,\ f_i\in\mathcal{F}(U)\big\},$$

称他为 U 上的一个由 $\{X_i\}$ 张成的分布。同样，我们也可以考虑一点处的分布，只要将上面的切矢量场改成切矢量，$\mathcal{F}(U)$ 改成 $\mathcal{F}_p$ 即可。

(1.3.17) 设点 p 附近有两个切矢量 X 和 Y 张成一个分布 D，则局部积分曲面存在当且仅当 $[X,Y]\in D$.

如果局部积分曲面存在，那么曲边四边形完全处于积分曲面上面，尽管沿着两条路径得到的终点可能不同，但是这两个点的连线（或者他的切矢量）应该在 $s\to 0$, $t\to 0$ 的时候确定了一个切矢量（由于 X

和 Y 的光滑性，所以这个切矢量并不依赖于连线的选取)，他处于积分曲面的切子空间（由 X_p 和 Y_p 张成）里面，且正比于 $[X,Y]_p$，所以 $[X,Y]_p = a(p)X_p + b(p)Y_p$. 而 a 和 b 的光滑性是显然的。

如果不存在，就是说两个端点分处 X_p 和 Y_p 张成的切子空间两侧，所以两个点的连线确定的那个切矢量应该不在和 X_p 和 Y_p 张成的切子空间里，即 $[X,Y]_p \neq aX_p + bY_p$.

(1.3.18) 问题可以问得更广一点，设 $X_1, \cdots, X_k$ 是一族切矢量场，他们是否（至少在局部）有积分“曲面”存在？回答是 Frobenius 定理：设 $X_1, \cdots, X_k$ 在点 p 附近张成的分布为 D，则局部存在积分“曲面”当且仅当对任意的 i 和 j 成立 $[X_i, X_j] \in D$。

当然，这个结论可以更加形式地证明他，如果不信任上面的直观想法，则可以参看任何一本微分流形的教材，我这里就略去了。

(1.3.19) 令 φ 是流形 M 上的光滑可逆变换，设矢量场 X 的流为 σ_t，则 $\varphi_* X$ 的流为 $\varphi \circ \sigma_t \circ \varphi$.

设在 p 处的切矢量为 X_p，经过 p 的 X 的积分曲线为 $\sigma(t)$，使用变换 φ，变成了 $q = \varphi(p)$，q 处的切矢量 $\varphi_{*p} X_p = (\varphi_* X)_q$ 以及积分曲线 $\varphi(\sigma(t)) = \varphi(\sigma_t q) = \varphi \circ \sigma_t \circ \varphi^{-1}(p)$. 此即结论。

所以，$\varphi_* X = X$ 当且仅当 $\varphi \circ \sigma_t^X = \sigma_t^X \circ \varphi$ 成立。

(1.3.20) 直接的计算，我们有：

$$[X,Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(Y - (\sigma_t^X)_* Y\big).$$

所以，如果 σ_t^X 和 σ_s^Y 可交换，即 $\sigma_t^X \circ \sigma_s^Y = \sigma_s^Y \circ \sigma_t^X$，则 $(\sigma_t^X)_* Y = Y$ 以及 $[X,Y] = 0$.

(1.3.21) 设 $\varphi : M \to N$ 是一个光滑映射，X 和 Y 分布是 M 和 N 上的光滑函数，称他们是 φ 相关的，如果 $\varphi_* X(f) = Y(f) \circ \varphi$ 对任意光滑函数 f 成立。局部来看，$X_p(f \circ \varphi) = Y_{\varphi(p)}(f)$.

若 X_1 与 Y_1 是 φ 相关的，X_2 与 Y_2 是 φ 相关的，则 $[X_1, X_2]$ 和 $[Y_1, Y_2]$ 是 φ 相关的，因为

$$\begin{aligned}
\varphi_*[X_1, X_2](f) &= X_1(X_2(f\circ\varphi)) - [1 \leftrightarrow 2] \\
&= X_1(Y_2(f)\circ\varphi) - [1 \leftrightarrow 2] \\
&= Y_1(Y_2(f))\circ\varphi - [1 \leftrightarrow 2] \\
&= [Y_1, Y_2](f)\circ\varphi.
\end{aligned}$$

因为对于一个同胚而言，$\varphi_*(X)$ 被定义为 $p \mapsto \varphi_{*\varphi^{-1}(p)} X_{\varphi^{-1}(p)}$，或者 $\varphi(p) \mapsto \varphi_{*p} X_p$，这就是说

$$X_p(f) = \varphi_*(X)_{\varphi(p)}(f),$$

因此 X 与 $\varphi_* X$ 是 φ 相关的。

(1.3.22) 令 φ 是 U 上的光滑同胚 $\varphi : U \to \varphi(U)$，$X$ 和 Y 是 U 上的矢量场，则在 U 上 $\varphi_*[X,Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$.

因此，作为局部的同胚，σ_s^X 可以适用

$$(\sigma_s^X)_*[X,Y] = [X, (\sigma_s^X)_* Y] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\sigma_s^X)_* Y - (\sigma_{s+t}^X)_* Y\big) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=s} (\sigma_t^X)_* Y.$$

如果 $[X,Y] = 0$，则 $(\sigma_t^X)_* Y$ 是一个常矢量（局部来看，系数为常数），因此 Y 在 $(\sigma_t^X)_*$ 作用下不变，这就是说 $Y = (\sigma_t^X)_* Y$，于是 σ_t^X 和 σ_s^Y 可交换.

(1.3.23) 综上，$[X,Y] = 0$ 当且仅当 σ_t^X 和 σ_s^Y 可交换。

既然流是可交换的，那么以前我们谈的那个曲边四边形总是可以闭合的，所以这种情况下积分流形局部肯定存在，因为在局部我们可以一块一块曲边四边形拼起来。由于显然的 $[\partial_i, \partial_j] = 0$，如果我们能够选取局部坐标使得一族矢量场 $\{X_i : 1 \leq i \leq k\}$ 变成 $\{\partial_i : 1 \leq i \leq k\}$，则积分曲面存在。那么什么时候

$\{X_i\}$ 是可以变成 $\{\partial_i\}$ 呢？答案前面已经有了，$[X_i, X_j] \in D$，分布 D 由 $\{X_i\}$ 生成。当然，这可以直接证明，所以这也是证明积分曲面存在性的一种思路。

最后给个例子，n 维欧式空间，$\{\partial_i : 1 \le i \le k\}$ 的可能的积分曲面 $\{x_i = c_i : k+1 \le i \le n\}$，其中 c_i 是常数。如果这个积分曲面还是连通的，设 π 是往最后 $n-k$ 个坐标的投影，则 $\pi_* \partial_i = 0$，其中 $1 \le i \le k$，因此 $(\pi \circ i)_* = 0$，其中 i 是积分流形往欧式空间的嵌入，此时由积分流形的连通性，$\pi \circ i$ 是常值映射。此时的积分流形就是上面的 $\{x_i = c_i : k+1 \le i \le n\}$.

1.4 Cotangent Vector Field

(1.4.1) 设 $U \underset{\text{open}}{\subset} M$，$U$ 上的光滑余切矢量场（或者叫做一个 1-形式）是余切丛在 U 上的一个光滑截面。余切矢量场 ω 都可以写作 $\omega = a_i \mathrm{d}x^i$，其中 a_i 是 V 上的实值函数，而 $\mathrm{d}x^i$ 在不同的点分属不同的余切空间。因为是光滑余切矢量场，所以 $\{a_i\}$ 在点 p 是光滑函数。

一个余切矢量场和一个切矢量场之间存在作用 $\omega(X) = X(\omega)$ 可以得到一个光滑函数，具体来说就是在每一点 p，$\omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$.

(1.4.2) 设 f 是 U 上的光滑函数，显然 $\mathrm{d}f$ 是一个 U 上的光滑余切矢量场。记 U 上的光滑函数的集合为 $\Omega^0(U)$，记 U 上的光滑余切矢量场的集合为 $\Omega^1(U)$，则 $\mathrm{d} : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$.

下面我们要把 Frobenius 定理改写成余切矢量场的形式，这就变成了经典的 Pfaff 方程，正是当年关于 Pfaff 方程的研究，Cartran 第一次提出了（高阶）外微分和微分形式的概念（我们现在只谈了一阶的情况），在他那里，1-形式之间的乘法被定义成反对称的。从前一节谈论 Frobenius 定理来看，Pfaff 方程是一个关于积分曲面的问题，所以从这个角度来看，反对称的来由归根结底是为了积分。

(1.4.3) 称一个 1-形式 ω 是完全可积的，如果存在两个光滑函数 f 和 g 使得 $\omega = f\mathrm{d}g$，此时 f 被称为 ω 的积分因子。

1-形式的完全可积性联系着所谓的首次积分问题。设 f 是一个光滑函数且 $\mathrm{d}_p f$ 处处不为零，则 $f(p) = a$（如果解存在）决定了 M 中的一个正则子流形 N_a（有时候叫做一个曲面）。再设 X 是 M 内的光滑矢量场，则 $\mathrm{d}f(X) = 0$ 恒成立当且仅当处处成立 $X_p \in T_p N_{f(p)}$。

实际上，任取一点 $p \in M$，只要检验 $X_p(f) = 0$ 即可，选一条 $N_{f(p)}$ 上的一条光滑曲线 c，使得 $c(0) = p$ 且 $c'(0) = X_p \in T_p N_{f(p)}$，由于 $f(c(t)) = f(p)$ 恒成立，对其在 $t = 0$ 处求导就得到了 $\mathrm{d}_p f(X_p) = X_p(f) = 0$. 反过来，如果在一点处 $X_p \notin T_p N_{f(p)}$，则 $X_p(f) \ne 0$。

固定 f，将所有 $\mathrm{d}f(X) = 0$ 的 X 拿出来，他组成一个 $n-1$ 维的分布，$\{N_a\}$ 就是这个分布的一族积分流形，因为 X 在每一点都完全位于经过那一点的某个 N_a 的切空间内。我们称 $N_a = \{p \in M : f(p) = a\}$ 是 Paffa 方程 $\mathrm{d}f = 0$ 的解。从上面来看，一个 Paffa 方程要有解，那么解应该是一个积分曲面才是，即，Paffa 方程 $\omega = 0$ 的解是使得 $\omega(X) = 0$ 的所有的 X 的积分曲面。

现在假设一个 1-形式 ω 是完全可积的，即他可以写作 $\omega = f\mathrm{d}g$，那么 Paffa 方程 $\omega = 0$ 等价于 $\mathrm{d}g = 0$，这就确定了一个积分曲面。

(1.4.4) 设 ω 是一个 1-形式，记分布 $\ker\omega$ 是由满足 $\omega(X) = 0$ 的所有 X 张成的一个分布。记 $\ker(\omega_1, \cdots, \omega_r) = \cap_{i=1}^r \ker\omega_i$.

(1.4.5) 在局部，对任意一个分布 L，存在一族余切矢量场 $\{\omega_i : 1 \le i \le r\}$ 使得 $L = \ker(\omega_1, \cdots, \omega_r)$.

实际上，一个分布在局部，和他在流形一点处（一个矢量空间内）是很相似的。设 L 是一个分布，由 r 个光滑的切矢量场 $\{X_i : 1 \le i \le r\}$ 张成，则在局部，我们可以找到 $n-r$ 个光滑矢量场 $\{X_i : r+1 \le i \le n\}$，使得 $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ 处处线线性无关。依然在局部，我们可以找到与其对偶[3]的 1-形式 $\{\omega_i : 1 \le i \le n\}$，

[3]即满足 $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$.

那么那些使得 $\omega(X)$ 对 $X \in L$ 成立的 1-形式局部由 $\{\omega_i : r+1 \le i \le n\}$ 张成。因此，局部上，一个分布 L 可以写作 $L = \ker(\omega_{r+1}, \cdots, \omega_n)$，等价地，可以写作一个 Paffa 方程组 $\{\omega_i = 0 : r+1 \le i \le n\}$.

因为局部存在积分曲面的充要条件是任取 $X, Y \in D$ 满足 $[X, Y] \in D$，所以如果 $L = \ker(\omega_{r+1}, \cdots, \omega_n)$ 存在积分曲面，应该有 $\omega_i([X, Y]) = 0$。

(1.4.6) 设 $\omega = f\mathrm{d}g$，其中 f 和 g 是光滑函数，则对一般的光滑矢量场 X, Y 成立。

$$\begin{aligned}\omega([X,Y]) = f\mathrm{d}g([X,Y]) &= f[X,Y](g) \\ &= fX(Y(g)) - fY(X(g)) \\ &= X(fY(g)) - X(f)Y(g) - Y(fX(g)) + Y(f)X(g) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \big(X(f)Y(g) - Y(f)X(g)\big).\end{aligned} \tag{1.2}$$

对于 $X(f)Y(g) - Y(f)X(g)$，我们可以将其改写为 $\mathrm{d}f(X)\mathrm{d}g(Y) - \mathrm{d}g(X)\mathrm{d}f(Y)$，因为这是关于 X 和 Y 的双线性函数，我们可以引入一个张量 $\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g$ 使得 $\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g(X,Y) = \mathrm{d}f(X)\mathrm{d}g(Y)$，则

$$\mathrm{d}f(X)\mathrm{d}g(Y) - \mathrm{d}f(Y)\mathrm{d}g(X) = \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g(X,Y) - \mathrm{d}g \otimes \mathrm{d}f(X,Y) = (\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g - \mathrm{d}g \otimes \mathrm{d}f)(X,Y).$$

记 $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g - \mathrm{d}g \otimes \mathrm{d}f$，其中的 $\wedge$ 被称为楔积，记 $D(f\mathrm{d}g) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g$，则式 (1.2) 变成了

$$D(f\mathrm{d}g)(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

从式子右端来看，$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g(X,Y)$ 并不依赖于 ω 的具体形式 $\omega = f\mathrm{d}g$。实际上，任意一个 1-形式 ω 可以写作 $\omega = \sum_i f_i \mathrm{d}g_i$，所以对于一般的情况，式 (1.2) 应该写作

$$\sum_i D(f_i\mathrm{d}g_i)(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

如果我们把 D 看做线性算子，则对于任意一个 1-形式，我们都定义了一个线性算子，满足

$$D(\omega)(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]). \tag{1.3}$$

(1.4.7) 当然，我们也可以反过来通过式 (1.3) 来定义 $D(\omega)$，顺序在这里不是紧要的。紧要的是，$D(\omega)$ 决定了 $\ker\omega$ 是否容许一个积分曲面。这是因为，如果 $X, Y \in \ker\omega$，则式 (1.3) 变成了

$$D(\omega)(X,Y) = -\omega([X,Y]),$$

所以 $D(\omega)(X,Y) = 0$ 当且仅当 $[X,Y] \in \ker\omega$.

这正是 Cartan 当年提出微分形式时候的处境，那时候，他从 Frobenius 和 Darboux 那里知道了，不同的 Pfaff 形式的等价条件就联系在一个 bilinear covariant 上面，而这个 bilinear covariant 就是我们这里的 $D(\omega)$.

从这个角度来看，正因为有 Frobenius 定理，或者更本质一点，我们需要把积分曲线拼成积分曲面，我们需要考察两个矢量场 X 和 Y 的 Lie 括号 $[X,Y]$，而这个 Lie 括号的反对称性来自于我们比较两条路径。现在，这种反对称性反应在了 1-形式之间的楔积，使得他构成了一个（吃掉两个矢量场的）反对称函数。所以，从 Cartan 这里，反对称性的来源应该是为了处理积分曲面的存在性，而由 $[X,Y]$ 自然诱导出来的。

(1.4.8) 外代数的复习在附录，对于矢量空间 V 的 k-次外代数记做 $\Omega^k(V)$。在流形上的一点 p 处，记 $\Omega^k_p = \Omega^k(T_pM)$，则 $\Omega^1_p = T^*_pM$. 类似切丛和余切丛，我们可以使用 Ω^k_p 拼出一个 k-形式丛 Ω^k。

(1.4.9) 在 U 上的一个光滑 k-形式被定义为 Ω^k 在 U 上的一个光滑截面。所有 U 上的光滑 k-形式的集合记做 $\Gamma(\Omega^k, U)$. 显然，U 上的光滑函数可以看成一个光滑 0-形式，一个光滑余切矢量场是一个光滑 1-

形式。如果 ω 是一个光滑 1-形式，则 $D(\omega)$ 是一个光滑 2-形式。下面我们所称的形式都是光滑的，我们将省略光滑二字。

(1.4.10) 设分布 L 由 $\{X_i : 1 \le i \le r\}$ 张成，且 $L = \ker(\omega_{r+1}, \cdots, \omega_n)$，如果 $D(\omega)(X_i, X_j) = 0$ 成立，则 $D(\omega)$ 可以写作

$$D(\omega) = \sum_{i=r+1}^{n} \psi_i \wedge \omega_i,$$

其中 ψ_i 是一次微分式.

实际上，局部地 $\{\omega_i : 1 \le i \le n\}$ 构成一组基，则

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=r+1}^{n} \psi_i \wedge w_i + \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j,$$

其中 ψ_i 是一次微分式，而 a_{ij} 是光滑函数，且关于指标是反对称的。因为 $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$，所以

$$0 = \mathrm{d}\omega(X_i, X_j) = \sum_{p,q=1}^{r} a_{pq}\omega_p \wedge \omega_q(X_i, X_j) = \sum_{p,q=1}^{r} a_{pq}(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{jp}\delta_{iq}) = 2a_{ij}.$$

(1.4.11) 设分布 L 由 $\{X_i : 1 \le i \le r\}$ 张成，且 $L = \ker(\omega_{r+1}, \cdots, \omega_n)$，则 L 存在积分曲面当且仅当，

$$D(\omega_i) = \sum_{j=r+1}^{n} \psi_{ij} \wedge \omega_i$$

对每一个 i 都成立。

(1.4.12) 特别地，设分布 $L = \ker(\omega)$，则局部积分曲面存在的充分必要条件是 $D(\omega) = \psi \wedge \omega$，再或者 $D(\omega) \wedge \omega = 0$. 则也就是 ω 完全可积的充分必要条件。

(1.4.13) 可以计算得到 $D(\mathrm{d}f) = 0$。实际上，从 (1.3)

$$D(\mathrm{d}f)(X, Y) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) = [X, Y](f) - [X, Y](f) = 0,$$

对任意的矢量场 X, Y 都成立。

1.5 Exterior Derivative

函数 f 的支集 $\mathrm{supp}(f)$ 被定义为 $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$ 的闭包。下面关于单位分解的引理的证明看附录，这里仅摘录定义和引理：

(B.1) 单位分解：设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 M 的一个开覆盖，如果存在可数个光滑函数 $g_i \in (\mathcal{M})$ 满足：

(1) 对于任意的 $x \in M$ 和 $i \in I$，都有 $0 \le g_i(x) \le 1$.

(2) 对每个 g_i，都存在一个 α_i 使得 $\mathrm{supp}(g_i) \subset U_{\alpha_i}$.

(3) 集族 $\{\mathrm{supp}(g_i)\}$ 局部有限，即任取 $p \in M$，存在 p 的邻域 U 使得 U 只和集族 $\{\mathrm{supp}(g_i)\}$ 中的有限个集合相交非空。

(4) 因为上一个性质，所以在一点累加 g_i 时，只有有限项非零。我们最后的要求就是 $\sum_i g_i = 1$.

则称 $\{g_i\}$ 是从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的一个单位分解。

Lemma (B.2) 流形 M 上的每一个开覆盖都存在从属于他的单位分解。

(1.5.1) 设 $V \subset U$，且 $\bar{V} \subset U$，则 $M - \bar{V}$ 和 U 构成 M 的一个开覆盖，我们可以找到 $h, g \in \mathcal{F}(M)$ 使得 $h + g = 1$ 处处成立，且 $h|_{M-U} = 0$ 以及 $g|_{\bar{V}} = 0$，因此 $h|_{\bar{V}} = 1$.

(1.5.2) 在很久很久以前，对 U 上的一个光滑函数 f，我们定义了外微分 d，使得 $\mathrm{d}f$ 是一个 1-形式，而在上一节，我们对 U 上的一个 1-形式 ω，定义了 D 使得 $D(\omega)$ 是一个 2-形式。更一般地，我们希望可

以定义如下一个算符

$$\mathrm{d}_k : \Gamma(\Omega^k, U) \to \Gamma(\Omega^{k+1}, U),$$

使得 $\mathrm{d}_0 = \mathrm{d}$，$\mathrm{d}_1 = D$。我们将 $\{\mathrm{d}_k\}$ 统称为外微分算符，统一记做 d，他完成了一个 k-形式到一个 $(k+1)$-形式的转变。

所以，我们对于线性算符 d，需要满足如下性质，

(1) 对于光滑函数 f，$\mathrm{d}f$ 就是我们前面定义的微分。

(2) 任取光滑函数 f，$\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$，这来自于 (1.4.13)，也是暗示 d 作用在 1-形式上应该和 D 差不多。

(3) 作为微分算符的 Leibniz 法则：设 ω 是 k-形式，则

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta,$$

其中 $(-1)^k$ 的出现来自楔积的交换。这个 Leibniz 法则我们已经在计算 $D(f\mathrm{d}g)$ 和 $\mathrm{d}(fg)$ 的时候遇到过了。

(1.5.3) 先假设 d 在 U 上是存在的。若 ω 是 $V \underset{\text{open}}{\subset} U$ 上的 k-形式，设 W 是 U 的一个开子集且 V 真包含 $\overline{W}$. 那么正如 (1.5.1) 说的，可以找一个单位分解 h，使得 $h|_{\overline{W}} = 1$ 以及 $h|_{U-W} = 0$，利用他就可以定义一个 U 上的光滑 k-形式 $h\omega$（他在 V 外为零，在 W 内等同于 $\omega|_W$）。

(1.5.4) 设 U 是流形 M 上的开集且 $V \underset{\text{open}}{\subset} U$，则存在 V 的一个开覆盖 $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 使得对每个 α 成立 $\overline{W_\alpha} \subset V$.

实际上这就是分离公理之一，正则性的直接推论。流形 M 是局部紧的 Hausdorff 空间，所以他是正则的。而对于正则空间内的每一个点 p，已知邻域 V，我们可以找到一个邻域 $W_p \subset V$ 使得 $\overline{W_p} \subset V$. 然后遍历 p，就找到了开覆盖 $\{W_p\}_{p \in V}$.

(1.5.5) 设 $V \underset{\text{open}}{\subset} U$，如果 $\omega|_V = 0$，则 $(\mathrm{d}\omega)|_V = 0$，即 d 是一个局部算符。

利用 (1.5.4) 找一个 V 的开覆盖，我们只要证明对开覆盖中的一个开集 W，$(\mathrm{d}\omega)|_W = 0$ 即可。同 (1.5.3) 利用单位分解找一个光滑函数 h，则 $h\omega$ 在 U 上恒为零，所以

$$0 = \mathrm{d}(h\omega) = \mathrm{d}h \wedge \omega + h\mathrm{d}\omega$$

限制在 W 上，$h|_W = 1$ 且 $(\mathrm{d}h)|_W = 0$（利用 $\mathrm{d}h$ 是一个微分这一个事实），所以 $(\mathrm{d}\omega)|_W = 0$.

Proposition (1.5.6) 利用 (1.5.5)，设 $V \underset{\text{open}}{\subset} U$，如果 U 上存在外微分形式 d，则他诱导出了 V 上的一个外微分形式 d_V。并且，再设 $W \underset{\text{open}}{\subset} W$，则 d 在 W 上诱导的 d_W 和 d_V 在 W 诱导的 d_{VW} 是相同的。此外 $(\mathrm{d}_V\omega)|_W = \mathrm{d}_W(\omega|_W)$ 对任意的 V 上的 k-形式 ω 成立。

Proof: 和上面的想法差不多，利用 (1.5.4)，我们可以找一个开覆盖。然后在每个开覆盖中的开集 W 上，同 (1.5.3) 利用单位分解找一个光滑函数 h_W，使得 $h_W\omega$ 成为 U 上的光滑 k-形式，定义 $(\mathrm{d}_V\omega)|_W = \mathrm{d}(h_W\omega)|_W$.

设 W' 是开覆盖中的另外的开集，且 $W \cap W' \neq \varnothing$。由于 $(h_W\omega)|_{W\cap W'} = (h_{W'}\omega)|_{W\cap W'}$，因为 (1.5.5)，则

$$\mathrm{d}(h_W\omega)|_{W\cap W'} = \mathrm{d}(h_{W'}\omega)|_{W\cap W'},$$

所以

$$((\mathrm{d}_V\omega)|_W)|_{W\cap W'} = ((\mathrm{d}_V\omega)|_{W'})|_{W\cap W'}$$

保证了 $(\mathrm{d}_V\omega)|_W$ 在相交的开集上是相同的，这就使得我们可以黏结他们定义出一个 V 上的 $(k+1)$-形式 $\mathrm{d}_V\omega$. 容易检验 d_V 满足所有外微分的性质。至于 $\mathrm{d}_W = \mathrm{d}_{VW}$，从构造来看，这是显然的。

最后我们来检验等式 $(\mathrm{d}_V\omega)|_W = \mathrm{d}_W(\omega|_W)$，对 W 利用 (1.5.4) 找个开覆盖，在每一个开集 X 上，把上式左边限制到 X 上即 $((\mathrm{d}_V\omega)|_W)|_X = (\mathrm{d}_V\omega)|_X = \mathrm{d}(h_X\omega)$，同样，右边限制到 X 上即 $(\mathrm{d}_W(\omega|_W))|_X = \mathrm{d}(h_X\omega|_W) = \mathrm{d}(h_X\omega)$，所以等式成立。 □

(1.5.7) 设 $W \subset V$ 是 U 中的开集，以及 ρ^k_{VW} 和 ρ^{k+1}_{VW} 分别是 k-形式和 $(k+1)$-形式的限制映射。设 ω 是 V 上的任意 k-形式，由于 $\rho^{k+1}_{VW} \circ \mathrm{d}_V(\omega) = (\mathrm{d}_V\omega)|_W = \mathrm{d}_W(\omega|_W) = \mathrm{d}_W \circ \rho^k_{VW}(\omega)$，所以我们有

$$\mathrm{d}_W \circ \rho^k_{VW} = \rho^{k+1}_{VW} \circ \mathrm{d}_V.$$

换句话说，d 诱导了预层 $U \mapsto \Gamma(\Omega^k, U)$ 和预层 $U \mapsto \Gamma(\Omega^{k+1}, U)$ 间的自然变换（或者叫做函子间的态射）。

(1.5.8) 容易证明，以 p 的邻域 W 赋予包含而成的归纳系，

$$\Omega^k_p = \varinjlim_{W \ni p} \Gamma(\Omega^k, W), \quad \Omega^{k+1}_p = \varinjlim_{W \ni p} \Gamma(\Omega^{k+1}, W),$$

以及有到点上的限制映射 ρ^k_{Wp} 和 ρ^{k+1}_{Wp}。则 colimt 的泛性质，如下交换图告诉我们 $\mathrm{d}_p : \Omega^k_p \to \Omega^{k+1}_p$ 存在。

$$\begin{tikzcd}
 & & \Gamma(\Omega^k, V) \arrow[dll, bend right, "\rho^{k+1}_{Vp}\circ \mathrm{d}_V"'] \arrow[dl, "\rho^k_{Vp}"] \arrow[dd, "\rho^k_{VW}"] \\
\Omega^{k+1}_p & \Omega^k_p \arrow[l, dashed, "\mathrm{d}_p"'] & \\
 & & \Gamma(\Omega^k, W) \arrow[ul, "\rho^k_{Wp}"'] \arrow[ull, bend left, "\rho^{k+1}_{Wp}\circ \mathrm{d}_W"]
\end{tikzcd}$$

以后，方便起见，即使 ω 只是 U 的开集 V 上的 k-形式的时候，我们依旧用 $\mathrm{d}\omega$ 来标记 $\mathrm{d}_V\omega$. 这当然也就意味着，在记号上，$\mathrm{d}(\omega|_W) = (\mathrm{d}\omega)|_W$.

Proposition (1.5.9) 在流形 M 上，外微分算子 d 存在且唯一。

Proof: 有了上面这些铺垫，我们只要在局部证明其唯一存在即可，然后把他拼起来，就像 Proposition (1.5.6) 做的那样。首先证明局部唯一性，为此当然假设 d 是存在的。在局部，我们找一族坐标，对于 k-形式，他写作

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_k} a_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_k},$$

由于 d 是线性算子，我们可以只考虑

$$\omega = a\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k.$$

由于 Leibniz 法则，

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k + a\mathrm{d}(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k),$$

对于第二项，使用 Leibniz 法则，以及 x^1 是光滑函数，所以有的 $\mathrm{d}^2x^1 = 0$，于是

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) = -\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k),$$

这样进行下去就知道他是零。于是

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

这样 d 在局部的表现完全由他那些性质唯一决定，唯一性得证。

剩下的存在性，我们就把上面的过程反过来，在局部的 k-形式写作

$$\omega|_U = \sum_{i_1,\cdots,i_k} a_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge x^{i_k},$$

则定义其外微分为

$$\mathrm{d}(\omega|_U) = \sum_{i_1,\cdots,i_k} \mathrm{d}a_{i_1\cdots i_k}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge x^{i_k},$$

不难检验外微分的性质都可以得到满足。这样我们就在局部证明了外微分的存在性。

最后，由于 $(\mathrm{d}(\omega|_U))|_{U\cap V} = \mathrm{d}(\omega|_U|_{U\cap V}) = \mathrm{d}(\omega|_V|_{U\cap V}) = (\mathrm{d}(\omega|_V))|_{U\cap V}$，所以我们可以将局部定义的外微分算子粘起来得到流形 M 上的一个外微分算子。由于外微分算子的局部唯一性，所以也就得到了他的整体唯一性。 □

Proposition (1.5.10) 虽然是一个很简单的命题，但是很重要：$\mathrm{d}^2=0$.

Proof: 局部对单项式证明即可，设 $\omega = a\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k$，则

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k$$

以及

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}^2a\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k - \mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}^2x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k+\cdots = 0.$$

□

(1.5.11) 我们将 $\mathrm{d}\omega=0$ 的形式 ω 称为闭形式，将 $\omega=\mathrm{d}\eta$ 的形式 ω 称为恰当形式，则这一命题告诉我们，恰当形式一定是闭形式，反之不一定。我们定义 $H^k(M)=\ker(d_k)/\operatorname{Im}(d_{k-1})$ 为流形 M 的第 k 个上同调群，其中模的运算是看做加法群的商群运算，这个 $H^k(M)$ 即表征了闭的 k-形式在除去一个恰当形式后的等价类。此外约定当 $k<0$ 的时候，$H^k(U)=0$.

当 $k=0$ 的时候，$H^0(U)$ 就是 $\ker\big(\mathrm{d}:\mathcal{F}(U)\to\Omega^1(U)\big)$. 如果 U 是连通的，$\mathrm{d}f=0$ 就昭示着 f 在恒为常数，$H^0(U)$ 就是这些函数构成的矢量空间。那么如果有着不同的连通分支，那么 $H^0(U)$ 就是在在各个连通分支上为常数（整体不一定是一样的）的那些函数构成的矢量空间。而他的维度就是连通分支的个数。

下一节将会提到一点，上同调群是流形拓扑的表征，他是一个拓扑范畴到交换群范畴的反变函子，对于同伦等价的拓扑空间，有着同构的上同调群。所以这是一个拓扑不变量，如果我们可以把两个拓扑空间的上同调群计算出来得到他们不同构，则这两个拓扑空间必然不同伦。流形的上同调群也被称为 de Rham 上同调，他是上同调群的一个典型，这里 d 是自然的边缘算子的对偶，而楔积是自然的 cup product（比起同调，上同调里的 cup product 是比“对偶”部分多出来的东西）。

(1.5.12) 正如 (1.3) 我们看到的，对 1-形式 ω，我们有

$$\mathrm{d}(\omega)(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]),$$

类似地，对 k-形式 ω，经过一些不算复杂的计算，我们可以证明

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega)(X_1,\cdots,X_{k+1}) =& \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\big(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})\big)\\ &+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega\big([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1}\big),\end{aligned}$$

其中

$$\omega\big(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1}\big) = \omega\big(X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_{k+1}\big),$$

以及

$$\omega\big([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1}\big)=\\ \omega\big([X_i,X_j],X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_{j-1},X_{j+1},\cdots,X_{k+1}\big),$$

就是说，头上带帽等于把他去掉。这个式子可以反过来拿来定义 d，而且确实是一个坐标无关的定义。我们并没有那么做，因为就实际计算而言，更多时候我们并不会把形式作用在所有的光滑切矢量场上。

(1.5.13) 设 $f:M\to N$，我们前面已经谈到了，这个 f 在 0-形式，即光滑函数之间诱导了一个 f^*（被称为一个拉回），即 $f^*g=g\circ f$. 对于 1-形式，由 (1.1.14)，我们知道了 $f^*\mathrm{d}g=\mathrm{d}(f^*g)$，对比矢量场之间 f_* 的定义还需要 f 是单射，这里 1-形式之间的 f^* 则没有这个限制。

(1.5.14) 通过 $(f^*\omega)_p=\omega_{f(p)}\big(f_{*p}(X_1)_p,\cdots,f_{*p}(X_k)_p\big)$，我们可以定义出 k-形式之间的 f^*.

(1.5.15) 所以，很容易检验，$f^*(\omega\wedge\eta)=(f^*\omega)\wedge(f^*\eta)$.

实际上，这个式子也可以反过来定义 k-形式之间的 f^*. 可是这样定义可能会遇到一些技术性问题，比如一个 k-形式大范围来说是否一定能写成一些比较低阶的形式楔积并线性组合而成？如果不，怎么通过上式定义？这个问题的回答是，类似 (1.5.5)，拉回是一个局部算符，即如果 ω 在局部为零，则 $f^*\omega$ 也在局部为零，所以我们可以不从大范围考虑这个问题。

(1.5.16) 按照上面这种定义方式，假设 f^* 存在，则 f^* 是一个局部算符。

首先注意到 $f^*(h\omega)=(f^*h)(f^*\omega)$。设 ω 在 U 上为零，利用 (1.5.4)，我们可以找一个 U 开覆盖。然后在每个开覆盖中的开集 W 上，同 (1.5.3) 利用单位分解找一个光滑函数 h_W，则按照上式 $f^*(h_W\omega)$ 只可能在 $\overline{W}$ 内不为零，因此，如果 ω 在 U 上为零，则 $h_W\omega$ 就恒为零，所以 $(f^*h_W)(f^*\omega)=f^*(h_W\omega)=0$. 由于 $f^*h_W=h_W\circ f$ 在 $f^{-1}(W)$ 内等于 1，所以 $(f^*\omega)|_{f^{-1}(W)}=0$，遍历开覆盖，我们就得到了 $(f^*\omega)|_{f^{-1}(U)}=0$.

特别地，如果 ω_1 和 ω_2 在 U 上相同，则 $0=(f^*(\omega_1-\omega_2))|_{f^{-1}(U)}=(f^*\omega_1)|_{f^{-1}(U)}-(f^*\omega_2)|_{f^{-1}(U)}$，这就意味着 $f^*\omega_1$ 和 $f^*\omega_2$ 在局部相同，此即黏合条件。

我们这里不再重复类似 d_U 诱导出 d_V 的过程，以及这些 f_U^* 什么的和限制映射之间的关系，统统直接记做 f^*，则 $f^*(\omega_U)=(f^*\omega)_{f^{-1}(U)}$。因为局部来说 k-形式确实可以写成一些比较低阶的形式楔积并线性组合而成，以及我们已经对 0-形式和 1-形式定义了拉回，则局部的 k-形式的拉回可以使用我们的定义递归地定义出来，那么剩下的只要拼起来就好，而这正需要黏合条件。

最后，这样定义的 f^* 在一点诱导出的 f_p^*（类似 d 到 d_p）可以验证和 1-形式间已经存在的 f_p^* 用张量积诱导出来的映射是相同的。

(1.5.17) 设 $f:M\to N$，则 $f^*(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(f^*\omega)$. 实际上，我们只要局部对单项式证明即可，设 $\omega=a\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k$，则 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k$，以及

$$f^*(\mathrm{d}\omega)=(f^*\mathrm{d}a)\wedge f^*(\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k)=\mathrm{d}(f^*a)\wedge\mathrm{d}f^*(x^1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^*(x^k)=\mathrm{d}(f^*\omega).$$

因为 f^* 将恰当形式映射成恰当形式，即 $f^*(\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_N)\subset\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_M$，所以他诱导了两个流形上同调群之间的同态 $f^*:H^k(N)\to H^k(M)$.

1.6 Introduction to de Rham Cohomology

我们这节将目标放在 $\mathbb{R}^n$ 中的 de Rham 上同调。

(1.6.1) 一系列矢量空间和上面的线性映射 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 称为正和列，就是说 $\ker g=\mathrm{Im}f$. 而 $0\to A\xrightarrow{f}B$ 就是说 f 是单射，而 $B\xrightarrow{g}C\to 0$ 就是说 g 是满射。而正和列

$$0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$$

称为短正合列。

(1.6.2) 一个矢量空间和线性映射链 $A^* = \{A_i, \mathrm{d}_i\}$

$$\cdots \to A^{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}^{i-1}} A^i \xrightarrow{\mathrm{d}^i} A^{i+1} \to \cdots$$

称为链复形，如果对于任意的 i 都有 $\mathrm{d}^i \circ \mathrm{d}^{i+1} = 0$. 当对任意的 i 都有 $\ker \mathrm{d}^i = \mathrm{Im}\,\mathrm{d}^{i-1}$, 则这个链复形称为正和的。

(1.6.3) 很容易看到，$\Omega^*(M)$ 和外微分算子 d 构成一个链复形。那么同样，对于任意的链复形都可以定义上同调群 $H^p(A^*) = \ker(\mathrm{d}^p)/\mathrm{Im}(\mathrm{d}^{p-1})$，其中的元素同样用等价类符号 $[a]$ 记。

(1.6.4) 如果在两条链的每一个对应链的对象之间，譬如说 A_i 和 B_i 之间，存在线性映射 f^i，那么自然就在两条链之间引入了一个映射 $f : A^* \to B^*$，需要交换图如下：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_A^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & A^p \arrow[r, "\mathrm{d}_A^p"] \arrow[d, "f^p"] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_B^{p-1}"] & B^p \arrow[r, "\mathrm{d}_B^p"] & B^{p+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

从交换图可以看到，应该满足 $\mathrm{d}_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ \mathrm{d}_A^p$. 既然在链复形之间引入了映射，则他诱导了上同调群之间的映射。通过 $f^*([a]) = [f^p(a)]$，我们诱导了 $f^* = H^p(f) : H^p(A^*) \to H^p(B^*)$.

(1.6.5) 链复形也可以构成一个链，尤其重要的是短正合列 $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$. 链的短正和列就是当对任意的 p 都有短正合列 $0 \to A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \to 0$.

Proposition (1.6.6) 链复形的短正合列 $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ 引入了上同调群的正合列 $H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$.

Proof: 其实就是证明 $\ker g^* = \mathrm{Im}\, f^*$. 首先证明 $\mathrm{Im}\, f^* \subset \ker g^*$，任取 $[a] \in H^p(A^*)$，我们有

$$g^* \circ f^*([a]) = [g^p \circ f^p(a)] = [0] = 0.$$

这是从正合列 $A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p$ 中得知的。

然后证明 $\ker g^* \subset \mathrm{Im}\, f^*$. 这就是说，任意的 $g^*[b] = 0$ 的 $[b]$ 都可以找到 $[a]$ 使得 $f^*[a] = [b]$.

因为对任意的 p 有 $0 = g^*[b] = [g^p(b)]$，因此存在一个 c 使得 $g^p(b) = \mathrm{d}_C^{p-1}(c)$，而 g^{p-1} 又是满射，所以可以找到 b' 使得 $g^{p-1}(b') = c$, 因此用交换图变换

$$g^p(\mathrm{d}_B^{p-1}(b')) = d_C^{p-1}(g^{p-1}(b')) = g^p(b).$$

所以 $g^p(b - \mathrm{d}_B^{p-1}(b')) = 0$, 所以存在 a 使得 $f^p(a) = b - \mathrm{d}_B^{p-1}(b')$。现在只要证明这个 a 确实在 $\ker \mathrm{d}_A^p$ 里面就可以了。为此只要证明 $\mathrm{d}_A^p a = 0$ 就可以, 但是因为 f^{p+1} 是单射, 所以也等价于证明 $f^{p+1} \circ \mathrm{d}_A^p(a) = 0$. 用交换图变换

$$f^{p+1} \circ \mathrm{d}_A^p(a) = \mathrm{d}_B^p \circ f^p(a) = \mathrm{d}_B^p(b - \mathrm{d}_B^{p-1}(b')) = \mathrm{d}_B^p(b) = 0.$$

因为 a 确实在 $\ker \mathrm{d}_A^p$ 里面，所以他在 $H^p(A^*)$ 里面对应了一个等价类 $[a]$，成立 $f^*[a] = [b]$. $\square$

(1.6.7) 链复形的短正和列还引入了其他两个正合列。对于链复形的短正合列 $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$，定义 $\partial^* : H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*)$ 为线性映射

$$\partial^*([c]) = \left[(f^{p+1})^{-1} \left(\mathrm{d}_B^p \left((g^p)^{-1}(c) \right) \right) \right].$$

∂^p 即交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_A^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & A^p \arrow[r, "\mathrm{d}_A^p"] \arrow[d, "f^p"] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_B^{p-1}"] \arrow[d, "g^{p-1}"] & B^p \arrow[r, "\mathrm{d}_B^p"] \arrow[d, "g^p"] & B^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{p+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{p-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_B^{p-1}"] \arrow[d] & C^p \arrow[r, "\mathrm{d}_B^p"] \arrow[d] \arrow[uur] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

中的斜线。这里就不证明这是良定义的了。因此，链复形的短正合列 $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ 诱导了上同调群的正合列

$$
\begin{aligned}
H^p(B^*) &\xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*), \\
H^p(C^*) &\xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*).
\end{aligned}
$$

Theorem (1.6.8) 链复形的短正合列 $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ 引入了上同调群的正合列

$$\cdots \to H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \to \cdots.$$

Proposition (1.6.9) 链复形可以谈论直和，即是对链中每一个矢量空间进行直和。那么从 ker 和 Im 对于直和的显然性质，我们有 $H^p(A^* \oplus B^*) = H^p(A^*) \oplus H^p(B^*)$.

$\Omega^*(U)$ 和外微分算子 d 构成一个链复形，下面的定理给出了有关于欧氏空间两个开集和他们的并与交的短正合列。

Theorem (1.6.10) 设 U_1 和 U_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，记 $i_\nu : U_\nu \to U_1 \cup U_2$ 和 $j_\nu : U_1 \cap U_2 \to U_\nu$ 是嵌入，则有如下的短正合列：

$$0 \to \Omega^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I^p} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \to 0.$$

其中 $I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$, $J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$.

Proof: 先证明 I^* 是单射，这就是说除了 $I^*(\omega) = 0$ 只有解 $\omega = 0$.

设 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集的嵌入，则对于任意的 p-形式 $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge O \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$ 都有 $\varphi^* \mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_I$，因此

$$\varphi^* \omega = \varphi^* \sum_I f_I \mathrm{d}x_I = \sum_I f_I \circ \varphi \mathrm{d}x_I.$$

现在证明 J^* 是一个满射。将单位分解应用到 U_1 和 U_2 上面取，存在 p_ν 为定义在 $U_1 \cup U_2$ 上的光滑函数，而他的非零点集包含于 U_ν，且 $p_1(x) + p_2(x) = 1$.

设 f 定义在 $U_1 \cap U_2$ 上。定义 U_1 上的光滑函数 f_1，他在 $U_1 \cap U_2$ 上的限制为 $f(x)p_2(x)$ 和 U_2 上的光滑函数 $f_2(x)$，他在 $U_1 \cap U_2$ 上的限制为 $-f(x)p_1(x)$. 那么在 $U_1 \cap U_2$ 上 $f_1(x) - f_2(x) = f(x)$.

所以任选一个 $U_1 \cap U_2$ 上的 p-形式 ω，系数 f_I 都可以定义出 $f_{1,I}$ 和 $f_{2,I}$，并且在 $U_1 \cap U_2$ 上满足 $f_{1,I} - f_{2,I} = f$, 因此也定义了两个 ω_1 和 ω_2 得到 $J^p(\omega_1, \omega_2) = \omega$.

那么 $I^*(\omega)=0$ 就是说 $i_1^*(\omega)=i_2^*(\omega)=0$，这就是说 $f_I\circ i_1=f_I\circ i_2=0$，但是由于 U_1 和 U_2 是 $U_1\cup U_2$ 的一个开覆盖，所以这就等价于 $f_I=0$，所以 $\omega=0$.

然后证明 $\ker J^p=\operatorname{Im} I^p$. 分两个包含。

(1) $\operatorname{Im} I^p\subset\ker J^p$

$$J^p\circ I^p(\omega)=j_2^*\circ i_2^*(\omega)-j_1^*\circ i_1^*(\omega)$$

但其实 $i_2\circ j_2=i_1\circ j_1$, 所以 $J^p\circ I^p(\omega)=0$.

(2) $\ker J^p\subset\operatorname{Im} I^p$

设 $\omega_1=\sum_I f_I\mathrm{d}x_I\in\Omega^p(U_1)$ 和 $\omega_2=\sum_I g_I\mathrm{d}x_I\in\Omega^p(U_2)$，从 $J^p(\omega_1,\omega_2)=0$ 我们有 $j_1^*(\omega_1)=j_2^*(\omega_2)$，这就是说 $f\circ j_1=g\circ j_2$，或者说 f 和 g 在 $U_1\cap U_2$ 恒等。我们可以构成一个光滑函数 h_I，他在 U_1 上的限制恒等于 f_I，而 U_2 上恒等于 g_I. 那么

$$I^p\left(\sum_I h_I\mathrm{d}x_I\right)=(\omega_1,\omega_2).$$

□

将 Theorem (1.6.8) 和 Proposition (1.6.9) 应用到上面这个定理。就得到下面这个定理。

Theorem (1.6.11) Mayer-Vietoris 列：设 U_1 和 U_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，则有如下的正合列：

$$\cdots\to H^p(U_1\cup U_2)\xrightarrow{I^*}H^p(U_1)\oplus H^p(U_2)\xrightarrow{J^*}H^p(U_1\cap U_2)\xrightarrow{\partial^*}H^{p+1}(U_1\cup U_2)\to\cdots$$

其中 $I^*([\omega])=(i_1^*([\omega]),i_2^*([\omega]))$,$J^*([\omega_1],[\omega_2])=j_1^*([\omega_1])-j_2^*([\omega_2])$.

如果 $U_1\cap U_2=\varnothing$，那么 $H^p(U_1\cap U_2)=0$. 所以

$$0\xrightarrow{\partial^*}H^p(U_1\cup U_2)\xrightarrow{I^*}H^p(U_1)\oplus H^p(U_2)\xrightarrow{J^*}0,$$

那么 I^* 既单又满，故而是个同构。

如果我们已知 U_1 和 U_2 的上同调群，那么通过 Mayer-Vietoris 列我们就有可能计算他们的并或者交的上同调群。

(1.6.12) 两个连续函数 $f,g:X\to Y$ 被称为同伦的，就是说存在一个连续函数 $H:X\times[0,1]\to Y$ 使得 $H(0,x)=f(x)$ 以及 $H(1,x)=g(x)$. 同伦是等价关系，就是说，如果还有 h 和 f 同伦，则 g 和 h 也同伦。一个空间 X 是可缩的，如果 id_X 同伦于映到自身的常值映射。比如 $\mathbb{R}^n$ 或者与他同胚的开实心球 D^n 都是可缩的。

两个集合 X 和 Y 称为同伦等价的，如果存在 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$ 满足 $f\circ g$ 和 id_Y 同伦以及 $g\circ f$ 和 id_X 同伦。下面我们尝试说明，上同调群是同伦不变量。即在同伦意义下，上同调群是同构的。

Lemma (1.6.13) 光滑函数的同伦的一个技术性引理 (见单位分解的附录)：在欧氏空间背景下，任何一个连续映射都同伦于一个光滑映射。如果两个光滑函数 f_1, $f_2:U\to V$ 是同伦的，则存在光滑函数 $F:U\times\mathbb{R}\to V$ 满足 $F(x,0)=f_1(x)$ 和 $F(x,1)=f_2(x)$.

Proposition (1.6.14) 两条链复形和两个映射 f, $g:A^*\to B^*$ 如果对每一个 p 都存在线性映射 $s^p:A^p\to B^{p-1}$ 满足

$$\mathrm{d}_B^{p-1}s^p+s^{p+1}\mathrm{d}_A^p=f^p-g^p:A^p\to B^p.$$

则 $f^*=g^*$. 这样的两个映射被称为链同伦的。

Proof: 对任意的 $[a]\in H^p(A^*)$，我们有 $\mathrm{d}_A^p(a)=0$，所以

$$(f^*-g^*)[a]=[(f^p-g^p)a]=[\mathrm{d}_B^{p-1}s^p(a)+s^{p+1}\mathrm{d}_A^p(a)]=[\mathrm{d}_B^{p-1}s^p(a)],$$

而 $\mathrm{d}_B^{p-1}s(a)$ 显然被等价为 0，所以 $f^*=g^*$. □

Proposition (1.6.15) 如果两个光滑函数 $f,\,g:U\to V$ 是同伦的，则 $f^*,\,g^*:\Omega^*(V)\to\Omega^*(U)$ 是链同伦的，即 $f^*=g^*$。

Proof: 利用我们的技术性引理，由于 $f,\,g:U\to V$ 是同伦的，所以存在光滑函数 $F:U\times\mathbb{R}\to V$ 使得 $F(x,0)=f(x)$ 和 $F(x,1)=g(x)$.

注意到任意的 $U\times\mathbb{R}$ 上的 p-形式可以写作

$$\omega=\sum_I f_I(x,t)\mathrm{d}x_I+\sum_J g_J(x,t)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_J.$$

让 $\varphi_0:x\mapsto(x,0)$ 和 $\varphi_1:x\mapsto(x,1)$，则 $F\circ\varphi_0=f$ 和 $F\circ\varphi_1=g$，且将上面的形式分别拉回到

$$\varphi_0^*\omega=\sum_I f_I(x,0)\mathrm{d}x_I,\quad \varphi_1^*\omega=\sum_I f_I(x,1)\mathrm{d}x_I.$$

现在我们需要构造一个 $S^p:\Omega^p(U\times\mathbb{R})\to\Omega^{p-1}(U)$ 使得

$$(\mathrm{d}\circ S^p+S^{p+1}\circ\mathrm{d})(\omega)=(\varphi_1^*-\varphi_0^*)(\omega),$$

如果这样，对于任意 U 中的形式我们有

$$(\mathrm{d}\circ S^p+S^{p+1}\circ\mathrm{d})(F^*\omega)=(\varphi_1^*-\varphi_0^*)(F^*\omega)=((F\circ\varphi_1)^*-(F\circ\varphi_0)^*)(\omega)=(g^*-f^*)(\omega),$$

而最左边又有

$$(\mathrm{d}\circ S^p\circ F^*+S^{p+1}\circ F^*\circ\mathrm{d})(\omega)$$

所以只要定义 $s^p=S^p\circ F^*$, 这就是链同伦。

为此定义

$$S^p(\omega)=\sum_J\left(\int_0^1 g_J(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_J.$$

□

利用这个命题，我们可以知道，同伦等价对应到上同调群就有了上同调群的同构，因此上同调群只依赖于同伦型。

(1.6.16) 由于对于可缩开子集 $0^*=\mathrm{id}^*$，所以如果 $U\subset\mathbb{R}^n$ 可缩，那么 U 上的闭形式是恰当形式。这被称为 Poincar é 引理，通过他，我们知道可缩开集 U 的上同调群如下，$H^0(U)=\mathbb{R}$，而对于 $p>0$，则为 $H^p(U)=0$.

(1.6.17) 用 Mayer-Vietoris 列计算 $H^p(\mathbb{R}^2-\{0\})$.

设 U_1 为去掉正实轴（包括原点）的平面，U_2 为去掉负实轴（包括原点）的平面，因此 $U_1\cup U_2=\mathbb{R}^2-\{0\}$. 两者都是可缩的，所以由 Poincar é 引理可以知道，$H^0(U_1)=H^0(U_2)=\mathbb{R}$ 以及如果 $p>0$ 有 $H^p(U_1)=H^p(U_2)=0$.

注意到 $U_1\cap U_2$ 为去掉实轴的平面 $I_1\cup I_2$，两个部分无交且各自可缩，所以

$$H^p(U_1\cap U_2)=H^p(I_1\cup I_2)\cong H^p(I_1)\oplus H^p(I_2)=\begin{cases}\mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & ,p=0;\\ 0 & ,p>0.\end{cases}$$

而 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 是连通的，所以 $H^0(\mathbb{R}^2-\{0\})=\mathbb{R}$.

当 $p>0$ 的时候，代入 Mayer-Vietoris 列

$$H^p(U_1\cap U_2)\xrightarrow{\partial^*}H^{p+1}(U_1\cup U_2)\xrightarrow{I^*}H^{p+1}(U_1)\oplus H^{p+1}(U_2)\xrightarrow{J^*}H^{p+1}(U_1\cap U_2),$$

头尾通过计算都为 0，所以

$$H^{p+1}(\mathbb{R}^2-\{0\})=H^{p+1}(U_1\cup U_2)\cong H^{p+1}(U_1)\oplus H^{p+1}(U_2)=0.$$

这就是说，平面挖一个洞的 2 阶以上的上同调群为 0.

现在考察一阶 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 的上同调群，由于负阶都为 0，所以

$$0\to H^0(U_1\cup U_2)\xrightarrow{I^*}H^0(U_1)\oplus H^0(U_2)\xrightarrow{J^*}H^0(U_1\cap U_2)\xrightarrow{\partial^*}H^1(U_1\cup U_2)\to 0$$

或者

$$0\to\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\xrightarrow{h}H^1(\mathbb{R}^2-\{0\})\to 0.$$

由于 f 是单射而且正和性给出 $\ker g=\operatorname{Im} f$，所以 $\ker g=\mathbb{R}$，而由线性代数基本定理，有 $\operatorname{Im} g\cong\mathbb{R}$，因此正合列给出 $\ker h\cong\mathbb{R}$，而因为 h 是满射，所以根据同构基本定理 $H^1(\mathbb{R}^2-\{0\})\cong(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})/\ker h\cong\mathbb{R}$.

综上，

$$H^p(\mathbb{R}^2-\{0\})\cong\begin{cases}\mathbb{R} & ,p=0,1;\\ 0 & ,p>1.\end{cases}$$

(1.6.18) 同样是 Mayer-Vietoris 列的算例。将 $\mathbb{R}^n$ 看做 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子空间，设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集，则

$$\begin{cases}H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1}-A)\cong H^p(\mathbb{R}^n-A), & \text{when}\, p>1,\\ H^1(\mathbb{R}^{n+1}-A)\cong H^0(\mathbb{R}^n-A)/\mathbb{R},\\ H^0(\mathbb{R}^{n+1}-A)\cong\mathbb{R}.\end{cases}$$

通过归纳法可以得到

$$H^p(\mathbb{R}^n-\{0\})\cong\begin{cases}\mathbb{R} & ,p=0,n-1;\\ 0 & ,\text{otherwise}.\end{cases}$$

这个结论可以用来证明 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 之间不存在同胚，如果存在，将同胚调整为 0 映射到 0，而由于同胚将产生上同调群间的同构，所以 $H^p(\mathbb{R}^n-0)$ 与 $H^p(\mathbb{R}^m-0)$ 对于任意 p 都是同构的，但这不可能。

由于当 $n>0$ 的时候，S^{n-1} 和 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 同胚（当然也自然同伦等价），所以我们也计算出了球面的上同调群为

$$H^p(S^n)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & ,p=0,n;\\ 0 & ,\text{otherwise}.\end{cases}$$

上面一些计算出的上同调群可以产生许多有名经典的拓扑结论，比如 Jordan-Brouwer 分割定理，Brouwer 不动点定理等。最简单的，比如 S^n 和 S^m 在 $n\neq m$ 时候不同胚。

1.7 Integration

(1.7.1) 对于 $p\geq 0$，以及 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中的 $p+1$ 个矢量 $\{v_i:0\leq i\leq p\}$ 满足 $\{v_i-v_0:1\leq i\leq p\}$ 是一个线性无关组，我们定义 p-单形为

$$[v_0,\cdots,v_p]=\left\{\sum_{i=0}^{p}a_iv_i\in\mathbb{R}^{p+1}:\sum_{i=1}^{p}a_i=1,\text{and each }a_i\leq 0\right\}.$$

一个标准 p-单形为 $[e_0,\cdots,e_p]$，其中 $\{e_i\}_{0\leq i\leq p}$ 是 $\mathbb{R}^{p+1}$ 的标准基，可以看到，每一个 p 单形都和标准 p-单形同胚。但是，流形 M 上的一个（光滑）p-单形是指一个（光滑）映射 $\sigma:[v_0,\cdots,v_p]\to M$，这是光

滑曲线的自然推广，因为流形上的光滑曲线就是一个 1-单形。我们常说沿着某条曲线积分，这里我们就将推广到沿着某个单形积分。

一个 0-单形是一个点 1，一个 1-单形 $[v_0, v_1]$ 是一个线段，端点为 v_0 和 v_1，一个 2-单形是一个三角形，他的三个顶点位于 v_0，v_1 和 v_2，一个 3-单形位于四维空间，不太好想，但是从上面的类比，他应该是一个四面体，顶点位于 v_0，v_1，v_2 和 v_3. 记 M 上全部 p-单形生成的自由 Abel 群（或者称 $\mathbb{Z}$-模）为 $C_p(M)$，当然，这里两个单形之间的加法的定义意义似乎还不太明朗。我们将 $C_p(M)$ 中的元素称为 p-链，显然，一个 p-单形就是一个 p-链。

(1.7.2) 一个 p-单形内的每一个点都可以写作 $\sum_{i=0}^{p} a_i v_i$ 的形式，我们称某个 $(p-1)$-边界是指某个 $a_i = 0$ 的情况，一个 $(p-1)$ 边界是自然的 $(p-1)$-单形，记做 $[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_p]$。显然，一个 p-单形有 $p+1$ 个边界，比如一个三角形，是一个 2-单形，有三条边。

对于流形 M 上的一个 p-单形 $\sigma : [v_0, \cdots, v_p] \to M$，定义他的第 $(i+1)$ 个边缘为一个 $(p-1)$-链 $\sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_p]}$。

(1.7.3) 在流形 M 上，定义边缘算子 $\partial : C_p(M) \to C_{p+1}(M)$：对单项式，

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_p]}.$$

对一般的 $\sigma = \sum_i n_i \sigma_i$，定义 $\partial\sigma = \sum_i n_i \partial\sigma_i$.

(1.7.4) 我们有 $\partial^2 = 0$.

Proof: 直接对单项式计算

$$\begin{aligned}\partial^2\sigma &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial\sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_p]} \\ &= \sum_{0 \le i < j \le n}^{p} (-1)^{i+j-1} \left(\sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,v_p]} - \sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,v_p]}\right) = 0.\end{aligned}$$

□

$\partial^2 = 0$ 和 $\mathrm{d}^2 = 0$ 是如此的相似！实际上，我们可以定义 $H_k(M) = \ker\partial / \operatorname{Im}\partial$，这就是流形 M 的第 k 个奇异同调群。这里不展开，我们暂时的目标还是积分。

(1.7.5) 由于每一个 $[v_0, \cdots, v_p]$ 都同胚与标准 p-单形，所以，在同胚意义下，以标准 p-单形为定义域的流形上的 p-单形与定义域为花式的 $[v_0, \cdots, v_p]$ 的流形上的 p-单形应该是一样多的。所以我们可以限定，流形上的 p-单形的定义域为标准 p-单形。

(1.7.6) 除去一个平移，$[v_0, \cdots, v_p]$ 完全处于 $\mathbb{R}^p$ 里面。

由于 $[v_0, \cdots, v_p]$ 里面的点写作 $\sum_i a_i v_i$，注意到 $\sum_i a_i = 1$，我们可以将其改写为

$$\sum_{i=0}^{p} a_i v_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{p} a_i\right) v_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i v_i = v_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i (v_i - v_0),$$

所以，除去一个平移 v_0，我们完全可以由 $\sum_{i=1}^{p} a_i (v_i - v_0)$ 确定一个 p-单形。显然，他们是光滑同胚的。所以对于 M 上的 p-单形，我们在微分同胚意义下，还可以假设定义域为

$$\Delta^p = \left\{(a_1, \cdots, a_p) : a_i \ge 0 \text{ and } \sum_i a_i \le 1\right\},$$

这时候，$\sigma : \Delta^p \to M$ 常常会写作 $\sigma(a_1, \cdots, a_p)$.

此时，对于边缘算子，这种约定下，符号要变得复杂一些，记

$$k_0^p(a_1,\cdots,a_p)=\left(1-\sum_{i=1}^{p-1}a_i,\cdots,a_p\right),$$

当 $i>0$ 时，

$$k_i^p(a_1,\cdots,a_p)=(a_1,\cdots,a_{i-1},0,a_{i+1},\cdots,a_p),$$

以及 $\sigma^i=\sigma\circ k_i^p$，则

$$\partial\sigma=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^i,$$

不难检验，$\partial^2=0$ 还是成立的，以后我们就采用这种符号约定。

(1.7.7) 设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 n-形式，写作 $f\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$，则我们定义他在区域 A 上的积分算符为线性函数

$$\int_A\omega=\int_A f\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n,$$

有时候为了省空间，我们以 int_A 来记 $\int_A$. 并且，反过来，我们也将欧式空间里的 n-重积分写作对微分形式积分的样子

$$\int_A f\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n=\int_A f\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

有了这个定义，我们可以重写积分变量替换公式为

$$\int_{\varphi(A)}\omega=\pm\int_A\varphi^*\omega,$$

其中当 $\det(\varphi_*)>0$ 的时候取正，反之取负。

(1.7.8) 设 σ 是一个 M 上的 0-单形，即一个点 $\sigma(0)\in M$，定义在 σ 上的积分为 $\mathrm{int}_\sigma\,\omega=\omega(\sigma(0))$.

(1.7.9) 对于 $p\leq 1$ 的情况，设 $\sigma:\Delta^p\to M$ 是一个 M 上的一个 p-单形，这里 $p>0$，那么 σ 诱导了一个拉回映射 σ^*，我们定义一个 p-形式 ω 在 σ 上的积分如下：

$$\int_\sigma\omega=\int_{\Delta^p}\sigma^*\omega,$$

注意到等式右边就是一个 $\mathbb{R}^p$ 内对 p-形式的积分，这个积分上面我们已经定义了。

当我们在一条链上积分的时候，比如 $c=\sum_i n_i\sigma_i$，我们定义

$$\int_c\omega=\sum_i n_i\int_{\sigma_i}\omega.$$

此时，单形之间加起来成链在积分的意义下清楚了不少。

(1.7.10) 设 $f:M\to N$ 是一个光滑映射，设 σ 是 M 上的一个单形，则 $f\circ\sigma$ 是 N 上的一条单形，那么对 N 上的 p-形式

$$\int_{f\circ\sigma}\omega=\int_{\Delta^p}(f\circ\sigma)^*\omega=\int_{\Delta^p}\sigma^*\circ f^*(\omega)=\int_\sigma f^*\omega.$$

这推广了重积分变量替换公式。

Theorem (1.7.11) 微积分基本定理：设 c 是 M 上的一个 1-链，而 f 是 M 上的一个光滑函数，则

$$\int_{\partial c}f=\int_c\mathrm{d}f.$$

对于 c 是一个 1-单形的时候，这个定理翻译成我们熟知的语言即 $\int_a^b \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$，而两边对于 c 都是线性的，所以上述定理对链依然成立。

Theorem (1.7.12) 著名的 Stocks 定理（还能叫微积分基本定理）：设 c 是 M 上的一个 p-链，而 ω 是 M 上的一个 $(p-1)$-单形，则

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

这是两个（一个）极伟大的定理，尽管证明他并不是特别困难。他的重要性无需强调，每一个做过定积分（包括曲面积分等）计算的人都知道他多么有用。

Proof: 对于 $p=1$ 的情况，这就是微积分基本定理，所以我们下面假设 $p \leq 2$. 由于积分对链是线性的，所以我们只要对一个单形去证明就可以了，即

$$\int_\sigma \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\sigma} \omega,$$

利用积分的定义，我们把单形拉回到欧式空间里面，证明几乎就可以在欧式空间里面进行，即

$$\int_{\Delta^p} \sigma^*(\mathrm{d}\omega) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} (\sigma^i)^*\omega = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} (k_i^p)^* \circ \sigma^*(\omega).$$

我们假设

$$\sigma^*\omega = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \mathrm{d}x^p,$$

所以等式左边写作

$$\begin{aligned}\int_{\Delta^p} \sigma^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{\Delta^p} \mathrm{d}(\sigma^*\omega) &= \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta^p} \mathrm{d}a_i \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p \\ &= \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta^p} (-1)^{i-1} \partial_i a_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^p.\end{aligned}$$

现在来看右边，由于

$$(k_0^p)^*(x^j) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^{p-1} x^i, & j = 1; \\ x^{j-1}, & j > 1, \end{cases} \quad (k_i^p)^*(x^j) = \begin{cases} x^j, & 1 \leq j \leq i-1; \\ 0, & j = i; \\ x^{j-1}, & i+1 \leq j \leq p. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} (k_i^p)^*(a_j \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \mathrm{d}x^p) \\ &\qquad = (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{p-1}} (a_j \circ k_0^p) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1} + (-1)^j \int_{\Delta^{p-1}} (a_j \circ k_j^p) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{p-1},\end{aligned}$$

对右侧第一项做一个适当的变量替换 φ^i 如下

$$\varphi^i(x) = \begin{cases} x, & i = 1; \\ (1 - \sum_{i=1}^{p-1} x^i, x^2, \cdots, x^{p-1}), & i = 2; \\ (x^2, \cdots, x^{i-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} x^i, x^{i+1}, \cdots, x^{p-1}), & 2 < i \leq p. \end{cases}$$

容易证明 $\varphi^i(\Delta^{p-1}) = \Delta^{p-1}$ 以及 $\det((\varphi^i)_*) = 1$，所以，由重积分变量替换公式，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\int_{\Delta^{p-1}}(k_i^p)^*(a_j\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^j}\wedge\cdots\mathrm{d}x^p)\\ &=(-1)^{j-1}\int_{\Delta^{p-1}}a_j\left(x^1,\cdots,x^{j-1},1-\sum_{i=1}^{p-1}x^i,x^j,\cdots,x^p\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1}+\\ &\quad(-1)^j\int_{\Delta^{p-1}}a_j(x^1,\cdots,x^{j-1},0,x^j,\cdots,x^p)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1},\end{aligned}$$

所以最后我们只需要证明

$$\begin{aligned}\int_{\Delta^p}\partial_i a_i\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p=&\int_{\Delta^{p-1}}a_j\left(x^1,\cdots,x^{j-1},1-\sum_{i=1}^{p-1}x^i,x^j,\cdots,x^p\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1}\\ &-\int_{\Delta^{p-1}}a_j(x^1,\cdots,x^{j-1},0,x^j,\cdots,x^p)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{p-1},\end{aligned}$$

注意这其实是重积分，利用一元的微积分基本定理即得。 □

(1.7.13) 回到积分曲面的问题，我们谈过，积分曲面的存在性就在于曲边四边形的可拼合与否。这里，利用沿着曲线（1-单形）的积分，我们再来演示一次 $\mathrm{d}\omega$ 决定了他是否可积。

我们和以前一样考虑两条路径，他们分别沿着 X 方向走过 ϵ 时间，再沿着 Y 方向走过 ϵ 时间，或者次序反过来，他们的终点分布记做 P 和 Q，那么取一条光滑曲线连接 PQ，则我们就做成了一个回路。此时，取一个 ω 使得 $X,Y\in\ker(\omega)$，那么利用微积分基本定理，就可以把 ω 沿着回路的积分化到曲面上关于 $\mathrm{d}\omega$ 的积分。

现在开始估计积分，从起点开始，每走 ϵ，高度就增加阶为 ϵ^2，那么如果有错开，他错开的垂直部分面积就应该至多是 $\epsilon\cdot\epsilon^2=\epsilon^3$ 的阶，否则积分曲面就不存在。而 $\mathrm{d}\omega$ 关于回路围成的曲面的积分就是垂直错开部分的面积，即一个三阶小量。

利用微积分基本定理，我们就得到了，ω 沿着一条路径（先 X 和后 Y 或者反过来），与沿着另一条路径的积分，就应该至多相差一个三阶小量。因此，积分曲面存在当且仅当 $\mathrm{d}\omega|_{\omega=0}=0$.

(1.7.14) 对于一个 n 重积分，$\partial\Delta^n$ 实际上是一个零测集，因而对 Δ^n 的积分是等于对其内部 $(\Delta^n)^\circ$ 的积分的，而 $(\Delta^n)^\circ$ 又同胚于欧式空间的开球，所以实际上，我们已经定义了欧式空间开集上的 n-形式积分。然后，我们可以通过单位分解将其拓展到流形上。这里就不详细展开了。

Chapter 2

Lie Group

这章处理一大类光滑流形，Lie 群。Lie 群是一个光滑群，即是他一方面有着群的结构，而另一方面还是一个光滑流形, 其中群的运算乘法和逆是光滑的。最重要的 Lie 群的例子是很久以前提到过的一般线性群及其子群。

所谓的一般线性群，就是将 $n \times n$ 实矩阵放入 $\mathbb{R}^{n^2}$ 内，那么行列式不为零的那些矩阵就构成一个光滑流形，记作 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. 更一般的，我们记 $\mathrm{GL}(V)$ 为 V 上行列式非零的线性变换构成的群。

2.1 Foundation

(2.1.1) 设 G 为群，单位元记做 e，群运算记做 $\mu : G \times G \to G$，如果 G 是一个光滑流形，且 μ 是一个光滑映射，则称 G 是一个光滑 Lie 群。当然可以谈论不怎么光滑的 Lie 群，但是下面所指的 Lie 群都是光滑的。记 l_g 是左作用算符，即 $l_g = \mu(g, \cdot)$，或者写作 $l_g h = gh$，同样，右作用算符记做 r_g，即 $r_g h = hg$. 显然这些都是光滑映射。

现在考虑方程 $\mu(x, y) = e$, 由于 $(l_e)_{*e}$ 是一个恒同映射, 所以在 e 附近, 按隐函数定理, 方程 $\mu(x, y) = e$ 在 e 附近有光滑解，即 $y = \nu(x) = x^{-1}$ 中的逆函数 ν 在 e 附近光滑，由于 $(\nu \circ l_g)(h) = h^{-1}g^{-1} = (r_{g^{-1}} \circ \nu)(h)$，所以逆函数 ν 处处光滑。

因为 Lie 群有着光滑流形结构，那么我们就可以对其局部线性化，特别地，单位元附近的局部线性化就构成了 Lie 代数的内容。

(2.1.2) 一个 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 就是其单位元处的切空间。

由于 l_g 和 r_g 都是 $G \to G$ 的光滑同胚，所以 $(l_g)_*$ 或者 $(r_g)_*$ 就是将光滑切矢量场映射到光滑切矢量场的双射。如果矢量场 X_x 满足 $(l_a)_* X_x = X_{ax}$，则称 X 是一个左不变矢量场。对于左不变矢量场 X 而言，由于 $(l_a)_* X : g \mapsto (l_a)_{*a^{-1}g} X_{a^{-1}g} = X_g$，所以 $(l_a)_* X = X$.

和任意的矢量场一样，左不变矢量场 X 在 e 处诱导了 $\mathfrak{g}$ 中的元素 X_e.

反过来，设 $X_e \in \mathfrak{g}$，我们可以构造一个左不变矢量场 $X_x = (l_x)_* X_e = (l_x)_*^{-1} X_x$，因此我们就建立了 Lie 代数和左不变矢量场之间的一一对应。

(2.1.3) 左不变矢量场都是光滑的且完备的。

实际上，任取 $f \in \mathcal{F}(G)$ 以及 $g \in G$，我们来看 $(Xf)(g) = X_g f = (l_g)_* X_e f = X_e(f \circ l_g)$. 取一个在 e 处切矢量为 X_e 的曲线 σ，则

$$Xf(g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(g\sigma(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \mu(g, \sigma(t)),$$

是一个光滑函数，所以左不变矢量场都是光滑矢量场。至于完备性，设 σ 是左不变矢量场 X 的积分曲线，则 $l_g \circ \sigma$ 也是 X 的积分曲线，这就使得我们可以把一条局部积分曲线拼到无穷远，这就是说 X 是完备的。

(2.1.4) 设 X 是左不变矢量场，因为 X 是完备的，所以他诱导的单参数变换群 $\{\sigma_t^X\}$ 在整个 Lie 群上是有定义的，特别地，在单位元上，我们定义 $\exp(t, X) := \sigma_t^X(e)$，其中 X 是左不变矢量场，因为左不变矢量场一一对应着 Lie 代数，所以也可以说 $X \in \mathfrak{g}$. 同样，对固定的 X，映射 $\exp(t, X)$ 对改变的 t 就构成了 G 的一个子群，这被称为单参子群。由积分曲线的存在唯一性，我们也得到了单参子群与 Lie 代数的一一对应关系。

Proposition (2.1.5) 设 $f : G \to G$ 是一个微分同胚，我们有 $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$，若 $f = l_a$，那么我们立刻就得到了左不变矢量场的对易子也是左不变的。因此对于 Lie 代数来说，他继承了切矢量场的 Lie 括号 $[\star, \star] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，这是一个二元线性运算，所以 Lie 代数确实是一个代数。

通过直接的计算，Lie 代数上满足：

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

第一条反对称性从矢量场的 $[X, Y] = XY - YX$ 来看是显然的。而第二条称为 Jacobi 恒等式，直接计算即可验证。可以如下记忆 Jacobi 恒等式，X, Y 和 Z 的三种右手方向构成的置换和为 0，或者说，$[X_i, [X_j, X_k]]$ 中 ijk 是 123 的偶置换。

(2.1.6) Lie 代数上的双线性映射 f 如果满足 $f([X, Y]) = [f(X), Y] + [X, f(Y)]$，则 f 被称为一个导子。

在 Lie 代数上我们可以找到一个自然的导子。适当改写 Jacobi 恒等式，我们可以得到 $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$，如果记 $\mathrm{ad}(X) : Y \mapsto [X, Y]$，于是

$$\mathrm{ad}(X)([Y, Z]) = [\mathrm{ad}(X)Y, Z] + [Y, \mathrm{ad}(X)Z],$$

因此 $\mathrm{ad}(X)$ 就是一个 Lie 代数上面的导子。

(2.1.7) 前面我们定义了 $\exp : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \to G$，特别地，我们记 $\exp(1, X)$ 为 $\exp(X)$，这样定义的映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 他被称为指数映射。

可以看到 $\exp(tX) = \sigma_1^{tX}(e) = \sigma_t^X(e) = \exp(t, X)$，所以实际上，我们指数映射已经能够完全包含 $\exp : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \to G$ 的内容了。特别地，

$$\exp(tX)\exp(sX) = \exp(t, X)\exp(s, X) = \exp(t + s, X) = \exp((t + s)X).$$

就和一般的指数表现得那样。但如果 $[X, Y] \neq 0$，一般来说 $\exp(X)\exp(Y) \neq \exp(X + Y)$. 我们有时候也会通过 e^X 来记 $\exp(X)$.

Lemma (2.1.8) 我们找一个光滑函数 $f : G \to \mathbb{R}^n$，那么 $g(t) = f(xe^{tX})$ 就是一个 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数，我们来归纳证明他的 n 阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} g(t) = (X^n f)(xe^{tX}).$$

Proof: $n = 0$ 是显然的，$n = 1$ 需要直接计算验证

$$(Xf)(x) = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(xe^{tX})\right\}_{t=0},$$

这个的计算只要使用链式法则

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(xe^{tX})\right\}_{t=0} = f_{*x}(e^{tX})_{*0} = f_{*x}X = (Xf)(x).$$

注意最后一个等式要依赖于 f 是矢量值的，某种程度来说这就是 $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ 的结果。由于矩阵也可以看成在欧氏空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 里，所以 f 也可以取值为矩阵。

假设 $n = k$ 是成立的，那么因为 $X^{k+1} = X \circ X^k$,

$$(X^{k+1}f)(xe^{tX}) = (X(X^kf))(xe^{tX}) = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(X^kf)(xe^{(s+t)X})\right\}_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X^kf)(xe^{tX}) = \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}}g(t).$$

□

(2.1.9) 为了下面的讨论，我们先将实数值的 1-形式拓展到矢量值的 1-形式。设 V 是一个矢量空间，对于切矢量场的 V-值函数 $\omega : \Gamma(TM) \to V$ 被称为一个 V-值 1-形式。如果对任意的光滑切矢量场 X，我们都有 $\omega(X)$ 是 M 上的 V-值光滑函数，则 ω 被称为光滑的。

(2.1.10) Lie 群 G 的切丛 TG 倒是相当简单，因为我们可以定义 $(l_{a^{-1}})_*$ 把 T_aG 始终映射到 $T_eG = \mathfrak{g}$ 来考虑，所以切丛就被平凡化了。与这相关的概念即 Maurer-Cartan 形式。设 G 是一个 Lie 群，他的切丛记做 TG，映射 $\omega_G : (g, v) \mapsto (l_{g^{-1}})_*v$ 被称为 Maurer-Cartan 形式。可以看到 $\omega_G : \Gamma(TG) \to \mathfrak{g}$，因此 Maurer-Cartan 形式可以看做一个 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式。且对于任意的 l_h^*，我们都有

$$(l_h^*\omega_G)v = \omega_G((l_h)_*v) = (l_{(hg)^{-1}})_*(l_h)_*v = (l_{(g)^{-1}})_*v = \omega_G(v).$$

所以 Maurer-Cartan 形式是左不变的。

(2.1.11) 现在来看具体的例子，设所有 $n \times n$ 的实（复）矩阵构成的集合为 $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$（$\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$），其中 $\det A \neq 0$ 的矩阵按矩阵乘法构成一个群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$（$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$），我们称为一般线性群，单位元是 I。由于他可以开嵌入 $\mathbb{R}^{n^2}$ 内，所以他有自然的光滑流形结构。因此一般线性群是一个 Lie 群，矩阵群上的微分定义使得我们可以直接计算一般线性群的 Lie 代数，他的 Lie 代数为 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$。在一般线性群 G 上

$$(l_g)_{*a}v = \frac{1}{t}(l_g(a + tv) - l_g(a)) = \frac{1}{t}(l_g(tv)) = l_g(v) = gv.$$

其中 $v \in T_aG$.

所以一般线性群上面的 Maurer-Cartan 形式即为 $\omega_G(v) = l_{g^{-1}}(v) = g^{-1}v$，其中 g 和 v 都是矩阵，矩阵乘矩阵还是矩阵，所以 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 也是矩阵的形式。设 $\mathrm{d}g = (\mathrm{d}x_{ij})$，那么 v 就可以写成 $\mathrm{d}g(v)$，因为 $\mathrm{d}x_{ij}(v) = v_{ij}$，则 $\omega_G = g^{-1}\mathrm{d}g$.

由于 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的微分结构是熟知的，我们可以直接计算其 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 上的交换子形式。设 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 而 $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，容易验证 $A_g = gA$ 是左不变矢量场，因为 $(l_h)_*A_g = (l_h)_*gA = hgA = A_{hg}$.

记 $g = (x_{ij})$，考虑与 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 相关的左不变矢量场为

$$A_g = \sum_{i,j,k} x_{ij}a_{jk}\partial_{ik}, \quad B_g = \sum_{i,j,k} x_{ij}b_{jk}\partial_{ik},$$

于是

$$[A_g, B_g] = \left[\sum_{i,j,k} x_{ij}a_{jk}\partial_{ik}, \sum_{i,j,k} x_{ij}b_{jk}\partial_{ik}\right] = \sum_{i,k}\left(\sum_j x_{ij}\sum_r(a_{jr}b_{rk} - b_{jr}a_{rk})\right)\partial_{ik},$$

或者 $[A_g, B_g] = (AB - BA)_g$，所以 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 上的对易子为 $[A, B] = AB - BA$，其中的乘法就是矩阵乘法。

(2.1.12) 对于 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$，指数映射有如下级数展开

$$e^A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!},$$

对于任意的矩阵 A 都是收敛的。可以看到其完全类似于实数值指数函数的展开 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$

Proof: 由 Lemma (2.1.8)，对一般的 Lie 群 G 和光滑函数 $f: G \to \mathbb{R}^n$，使用 Taylor 公式

$$f(xe^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(tX)^k}{k!} f(x) + O(t^{n+1}),$$

如果可以展开无数项，那么

$$f(xe^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} f(x).$$

现在取 $f(A) = A$, $x = I$ 和 $t = 0$ 就可以了。至于收敛性，因为对于任意一个矩阵，A 的范数都是有界的，那么 e^A 就被 A 的范数的级数控制，因此收敛。 □

当然可以用其他的方式猜出这个关系，我们考虑 e^{tA}，将其在 $t = 0$ 附近展开，有 $e^{tA} = I + tA + O(t^2)$，然后对于任意的正整数 n 和固定的 t 我们有

$$e^{tA} = \left(e^{tA/n}\right)^n = \left(I + \frac{t}{n}A + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n,$$

然后令 $n \to \infty$，就有 $e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^n$. 使用二项式展开，就可以得到其级数展开

$$e^{tA} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

最后 $t = 1$ 即可。

上面的过程可能不怎么严谨，在矩阵的情况下，直接用级数定义指数映射反而可能更加简单。

(2.1.13) 设 $\mathrm{M}(n, k)$ 是域 k 上的 $n \times n$ 矩阵全体构成的集合，则以下矩阵构成一般线性群的子群：

(1) 特殊线性群：$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$;

(2) 正交群：$\mathrm{O}(n) = \{Q \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \mid Q^T Q = QQ^T = I\}$;

(3) 酉群：$\mathrm{U}(n) = \{Q \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \mid Q^\dagger Q = QQ^\dagger = I\}$;

(4) 特殊正交群：$\mathrm{SO}(n) = \{Q \in \mathrm{O}(n) \mid \det Q = 1\}$;

(5) 特殊酉群：$\mathrm{SU}(n) = \{Q \in \mathrm{U}(n) \mid \det Q = 1\}$;

我们来考虑最简单的一个群 $\mathrm{SO}(2)$，他的群元素由矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

构成。这是一个 Abel 群，而且可以注意到，他同构于群 $\mathrm{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$，这是一个圆周。

Proposition (2.1.14) 对于矩阵群构成的空间，我们可以使用 Heine-Borel 定理断言有界闭子群是紧的。所以正交群是紧的，但是一般线性群不是紧的。

但是对于 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的子群来说，正交群就是极大的紧子群了。

Proposition (2.1.15) 一般线性群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的子群 G 如果是紧的，那么存在可逆矩阵 P 使得 $PGP^{-1} \subset \mathrm{O}(n)$.

Proof: 设 $A \in G$，则序列 $A, A^2, \cdots, A^n, \cdots$ 都在 G 里面。如果 $|\det A| > 1$，那么 $|\det A^n| = |\det A|^n$ 就可以任意大，和紧性对应的有界性相悖。如果 $|\det A| < 1$，那么由 G 的紧性，其 A^n 这个序列收敛到 G 内，但 $|\det A^n| = |\det A|^n$ 却又小于任意的正数，所以 A 不可逆但在 G 内，则和 G 作为一般线性群的子群相悖。所以 $|\det A| = 1$.

现在只考虑 $\det A = 1$，这就是特殊线性群的情况。然后还设 SO(3) 在我们的子群里。由于我们总可以将特殊线性群的元素唯一分解为 $A = RP$，其中 $R \in \mathrm{SO}(3)$，而 P 是正定对称矩阵，且 $\det P = 1$。由于正定对称一定可以对角化，适当选择基，我们使得 P 就是对角的，所以 $\det P = \lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$.

那么 $P = R^{-1}A$，由于 R 在我们的群内，那么 R^{-1} 也是，因此 P 也是。如果存在一个 $|\lambda_i| > 1$，不妨假设就是 λ_1，此时 $P^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$ 中的 $|\lambda_1|^k$ 会比任意正数大，这和紧性相悖。所以所有的 $|\lambda_i| = 1$，但是由于是正定的，所以 $P = I$. 因此 $A = R \in \mathrm{SO}(3)$.

对于 $\det A = -1$ 的情况类似，对于共轭，也是显然的。 $\square$

现在我们来求这个极大的紧子群 $\mathrm{O}(n)$ 的 Lie 代数，因为 Maurer-Cartan 形式取 $\mathfrak{g}$ 值，所以我们只要整理出 Maurer-Cartan 形式就可以了。对恒等式 $AA^T = I$ 求导有 $\mathrm{d}AA^T + A(\mathrm{d}A)^T = 0$，或者

$$A^{-1}\mathrm{d}A + (A^{-1}\mathrm{d}A)^T = 0,$$

$A^{-1}\mathrm{d}A$ 就是 Lie 代数。$\mathrm{O}(n)$ 的 Lie 代数就是满足方程 $B + B^T = 0$ 的矩阵，换而言之，反对称矩阵。

此外，由矩阵恒等式，$AA^{-1} = I$，对其求导我们有 $0 = \mathrm{d}AA^{-1} + A\mathrm{d}(A^{-1})$，所以

$$\mathrm{d}(A^{-1}) = -A^{-1}(\mathrm{d}A)A^{-1}.$$

如果 $A(t) : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是一个单参子群，那么有类似的

$$(A^{-1}(t))' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

以上就是微积分里面 $(1/x)' = -1/x^2$ 的矩阵对应。

2.2 Basic Representation Theory

上节谈了 Lie 群的“内部线性化”，即 Lie 代数的内容。这节我们来谈论群表示，他使得我们可以把群进行“外部线性化”，粗略地来说就是我们把群元素看做了一个线性变换。

(2.2.1) 令 V 是一个域 k（后面我们只会考虑 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 的情况）上的有限维矢量空间，群 G 的一个表示 (π, V) 指存在这样的一个群同态 $\pi : G \to \mathrm{Gl}(V)$，使得

$$\pi(g)\pi(g') = \pi(gg'), \quad \pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}, \quad \pi(e_G) = e_{\mathrm{Gl}(V)}$$

成立。表示 (π, V) 的维度被定义为 V 的维度。

如果没什么会混淆的话，就直接略去 π，写 gx 来表达 $\pi(g)x$，当然还有用 Gx 来表达 $\pi Gx = \{\pi(g)x : g \in G\}$。

如果 π 是一个单同态，那么我们称这个表示为忠实表示。

(2.2.2) 同一个群 G 的两个表示 (π_1, V_1) 和 (π_2, V_2) 可以构造出新的表示：

(1) 直和：$(\pi_1 \oplus \pi_2, V_1 \oplus V_2)$ 即满足

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(g)(x, y) = (\pi_1(g)x, \pi_2(g)y).$$

或者简单地写作 $g(x, y) = (gx, gy)$.

(2) 直积：$(\pi_1 \otimes \pi_2, V_1 \otimes V_2)$ 即满足

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(x \otimes y) = (\pi_1(g)x) \otimes (\pi_2(g)y).$$

或者简单地写作 $g(x\otimes y)=(gx)\otimes(gy)$.

(2.2.3) 设 G 是一个群，(π,V) 是他的一个表示，$W\subset V$ 是一个子空间，如果 $\pi(G)W\subset W$ 则 W 称为不变子空间。显然，$\{0\}$ 和 V 是两个不变子空间，略去这两个平凡不变子空间，如果没有其他不变子空间了，则 V 被称为是不可约的，此时表示被称为不可约表示。

(2.2.4) 如果一个表示能被分解成几个不可约表示的直和，则称该表示为完全可约的。

下面的一系列定义涉及表示的等价，当然还有很重要的 Schur 引理。

(2.2.5) 设 G 有两个表示 (π_1,V_1) 和 (π_2,V_2)，如果存在线性映射 $T:V_1\to V_2$，对任意的 $g\in G$ 都满足 $\pi_2(g)\circ T=T\circ\pi_1(g)$. 这样的 T 被称为缠结映射。当缠结映射是同构的时候，两个表示被称为是等价的。显然，这是一个等价关系。自反对称显然，而传递性自然来自两个同构复合还是同构。

Lemma (2.2.6) 如果 π_1 和 π_2 之间存在缠结映射 T，那么 $\ker T$ 是 π_1 的不变子空间，而 $\operatorname{Im}T$ 是 π_2 的不变子空间。

Proof: 因为 $T(\pi_1(g)x)=\pi_2(g)Tx$ 对于任何 x 使得 $Tx=0$ 的，都有 $\pi_1(g)x$ 使得 $T(\pi_1(g)x)=0$，所以前半句话证明完了。对于 $\operatorname{Im}T$ 中的元素 y 可以找到原象 x，由于 $\pi_2(g)y=\pi_2(g)Tx=T(\pi_1(g)x)$，则 $\pi_2(g)y$ 也在 $\operatorname{Im}T$ 中，后半句话证完。 □

Lemma (2.2.7) 相当有名的 Schur 引理：如果 (π_1,V_1) 和 (π_2,V_2) 是不等价的不可约表示，若存在缠结映射 T，则 $T=0$. 换句话说，不等价的表示没有非平凡的缠结映射。

Proof: 如果两个表示不等价，则 T 不是双射，所以 $\ker T\neq\{0\}$，而他是不变子空间，由不可约性，则 $\ker T=V_2$，同理 $\operatorname{Im}T=\{0\}$，这就是说 $T=0$。 □

(2.2.8) 反之，在复表示情况下，我们考虑不可约表示 $(\pi_1,V_1)=(\pi_2,V_2)$ 的情况下。此时如果存在一个非平凡的双的缠结映射 $T\neq I$ 使得 $T\circ\pi(g)=\pi(g)\circ T$.

在复数域上，T 一定存在一个本征值 λ，令 E_λ 是 λ 的本征空间，任取 $v\in E_\lambda$，我们有 $T(\pi(g)(v))=\pi(g)\circ T(v)=\lambda\pi(g)(v)$，所以 $\pi(G)E_\lambda\subset E_\lambda$，由 π 的不可约性，所以他要么是零空间，要么是全空间。而本征值的存在性说明了零空间不可能，所以本征空间就是全空间，这也就是说 $T=\lambda I$.

(2.2.9) 如果我们遇到的群是 Abel 群，那么他的不可约群表示也是可交换的，同时其本身就构成了一个缠结映射，即 $T=\pi(g)$ 对任意的 h 成立 $T\circ\pi(h)=\pi(h)\circ T$，所以通过上面的定理我们就可以知道，$\pi(g)=T=\lambda I$。

如果 V 是大于 1 维的，那么任意的 V 的子空间都是 π 的不变子空间，但不可约性否决了这点，所以我们得到了：凡 Abel 群的不可约复表示都是一维的。

(2.2.10) 如果 $(\star,\star)$ 是 V 上的一个内积，如果对任意的 $g\in G$,$u,v\in V$ 有 $(u,v)=(gu,gv)$，则我们称呼这个表示为幺正表示，幺正表示也可以写作 $\pi(g)^{-1}=\pi(g)^\dagger$。对于有限群我们总可以找到幺正表示，因为我们可以重新构造内积

$$(u,v)'=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gu,gv),$$

那么

$$(hu,hv)'=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(hgu,hgv)=\frac{1}{|G|}\sum_{hg\in G}(hgu,hgv)=\frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}(ku,kv)=(u,v)'.$$

幺正表示的好处是，一个不变子空间的正交空间也是不变的。对于一个有限维的幺正表示，如果不是完全可约的，那么就分解出一个不变子空间，他是不可约的，然后对这个不变子空间的正交空间，我们又得到了一个可约或不可约的不变子空间，靠着有限归纳（因为有限维），我们就得到了如果群存在一个有限维幺正表示，则这个表示一定是完全可约的。

Theorem (2.2.11) 结合上面所说的，我们就得到了 Maschke 定理：有限群的有限维表示总是完全

可约的。

Theorem (2.2.12) 在局部紧的拓扑群上存在 Haar 测度 μ，他是一个正则的左不变的 Borel 测度。所谓的左不变就是指对于一个集合 S，通过左作用 L_g，我们有 $\mu(S)=\mu(L_gS)$，当然还有右作用和右不变的概念。

对于 G 上的可测函数 f，上述测度满足

$$\int_G f(l_hg)\mathrm{d}\mu(g)=\int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g),$$

可以从中直接看出左不变的意义。以后我们将 $\mathrm{d}\mu(g)$ 直接写作 $\mathrm{d}g$.

(2.2.13) 上面的定理我们不证明，同时也不证明如下命题：如果 G 是紧 Lie 群，则我们存在双不变（既左不变也右不变）测度 μ，且 $\mu(G)$ 有限。

Proposition (2.2.14) 紧 Lie 群上存在幺正表示，所以紧 Lie 群的有限维表示总是完全可约的。

换而言之，我们可以找到内积 $\langle\star,\star\rangle$ 使得 $\langle gx,gy\rangle=\langle x,y\rangle$。假设原本存在内积 $\langle\star,\star\rangle$，那么再设 $\mathrm{d}g$ 是 G 上的 Haar 测度（因为紧所以存在，而且已经归一化），那么

$$\langle x,y\rangle'=\int_G\langle gx,gy\rangle\mathrm{d}g$$

就满足了要求。下面我们谈论紧 Lie 群的表示的时候，总使用幺正表示。

(2.2.15) 对于 Lie 群 G 上的复值光滑函数 f 和 g，我们可以定义内积为

$$(f,g)=\int_G f(h)g^*(h)\mathrm{d}h,$$

其中 $*$ 代表的是复共轭。

(2.2.16) 对于矢量空间 V 和 W，$\mathrm{Hom}(V,W)$ 也有自然的矢量空间结构，所以如果已知 V 上有群表示 π_1，以及 W 上有群表示 π_2，则对于 $A\in\mathrm{Hom}(V,W)$，我们可以定义群表示 $(\pi_1^*\otimes\pi_2,\mathrm{Hom}(V,W))$ 如下

$$\pi_1^*\otimes\pi_2(g)A=\pi_2(g)A\pi_1(g)^{-1}.$$

很容易验证 $\pi_1^*\otimes\pi_2(g)\pi_1^*\otimes\pi_2(h)=\pi_1^*\otimes\pi_2(gh)$，所以这是一个群表示。为了省略空间，我们经常也直接记做 gA.

对每一个群元 g，表示诱导了映射 $g:A\mapsto gA$，现在如果 A 是该映射的不动点 $gA=A$，则有 $A\pi_1(g)=\pi_2(g)A$。如果对每一个 g，A 都是其不动点，那么我们就称 A 是表示 $\pi_1^*\otimes\pi_2$ 的不动点。那么对于群表示 (π_1,V) 和 (π_2,W)，A 就是一个缠结映射。

(2.2.17) 利用 Schur 引理，假若 π_1,π_2 都是不可约的且不等价的，则群表示 $(\pi_1^*\otimes\pi_2,\mathrm{Hom}(V,W))$ 的不动点集平凡（即只有 $A=0$ 这一个不动点）。

假如 π, ρ 都是不可约的且不等价的，现在我们考虑线性映射 $A\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 在紧 Lie 群上的平均[1] $\bar{A}=\int_G\pi^*\otimes\rho(g)A\mathrm{d}g$，显然 $\bar{A}$ 是一个不动点，因此由 Schur 引理，

$$\bar{A}=\int_G\rho(g)A\pi(g)^{-1}\mathrm{d}g=0$$

对任意的线性映射 $A\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 都成立。

同样，如果 π, ρ 等价，此时不妨就直接记 $\pi=\rho$. 因为 $\bar{A}$ 是一个缠结映射，那么由 Schur 引理，$\bar{A}=\lambda_{\bar{A}}I$，所以

$$\int_G\pi(g)A\pi(g)^{-1}\mathrm{d}g=\lambda_{\bar{A}}I$$

[1] 在有限群上也有平均，所以下面一套对有限群也成立。

对任意的线性映射 $A \in \mathrm{Hom}(V,V)$ 都成立，但是由于 $\lambda_{\bar{A}}$ 并不已知，所以这公式用着不是很方便。为了求出 $\lambda_{\bar{A}}$，两边求迹，就有 $\mathrm{tr}(A) = \lambda_{\bar{A}} \dim V$，即 $\lambda_{\bar{A}} = \mathrm{tr}(A)/\dim V$，所以我们也可以将上式写作更实用的形式

$$\bar{A} = \int_G \pi(g) A \pi(g)^{-1} \mathrm{d}g = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\dim V} I.$$

(2.2.18) 现在，为了做一点小小的计算，我们将固定矢量空间的基，此时任意的线性算子都可以看做矩阵。记 E_{ij} 为只在 (a,b) 位置为 1，其他位置为 0 的矩阵。很容易可以计算得到 $E_{ij} A E_{kl} = A_{jk} E_{il}$. 现在对

$$\bar{A} = \int_G \rho(g) A \pi(g)^{-1} \mathrm{d}g$$

左乘 E_{ij}，右乘 E_{kl}，并令 $A = E_{ab}$，可以得到

$$\int_G E_{ij} \rho(g) E_{ab} \pi(g)^{-1} E_{kl} \mathrm{d}g = \int_G \rho(g)_{ja} E_{ib} \pi(g)^{-1} E_{kl} \mathrm{d}g = \int_G (\rho(g))_{ja} \left(\pi(g)^{-1}\right)_{bk} E_{il} \mathrm{d}g,$$

由于 π 是幺正表示，所以 $\left(\pi(g)^{-1}\right)_{bk} = \left(\pi(g)^{\dagger}\right)_{bk} = \pi(g)^*_{kb}$，并记 $\pi_{ia} : g \to \pi(g)_{ia}$ 为分量函数，则利用复函数内积的写法，上式可以写作

$$E_{ij} \overline{E_{ab}} E_{kl} = (\rho_{ja}, \pi_{kb}) E_{il}.$$

(2.2.19) 设 ρ 和 π 都是不可约的，对于 ρ 和 π 不等价的情况，我们有 $\overline{E_{ab}} = 0$，所以 $(\rho_{ja}, \pi_{kb}) = 0$. 类似地，对于 $\rho = \pi$ 的情况，我们有 $\overline{E_{ab}} = \mathrm{tr}(E_{ab}) I/\dim V = \delta_{ab} I/\dim V$，所以

$$(\pi_{ja}, \pi_{kb}) E_{il} = E_{ij} \overline{E_{ab}} E_{kl} = \frac{\delta_{ab}}{\dim V} E_{ij} I E_{kl} = \frac{\delta_{ab}\delta_{jk}}{\dim V} E_{il},$$

或者

$$(\pi_{ja}, \pi_{kb}) = \frac{\delta_{ab}\delta_{jk}}{\dim V}.$$

(2.2.20) 令 $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个 G 的复表示，那么复值函数 $\chi_\phi : G \xrightarrow{\phi} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{C} : g \mapsto \mathrm{tr}(\phi(g))$ 被称为 ϕ 的特征标。

对于紧 Lie 群的不可约幺正表示，我们有

$$(\chi_\pi, \chi_\pi) = \sum_{i,j} (\pi_{ii}, \pi_{jj}) = \sum_{i,j} \frac{\delta_{ij}^2}{\dim V} = \sum_i \frac{1}{\dim V} = 1,$$

对于两个不可约的不等价表示，我们有 $(\chi_\pi, \chi_\rho) = 0$.

令 $\hat{G}$ 是紧 Lie 群 G 的复不可约表示的等价类，那么由于是紧 Lie 群，有限维表示必然是完全可约的，就是说任何一个有限维表示能写作 $\rho = \sum_{\pi \in \hat{G}} m(\rho,\pi)\pi$，其中 $m(\rho,\pi)$ 是乘数，是一个自然数，就是说分解出来的等价的 π 各数。直接计算就可以得到 $m(\rho,\pi) = (\chi_\rho, \chi_\pi)$, 以及

$$(\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}) = \sum_{\pi \in \hat{G}} m(\rho_1,\pi) m(\rho_2,\pi).$$

前面说过，紧 Lie 群的一个不可约的复有限维表示 π 满足 $(\chi_\pi, \chi_\pi) = 1$，反过来，如果 $(\chi_\pi, \chi_\pi) = 1$，则 $(\chi_\pi, \chi_\pi) = \sum_{\rho \in \hat{G}} m(\rho,\pi)^2 = 1$，因此存在一个 $\rho \in \hat{G}$ 使得 $m(\rho,\pi) = 1$, 而其他的 $\pi \in \hat{G}$ 都有 $m(\rho,\psi) = 0$. 这样我们就得到了:

(2.2.21) 一个复有限维表示 π 是不可约的当且仅当 $(\chi_\pi, \chi_\pi) = 1$.

Proposition (2.2.22) 如果 G 是一个紧 Lie 群，那么两个表示 π_1, π_2 等价当且仅当 $\chi_{\pi_1} = \chi_{\pi_2}$.

实际上，假若 π_1 和 π_2 等价，那么存在 A 使得 $A\pi_1(g) = \pi_2(g)A$，于是 $\mathrm{tr}(\pi_1(g)) = \mathrm{tr}(A^{-1}\pi_2(g)A) = \mathrm{tr}(\pi_2(g))$. 反过来，如果两个表示 π_1, π_2 特征标相等，则 $m(\pi_1,\pi) = (\chi_{\pi_1}, \chi_\pi) = (\chi_{\pi_2}, \chi_\pi) = m(\pi_2,\pi)$，对任意的 $\pi \in \hat{G}$ 都成立，因此 π_1, π_2 等价。

2.3 Adjoint Representation

这节继续表示，我们这里感兴趣的是表示是一种矢量空间为 $\mathfrak{g}$ 的表示。这需要从伴随作用开始。先说几个记号，设 $l_g : h \mapsto gh$ 以及 $r_g : h \mapsto hg$ 分别是左平移与右平移，他们都是群的自同构。

(2.3.1) 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数，那么不难看出 $\mathfrak{g}$ 的自同构群

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}) = \{T \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \,:\, T[u,v] = [Tu, Tv],\, \forall u,\, v \in \mathfrak{g}\}$$

构成一个 Lie 群，他的 Lie 代数是

$$\mathfrak{gl}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}) = \{T \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \,:\, T[u,v] = [Tu, v] + [u, Tv],\, \forall u,\, v \in \mathfrak{g}\}.$$

由于 $[X,*] : Y \mapsto [X,Y] \in \mathfrak{g}$，且根据 Jacobi 恒等式，我们可以得知 $[X,*] \in \mathfrak{gl}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$.

(2.3.2) 设 G 是一个 Lie 群，他的 Lie 代数是 $\mathfrak{g}$。Lie 代数的伴随来自于 Lie 群的伴随 $\mathbf{Ad}(g) : h \mapsto ghg^{-1}$ 或者 $\mathbf{Ad}(g) = r_{g^{-1}} \circ l_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$ 在单位元上的导数 $\mathrm{Ad}_g = \mathbf{Ad}(g)_{*e} : T_eG \to T_eG$，但注意到 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 就是 Lie 群在单位元的切空间 T_eG，所以 $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$。

因为 $\mathbf{Ad}(g)$ 是 Lie 群的一个自同构，所以 $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是线性空间的同构，即 $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

一般而言，我们也可以通过左不变矢量场来描述 Lie 代数，这时候最好把 Ad_g 理解成 $(l_g)_* \circ (r_{g^{-1}})_*$，此时我们有如下断言：

(2.3.3) 如果 X 是 G 上的左不变矢量场，那么 $\mathrm{Ad}_g X$ 对于任意 $g \in G$ 也是左不变矢量场。

注意到左作用和右作用是可交换的，因此他们的导数也是可以交换的，那么

$$(l_h)_*(\mathrm{Ad}_g X) = (l_h)_* \circ (l_g)_* \circ (r_{g^{-1}})_*(X) = (r_{g^{-1}})_*(X) = (r_{g^{-1}})_* \circ (l_g)_*(X) = \mathrm{Ad}_g X.$$

(2.3.4) 实际上 Ad_g 还是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构。线性空间同构已经是清楚的了，下面只要证明他是 Lie 代数同态即可，为此只要检验 $\mathrm{Ad}_g([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y]$，其中 X 和 Y 都是左不变矢量场。

由于 $\mathrm{Ad}_g = (l_g)_* \circ (r_{g^{-1}})_*$，且 l_g 与 $r_{g^{-1}}$ 作为 Lie 群的自同构，有 $(l_g)_*[X,Y] = [(l_g)_*X, (l_g)_*Y]$ 和 $r_{g^{-1}}[X,Y] = [r_{g^{-1}}X, r_{g^{-1}}Y]$ 成立，于是 $\mathrm{Ad}_g([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y]$ 自然得证。

到目前为止，我们看到 $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$，所以我们可以构造映射 $\mathrm{Ad} : g \mapsto \mathrm{Ad}_g$.

(2.3.5) 可以检验 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 是一个 Lie 群同态，称为 Lie 群的伴随表示。

同态来自于 $\mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_h = (l_g)_* \circ (r_{g^{-1}})_* \circ (l_h)_* \circ (r_{h^{-1}})_* = (l_g)_* \circ (l_h)_* \circ (r_{g^{-1}})_* \circ (r_{h^{-1}})_* = (l_{gh})_* \circ (r_{(hg)^{-1}})_* = \mathrm{Ad}_{gh}$.

(2.3.6) 令 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$，则 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$ 在 e 的导数 $\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})$ 就满足 $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y]$.

因为 Ad 是 G 上矢量值的函数，证明就是很直接地要去计算

$$\mathrm{ad}(X)Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}Y,$$

找一个 G 上的光滑函数 f，我们计算其单位元处的导数，注意到

$$Yf = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0} f(\exp(uY)),$$

以及 $(\mathrm{Ad}_g Y)f = Y(f \circ l_g \circ r_{g^{-1}})$，所以

$$\mathrm{ad}(X)Yf = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}Y)f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right|_{u=t=0} f\big(\exp(tX)\exp(uY)\exp(-tX)\big),$$

注意到对 t 求导的时候，可以利用多元实函数 $F(t_1,t_2)$ 的求导等式

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F(t,t)=\frac{\partial F}{\partial t_1}(0,0)+\frac{\partial F}{\partial t_2}(0,0),$$

所以我们得到了

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right|_{u=t=0} f\big(\exp(tX)\exp(uY)\exp(-tX)\big)\\ =&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right|_{u=t_1=0} f\big(\exp(t_1X)\exp(uY)\big)-\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right|_{u=t_2=0} f\big(\exp(uY)\exp(t_2X)\big)\\ =&(XY-YX)f(e),\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{ad}(X)Y=[X,Y]$.

如果还记得 Lie 括号是曾经在 Jacobi 恒等式那边指出的导子，现在就可以看到，这确确实实就是一个导数，是伴随表示的导数。

(2.3.7) 对于一般线性群，前面已经计算过了 $(l_g)_*=l_g$，那么同样 $(r_g)_*=r_g$，所以

$$\mathrm{Ad}_g=(l_g)_*(r_{g^{-1}})_*=l_gr_{g^{-1}}.$$

那么

$$\mathrm{Ad}_g(v)=(l_g)_*(r_{g^{-1}})_*v=l_gr_{g^{-1}}v=gvg^{-1}.$$

我们现在求他的 Lie 代数，考虑 $u,v\in\mathfrak{g}$，我们令 $u(t)$ 是一个以 u 为初速度的单参子群，那么我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{Ad}_{u(t)}(v)\big)=u'(t)vu^{-1}(t)+u(t)v(u^{-1}(t))'=u'(t)vu^{-1}(t)-u(t)vu^{-1}(t)u'(t)u^{-1}(t).$$

然后令 $t=0$，那么 $u(0)=u^{-1}(0)=I$，而 $u'(0)=u$，那么就得到了单位元处的切矢量，也就是 Lie 代数 $\mathrm{ad}(u)v=uv-vu=[u,v]$.

类似的手段譬如对 $T(t)[u,v]=[T(t)u,T(t)v]$ 求个导，然后在 $t=0$ 处的值为

$$T'(0)[u,v]=[T'(0)u,T(0)v]+[T(0)u,T'(0)v],$$

注意到 $T(0)$ 是恒等变换，而 $T'(0)$ 就是我们需要的 Lie 代数 B，他需要满足的关系就是

$$B[u,v]=[Bu,v]+[u,Bv],$$

其显然是 Lie 代数上面的一个导子。

2.4 Morphisms of Lie Group

Lie 群很容易构成一个范畴，两个 Lie 群的态射只要定义成光滑的群同态就好了。比如对一般线性群而言，行列式就是一个显然的 Lie 群同态。这样子做之后，Lie 群既是光滑流形范畴的子范畴，也是群范畴的子范畴。

Lie 群因为本身就是一个群，所以他的很多整体性质都来自于单位元附近。对于拓扑性质，由于左乘是一个同胚，所以如果 U 是一个开集，那么 $gU=\{gh:h\in U\}$ 也是一个开集。因为 Lie 群也是拓扑群，所以附录中关于拓扑群的结论都可以用到这里。

(2.4.1) 设 $\varphi:G\to H$ 是一个 Lie 群同态，因为 $\varphi\circ l_g=l_{\varphi(g)}\circ\varphi$，所以在点 e 的切映射满足 $\varphi_{*g}\circ(l_g)_{*e}=(l_{\varphi(g)})_{*e}\circ\varphi_{*e}$，因为左移是同胚，所以 $\mathrm{rank}_e\,\varphi=\mathrm{rank}_g\,\varphi$.

上面意味着 Lie 群同态的秩都是常数，此时我们可以对 $\ker\varphi = \varphi^{-1}(e)$ 利用 Theorem (1.2.11)，因为他一定非空，所以 $\ker\varphi$ 是 G 的一个正则子流形，维度等于 $\dim G - \operatorname{rank}\varphi$.

(2.4.2) 因此单的 Lie 群同态必定为浸入，Lie 群同构必为同胚，其逆也光滑。

(2.4.3) 设 $\varphi: H \to G$ 是 Lie 群同态，如果 φ 是单的，则 H 被称为 G 的 Lie 子群，如果 φ 是嵌入，则 H 被称为 G 的闭 Lie 子群。显然，上面谈论的 Lie 群同态的核是一个闭 Lie 子群。

闭 Lie 子群作为集合是闭集，这里就略去证明了。

(2.4.4) 如果 $\varphi: G \to H$ 是 Lie 群同态，且 φ_{*e} 是满射，由于 Lie 群同态常秩，所以 φ_{*g} 在每一个 g 上都是满射。由反函数定理，他在每一个局部都可以写作投影，投影将开集映射成开集，所以此时 φ 也将开集映射到开集，即 φ 是一个开映射，

特别地，如果 H 还是连通的，那么因为 φ 是一个开映射，所以存在一个 e_H 的邻域 $V \subset H$ 使得 $V \subset \varphi(H)$，那么 $H = \bigcup_{n\geq 1} V^n \subset \varphi(G)$，因此 φ 就是一个满射。所以，对 Lie 群而言，局部满就可以说明整体满。

(2.4.5) 设 M 是底空间为 B 的一个纤维丛，他的纤维被赋予离散拓扑，此时，M 被称为 B 的一个覆叠空间，投影 π 现在被称为覆叠映射。一般来说，我们要求覆叠空间是连通的，如果覆叠空间还是单连通的，则被称为万有覆叠空间。关于覆叠空间的更多内容，可以参看附录。

很容易看到，Lie 群的万有覆叠空间有很自然的 Lie 群结构。附录中已经对拓扑群证明了这一点，有必要的话，利用一些附录中的技术性引理，我们就得到了光滑性，当然也就得到了 Lie 群的结论。

(2.4.6) 一个连通 Lie 群 G，记 G' 为其万有覆叠空间，覆叠映射为 $\pi: G' \to G$. 对于任意的选择 $e' \in \pi^{-1}(e)$，总有唯一的 G' 上的 Lie 群结构使得 e' 是单位元且 π 是群同态。

2.5 Relation between Lie Group and Lie Algebra

下面陈述 Lie 群和 Lie 代数的联系。

(2.5.1) 设 H 是 G 的 Lie 子群，那么 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 子代数。

下面这个定理来自 Ado，就像流形中的 Whitney 嵌入定理一样，告诉我们，对于有限维 Lie 代数，其实我们只需要考虑 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的子代数就可以了。（记得 Arnold 用 Whitney 嵌入定理来说“根本没有抽象的流形”。）

Theorem (2.5.2) 任何 $\mathbb{R}$ 上的有限维 Lie 代数总可以同构于 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的一个子代数，n 为一个足够大的整数。

考虑了子代数，现在来看看两个 Lie 群和 Lie 代数的联系。

(2.5.3) 设 $\varphi: G_1 \to G_2$ 是 Lie 群间的群同态（同构），则其诱导了 Lie 代数间的同态（同构）$\varphi_{*e}: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$.

上面对于微分同胚我们已经证明了 $\varphi_{*e}[u,v] = [\varphi_{*e}u, \varphi_{*e}v]$，但 Lie 群之间的群同态使得我们可以做得更好。

令 u, $v \in \mathfrak{g}_1$，那么我们拓展到 G_1 上的对应的左不变矢量场 X, Y 上。因为 φ 是一个群同态，故 $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$. 使用这个关系，

$$\varphi_*(X_g) = \varphi_*((l_g)_* u) = (l_{\varphi(g)})_*(\varphi_*(u)) = (\varphi_* X)_{\varphi(g)}.$$

设 f 是 G_2 上任意的可微实函数，那么

$$\varphi_*(X_g) f = X_g(f \circ \varphi),$$

或者使用 $\varphi_{*g}(X_g) = (\varphi_* X)_{\varphi(g)}$ 写作

$$(\varphi_*(X)f)\circ\varphi = X(f\circ\varphi),$$

同理有 $(\varphi_*(Y)f)\circ\varphi = Y(f\circ\varphi)$. 所以

$$\begin{aligned}([\varphi_*(X),\varphi_*(Y)]f)\circ\varphi &= ((\varphi_*(X)\circ\varphi_*(Y)-\varphi_*(Y)\circ\varphi_*(X))f)\circ\varphi\\ &= X((\varphi_*(Y)f)\circ\varphi)-Y((\varphi_*(X)f)\circ\varphi)\\ &= X(Y(f\circ\varphi))-Y(X(f\circ\varphi))\\ &= [X,Y](f\circ\varphi).\end{aligned}$$

这就是说对任意的 g 都有

$$\varphi_{*g}([X,Y]_g) = [\varphi_{*g}(X_g),\varphi_{*g}(Y_g)]$$

特别地 $g=e$，则

$$\varphi_{*e}[u,v] = [\varphi_{*e}u,\varphi_{*e}v].$$

(2.5.4) 由于 Lie 群的表示即一个 Lie 群同态 $G\to \mathrm{GL}(V)$，那么自然我们就有了 Lie 代数的表示的概念。令 $\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数，那么他的表示 (ϕ, V) 就是一个映射 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$.

一个 Lie 群的表示 (π, V) 引出他的 Lie 上面的一个表示如下：

$$\pi_*(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi\big(\exp(tX)\big)\right|_{t=0},$$

或者写作 $\pi(\exp(tX)) = \exp(\pi_*(X))$.

对两个 Lie 群的表示的直积求导，就得到了 Lie 代数表示的直积形式应该满足：

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi(g)\otimes\eta(g))\right|_{t=0} = \pi_*(g)\otimes I + I\otimes\eta_*(g) = (\pi_*\otimes I + I\otimes\eta_*)(g),$$

我们就将其作为 Lie 代数表示直积的定义。类似的还有直和 $(\pi\oplus\eta)_* = \pi_*\oplus\eta_*$，这可以看成 Lie 代数表示的直和的定义。

(2.5.5) 现有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 (π, V)，如果存在 V 的一个子空间 W 使得 $\pi(X)(W)\subset W$ 对任意 $X\in\mathfrak{g}$ 成立，则 (π, W) 构成了 $\mathfrak{g}$ 的一个新的表示，被称为 (π, V) 的子表示。如果表示 (π, V) 没有非平凡的子表示，则称呼该表示为不可约表示。如果一个表示，能分解成诸不可约表示的直和，则称这个表示是完全分解的。

Proposition (2.5.6) 因为 Lie 群表示可以诱导一个 Lie 代数表示，在 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是满射的假设下，我们断言：π 是不可约的当且仅当 π_* 是不可约的；π 是完全可约的当且仅当 π_* 是完全可约的；两个 π 和 η 是等价的当且仅当 π_* 和 η_* 是等价的。

上面基本都是从 Lie 群去得到 Lie 代数，而且是唯一确定的。那么反过来，我们是否可以从 Lie 代数得到 Lie 群，如果可以得到，又能确定到哪种程度？这些内容是下面两个定理的内容。

(2.5.7) 设 G 是 Lie 群，而 G' 是他的万有覆叠空间，则 G 和 G' 的 Lie 代数同构。

从上一节，我们知道 G' 有着自然的 Lie 群结构，而且从万有覆叠空间的定义来看，G' 的单位元 e' 的附近同胚于 G 的单位元 e 的附近，那么因为 Lie 代数是单位元处的切空间，则他们俩的 Lie 代数自然是同构的。

Proposition (2.5.8) 我们有一个任意的有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，那么在同构意义下有唯一的单连通 Lie 群 G，他的 Lie 代数就是 $\mathfrak{g}$.

如果两个 Lie 群有着相同的有限维 Lie 代数，我们虽然不能判断他们是同构的，但是我们可以找到他们同构的万有覆叠空间，一个单连通 Lie 群。

(2.5.9) 本节的最后，讲一下 Lie 群的结构方程，我们将 Maurer-Cartan 形式求一下外微分，可以得到

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) = X(\omega_G(Y)) - Y(\omega_G(X)) - \omega_G([X,Y]).$$

假设，X 和 Y 是左不变矢量场，则 $\omega_G(Y)$ 和 $\omega_G(X)$ 都是常数，那么得到

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) + \omega_G([X,Y]) = 0.$$

因为 $[X,Y]$ 在点 e 的值是在 $\mathfrak{g}$ 里面的，所以这一项也等于 $\omega_G([X,Y]) = [\omega_G(X), \omega_G(Y)]$，最后就得到了 Lie 群的结构方程

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) + [\omega_G(X), \omega_G(Y)] = 0.$$

由于这个方程是微分过的结果，可以看成是微分方程，他确定了 Lie 群的局部结构。虽然我们的证明是选取了两个左不变矢量场，但是每一个矢量场在在局部都可以变成左不变矢量场的限制，所以我们的方程总是成立的。如果群是 Abel 群，那么方程的第二项为 0，即 $\mathrm{d}\omega_G = 0$.

2.6 Lie Algebra

本节主要在于 Lie 代数本身的代数结构。

(2.6.1) 设有一个域 k 上面的矢量空间 V，他上面赋予了一个反对称的双线性映射 $[\star,\star]: V\times V \to V$，且满足 Jacobi 恒等式

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0,$$

则此时 V 以及上面的双线性映射构成一个 k-代数，称为 Lie 代数。$\mathbb{R}$ 上的 Lie 代数被称为实的 Lie 代数，$\mathbb{C}$ 上的 Lie 代数被称为复的 Lie 代数。这个代数不是结合的，即不一定满足结合律。

一个古典的例子，$(\mathbb{R}^3, \times)$ 构成一个实 Lie 代数，其中 $\times$ 是矢量的叉乘。

(2.6.2) 如果对于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个子集 $\mathfrak{h}$，如果成立 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$，则 $\mathfrak{h}$ 就被称为 Lie 代数的子代数。如果子代数 $\mathfrak{h}$ 还满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$，则称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想[2]。

一个代数 $\mathfrak{g}$ 显然有两个理想（当然也是子代数），一个是 0 一个是 $\mathfrak{g}$，我们称这两个为平凡理想。

(2.6.3) 设 $\mathfrak{g}_1$ 是域 k 上的 Lie 代数，他和 Lie 代数 $\mathfrak{g}_2$ 间的同态 f 首先是一个 k-线性映射，其次满足 $f([a,b]_1) = [fa, fb]_2$. Lie 同构就是当 f 还是一个线性空间同构的时候。

迄今为止，我们都只谈论了实数域上面的 Lie 代数，当然，我们可以直接拓展到复数域上面去，但是复化的手段也是常用的。复化是所谓的标量扩充或者 base change 的特例，所以我们直接来谈模（交换环上的双边模）的标量扩充。

(2.6.4) 关于模的张量基，可以参看附录。如果 M 是 R-模，S 是 R-代数，那么 $M_S = S\otimes_R M$ 就是一个 S-模，通过 $s(t\otimes a) = (st)\otimes a$，我们称这个 S-模 M_S 为 M 经过标量扩充而来的。

Lemma (2.6.5) 有以下同构：

(1) $M_S \otimes_S N_S \cong (M\otimes_R N)_S$.

(2) 设 N 是一个 S-模，有同构 $\mathrm{Hom}_R(M,N) \cong \mathrm{Hom}_S(M_S,N)$

Proof: 第一个同构。实际上，$(s_1\otimes_R a, s_2\otimes_R b) \mapsto s_1s_2 \otimes_R (a\otimes_R b)$ 是一个双线性映射，所以他唯一诱导了 $\varphi: M_S\otimes_S N_S \to (M\otimes_R N)_S$.

[2]可以搜一搜 ring 和 ideal 的笑话。

反过来，映射 $(s, a\otimes_R b)\mapsto (s\otimes_R a)\otimes_S (1\otimes_R b) = (1\otimes_R a)\otimes_S (a\otimes_R b)$ 也是一个双线性映射，所以他唯一诱导了 $\psi : (M\otimes_R N)_S \to M_S\otimes_S N_S$. 容易验证他们互逆。

第二个同构。设 $\phi\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$，我们可以通过 $\Phi(s\otimes a) = s\phi(a)$ 定义 $\Phi\in \mathrm{Hom}_S(M_S,N)$，反过来，已知 $\Phi\in \mathrm{Hom}_S(M_S,N)$，我们可以通过 $\phi(a) = \Phi(1\otimes a)$ 来定义 $\phi\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. 不难检验，这是一个同构。 □

对有限个 $\{M_i\}_{i\in I}$，那么反复利用 (1) 我们就得到了同构

$$\bigotimes_{i\in I}(S\otimes_R M_i)\cong S\otimes_R \bigotimes_{i\in I} M_i.$$

(2.6.6) 设 V 是一个 $\mathbb{R}$ 上的 n 维矢量空间，那么 $V\cong \mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}$，所以 $V_{\mathbb{C}}\cong \mathbb{R}_{\mathbb{C}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}_{\mathbb{C}}$，由于 $\mathbb{R}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\otimes\mathbb{R} = \mathbb{C}$，所以 $V_{\mathbb{C}}\cong \mathbb{C}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}$，因此 $V_{\mathbb{C}}$ 这就被称为 V 的复化，同时因为 $v\mapsto 1\otimes v$ 是单射，所以我们把 V 看成 $V_{\mathbb{C}}$ 的实的子空间，即 $1\otimes V = V$.

Lemma (2.6.7) 复化扩张引理：

(1) 设 V 是一个实矢量空间，W 是一个复矢量空间，$f : V\to W$ 是实线性映射，则他可以唯一扩张为一个复线性映射 $V_{\mathbb{C}}\to W$.

(2) 设 V 和 W 都是实矢量空间，$f : V\to W$ 是实线性映射，则他可以唯一扩张为一个复线性映射 $V_{\mathbb{C}}\to W_{\mathbb{C}}$.

(3) 设 V 和 W 都是实矢量空间，$f : V\times\cdots\times V\to W$ 是实多线性映射，则他可以唯一扩张为一个复多线性映射 $V_{\mathbb{C}}\times\cdots\times V_{\mathbb{C}}\to W_{\mathbb{C}}$.

Proof: 因为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W)\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},W)$，所以 (1) 得证。对于 (2)，我们有 $i : W\hookrightarrow W_{\mathbb{C}}$，那么 $i\circ f : V\to W_{\mathbb{C}}$ 就满足 (1) 题设，由 (1) 自然得证。对于 (3)，因为多线性映射他可以唯一分解出一个 $V^k\to W$，然后由 (2)，可以唯一扩张为 $(V^k)_{\mathbb{C}}\to W_{\mathbb{C}}$，因为 $(V^k)_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$，引理得证。 □

对于 (1) 中的映射 f，如果他被扩张为 $f_{\mathbb{C}}$，藏在同构里的对应为 $f_{\mathbb{C}}(c\otimes v) = cf(v)$. 那么 $f_{\mathbb{C}}(1\otimes v + i\otimes w) = f_{\mathbb{C}}(1\otimes v) + f_{\mathbb{C}}(i\otimes w) = f(v) + if(w)$.

而且，如果 $f_{\mathbb{C}}$ 限制在 V 是零，那么 $f_{\mathbb{C}}$ 本身就是零。这是因为 $f_{\mathbb{C}}(c\otimes v) = cf(v) = 0$ 对任意的 $c\in\mathbb{C}$ 和 $v\in V$ 都成立，然后 $V_{\mathbb{C}}$ 中的元素都是 $c\otimes v$ 们的线性组合，所以 $f_{\mathbb{C}}(w) = 0$ 对任意 $w\in V_{\mathbb{C}}$ 都成立。同样，(2) 和 (3) 中的扩张，也满足在没扩张的空间上限制为零则他本身为零。

(2.6.8) 由于 Lie 代数也是矢量空间，我们可以对其复化，由于对易子 $[\star,\star] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是一个双线性映射，由复化扩张引理，我们可以唯一扩张为双复线性映射 $[\star,\star] : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\to\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. 至于 Jacobi 恒等式，他的左边是三线性映射 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\to\mathbb{R}$，因为他限制在 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 是零，所以在整个 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 也是零。故实 Lie 代数复化后是一个复 Lie 代数。

(2.6.9) 利用复化扩张引理，如果 $\mathfrak{g}$ 是一个实的 Lie 代数，而 $\mathfrak{h}$ 是一个复 Lie 代数，那么 Lie 代数同态 $f : \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 可以唯一被扩张为线性映射 $f_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\to\mathfrak{h}$. 他还是一个 Lie 代数同态，因为 $[f_{\mathbb{C}}(v), f_{\mathbb{C}}(w)]$ 和 $f_{\mathbb{C}}([v,w])$ 是复双线性映射 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\to\mathfrak{h}$ 当 v 和 w 限制在 $\mathfrak{g}$ 上的时候是相同的，所以当 v 和 w 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上时候也相同。

设 $f : \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 还是单的 Lie 代数同态，且 $\mathfrak{h} = f(\mathfrak{g})\oplus if(\mathfrak{g})$，那么自然 $f_{\mathbb{C}}$ 是满射，因为任取 $f(v)+if(w)$，他都可以写作 $f_{\mathbb{C}}(1\otimes v+i\otimes w)$，而且 $f_{\mathbb{C}}$ 还是一个单射，因为如果 $f_{\mathbb{C}}(1\otimes v+i\otimes w) = 0$，则 $f(v)+if(w) = 0$，则 $f(v) = f(w) = 0$，因为 f 是单的，所以 $v = w = 0$，因此 $1\otimes v + i\otimes w = 0$. 故 $f_{\mathbb{C}}$ 是一个矢量空间的同构，也是 Lie 代数的同构，即 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\cong\mathfrak{h}$.

这就意味这，如果一个复 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 能够分解成 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}\oplus i\mathfrak{g}$，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个实 Lie 代数，那么 $\mathfrak{h}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的复化。

反过来，对于复化，我们直接将 $1 \otimes v + i \otimes w$ 记做 $v + iw$，则复化中的每一个元素都可以唯一写成 $v + iw$ 的形式。此时将 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ 中的元素 (v, w) 记做 $v + iw$，则 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ 就是我们的复化，下面可以通过 $f_{\mathbb{C}}(v + iw) = f(v) + if(w)$ 以及

$$[v_1 + iv_2, w_1 + iw_2] = \big([v_1, w_1] - [v_2, w_2]\big) + i\big([v_1, w_2] + [v_2, w_1]\big),$$

来定义线性映射和交换子。这个式子当然要比复化扩张引理实在很多，比如我们可以直接计算 Jacobi 恒等式成立。

(2.6.10) 设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 为 Lie 代数，我们可以定义通过 $[(a, b), (c, d)] = ([a, c], [b, d])$ 来定义 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 上的交换子，可以验证，他是一个 Lie 代数。这被称为 Lie 代数的直和。

有了直和，我们就可以谈论 Lie 代数的分类和分解。

(2.6.11) 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 如果没有非平凡理想，则称其为单的。一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 如果其同构于单 Lie 代数的直和，就称呼其为半单的。

特别地，对于一维 Lie 代数来说，他没有非平凡的子代数，其中任意两个元素的交换子为 0。

(2.6.12) 设 A 是一个结合代数，那么我们定义 $[a, b] = ab - ba$，那么自然 A 就构成了一个 Lie 代数，我们将其记做 $\mathrm{Lie}(A)$.

设 $f : A \to B$ 是两个 k-结合代数同态, 则 $f([a, b]) = f(ab-ba) = f(a)f(b)-f(b)f(a) = [f(a), f(b)]$，所以 $f : \mathrm{Lie}(A) \to \mathrm{Lie}(B)$ 也是 Lie 代数同态，为了明确，有时候我们会记做 $\mathrm{Lie}(f)$.

Lemma (2.6.13) 设 $\mathfrak{g}$ 是一个域 k 上的 Lie 代数，那么存在一个结合 k-代数 $U(\mathfrak{g})$ 和 Lie 代数同态 $i : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(U(\mathfrak{g}))$，使得对任意的结合 k-代数 A，Lie 代数同态 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(A)$ 都可以唯一分解为 $\varphi : \mathfrak{g} \xrightarrow{i} \mathrm{Lie}(U(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(f)} \mathrm{Lie}(A)$，其中 $f : U(\mathfrak{g}) \to A$ 是一个 k-代数同态。

因为这是一个泛性质，所以 $U(\mathfrak{g})$ 决定到一个 k-代数同构上。其存在性我们通过张量代数直接构造 $U(\mathfrak{g}) = \bigotimes \mathfrak{g}/I$，其中 I 由 $[x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)$ 生成。设 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(A)$ 是一个 Lie 代数同态，是一个 k-线性映射，那么我们可以提升成一个 k-代数同态 $\Phi : \bigotimes \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(A)$，剩下的只要检验 $\Phi(I) = 0$ 即可，这样，我们就可以定义出一个 k-代数同态 $\Phi : U(\mathfrak{g}) = \bigotimes \mathfrak{g}/I \to \mathrm{Lie}(A)$. 而

$$\Phi\big([x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)\big) = \varphi([x, y]) - \big(\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)\big) = 0,$$

所以得证。

(2.6.14) 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 群 G 的一个 Lie 代数，则自然同态 $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$ 是一个单同态。

Proof: 考虑 $X \in \mathfrak{g}$ 对应的左不变矢量场，依然记做 $\varphi(X)$，显然 $\varphi(X) : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G)$，令 A 是 $\mathcal{F}(G)$ 的自同态环，那么我们就有自然的 Lie 代数单同态 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(A)$.

使用上面引理我们对 φ 分解 $\varphi : \mathfrak{g} \xrightarrow{i} \mathrm{Lie}(U(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(f)} \mathrm{Lie}(A)$，如果 $i(X) = 0$，那么 $\varphi(X) = 0$，利用 φ 是单的，我们就可以断言 $X = 0$. □

(2.6.15) 对于一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，$U(\mathfrak{g})$ 的中心，即 $\{X : XY = YX, Y \in U(\mathfrak{g})\}$ 是很重要的，一个原因是 $U(\mathfrak{g})$ 中的元素被理解成左不变矢量场，则他中心中的元素就是同时左不变且右不变的矢量场。

下面的定理连接了紧矩阵 Lie 群以及半单 Lie 代数。

Theorem (2.6.16) 一个复 Lie 代数是半单的当且仅当他同构于一个单连通的紧矩阵 Lie 群的 Lie 代数的复化。

我们已经做过了从实 Lie 代数复化得到一个复 Lie 代数，那么自然地，我们可以问反问题，对一个复 Lie 代数是否可以寻找一个实 Lie 代数，那个实 Lie 代数的复化就是原本的复 Lie 代数。

(2.6.17) 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个复的半单 Lie 代数，那么 $\mathfrak{g}$ 的紧实形式（compact real form）是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{l}$ 使得对任意的 $X \in \mathfrak{g}$ 都可以找到两个 $X_1, X_2 \in \mathfrak{l}$ 满足 $X = X_1 + iX_2$. 因此，存在一个单连通的紧矩阵 Lie 群 K_1 使得 K_1 的 Lie 代数同构于 $\mathfrak{g}$ 的紧实形式。

上面一个定理告诉我们上面这个反问题在半单 Lie 代数的情况下始终是有解的。

Proposition (2.6.18) 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个实的 Lie 代数，那么他是半单的当且仅当他的复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是半单的。

从这个可以推知，紧的单连通矩阵 Lie 群的实 Lie 代数是半单的。当然，反过来，不是任何半单实 Lie 代数都可以找到紧的单连通矩阵 Lie 群。

(2.6.19) 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个复的半单 Lie 代数，那么 $\mathfrak{g}$ 的一个子空间 $\mathfrak{h}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，如果满足：

(1) 对于任意的两个元素 $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$，都有 $[H_1, H_2] = 0$;

(2) 对于任意的 $X \in \mathfrak{g}$，如果有 $[X, H] = 0$ 对全部 $H \in \mathfrak{h}$ 都成立，则 $X \in \mathfrak{h}$.

(3) 对于全部 $H \in \mathfrak{h}$，$\mathrm{ad}(H)$ 作为 Lie 代数的表示是完全可约的。

Cartan 子代数的维度称为半单 Lie 代数的秩。

条件 1 说明了 Cartan 子代数是交换子代数，然后条件 2 就说明这个极大的交换子代数。

Proposition (2.6.20) 令 $\mathfrak{g}$ 是一个复的半单 Lie 代数，令 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧实形式，再令 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{k}$ 任意的极大交换子代数，定义 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$. 然后，$\mathfrak{h}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数。

我们以后下面要谈论 Lie 群和 Lie 代数的表示，但是却只限制在紧 Lie 群，特别是紧的矩阵群上面，从而根据上面的定理，我们也只要去研究半单 Lie 代数就可以了。

2.7 Matrix Group

这一节限制在矩阵群上面，这节将给出很多可计算的例子，先来求一些矩阵群的 Lie 代数。

Theorem (2.7.1) 任意的矩阵 $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 都可以写作 e^X 的形式，其中 $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$。

这个直接从矩阵幂那一套证明并不那么方便，但是直接从 Lie 代数作为单位元附近的 Lie 群与单参子群的对应关系，这个结论就是比清晰的了。这个定理也可以用来说明，一般线性群的 Lie 代数就是整个方阵构成的集合。

(2.7.2) 利用 $\mathrm{Ad}_D(A) = DAD^{-1}$，我们有 $\exp(DAD^{-1}) = D\exp(A)D^{-1}$. 这当然也可以直接用矩阵指数映射的展开来证明。

Proposition (2.7.3) 指数映射联系了迹与行列式，$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

Proof: 将矩阵分解为幂零的和可对角化的两个矩阵的乘积 $A = SN$，因为 S 和 N 可交换，所以

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(S))\det(\exp(N)).$$

如果可以对角化，那么直接对角化为

$$\exp(S) = \exp(D\Lambda D^{-1}) = D\exp(\Lambda)D^{-1},$$

而 $\exp(\Lambda)$ 是可以直接计算的，即 $\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$. 那么

$$\det(\exp(S)) = \det\left(D\exp(\Lambda)D^{-1}\right) = \det(\exp(\Lambda)) = \exp\left(\sum_i \lambda_i\right) = \exp\mathrm{tr}(\Lambda) = exp(\mathrm{tr}(S))$$

对于幂零矩阵来说，容易验证 $\det\exp(N) = 1$，最后就可以得到任意矩阵都有

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)).$$

□

有了上面的一些结论，我们来求特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$。如果 $\det e^A = 1$，那么 $e^A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，而 $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，因为 $e^{\mathrm{tr}(A)} = \det e^A = 1$，所以 $\mathrm{tr}(A) = 0$. 这就是说 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 就是那么迹为 0 的矩阵的集合。

作为 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 的子群，$\mathrm{SU}(n)$ 的元素满足 $AA^\dagger = I$，那么

$$\mathrm{d}AA^\dagger + A\mathrm{d}A^\dagger = 0,$$

或者整理成 Maurer-Cartan 形式的样子

$$A^{-1}\mathrm{d}A + (A^{-1}\mathrm{d}A)^\dagger = 0,$$

这就是说，$\mathfrak{su}(n)$ 是由满足 $B + B^\dagger = 0$ 的矩阵零迹矩阵 B 构成的集合。当然，这也可以用矩阵幂来做，我们略去了。

从矩阵幂的形式

$$e^A = \sum_{i=0}^{n} \frac{A^n}{n!},$$

我们当然会去遐想，是否其他函数也有这样的幂函数展开？其中最有趣的展开莫过于 log 了，因为他是 exp 的反函数。就这样，我们定义

$$\log A = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(A-I)^m}{m}.$$

当 $\|A-I\| < 1$ 的时候，这个幂级数显然是收敛且连续的。我们也确实可以证明在收敛的时候他和 exp 是反函数，适当对角化（不能的话就用可对角的矩阵序列趋近）之后就可以直接计算验证。

前面说过 e^{X+Y} 在 X, Y 不对易的时候是一般不等于 $e^X e^Y$，这里我们举一个例子：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} & 1 \\ 2 & \end{pmatrix},$$

直接计算就知道 $[X,Y] \neq 0$. 然后 e^X 是容易计算的，因为他是对角的

$$e^X = \begin{pmatrix} e & \\ & e^2 \end{pmatrix},$$

后面的 Y 对角化之后也是容易的，

$$Y = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \\ & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

所以

$$e^Y = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\sqrt{2}) & \\ & \exp(\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

那么

$$e^X e^Y = \begin{pmatrix} e & \\ & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{2}\right) & \sinh\left(\sqrt{2}\right)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\sinh\left(\sqrt{2}\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}.$$

e^{X+Y} 的计算不再重复了

$$e^{X+Y} = \begin{pmatrix} 2/3 + e^3/3 & e^3/3 - 1/3 \\ 2e^3/3 - 2/3 & 2e^3/3 - 2/3 \end{pmatrix}.$$

所以 $e^{X+Y}\neq e^Xe^Y$.

Proposition (2.7.4) 令 X,Y 都是 $n\times n$ 的矩阵，则

$$e^{X+Y}=\lim_{m\to\infty}\left(e^{X/m}e^{Y/m}\right)^m.$$

这证明挺简单的，所以略去了。下面这个公式更加复杂，因此证明也很复杂，以至于都需要一个名字来标记这个公式了。证明也略去了。

Theorem (2.7.5) Campbell-Baker-Hausdorff 公式：

$$\log\left(e^Xe^Y\right)=X+\int_0^1\varphi\left(e^{\mathrm{ad}(X)}e^{t\,\mathrm{ad}(Y)}\right)(Y)\mathrm{d}t,$$

其中

$$\varphi(z)=\frac{z\log z}{z-1}.$$

幂级数展开 $\varphi(z)$ 我们有

$$\varphi(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)(z-1)^{n-1}.$$

带入上面的公式，就可以得到漂亮的展开

$$\log\left(e^Xe^Y\right)=X+Y+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\cdots.$$

级数展开不是上面公式的重点，重点是展开后全是对易子 $[\star,\star]$ 的形式，直接来自于积分里面的 ad. 所以使用这个公式可以证明矩阵 Lie 群和 Lie 代数关系中的映射关系，因为 Lie 代数同态是可以分配进对易子的但是对于一般的 X 和 Y 的线性组合却是不可以的。

我们现在来对 Lie 代数进行展开，设 Lie 代数的基为 $\{a_i\}$，那么

$$[x,y]=\sum_{i,j}x_iy_j[a_i,a_j].$$

但是因为交换子是封闭的，所以

$$[a_i,a_j]=\sum_k c_{kij}a_k.$$

然后考虑伴随表示的展开

$$\mathrm{ad}(a_i)(a_j)=\sum_k\mathrm{ad}(a_i)_{kj}a_k.$$

对于一般线性群的 Lie 代数来说 $\mathrm{ad}(a_i)(a_j)=[a_i,a_j]$，这就是说

$$[a_i,a_j]=\sum_k\mathrm{ad}(a_i)_{kj}a_k.$$

使用线性性，我们最后得到

$$[x,a_i]=\sum_k\mathrm{ad}(x)_{ki}a_k.$$

这样，我们就可以求得 $\mathrm{ad}(x)$ 的矩阵。

现在来考虑 $\mathfrak{so}(3)$ 的 Lie 代数，因为 $\mathfrak{so}(3)$ 是那些 3×3 的反对称矩阵构成的集合，我们取下面三个矩阵作为基

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad\eta_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad\eta_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

然后可以计算对易子如下

$$[\eta_1,\eta_2]=\eta_3,\quad [\eta_1,\eta_3]=-\eta_2,\quad [\eta_2,\eta_3]=\eta_1.$$

如果建立映射 $\eta_i\mapsto e_i$，其中 e_i 就是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基，而映射将 $[\star,\star]$ 映射为叉乘，那么这就是一个 Lie 代数同构。

那么我们也可以计算得伴随表示为

$$\operatorname{ad}(\eta_1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \operatorname{ad}(\eta_2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \operatorname{ad}(\eta_3)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

有趣的是，在这组基的选取下 $\operatorname{ad}(\eta_i)=\eta_i$.

下面来看看 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，他是所有二阶零迹矩阵构成的群，我们设他的基为

$$h=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

那么

$$[h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f,\quad [e,f]=h.$$

所以

$$\operatorname{ad}(h)=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\quad \operatorname{ad}(e)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \operatorname{ad}(f)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}.$$

(2.7.6) 定义 Killing 形式为 $(x,y)_K$ 如下

$$(x,y)_K=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)),$$

其中 x,y 是任意的 Lie 代数元素。

在选取基的形式下，我们可以得到矩阵 $K_{ij}=(a_i,a_j)_K$.

Theorem (2.7.7) Killing 形式是双线性的，且

(1) 对于任意的 Lie 代数自同构 φ 我们对任意的 x,y 都有 $(\varphi x,\varphi y)_K=(x,y)_K$,

(2) 对于任意的 x,y,z 有 $([x,y],z)_K=(x,[y,z])_K$,

(3) 如果 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，那么在 $\mathfrak{h}$ 上的 Killing 形式 $(\star,\star)_{K_\mathfrak{h}}$ 和原本的 Killing 形式 $(\star,\star)_K$ 对于所有 $x,y\in\mathfrak{h}$ 满足 $(x,y)_{K_\mathfrak{h}}=(x,y)_K$.

对于第二点，注意到 $\operatorname{ad}([x,y])=\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)-\operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(x)$,

$$\begin{aligned}([x,y],z)_K-(x,[y,z])_K&=\operatorname{tr}\{\operatorname{ad}([x,y])\operatorname{ad}(z)-\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}([y,z])\}\\&=\operatorname{tr}\{\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(z)-\operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(z)\operatorname{ad}(x)\}\\&=0.\end{aligned}$$

Theorem (2.7.8) 一个 Lie 代数是半单的当且仅当他没有一个非平凡的交换理想[3]。 这个结论经常也被当成定义，可以看到这种半单的定义自动抛弃了一维理想的存在，因为一维理想一定是交换的。

Theorem (2.7.9) 一个 Lie 代数是半单的，当且仅当他的 Killing 形式是非退化的，即矩阵 $K_{ij}=(a_i,a_j)_K$ 是非退化的，或者对任意的 a 都成立 $(a,b)_K=0$ 的话能推出 $b=0$。

[3]交换理想首先是一个理想，然后也是一个交换子代数。

靠这个定理，我们来看看 $\mathfrak{so}(3)$ 是否是半单的。容易计算得他的 Killing 形式为

$$K_{ij} = (\eta_i, \eta_j)_K = \mathrm{tr}(\eta_i\eta_j) = -2\delta_{ij}.$$

当然是非退化的，所以 $\mathfrak{so}(3)$ 是半单 Lie 代数。同理 $\mathfrak{sl}(2)$ 也是半单 Lie 代数。

2.8 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(3)$ and $\mathfrak{su}(2)$

在分析一般的半单 Lie 代数之前，我们先来看看几个比较简单的 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(3)$ 和 $\mathfrak{su}(2)$，他们之间存在着紧密的联系。

前面已经证明过 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(3)$ 的基和相互的对易关系有

$$[h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f,\quad [e,f]=h,$$

$$[\eta_1,\eta_2]=\eta_3,\quad [\eta_1,\eta_3]=-\eta_2,\quad [\eta_2,\eta_3]=\eta_1.$$

现在我们来看 $\mathfrak{su}(2)$ 的表现，他是所有满足 $B+B^\dagger=0$ 的复二阶零迹矩阵 B 的集合。我们选如下三个矩阵作为基：

$$\mu_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \mu_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mu_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}.$$

容易验证

$$[\mu_1,\mu_2]=\mu_3,\quad [\mu_1,\mu_3]=-\mu_2,\quad [\mu_2,\mu_3]=\mu_1.$$

这和 $\mathfrak{so}(3)$ 的对易关系一模一样，于是我们可以引入 $\mathbb{R}$-线性映射建立两者作为实 Lie 代数的同构，也就是 $\mathfrak{so}(3)\cong\mathfrak{su}(2)$.

很容易证明 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 的复化即 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，这就是说 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 为了分析 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的结构，我们来看 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的结构。

任何一个复可逆 2×2 矩阵都可以唯一分解（极分解）为

$$\lambda = ue^h$$

其中 u 幺正而 h 是 Hermite 矩阵。现在假如 $\det\lambda=1$，则

$$\det(u)e^{\mathrm{tr}(h)}=1$$

于是 $\det(u)=1$ 而 $\mathrm{tr}(h)=0$. 前者的一般形式为

$$u=\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ -c+id & a-ib\end{pmatrix},$$

且满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$，因此其拓扑上等价为 3-球面 $\mathbb{S}^3$. 而前者的一般形式为

$$h=\begin{pmatrix}e & f-ig\\ f+ig & -e\end{pmatrix},$$

拓扑上等价于 $\mathbb{R}^4$，因此 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 在拓扑上等价于 $\mathbb{R}^4\times\mathbb{S}^3$. 当然拓扑上的结论在我们这里暂时没什么用。

这样来看 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的极分解中，令 $b=-ih$，则

$$\mathrm{tr}(b)=0,\quad b^\dagger+b=0,$$

以及 $u=e^a$ 有

$$\mathrm{tr}(a)=0, \quad a^\dagger+a=0,$$

所以 $a,b\in\mathfrak{su}(2)$，且 $\lambda=e^{a+ib}$.

注意到任取一个实数 t 和 $a\in\mathfrak{su}(2)$，还有 $ta\in\mathfrak{su}(2)$，所以任意的一个 $\lambda\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 都可以写成

$$\lambda=e^{ta+itb}$$

他在 $t=0$ 的导数 $a+ib$ 就构成 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，那么任意的 $c\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 都可以写成

$$c=a+ib,$$

其中 $a,b\in\mathfrak{su}(2)$，这就是说 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{su}(2)$ 的复化。

单纯从 Lie 代数来看，我们在 $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}$ 中引入 $L_n=i\mu_n$，则

$$[L_1,L_2]=iL_3, \quad [L_1,L_3]=-iL_2, \quad [L_2,L_3]=iL_1.$$

再引入 $L_\pm=L_1\pm iL_2$，则

$$[L_+,L_-]=2L_3, \quad [L_3,L_+]=L_+, \quad [L_3,L_-]=-L_-.$$

我们令 $h'=2h, e'=2e, f'=2f$，则 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的三个基的对易关系变成

$$[e',f']=2h', \quad [h',e']=e', \quad [h',f']=-f'.$$

可见一模一样。

这样，三个 Lie 代数之间的关系就清楚了

$$\mathfrak{su}(2)\cong\mathfrak{so}(3), \quad \mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_\mathbb{C}.$$

现在来看 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约表示，每一个 Lie 代数的元素 a 都变成了有限维矢量空间 V 上面的线性映射 $\pi(a)$，复数域的代数完备性可以推知 $\pi(h)$ 有一个特征值，即

$$\pi(h)v=\lambda v.$$

那么

$$\pi(h)\pi(e)v=[\pi(h),\pi(e)]v+\pi(e)\pi(h)v=(\lambda+2)\pi(e)v.$$

所以 $\pi(e)v$ 也是 $\pi(h)$ 的本征矢量，本征值是 $\lambda+2$，同理 $\pi(f)v$ 也是 $\pi(h)$ 的本征矢量，本征值是 $\lambda-2$.

我们反复作用 $\pi(e)$ 和 $\pi(f)$ 到 v 上就可以得到

$$\pi(h)\pi(e)^n v=(\lambda+2n)\pi(e)^n v,$$

所以，要么 $\pi(e)^n v$ 也是一个本征矢，本征值为 $\lambda+2n$，或者 $\pi(e)^n v=0$。由于 V 是有限维的，我们不可能有着无穷多个不同的本征值，因此存在一个 $N\geq 0$ 使得

$$\pi(e)^N v\neq 0, \quad \pi(e)^{N+1}v=0$$

这就是说存在一个 u_0 使得

$$\pi(h)u_0=\lambda u_0, \quad \pi(e)u_0=0.$$

λ 是 $\pi(h)$ 的最大的本征值。

我们再定义 $u_k = \pi(f)^k u_0$，那么

$$\pi(h)u_k = (\lambda - 2k)u_k,$$

也不可能无限地进行下去。就是说存在一个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $k \le m$ 满足 $u_k \ne 0$ 但 $u_{m+1} = 0$.

使用归纳法和对易关系 $[\pi(e), \pi(f)] = \pi(h)$ 可以算得

$$\pi(e)u_k = (k\lambda - k(k-1))u_{k-1} \quad (k > 0).$$

假如 $u_{m+1} = 0$，那么

$$0 = \pi(e)u_{m+1} = ((m+1)\lambda - m(m+1))u_m = (m+1)(\lambda - m)u_m.$$

这就是说 $\lambda = m$. 那么一个本征值为正整数，其他的本征值可以通过 $\lambda - 2n$ 得到，所以也是整数，这就推出了：

Proposition (2.8.1) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的 $m+1$ 维不可约表示中 $\pi(h)$ 的本征值都是整数，且可以对角化为 $\mathrm{diag}(m, m-2, \cdots, -m+2, m)$。

到上面为止，唯一留下的就是要证明对任意的 m 上面的表示都是不可约的，而且确实是 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示。为此，我们可以证明 $\{u_0, u_1, \cdots, u_m\}$ 构成一组基，这是因为每一个 u_k 都是 $\pi(h)$ 对应不同本征值的本征矢量，于是 $\pi(f)u_k = u_{k+1}$ 保证了不可约性。而他是 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示则是可以直接计算验证的，略去之。

将表示的矩阵写出来可能更加清晰，$\pi_m(h) = \mathrm{diag}(m, m-2, \cdots, -m+2, m)$ 和

$$\pi_m(e) = \begin{pmatrix} 0 & m & & & \\ & 0 & m-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_m(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m & 0 \end{pmatrix}.$$

在物理上更习惯用整数或者半整数 $j = m/2$ 来表示维度，并且会适当调整 $\pi(h)$ 的系数，这就造成了角动量问题中的半整数的出现。

Proposition (2.8.2) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的 $2j+1$ 维不可约表示中 $\pi(h)$ 的本征值或者是整数或者是半整数，且可以对角化为 $\mathrm{diag}(-j, -j+1, \cdots, j-1, j)$。

2.9 Semi-simple Lie Algebras

对于有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，我们可以找到其也是有限维的紧实形式。因为是半单的，所以这个紧实形式也同构于一个紧 Lie 群 H 的 Lie 代数 $\mathfrak{h}$（直接就看成是了），所以 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$，那么 $\mathfrak{h}$ 上面存在着内积在表示 $\mathrm{Ad} : H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{h})$ 作用下不变，即

$$(e^{t\,\mathrm{ad}(h)}x, e^{t\,\mathrm{ad}(h)}y) = (x, y).$$

其中 $x, y \in \mathfrak{h}$，可以把这个内积推广到 $\mathfrak{g}$ 内取复值的内积，让我们还是使用符号 $(\star, \star)$ 来标记他，那么求导就有

$$(\mathrm{ad}(h)x, y) + (x, \mathrm{ad}(h)y) = 0.$$

所以表示 ad 是反 Hermit 的，即

$$\mathrm{ad}(h)+\mathrm{ad}(h)^{\dagger}=0.$$

此时 $i\,\mathrm{ad}(h)$ 就是 Hermit 的，因此根据有限维的谱定理，我们一定可以对角化 $i\,\mathrm{ad}(h)$，也就是说可以对角化 $\mathrm{ad}(h)$ 当 $h\in\mathfrak{h}$，而且是对角元是纯虚的。特别地，如果 h 在 $\mathfrak{h}$ 的极大交换子代数 $\mathfrak{l}$ 里面，$\mathrm{ad}(h)$ 也是可以对角化的。因此如果 $h_1,h_2\in\mathfrak{l}$，$\mathrm{ad}(h_1),\mathrm{ad}(h_2)$ 是可交换的，那么他们的线性组合 $h=h_1+ih_2$ 对应的 $\mathrm{ad}(h)$ 也是可以对角化的[4]。此时 $\mathfrak{l}+i\mathfrak{l}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，所以如果 h 在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数里面，那么 $\mathrm{ad}(h)$ 是可以对角化的。

我们可以分解有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为这样的两个子代数，其中一个是 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}'.$$

令有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的秩为 l，那么设 Cartan 子代数 $\mathfrak{l}$ 的基为 $\{h_1,h_2,\cdots,h_l\}$，因为 $\mathrm{ad}(h_j):\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}'$ 且 h_j 在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数里面，所以 $\mathrm{ad}(h_j)$ 是可以对角化的，因此存在 $\mathfrak{g}'$ 的基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-l}\}$ 使得

$$\mathrm{ad}(h_j)v_k=[h_j,v_k]=\alpha_k(h_j)v_k,$$

其中 $\alpha_k(h_j)$ 就是 $\mathrm{ad}(h_j):\mathfrak{g}'\to\mathfrak{g}'$ 的本征值。而 Cartan 子代数作为交换子代数，我们有交换子 $[h_j,h_k]=0$ 成立。但 Cartan 子代数又是极大的交换子代数，所以对任意的 k，我们总可以找到一个 j 使得 $\alpha_k(h_j)\neq 0$，否则 $[h_j,v_k]=0$ 就可以推出 v_k 在 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 里面了。

设 $h=\sum_{j=1}^{l}\mu_j h_j$ 是任意的 Cartan 子代数里面的元素，那么

$$\mathrm{ad}(h)v_k=[h,v_k]=\sum_{j=1}^{l}\mu_j\alpha_k(h_j)v_k,$$

我们定义 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 上的线性函数 $\alpha_k:\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$ 如下

$$\alpha_k(h)=\sum_{j=1}^{l}\mu_j\alpha_k(h_j),$$

那么

$$\mathrm{ad}(h)v_k=[h,v_k]=\alpha_k(h)v_k.$$

这样定义的线性函数被称为 $\mathfrak{g}$ 的根，所有根的集合记做 Δ.

(2.9.1) 对有限维半单复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个根 α，我们将满足方程的

$$[h,v_\alpha]=\alpha(h)v_\alpha$$

矢量 v_α 构成的集合称为对应于根 α 的根子空间。

我们于是把有限维半单复 Lie 代数的分解更加细化为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha.$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是诸根子空间。Cartan 子代数的根也可以认为是恒为 0 的，那么 $\mathfrak{h}$ 也可以认为是一个根子空间 $\mathfrak{g}_0$。

[4]这是因为可交换线性变换可以同时对角化。

两个根子空间可以进行对易子运算，即 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$，设 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, a_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$，则 $[a_\alpha, a_\beta]$ 也是在某个根子空间里面的，为了求他的根，我们用对任意的 $h \in \mathfrak{h}$ 求 $\mathrm{ad}(h)[a_\alpha, a_\beta]$，因为 $\mathrm{ad}(h)$ 是导子，所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(h)[a_\alpha, a_\beta] &= [\mathrm{ad}(h)a_\alpha, a_\beta] + [a_\alpha, \mathrm{ad}(h)a_\beta] \\
&= \alpha(h)[a_\alpha, a_\beta] + [a_\alpha, \beta(h)a_\beta] \\
&= (\alpha(h) + \beta(h))[a_\alpha, a_\beta]
\end{aligned}$$

因此，如果 $\alpha + \beta \in \Delta$，则 $\mathrm{ad}(h)[a_i, a_j] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，于是 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, 否则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \{0\}$.

Theorem (2.9.2) 设 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, a_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$，那么如果 $\alpha + \beta \neq 0$，则 $(a_\alpha, a_\beta)_K = 0$.

这个证明没什么难度，考虑 $\mathrm{ad}(a_\alpha)\,\mathrm{ad}(a_\beta)a_\gamma$ 就可以了。特别地，我们考虑 $h \in \mathfrak{h}$ 且 $a \in \mathfrak{g}_\alpha$，则

$$(h, a_\alpha)_K = 0.$$

以此和 Killing 形式在 $\mathfrak{g}$ 上非退化可以推知，Killing 形式在 $\mathfrak{h}$ 上也是非退化的。

那么我们就有可能用非退化的 Killing 形式来表示根，即对根 α 存在 $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ 使得[5]

$$(h_\alpha, h)_K = \alpha(h),$$

因之

$$h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta,$$

因为 Killing 形式是对称的，所以 $(h_\alpha, h_\beta)_K$ 可以推知 $\alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha)$.

(2.9.3) 我们定义 $\langle \star, \star \rangle$ 如下：

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (h_\alpha, h_\beta)_K.$$

那么 $\alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$. 那么 $\langle -\alpha, \beta \rangle = -\alpha(h_\beta) = -\langle \alpha, \beta \rangle$ 以及

$$[h_\beta, a_\alpha] = \langle \beta, \alpha \rangle a_\alpha.$$

因为 $\mathrm{ad}(h)$ 是对角的，且对角元素为 $\{\alpha(h)\}$，其中 $\alpha \in \Delta$，那么直接根据 Killing 形式的定义，就有

$$(h, h')_K = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \gamma(h) \gamma(h'),$$

特别地，我们有

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (h_\alpha, h_\beta)_K = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \gamma(h_\alpha) \gamma(h_\beta) = \sum_{\gamma \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}_\gamma) \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \gamma, \beta \rangle.$$

Proposition (2.9.4) 如果 $\alpha \in \Delta$，则 $-\alpha \in \Delta$.

假若 $-\alpha \notin \Delta$, 那么对于任何 $\beta \in \Delta$ 都有 $\alpha + \beta \neq 0$, 那么就是说, 对于任何的 $a \in \mathfrak{g}$ 都有 $(a_\alpha, a)_K = 0$, 由 Killing 形式的非退化可以知道此时 $a_\alpha = 0$, 这不可能。那么, 这样也顺便推出了, 对于任意的 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, 一定存在一个 $a_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得 $(a_\alpha, a_{-\alpha})_K \neq 0$. 因为 Killing 形式是双线性的，调整系数我们可以使得 $(a_\alpha, a_{-\alpha})_K$ 成为任意的复常数。

Proposition (2.9.5) 设 $a_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 和 $a_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$，则 $[a_\alpha, a_{-\alpha}] = (a_\alpha, a_{-\alpha})_K h_\alpha$. 这也说明了，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 是一维的，且由 h_α 张成。

这个直接计算就是了，如果我们选 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 满足 $(E_\alpha, F_\alpha)_K = 2/\langle \alpha, \alpha \rangle$，再选

$$H_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} h_\alpha$$

[5] 使用类似定义对偶空间的方式。

那么计算对易关系

$$[H_\alpha, E_\alpha] = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}[h_\alpha, E_\alpha] = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\langle\alpha,\alpha\rangle E_\alpha = 2E_\alpha,$$
$$[H_\alpha, F_\alpha] = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}[h_\alpha, F_\alpha] = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\langle\alpha,-\alpha\rangle F_\alpha = -2F_\alpha,$$
$$[E_\alpha, F_\alpha] = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}h_\alpha = H_\alpha.$$

总结一下就是

$$[H_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha, \quad [H_\alpha, F_\alpha] = -2F_\alpha, \quad [E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha.$$

这其实就是 $\mathfrak{sl}(2)$ 的对易关系，所以呢，这三个基 $E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha$ 生成了一个同构于 $\mathfrak{sl}(2)$ 的子代数，我们记做 $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$.

Theorem (2.9.6) 如下三个陈述成立：

(1) 如果 $\alpha \in \Delta$，那么 $k\alpha \notin \Delta$，其中 $k \in \mathbb{C}$，除非 $k = -1$.

(2) 如果 $\alpha \in \Delta$，那么 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是一维的。

(3) 对每一个 α，我们都可以找到 $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 以及 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 使得对易关系

$$[H_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha, \quad [H_\alpha, F_\alpha] = -2F_\alpha, \quad [E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$$

成立，且 H_α 是唯一的，不依赖于 E_α 和 F_α 的选取。

第三点前面部分刚刚已经证明过了，而我们定义的 H_α 正比于 h_α，所以他就是唯一的。第一第二点基本都是来自于 $\mathfrak{sl}(2)$ 的同构。我们下面用 H 代替 h 来看一些公式是怎么变化的。首先

$$[H_\beta, a_\alpha] = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}[h_\beta, a_\alpha] = 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}a_\alpha.$$

Proposition (2.9.7) 对任意的 $\alpha, \beta \in \Delta$，$2\langle\alpha,\beta\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ 是一个整数。

这个是因为 $2\langle\alpha,\beta\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ 是 $\mathrm{ad}(H_\beta)$ 的本征值，而 $\mathfrak{sl}(2)$ 的有限维不可约表示的本征值只能是整数。如果把 $\langle\star,\star\rangle$ 当成内积，那么 $\langle\alpha,\beta\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ 就是 β 往 α 方向的投影，可以看到投影只能是整数和半整数。

我们继续做一些计算

$$(H_\alpha, H_\beta)_K = \frac{4\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle},$$

特别地，

$$(H_\alpha, H_\alpha)_K = \frac{4}{\langle\alpha,\alpha\rangle},$$

于是

$$2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2\frac{4\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle}\frac{\langle\beta,\beta\rangle}{4} = 2\frac{(H_\alpha,H_\beta)_K}{(H_\beta,H_\beta)_K}$$

都是整数。

2.10 SU(2) and SO(3)

上面看到了 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 代数，或者说 $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} \cong \mathfrak{so}(3)_\mathbb{C}$ 的 Lie 代数，现在我们回到 Lie 群 SU(2) 和 SO(3)。

首先复习一下 SO(3) 的一些更细的结构，SO(3) 是三维旋转群，不包括反射。

Proposition (2.10.1) 绕着固定单位矢量 $\mathbf{a}$ 右手螺旋的逆时针方向旋转 θ 后的 $\mathbf{x}$ 表示为

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (1-\cos\theta)\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{x}.$$

为了证明他，首先注意到当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{x}$ 垂直的时候显然有

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mathbf{x} = \cos\theta\,\mathbf{x} + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{x}.$$

对于一般的 $\mathbf{x}$，分解为平行于 $\mathbf{a}$ 和垂直于 $\mathbf{a}$（设其单位矢量为 $\mathbf{b}$）的两个部分 $\mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$，而平行于 $\mathbf{a}$ 的部分在旋转下不变 $\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$。由于 $\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)$ 的线性性，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mathbf{x} &= \mu\mathbf{a} + \cos\theta\,(\nu\mathbf{b}) + \sin\theta\,\mathbf{a}\times(\nu\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{x}\cos\theta + (1-\cos\theta)\mu\mathbf{a} + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{x} \\
&= \mathbf{x}\cos\theta + (1-\cos\theta)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a} + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{x},
\end{aligned}$$

但是 $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})\mathbf{a} - \mathbf{x}$. 所以得证。

现在对 $\mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)$ 中的 θ 求 $\theta = 0$ 处的导数即可得到其 Lie 代数

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} \mathrm{Rot}(\mathbf{a},\theta)\mathbf{x} = \mathbf{a}\times\mathbf{x}$$

选 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i$，得到 Lie 代数的三个基为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chapter 3

Connection

先复习一个物理，作为伪 Riemann 几何的引入。并且，下面我们假设使用 Einstein 指标规则，即存在一上一下存在重复指标的时候就对这个指标求和，比如 $x^i y_i = \sum_i x^i y_i$ 等。

在惯性参考系中，间隔写作 $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$，如果采用保持惯性参考系的变换，即 Lorentz 变换，那么间隔不变。可是，如果我们变到了非惯性系，那么间隔一般来说不再能够写作 $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$，比如有一个变换 A，他不是仿射的，那么 $x_2 = A(x_1)$ 后（指标规则依然如同狭义相对论）

$$\mathrm{d}x_2^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_1^\nu}(x_1)\mathrm{d}x_1^\nu$$

所以

$$(\mathrm{d}s_2)^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x_2^\mu\mathrm{d}x_2^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_1^\rho}(x_1)\frac{\partial A^\nu}{\partial x_1^\sigma}(x_1)\mathrm{d}x_1^\rho\mathrm{d}x_1^\sigma,$$

右边并不能写成 $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x_1^\mu\mathrm{d}x_1^\nu$，而是 $g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_1^\mu\mathrm{d}x_1^\nu$，其中

$$g_{\rho\sigma}(x_1) = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_1^\rho}(x_1)\frac{\partial A^\nu}{\partial x_1^\sigma}(x_1)$$

不再是对角的，而且也不再是一个常矩阵。

Einstein 认为，非惯性参考系中产生的动力学效应可以等价为一个力场的作用（当然，这个力场和真的力场还是有些许不同的），从上面可以看到，这个力场应当完全由时空的几何结构（度规）决定。此外，Einstein 认为，真实存在的重力场也应该是时空的几何结构的改变，同样被度规决定。所以，时空的几何结构不再是时空的固有性质，不再是一切物理现象的背景，而本身参与到物理过程中，本身是一种物理对象。

这就是史上第一个非 Abel 场论，即广义相对论的一些基本想法。狭义相对论的基本背景是平直空间，比如 $\mathbb{R}^4$ 或者 $\mathbb{R}^{3+1}$，但现在我们必须扩展到流形上，为此伪 Riemann 几何是必须的。

(3.0.1) 假设 M 是一个可微流形，且在他每一点的切空间 T_pM 都存在度规，即一个非退化[1]的对称二重线性映射 $\langle\star,\star\rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.

由于二重线性映射可以看作一个张量 $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$，因此度规可以看出一个张量场 g。局部来看 $g_p(u,v) = u^iv^jg(e_i,e_j) = u^iv^jg_{ij}$，最后的要求，$(g_{ij})$ 的负本征值的个数不变[2]，即如果在一点为 I 个，其他点都是 I 个。这样的 (M,g) 就被称为一个伪 Riemann 流形。当 $I = 0$ 时候，就变成 Riemann 流形。

[1] 即如果 $\langle a,a\rangle = 0$，则 $a = 0$.

[2] 根据惯性定理，负本征值的个数和选取的基无关。

因为 (g_{ij}) 对实对称矩阵，所以可以对角化成实对角矩阵，所以非退化条件等价于没有零本征值或者 $\det(g_{ij}) \neq 0$。

前面我们已经在 $\mathbb{R}^4$ 上选取了度规 η 使得 $\mathbb{R}^4$ 变成了一个伪 Riemann 流形 $\mathbb{R}^{3+1}$，但是这样的说法还是有些模糊。之所以我们能说是在 $\mathbb{R}^4$ 上选取了度规，是因为 $\mathbb{R}^4$ 在每一点的切空间 $T_p\mathbb{R}^4$ 都同构于 $\mathbb{R}^4$，并且，在每一点定义的内积，都可以看作全局定义的在 $\mathbb{R}^4$ 上定义的度规。但是到了可微流形上，就必须强调这些区别。

记 g^{il} 是 g_{il} 的逆，更准确地说就是 $g^{il}g_{lm} = \delta^i_m$. 抬升和下降指标依然由度规 g 完成，即 $x_i = g_{ij}x^j$ 和 $x^i = g^{ij}x_j$，需要注意的是，现在求导和提升或者下降指标不再对易，因为 g 是可以改变的。

3.1 Geodesic

在伪 Riemann 流形上可以使用度规来定义可微曲线 $\gamma : [a, b] \to M$ 的长度

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{|\langle\gamma'(\tau), \gamma'(\tau)\rangle|}\mathrm{d}\tau = \int_a^b \sqrt{|g(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau))|}\mathrm{d}\tau.$$

如果在物理上理解一条 γ 为一个粒子的世界线，则还要加上 $\langle\gamma'(\tau), \gamma'(\tau)\rangle > 0$ 的假设，此时 $L(\gamma)$ 就是世界线的线长，其中参数 τ 不一定有什么物理意义。类比在 $\mathbb{R}^{3+1}$ 里面解耦合的作用量的形式，可以定义作用量积分为

$$S(\gamma) = -\frac{mc}{2}\int_a^b \langle\gamma'(\tau), \gamma'(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau,$$

而使得 $S(\gamma)$ 取极值的路径被称为测地线。

为了求出测地线，将作用量积分在局部坐标下面写出来，用 x 来表示从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的局部平凡化，就是说 $x(\tau) = x(\gamma(\tau))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标，此外用 $\dot{f}$ 来表示 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\tau$，则

$$S(\gamma) = -\frac{mc}{2}\int_a^b g_{ij}(x(\tau))\dot{x}^i(\tau)\dot{x}^j(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

他的 Lagrange 方程直接计算后，发现可以写作

$$\ddot{x}^i(\tau) + \Gamma^i{}_{jk}(x(\tau))\dot{x}^j(\tau)\dot{x}^k(\tau) = 0,$$

其中

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk})$$

被称为 Christoffel 记号，下面我们讨论联络的时候还会再遇到。如果有了上述方程的一个解 $x(\tau)$，下面将要指出的是 $\langle\dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau)\rangle$ 是一个常数，就像我们在狭义相对论里面说的 $u^\mu u_\mu = 1$ 一样。这点直接计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\langle\dot{x}(\tau), \dot{x}(\tau)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(g_{ij}(x(\tau))\dot{x}^i(\tau)\dot{x}^j(\tau)\Big) = 0$$

就可以了，其中要用到上面的 Lagrange 方程。这个结论可以理解成测地线的切矢量的模长 $\langle\gamma', \gamma'\rangle$ 是一个常数。

测地线局部的存在唯一性靠着二阶常微分方程的理论就可以得到，从局部到整个空间，我们可以一个一个坐标卡延拓过去，但是否可行这里不做讨论。但类似积分曲线，紧的流形（紧是有限性条件）上这总是可以做到的。

在参数化过程中，选取一个有意义的参数有利于我们观察问题，这里，如同狭义相对论里面一样，可以采用线元来参数化我们的曲线，这个时候

$$L(\gamma) = \int \sqrt{|\langle\gamma'(s), \gamma'(s)\rangle|}\mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{|g(\gamma'(s), \gamma'(s))|}\mathrm{d}s,$$

将 $u=\gamma'(s)$ 看成速度矢量，可以类比定义动量 $p=mcu$. 又注意到 $\langle u,u\rangle$ 在选取 s 作为参数的时候满足（不怎么严格，但是用其他方法强行算一波还是有下面这个结论）

$$(\mathrm{d}s)^2\langle u,u\rangle = g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}(\mathrm{d}s)^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = (\mathrm{d}s)^2,$$

所以 $\langle u,u\rangle = 1$，因此

$$p^ip_i = g_{ij}p^ip^j = m^2c^2.$$

反过来，假如粒子的运动轨迹是测地线，此时在线元参数化下 $\langle u,u\rangle = u^iu_i = 1$ 构成一个约束，我们可以检查作用量实际上可以写作

$$S = -mc\int \mathrm{d}s$$

的形式。

因为约束的存在，我们需要在 $L_s=-mc$ 加上如下乘子，构造新的 Lagrangian

$$L_s^* = L_s + \lambda(x,u,s)(u^iu_i-1),$$

为使下面的讨论对一般的 Lagrangian 都成立，设 $L_s = L_{0,s}+L_{1,s} = -mc+L_{1,s}$，此时的 Lagrange 方程写作

$$\frac{\partial L_s^*}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial L_s^*}{\partial u^i} = \frac{\partial L_s}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial L_s}{\partial u^i} + \frac{\partial}{\partial x^i}[\lambda(u^iu_i-1)] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial u^i}[\lambda(u^iu_i-1)] = 0.$$

代入约束和 L 的具体形式

$$\frac{\partial L_{1,s}}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial L_{1,s}}{\partial u^i} = (2(u_i)' - \partial_i g_{mn}u^mu^n)\lambda + 2u_i\lambda',$$

两边对左边不妨记作 l_i，同时记 $2k_i = 2(u_i)' - \partial_i g_{mn}u^mu^n$，只要存在一个和 k_i 正交但不和 u_i 正交的矢量 v^i，这样

$$l_iv^i = 2v^iu_i\lambda',$$

只要满足 $l_iv^i=0$ 就自然有 $\lambda'=0$. 这是我们最感兴趣的情况，这时选取 $\lambda=-mc/2$，则

$$L = -mc\mathrm{d}s - \frac{mc}{2}(u^\mu u_\mu - 1)\mathrm{d}s + L_1 = -\frac{mc}{2}\mathrm{d}s - \frac{mc}{2}u^\mu u_\mu\mathrm{d}s + L_1,$$

或者等价地去掉一个恰当形式项，我们可以把

$$L = -\frac{mc}{2}u^iu_i\mathrm{d}s + L_1 \tag{3.1}$$

看作 u^i 自由时候的 Lagrangian 形式。广义动量即

$$-P_i = \frac{\partial L_s}{\partial u^i} = -\frac{mc}{2}\frac{\partial(u^\nu u_\nu)}{\partial u^i} + \frac{\partial L_{1,s}}{\partial u^i} = -p_i + \frac{\partial L_{1,s}}{\partial u^i},$$

在自由粒子的情况下，广义动量即 $-p_i$，符合上面的定义，尤其是空间部分，可以看到就是 $\boldsymbol{p}$，因此 $\lambda = -mc/2$ 的选取是合理的。

所以在这种情况下，作用量的自由粒子部分可以看作

$$S = -\frac{mc}{2}\int_a^b g_{ij}u^iu^j\mathrm{d}s.$$

而整个运动方程（测地线方程）就写成

$$l_i = -mck_i = -\frac{mc}{2}\left(2(u_i)' - \partial_i g_{mn}u^mu^n\right).$$

3.2 Connection

联络的出现，代数上实现了对矢量场的方向导数，几何上实现了所谓的平行移动。

(3.2.1) 矢量丛上的联络的首先目的是为了对矢量场进行求导的。按照一般的思路，将矢量场 s 参数化，假设他在曲线 $\gamma(t)$ 上，$\gamma(0)=x_0$，而 $\gamma'(0)=Y$，则似乎他沿 Y 方向的导数应该定义成

$$\lim_{t\to 0}\frac{s(\gamma(t))-s(x_0)}{t},$$

可是 $s(\gamma(t))$ 和 $s(x_0)$ 属于不同点的切空间，不能相减。在 $\mathbb{R}^n$ 很容易克服这个困难，只要将两个切空间的矢量的端点平移到一起，这样就可以相减了。但是到了流形上，就会发现没那么简单，最简单的问题，什么是平移？下面我们先抽象地定义联络，然后再回来说这个问题。

(3.2.2) 令 E 是一个矢量丛，一个（线性）联络或者说一个协变导数是指一个映射

$$D:\Gamma(E)\to\Gamma(E)\otimes\Gamma(T^*M)$$

满足下面几条规则：记 $Ds(V)=D_Vs$，则 $D_V:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$，对于任意的 $V,W\in T_pM$，$r,s\in\Gamma(E)$ 和 $f,g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ 满足

$$\begin{aligned}D_{fV+gW}s &= fD_Vs+gD_Ws,\\ D_V(r+s) &= D_Vr+D_Vs,\\ D_V(fs) &= (Vf)s+fD_Vs.\end{aligned}$$

$T\mathbb{R}^n$ 的截面可以写作 $s(x)=x^i(x)e_i$，其中 e_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，此时

$$D_Vs=\mathrm{d}x^i(V)e_i=(Vx^i)e_i,$$

是一个联络。

任何一个截面局部都可以写成 $s=s^i\mu_i$，其中矢量场 μ_i 对应着矢量空间的一组基，而对于切矢量来说，局部可以写作 $X=X^i\partial_i$，所以

$$D_Xs=X^iD_{\partial_i}(s^j\mu_j)=X^i\partial_is^j\mu_j+X^is^jD_{\partial_i}\mu_j=X(s^j)\mu_j+X^is^jD_{\partial_i}\mu_j,$$

由于 $D_{\partial_i}\mu_j$ 依然是一个截面，所以他是 μ_i 的线性组合

$$D_{\partial_i}\mu_j={\Gamma^k}_{ij}\mu_k,$$

其中 ${\Gamma^k}_{ij}$ 被称为 Christoffel 符号，以后会看到，前面出现过的 Christoffel 符号只是这里的特例。此外，以后在局部用 D_i 来记 D_{∂_i}. 综上，联络在局部可以写作

$$D_Xs=X(s^j)\mu_j+X^is^j\Gamma^k_{ij}\mu_k.$$

有了联络的概念，我们可以谈什么叫做平行移动，假设现在我们有一条可微曲线 $c(t)$，那么他的切矢量是 $\dot c(c(t))$，或者在局部写作 $\dot c^k(t)\partial_k$，对于任意的 M 上的截面 s 可以计算沿着这个曲线切线的导数

$$\begin{aligned}D_{\dot c}s(c(t)) &= \dot c^k(t)\partial_ks^j\mu_j(c(t))+(\dot c^is^j{\Gamma^k}_{ij}\mu_k)(c(t))\\ &= \left(\dot s^j\mu_j+\dot c^is^j{\Gamma^k}_{ij}\mu_k\right)(c(t)).\end{aligned}$$

(3.2.3) 如果 $c(t)$ 是 M 上一条可微曲线，则称满足 $D_{\dot c(t)}s(t)=0$ 的解 $s(t)$ 是 $s(0)$ 在 E 中沿着曲线 c 的平行移动。

由于 $\dot{s}^j\mu_j + \dot{c}^i s^j \Gamma^k_{ij}\mu_k = 0$ 是系数 $\dot{s}^j$ 的一阶常微分方程组，所以解出系数后，就解出了 s，即给定一个初值 $s(0)$，有唯一解 $s(t)$ 满足上述方程。

现在来检查联络是如何和平行移动联系起来的。对于 M 上的两个点，找一条曲线 $c(t)$ 连接两点，且在一点处的切矢量为 Y，假设有一组联络的基 $\mu_i(t)$ 他们沿着 $c(t)$ 平行，即 $D_{\dot{c}(t)}\mu_i(t) = 0$，定义 $P_{c,t}(s(t))$ 将 $s(t)$ 平行移动回 $s(0)$，局部来看就是

$$P_{c,t}(s^i(t)\mu_i(t)) = s^i(t)\mu_i(0).$$

此时按照联络的定义，可以计算得到 $D_{\dot{c}(t)}s(t) = \dot{s}^i(t)\mu_i(t)$, 令 $t \to 0$，则

$$D_Y s(0) = \lim_{t\to 0}\frac{s^i(t)\mu_i(0) - s^i(0)\mu_i(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{P_{c,t}(s(t)) - s(0)}{t},$$

这正是我们前面希望得到的矢量场沿一个方向的导数的定义。

现在解释“联络”的意思，假如有一个矢量丛 E，他的切丛为 TE，在每一点 $p = (\pi(p), v)$，T_pE 都有一个确定的子空间，即每一点纤维的切空间 T_vE_p，所谓的联络就是在每一点选定了 T_pE 中 T_vE_p 的补空间[3] H_p，即选定了 H_p 使得 $T_pE = T_vE_p \oplus H_p$。T_vE_p 被称为垂直子空间，或记做 V_p，而 H_p 则被称为水平子空间，这个命名的直观可以考察平凡丛 $E = M \times F$，$T_vE_p = T_vF$ 是切于 F 的，而 F 可以看做和 M 垂直。垂直子空间的不交并构成一个矢量丛，我们称为垂直丛，他是原本矢量丛的子丛，同样我们有水平丛。

一旦有了一个联络，任意 M 中的一条曲线 $c(t)$ 都可以将 $\dot{c}(0) = X$ 通过平行移动得到 E 中的一条曲线 $\psi(t)$。对于同一个 X，可以考察不同曲线 $c(t)$ 平行移动后得到的切矢量们 $\dot{\psi}(0)$，他们构成 $T_{(c(0),X)}E = T_{s(0)}E$ 的一个子空间，这就是 $H_{\psi(0)}$. 因为 $\psi(t)$ 是使用 D 平行移动而成，他在纤维上的投影是 $P^{-1}_{c,t}s(0)$，因此他的切矢量在垂直子空间上的投影 $\mathrm{p_v}(\dot{\psi}(0))$ 是

$$\mathrm{p_v}(\dot{\psi}(0)) = \lim_{t\to 0}\frac{P^{-1}_{c,t}s(0) - s(0)}{t} = -\lim_{t\to 0}P^{-1}_{c,t}D_X s(0) = 0,$$

因此 $\dot{\psi}(0) \in H_{\psi(0)}$.

上面这种看法可以看做联络的一种定义，因为他是 Ehresmann 首先形式化定义的，所以也被称为 Ehresmann 联络。使用 Ehresmann 联络，可以比较方便对联络的存在性等问题进行考察，也方便搞清楚平行移动的直观等等，详细而严谨的讨论可以参看 Jeffrey M. Lee 的 *Manifolds and Differential Geometry* 一书中的第 12 章。

重新观察

$$D_X s = X(s^j)\mu_j + s^j X^i \Gamma^k_{ij}\mu_k = \mathrm{d}s^j(X)\mu_j + s^j X^i {\Gamma^k}_{ij}\mu_k,$$

将 $X^i\Gamma^k_{ij}\mu_k$ 写作 $A(X)\mu_j$，那么就可以写出 $D = \mathrm{d} + A$ 或者更细致一些

$$D(s) = D(s^i\mu_i) = \mathrm{d}s^i\mu_i + s^iA\mu_i.$$

特别地，对于基 μ_i，$D\mu_i = A\mu_i$. 现在来看看 A 到底是什么东西，由于 $A(X) : \mu_j \mapsto X^i{\Gamma^k}_{ij}\mu_k = \mathrm{d}x^i(X){\Gamma^k}_{ij}\mu_k$，或者将 $A(X)$ 写成矩阵

$${A^j}_i(X) = {\Gamma^j}_{ki}\mathrm{d}x^k(X)$$

因此 A 不是别的，而是一个 1-形式值的矩阵，写形式一点 $A \in \Gamma(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \otimes T^*M|_U)$，其中下标 U 指我们在局部考虑这个问题。以后将 A 称为联络 D 的联络形式。

[3]补空间不唯一，所以需要选定，比如在 $\mathbb{R}^3$ 中，一条直线的补空间可以是任意不和他平行的平面。

局部来看矢量从 E，设 U_α 是 M 的一个坐标图册，那么丛的局部平凡化给出了 $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \to U_\alpha \times V$。这样，在非空的 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上，我们对于 E 的同一点 p 就有了按 φ_α 和 φ_β 不同的平凡化，他们之间靠一个转移函数 $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathfrak{gl}(V)$ 相互联系，即

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha(x, v) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(v)),$$

这个式子也可以直接看做转移函数的定义。

对于同一处不同局部化的同一个截面 s，我们使用转移函数将其联系起来 $s_\beta = \varphi_{\beta\alpha} s_\alpha$，这样，对于局部来看的联络 $D_\alpha = \mathrm{d} + A_\alpha$ 和 $D_\beta = \mathrm{d} + A_\beta$ 就有

$$\varphi_{\beta\alpha} D_\alpha s_\alpha = D_\beta s_\beta = D_\beta(\varphi_{\beta\alpha} s_\alpha),$$

具体写出来

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_{\beta\alpha}\mathrm{d}s_\alpha + \varphi_{\beta\alpha}A_\alpha s_\alpha & = & \mathrm{d}(\varphi_{\beta\alpha}s_\alpha) + A_\beta(\varphi_{\beta\alpha}s_\alpha) \\ \Rightarrow & \varphi_{\beta\alpha}A_\alpha s_\alpha & = & \mathrm{d}(\varphi_{\beta\alpha})s_\alpha + A_\beta(\varphi_{\beta\alpha}s_\alpha) \\ \Rightarrow & A_\alpha & = & \varphi_{\beta\alpha}^{-1}\mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta\varphi_{\beta\alpha}. \end{array}$$

所以联络形式并不像一个张量一样变化，但是两个不同联络形式的差却是，所以两个联络的差是一个张量场。

一个矢量丛的对偶丛就是指纤维相互为对偶空间的丛，对偶丛上当然也会有联络，因为他也是一个矢量丛。对偶丛上的光滑截面取值为对偶矢量，因此，对偶丛上的光滑截面和矢量丛上的光滑截面在每点通过内积给出了一个值，这就是说 (μ, ν^*) 是 M 上的一个光滑实函数，因此我们可以对其求外微分，而两个丛的联络可以通过类似于 Leibniz 法则通过内积相互联系，即

$$\mathrm{d}(\mu, \nu^*) = (D\mu, \nu^*) + (\mu, D^*\nu^*),$$

左边右边都是 1-形式，所以定义是合理的，这样，通过丛上的联络 D 就定义了对偶丛上的对偶联络 D^*. 令 μ_j 是局部的一组基，则 $(\mu_i, \mu^j) = \delta_i^j$ 且

$$0 = \mathrm{d}(\mu_i, \mu^j) = (A^k{}_i\mu_k, \mu^j) + (\mu_i, A_k^{*j}\mu^k) = A^j{}_i + A_i^{*j},$$

即 $A^* = -A^T$，其中上标 T 表示转置。如果用 Christoffel 符号表示对偶联络，则 $D_i^*\mu^j = \mu^k\Gamma_{ki}{}^j$，两个系数的关系是

$$\Gamma^k{}_{ij} = -\Gamma_{ji}{}^k$$

(3.2.4) 矢量丛 E_1 和 E_2 的张量积 $E_1 \otimes E_2$ 指底空间 M 不变，而纤维变成原本纤维们的张量积。设在 E_1 和 E_2 上有联络 D_1 和 D_2，则在 E 上按如下方法定义了一个联络 D

$$D(s_1 \otimes s_2) = D_1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes D_2 s_2.$$

一个有趣的空间是 $\mathrm{End}(E) = E \otimes E^*$，令 $\sigma = \sigma^i{}_j\mu_i \otimes \mu^j$ 是 $\mathrm{End}(E)$ 的一个截面，则

$$\begin{aligned} D\sigma &= \mathrm{d}\sigma^i{}_j\mu_i \otimes \mu^j + \sigma^i{}_j D\mu_i \otimes \mu^j + \sigma^i{}_j\mu_i \otimes D^*\mu^j \\ &= \mathrm{d}\sigma + A^k{}_i\sigma^i{}_j\mu_k \otimes \mu^j + \sigma^i{}_j\mu_i \otimes A_k^{*j}\mu^k \\ &= \mathrm{d}\sigma + A^k{}_i\sigma^i{}_j\mu_k \otimes \mu^j - \sigma^i{}_j A^j{}_k\mu_i \otimes \mu^k \\ &= \mathrm{d}\sigma + [A, \sigma]. \end{aligned}$$

类似的计算可以给出任意张量场 ω 的联络满足：

Proposition (3.2.5) 假如 ω 是一个 (r,s) 型张量场，则

$$\begin{aligned}X(\omega(\eta^i;X_j)) =&(D_X\omega)(\eta^i;X_j)\\&+\sum_i \omega\left(\eta^1,\cdots,\eta^{i-1},D^*_X\eta^i,\eta^{i+1},\cdots,\eta^r;X_j\right)\\&+\sum_j \omega\left(\eta^i;X_1,\cdots,X_{j-1},D_XX_j,X_{j+1},\cdots,X_s\right).\end{aligned}$$

这个等式可以理解成广义的 Leibniz 法则。

3.3 Curvature

前面已经知道

$$D:\Gamma(E)\to\Gamma(E)\otimes\Gamma(T^*M)=\Gamma(E)\otimes\Omega^1(M),$$

其中 $\Omega^1(M)$ 是 1-形式场，$\Gamma(E)\otimes\Omega^1(M)$ 中的元素可以看做矢量值的 1-形式，那么自然，可以将 $\Gamma(E)\otimes\Omega^p(M)$ 看做矢量值的 p-形式，不妨将其记做 $\Omega^p(E)$，以及 $\Gamma(E)=\Omega^0(E)$，则联络实际上是完成了矢量值的 0-形式到矢量值的 1-形式的转变：

$$D:\Omega^0(E)\to\Omega^1(E).$$

类似于 d 是从 p-形式到 $(p+1)$-形式的转变，我们希望拓展联络完成 $\Omega^p(E)$ 到 $\Omega^{p+1}(E)$ 的转变。

首先定义一个 s-形式 ω_1 和一个矢量值的 r-形式 $\sigma=\mu\otimes\omega_2\in\Omega^r(E)$ 的楔积，自然

$$\sigma\wedge\omega_1=\mu\otimes(\omega_2\wedge\omega_1)$$

就构造出了一个矢量值的 $(r+s)$-形式。然后我们扩展联络如下：对一个矢量值的 r-形式 $\sigma=\mu\otimes\omega$，其中 ω 是一个 r-形式，定义

$$D\sigma=D\mu\wedge\omega+\mu\otimes\mathrm{d}\omega.$$

但是，正如我们熟知的恒等式 $\mathrm{d}^2=0$，他其实在局部是等价于等式 $\partial_i\partial_j=\partial_j\partial_i$，或者 $[\partial_i,\partial_j]=0$，直观上就是说，沿着正交方向先后求导，他们的结果是一样的。前面已经看到了，$\mathbb{R}^n$ 上存在联络 $D=\mathrm{d}$，因此在 $\mathbb{R}^n$ 上的这个联络依然是满足 $D^2=0$ 的。可以指出，$[\partial_i,\partial_j]=0$ 是因为我们是在同一个切空间内求导的结果，而这就忽略掉了流形本身的具体结构，而联络并不会。

为了更清晰地看到这一点，设 $s=s^i\mu_i$，计算

$$\begin{aligned}D^2s&=D(\mathrm{d}s^i\mu_i+s^iA\mu_i)\\&=D\mu_i\wedge\mathrm{d}s^i+D(s^iA^j{}_i\mu_j)\\&=A\mu_i\wedge\mathrm{d}s^i+D(s^i\mu_j)\wedge A^j{}_i+s^i\mu_j\mathrm{d}A^j{}_i\\&=-\mathrm{d}s^i\wedge A\mu_i+D(s^i\mu_j)\wedge A^j{}_i+(\mathrm{d}A)s\\&=s^iA\mu_j\wedge A^j{}_i+(\mathrm{d}A)s\\&=s^i\mu_kA^k{}_j\wedge A^j{}_i+(\mathrm{d}A)s\\&=(A\wedge A)s+(\mathrm{d}A)s.\end{aligned}$$

所以作用在矢量值 0-形式上，$D^2 = A \wedge A + \mathrm{d}A$，这个量，我们另外给个名字。

(3.3.1) 一个联络 D 的曲率为 $F := D^2 : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$.

根据上面求的，局部曲率算符有 $F = A \wedge A + \mathrm{d}A$，他一般来说不为 0，如果曲率算符为 0，则称这个联络是平坦的。

曲率算符可以看做 $\mathrm{End}(E)$ 值的 2-形式，因为 $F : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$，于是

$$F \in \Omega^2(E) \otimes (\Omega^0(E))^* = \Gamma(E) \otimes \Omega^2(M) \otimes \Gamma(E^*) = \Gamma(\mathrm{End}(E)) \otimes \Omega^2(M),$$

这就是说 $F \in \Omega^2(\mathrm{End}(E))$.

设 $A = A_i \mathrm{d}x^i$，其中 A_i 是 $n \times n$ 矩阵，直接计算给出了

$$F = \frac{1}{2}\left(\partial_{[i}A_{j]} + [A_i, A_j]\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j.$$

观察这个式子是很有趣的，前面在电磁学里面定义了电磁场张量 $F_{ij} = \partial_{[i}A_{j]}$，其中 A_i 是四维势。如果四维势对应联络形式，那么电磁场张量对应着曲率。曲率中多出来的 $[A_i, A_j]$ 在电磁学中是自然消失的。

(3.3.2) 直接的计算可以给出 Bianchi 等式：$DF = 0$.

使用 $A_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}\mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta\varphi_{\beta\alpha}$，我们考察 F 在坐标变换下的改变

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= A_\alpha \wedge A_\alpha + \mathrm{d}A_\alpha \\
&= \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta\varphi_{\beta\alpha} \wedge \varphi_{\beta\alpha}^{-1}\mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}\mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha} \wedge \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \mathrm{d}A_\alpha \\
&= \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge \mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha} - \mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha}^{-1}\varphi_{\beta\alpha} \wedge \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \mathrm{d}A_\alpha \\
&= \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge \mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha} - \mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha}^{-1} \wedge A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \mathrm{d}A_\alpha \\
&= \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge \mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}\mathrm{d}\left(A_\beta\varphi_{\beta\alpha}\right) \\
&= \varphi_{\beta\alpha}^{-1}A_\beta \wedge A_\beta\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathrm{d}A_\beta)\varphi_{\beta\alpha} \\
&= \varphi_{\beta\alpha}^{-1}F_\beta\varphi_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

在计算过程中，使用了

$$0 = \mathrm{d}I = \mathrm{d}(\varphi_{\beta\alpha}^{-1}\varphi_{\beta\alpha}) = \mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha}^{-1}\varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\beta\alpha}^{-1}\mathrm{d}\varphi_{\beta\alpha},$$

所以 F 变换得符合张量的变换方式，即 F 是一个张量。可以将 Fs 写作 $R(\star, \star)s$，其中 R 被称为曲率张量，下面的定理实现了用联络表示曲率张量 R，证明依然是直接的计算。

(3.3.3) 一个联络 D 的曲率张量 R 满足

$$R(X, Y)s = D_X D_Y s - D_Y D_X s - D_{[X,Y]}s.$$

因为他是张量，所以

$$R(X, Y)(fs) = fR(X, Y)s,$$

此外对 X, Y 都函数线性从上面的定理来看是显然的，还有 $R(X, Y) + R(Y, X) = 0$ 也是显然的。

前面提到了，曲率涉及了流形本身（包含联络）的具体结构，从曲率张量来看，给定一个光滑曲线族 $f(s,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to M$，按照曲线 $f(s, 0)$ 将切矢量 v 从 $f(0, 0)$ 平行移动到 $f(1, 0)$，然后按照曲线 $f(1, t)$ 平行移动到 $f(1, 1)$，之后平行移动到 $f(0, 1)$，最后平行移动回 $f(0, 0)$ 得到了新的切矢量 v'，曲率就是度量了 v' 和 v 之间的差异。

3.4 Levi-Civita Connection

将上面两节的理论应用到伪 Riemann 流形，应用到伪 Riemann 流形的切丛上。切丛上的联络不用 D 而写作 ∇.

由于伪 Riemann 流形的切丛上赋予了度规，这就比前面单纯的矢量场上的联络理论要有更多内容，这一点体现在联络和度规相容条件上：

$$\mathrm{d}\langle\mu,\nu\rangle=\langle\nabla\mu,\nu\rangle+\langle\mu,\nabla\nu\rangle.$$

或者

$$X\langle\mu,\nu\rangle=\langle\nabla_X\mu,\nu\rangle+\langle\mu,\nabla_X\nu\rangle.$$

当然 Levi-Civita 联络要比这还要特殊一点。切丛上除了曲率，还能定义一个叫做挠率的张量

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y].$$

Levi-Civita 联络的挠率为 0，即 Levi-Civita 联络是无挠的。联络无挠在局部等价于 ${\Gamma^k}_{ij}={\Gamma^k}_{ji}$. 挠率的几何意义其实并不很清楚。

Theorem (3.4.1) 伪 Riemann 流形存在唯一的和度规相容的、无挠的联络，我们称之为 Levi-Civita 联络。

Proof: 唯一性的证明，和度规相容的、无挠的联络 ∇ 一定满足：

$$\langle\nabla_XY,Z\rangle=\frac{1}{2}\left(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle X,Z\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle\right).$$

利用和度规相容

$$\begin{aligned}X\langle Y,Z\rangle&=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle,\\Y\langle X,Z\rangle&=\langle\nabla_YX,Z\rangle+\langle X,\nabla_YZ\rangle,\\Z\langle X,Y\rangle&=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle.\end{aligned}$$

利用无挠性 $\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]$，则

$$X\langle Y,Z\rangle+Y\langle X,Z\rangle-Z\langle X,Y\rangle=2\langle\nabla_XY,Z\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle+\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle.$$

唯一性证明完毕。

存在性的证明，固定 X,Y，令右边的为 $\omega(Z)$，则可以直接计算得 $\omega(fZ)=f\omega(Z)$，此外 $\omega(Z_1+Z_2)=\omega(Z_1)+\omega(Z_2)$。那么从度规的非退化可以得知，存在唯一的 A 使得 $\langle A,Z\rangle=\omega(Z)$，这样子，令 $\nabla_XY=A$，最后检验这是一个无挠、和度规相容的联络即可。 □

伪 Riemann 流形的 Levi-Civita 联络的 Christoffel 记号为

$${\Gamma^i}_{jk}=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_kg_{jl}+\partial_jg_{kl}-\partial_lg_{jk}),$$

注意到，这就是前面我们里面作用量求测地线方程时候出现的 Christoffel 记号。

(3.4.2) 有切丛上的联络 ∇，则一条可微曲线 $c(t)$ 称为自平行的或者称为测地线，如果其满足 $\nabla_{\dot c}\dot c=0$.

利用

$$D_{\dot c}s(c(t))=\left(\dot s^j\mu_j+\dot c^is^j{\Gamma^k}_{ij}\mu_k\right)(c(t)),$$

直接给出测地线方程为

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \ddot{c}^j\mu_j + \dot{c}^i\dot{c}^j\Gamma^k{}_{ij}\mu_k = 0,$$

再简单一些

$$\ddot{c}^k + \dot{c}^i\dot{c}^j\Gamma^k{}_{ij} = 0.$$

很久以前，在谈论作用量原理的时候，讲到要寻找和 k_i 正交的矢量 v^i，其中

$$2k_i = 2(u_i)' - \partial_i g_{mn}u^m u^n,$$

现在我们指出 $k_i = (\nabla_u u)_i$，所以寻找和 k_i 正交的矢量 v^i 就是指寻找一个矢量场 v 使得 $\langle\nabla_u u, v\rangle = 0$. 利用 Levi-Civita 联络的性质

$$u\langle u,u\rangle = 2\langle\nabla_u u, u\rangle.$$

因为 $\langle u,u\rangle = 1$，所以 $v = u$ 就是一个自然的解，这和狭义相对论里面讨论的一样。如果使用联络的记号，那么在 $l_i u^i = 0$ 情况下粒子的运动方程写作

$$l_i = -mc(\nabla_u u)_i = -(\nabla_u p)_i.$$

这就是鼎鼎大名的牛顿第二定律。

本节的最后来谈谈活动标架法，活动标架法利用的是局部基和对偶基来计算联络和曲率。从直接的计算开始，可以得到：

Proposition (3.4.3) 设 D 是无挠联络，则

$$\mathrm{d}\omega(X_1,\cdots,X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}D_{X_i}\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{r+1}),$$

其中 $\hat{X}_i$ 指在括号中没有这项。

对 $r=1$ 和 Levi-Civita 联络，

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = \nabla^*_X\omega(Y) - \nabla^*_Y\omega(X),$$

对 μ^i 使用上式，注意到 $\nabla^*\mu^i = A^*\mu^i = \mu^j A^{*i}_j = -\mu^j A^i{}_j$，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mu^i(X,Y) = \nabla^*_X\mu^i(Y) - \nabla^*_Y\mu^i(X) &= -\mu^j(Y)A^i{}_j(X) + \mu^j(X)A^i{}_j(Y)\\ &= (\mu^j\otimes A^i{}_j - A^i{}_j\otimes\mu^j)(X,Y)\\ &= (\mu^j\wedge A^i{}_j)(X,Y),\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{d}\mu^i = \mu^j\wedge A^i{}_j = -A^i{}_j\wedge\mu^j, \tag{3.2}$$

交换后有负号是因为这是两个 1-形式。

前面已经对 $s = s^i\mu_i$ 算过

$$Fs = s^i\mu_k A^k{}_j\wedge A^j{}_i + s^i\mu_j\mathrm{d}A^j{}_i,$$

对 $s=\mu_i$ 有

$$F\mu_i = \mu_k A^k{}_j\wedge A^j{}_i + \mu_j\mathrm{d}A^j{}_i,$$

所以

$$R(X,Y)\mu_i = F\mu_i(X,Y) = \mu_k A^k{}_j\wedge A^j{}_i(X,Y) + \mu_j\mathrm{d}A^j{}_i(X,Y),$$

另一方面将 $R(X,Y)$ 写成分量的形式

$$R(X,Y)\mu_k = X^i Y^j R_{ijk}{}^l \mu_l = R_{ijk}{}^l \mu^i \otimes \mu^j (X,Y)\mu_l = \frac{1}{2} R_{ijk}{}^l \mu^i \wedge \mu^j (X,Y)\mu_l$$

其中 $R_{ijk}{}^l = \mu^l(R(\mu_i,\mu_j)\mu_k)$，最后一个等号使用了 $R(X,Y)$ 关于 X, Y 是反对称的，所以 $R_{ijk}{}^l$ 中的 i, j 也是反对称的，于是

$$\frac{1}{2} R_{mni}{}^k \mu^m \wedge \mu^n = A^k{}_j \wedge A^j{}_i + \mathrm{d}A^k{}_i. \tag{3.3}$$

式 (3.2) 和 (3.3) 统称 Cartan 结构方程。有时候会记

$$\Omega^k{}_i = -\frac{1}{2} R_{mni}{}^k \mu^m \wedge \mu^n,$$

称之为曲率形式，那么结构方程写作

$$\mathrm{d}A^k{}_i = -\Omega^k{}_i - A^k{}_j \wedge A^j{}_i.$$

从一般的曲率张量本身可以构造几个特殊的曲率，比如：

(3.4.4) 设 Π 为切空间 T_pM 的二维子空间，取他的一组基 X, Y，定义 Π 的截面曲率为

$$K(\Pi) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}.$$

容易直接计算验证 $K(\Pi)$ 的定义和基的选取无关。

(3.4.5) 设 $X,Y,Z \in T_pM$，那么映射 $X \to R(Y,X)Z$ 就是一个 T_pM 上的自同态，定义这个自同态的迹

$$\mathrm{Ric}(Y,Z) = \mathrm{tr}(X \to R(Y,X)Z)$$

为 Ricci 曲率张量。他直接出现在 Einstein 场方程中。

3.5 Hodge Star Operator

假设流形是可定向的无边流形[4]，此外下面谈到的形式都是有紧支集的。所以根据 Stokes 定理，$(n-1)$-形式的外微分在整个流形上的积分为 0.

从体积形式开始，在流形的局部，比如考虑 (U,ϕ)，上面的度规有 g_{ij}，同样地，(U',ϕ') 和 g'_{ij}，现在假设两个局部是相交的，则体积形式作为几何量，应该是不变的。设在 U 上的坐标为 x，U' 上的为 y，所以

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n = \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

其中 $\partial y/\partial x$ 是坐标变换的 Jacobian，这里选取的坐标变换是保向的，即 Jacobian 的行列式大于零。

体积形式必然同时正比于 $\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$ 和 $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$，当然这是不够的，他还依赖于度规的选取。我们考虑一下度规的变化

$$g'_{ij} = g(\partial'_i, \partial'_j) = g\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\partial_k, \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\partial_l\right) = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl},$$

为了消掉上面那个行列式，我们考虑一下上式的行列式

$$\det(g'_{ij}) = \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \det(g_{ij}) = \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-2} \det(g_{ij})$$

[4] Hodge 用一套整体分析的方法来研究了 de Rham 上同调群，而他的星算子就是这套方法中很重要的一个部分。稍稍具体一点，Hodge 通过在 Riemann 流形上引入度量，利用度量在每一个同调类中选出代表元，而每个代表元都是椭圆算子的核，然后就可以使用椭圆算子核的性质。具体的展开这里不可能表。

这里出现了 2，所以还要开方一下，则有

$$\sqrt{|\det(g'_{ij})|} = \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1} \sqrt{|\det(g_{ij})|}$$

综上

$$\sqrt{|\det(g'_{ij})|}\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

这是一个几何量，因此他就是体积形式。

Hodge 星算子的定义和第一章里面的一样

$$\omega \wedge (\star\mu) = \langle \omega, \mu \rangle \mathrm{vol},$$

通过耐心细致但不复杂的计算可以得到，

Proposition (3.5.1) 在伪 Riemann 流形 M 上，如果他的度规的负本征值个数为 s，那么在 p-形式上成立恒等式

$$\star\star = (-1)^{s+p(n-p)}.$$

证明很类似在 $\mathbb{R}^{s+(n-s)}$ 上的证明。

有了 Hodge 星算子，可以在任意两个 p-形式之间定义一个新的内积

$$(\omega, \mu) = \int \omega \wedge (\star\mu),$$

很容易看出他是双线性的。

现在假如有一个 $(p-1)$ 形式 ω，那么对任意的 p-形式 μ，$(\mathrm{d}\omega, \mu)$ 是可以定义的，这样，类似于定义转置算符，我们可以定义 d 的对偶算子 $\mathrm{d}^\star$ 如下

$$(\omega, \mathrm{d}^\star\mu) = (\mathrm{d}\omega, \mu).$$

所以 $\mathrm{d}^\star$ 完成的是从 p 形式到 $(p-1)$-形式的转变，只是是否存在还尚且未知。

对 $\omega \wedge \star\mu$ 求外微分

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \star\mu) &= \mathrm{d}\omega \wedge \star\mu + (-1)^{p-1}\omega \wedge \mathrm{d}(\star\mu) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \star\mu + (-1)^{p-1}\omega \wedge \mathrm{d}(\star\mu) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \star\mu + (-1)^{p-1}(-1)^{s+(p-1)(n-p+1)}\omega \wedge \star\star\,\mathrm{d}(\star\mu) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \star\mu - (-1)^{s+(p+1)n+1}\omega \wedge \star(\star\mathrm{d} \star \mu),
\end{aligned}$$

两边积分后，左边由 Stokes 公式直接为 0，所以

$$0 = (\mathrm{d}\omega, \mu) - (-1)^{s+(p+1)n+1}(\omega, \star\mathrm{d} \star \mu),$$

最后就求得了

$$\mathrm{d}^\star = (-1)^{s+(p+1)n+1} \star \mathrm{d} \star.$$

所以前面写过的含源部分的 Maxwell 方程组 $\star\mathrm{d} \star \mathbf{F} = -4\pi\mathbf{j}$ 就等价于

$$\mathrm{d}^\star\mathbf{F} = -4\pi\mathbf{j}.$$

(3.5.2) 定义 Hodge-Laplace 算子 $\Delta = \mathrm{d}^\star\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^\star$，他将 p-形式变成 p-形式。

他的一些性质直接计算即可，比如 $\Delta\star=\star\Delta$. 他是 Laplace 算子在流形上的推广，假如我们的度规是对角化的，记 $g_i=g_{ii}$，则对光滑实函数 f 有，

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \mathrm{d}^\star\mathrm{d}f+\mathrm{d}\mathrm{d}^\star f\\
&=\sum_i(-1)^{s+1}\star\mathrm{d}\star\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)\\
&=\sum_i(-1)^{s+1}\star\mathrm{d}\left((-1)^{i-1}\frac{\sqrt{|\det(g)|}}{g_i}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\mathrm{d}\hat{x}^i\cdots\mathrm{d}x^n\right)\\
&=\sum_i(-1)^{s+1}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{|\det(g)|}}{g_i}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\frac{\star\mathrm{vol}}{\sqrt{|\det(g)|}}\\
&=\sum_i\frac{(-1)^{s+1}}{\sqrt{|\det(g)|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{|\det(g)|}}{g_i}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right),
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}\mathrm{d}^\star f=0$ 是因为 $\mathrm{d}^\star f$ 是一个 n-形式。

对于 $\mathbb{R}^n$，有 $s=0,\ g_i=1$，则

$$\Delta f=-\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right),$$

仅仅和我们熟知的 Laplace 算子差一个负号而已[5]。

对于 $s=3$ 的 $\mathbb{R}^{3+1}$ 有

$$\Delta f=\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\partial f}{\partial x^0}\right)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right),$$

就是我们熟知的 D'Alembert 算子。

如果我们现在有一个矢量值形式，即 $w\otimes\omega$，其中 $w\in W$ 是一个矢量空间中的元素，而 ω 是一个 p-形式。如果 W 有一个非退化双线性函数 $B:W\otimes W\to\mathbb{R}$，那么对于两个 W 值 p-形式，

$$v=\omega\otimes X,\quad w=\mu\otimes Y,$$

其中 $X,Y\in\mathfrak{g}$，定义他们的内积为

$$\langle v,w\rangle=B(X,Y)\langle\omega,\mu\rangle,$$

其中 $\langle\omega,\mu\rangle$ 则是 p-形式之间的内积，即

$$\langle e^1\wedge\cdots\wedge e^p,f^1\wedge\cdots\wedge f^p\rangle=\det(g^{-1}(e^i,f^j)).$$

有了上面这个内积的定义，我们可以拓展星算子定义到 W 值形式依然如

$$v\wedge(\star w)=\langle v,w\rangle\mathrm{vol}.$$

特别地，如果 $W=\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数，B 是这个 Lie 代数上面的非退化的双线性度量，那么我们就得到了 $\mathfrak{g}$ 形式上的星算子定义。如果 Lie 群是半单的，那么 Lie 代数上面必然存在一个双不变度量，即 Killing 形式 $(A,B)_K=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(A)\circ\mathrm{ad}(B))$。Killing 形式本质上就是 Lie 群在双不变度量下的 Ricci 曲率，Killing 形式本身是双不变的，而且在半单假设下，他是非退化的。

[5]在数学里，有些符号的差异是无法避免的。

3.6 Principal Bundle and Connection

主丛是另一种纤维丛，他在规范理论里面处于基本的地位。

(3.6.1) 设有纤维丛 (P, π, M, G)，他被称为一个主 G-丛如果

(1) G 是一个 Lie 群。

(2) G 自由右作用于 P 上：即存在运算 $P \times G \to P$，并且对任意的 p 成立 $p \cdot g = p$ 当且仅当 g 是 G 的单位元。M 微分同胚于 G 在 P 上面轨道的集合 P/G.

(3) 局部平凡化的时候，如果 $p \in P$ 局部写作 $(\pi(p), g)$，那么同一个轨道上的 $p \cdot g'$ 的局部平凡化写作 $(\pi(p), gg')$. 其中 gg' 之间的乘法就是群乘法。

一个主丛自然地和一个矢量丛联系起来，通过群表示的方式。找一个矢量空间 V，现在群 G 在 V 有表示，是左作用的。那么我们可以在 $P \times V$ 上通过

$$(p, v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$$

定义一个自由的右作用，其中 ρ 是 G 在 V 上的群表示。这样 $P \times V/G \to P/G$ 就是一个矢量丛，他的纤维同构于 V. 这可以很简单检验，考虑 $p \cdot G \in P/G$，那么他在 $P \times V/G$ 中的原象就是 $(p \cdot G, V)$.

如果考虑矢量丛 $P \times V/G \to M \cong P/G$ 上两个不同平凡化之间的转移函数，就会发现转移函数还是 G 左作用于 V. 转而考察主丛 $P \to M$，他的转移函数就是 G 的元素，由于满足

$$g_{\beta\alpha} g_{\alpha\beta} = e, \quad g_{\beta\gamma} g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}, \quad g_{\gamma\sigma} g_{\beta\gamma} g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma}.$$

所以转移函数的取值构成一个群，他是 G 的子群 H，这样，就称呼 H 是主丛 $P \to M$ 的结构群。

要在主丛上定义联络，Ehresmann 联络就很方便。

(3.6.2) 丛上的联络是指在主丛的切丛上光滑地指派一个子丛 H，他在每一点都是垂直子空间的补空间，并且对于 R_g 诱导的切空间的映射满足 $H_{p \cdot g} = (R_g)_* H_p$.

现在，我们来看一些主丛的例子，首先是球面上的主丛。在 $\mathbb{R}^n$ 中，一组标准正交基 $\{e_i\}$ 称为一个标准正交标架，因为两组正交标架之间差一个正交变换 $O(n)$，定义映射

$$\begin{array}{rccc} \pi: & O(n) & \to & S^{n-1} \\ & \{e_i\} & \mapsto & e_n \end{array}$$

当 e_n 固定时，$\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ 是 e_n 的正交补空间中的标准正交标架，这些标架看到全体可以等同于 $O(n-1)$，可验证 π 给出了 S^{n-1} 上的纤维丛，该纤维丛也是主丛，结构群是 $O(n-1)$，在 $O(n)$ 上的右作用为

$$\begin{array}{lcl} O(n) \times O(n-1) & \to & O(n) \\ (A, B) & \mapsto & A \cdot \mathrm{diag}(B, 1), \end{array}$$

其中 $\mathrm{diag}(B, 1)$ 指的是对角为 B 和 1 的矩阵，乘法即矩阵乘法。同样地，如果考虑定向标准正交基，那么 $SO(n)$ 就是 S^{n-1} 上的主丛，纤维是 $SO(n-1)$.

再比如 Riemann 流形上的标架丛。设 M 是一个 Riemann 流形，T_pM 中的一组标准正交基称为标架，令 $F(M)$ 是流形各处标架的不交并，$F(M)$ 上可以自然定义微分结构使其变成一个可微流形，映射 $\pi: F(M) \to M$ 显示了 $F(M)$ 其实是一个主丛，纤维是 $O(n)$.

(3.6.3) 设 Lie 群 G 光滑右作用于流形 M，在 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中任取矢量 A，他都可以有一个 M 的单参变换群 $R_{\exp(tA)}$，这个变换群的无穷小生成元是一个 M 上的矢量场，称为由 A 诱导的基本矢量场，记做 A^*。或者将 $(A^*)_p$ 看做曲线 $\sigma(t) = R_{\exp(tA)}p = p \cdot \exp(tA)$ 在 $\sigma(0) = p$ 处的切矢量 $\dot{\sigma}(0)$.

当 G 为自由作用时，只要 $A \neq 0$，则 A^* 处处非零。对于主丛 P，G 自由右作用于他，所以每一个矢量 $A \in \mathfrak{g}$ 都诱导了 P 上的基本矢量场 A^*，映射 $A \to (A^*)_u$ 是 $\mathfrak{g} \to T_uG = V_uP$ 的线性同构，所以 A^* 作为 TP 的切矢量场，他只有垂直分量。

设主丛 P 上有联络 H_p，对于每一个 $p \in P$，可以定义线性映射 $\omega_p : T_pP \to \mathfrak{g}$ 通过对任意的 $X \in T_pP$ 指定 $\omega_p(X) = A \in \mathfrak{g}$ 为满足 $(A^*)_p = \mathrm{p_v}(X)$ 的唯一矢量 A，这样我们就得到了 P 上 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式 ω，称为给定联络的联络形式。

很容易根据定义得到，$\forall A \in \mathfrak{g}$ 可以得到 $\omega(A^*) = A$，由于 $A^* \in V_pP$，或者 $\mathrm{p_v}(A^*) = A^*$，那么自然 $\omega(A^*) = A$.

ω 作为形式，自然可以拉回，尤其是右作用 R_g 的拉回 $(R_g)^*$。

Proposition (3.6.4) 联络形式满足：$(R_g)^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$.

Proof: 使用拉回的定义，只要对任意的矢量场 X 考察 $((R_g)^*\omega)(X)$ 就可以知道 $(R_g)^*\omega$ 了。由于线性性，我们可以分成垂直方向和水平方向考虑，对于竖直方向，因为每一点都有 $\mathfrak{g} \cong V_pP$，所以不妨将竖直矢量场看做一个基本矢量场 $X = A^*$

$$((R_g)^*\omega)(A^*) = \omega((R_g)_*A^*).$$

现在来求 $(R_g)_*A^*$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(R_gR_{\exp(tA)})(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(R_gR_{\exp(tA)}R_g^{-1})(p\cdot g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(R_{g^{-1}\exp(tA)g})(p\cdot g),$$

因为 $g^{-1}\exp(tA)g = \exp(t\mathrm{Ad}(g^{-1})A)$，上面的等式就是说 $\mathrm{Ad}(g^{-1})A$ 生成了基本矢量场 $(R_g)_*A^*$.

综上

$$((R_g)^*\omega)(A^*) = \omega((R_g)_*A^*) = \mathrm{Ad}(g^{-1})A = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega(A^*)),$$

这就是说在竖直方向 $(R_g)^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$.

对于水平方向，由于 $\mathrm{p_v}(X) = 0$ 所以 $\omega(X) = 0$，此外 $(R_g)_*$ 由于将水平空间映到水平空间，所以 $(R_g)_*X$ 依然是水平矢量场，于是 $(R_g)^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$，因为两边都等于 0. □

反之，如果给定了 P 上一个 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式 ω，满足 $\omega(A^*) = A$ 和 $(R_g)^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$，那么可以定义一个联络通过

$$H_p = \ker(\omega_p) = \{X \in T_pP : \omega_p(X) = 0\}.$$

3.7 Connection Form

这里在局部计算主丛的联络形式，并将其和矢量丛里面的联络形式联系起来。

首先在主丛 P 有局部平凡化 (U_α, ψ_α)，记微分同胚 $\psi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$. 那么在两个相交的平凡化上，转移函数满足

$$g_\beta(p) = g_{\beta\alpha}g_\alpha(p),$$

并且主丛的定义要求平凡化要在同一个轨道里，所以

$$\psi_\alpha(p\cdot g) = (\pi(p), g_\alpha(p)g).$$

在每一个 α，定义 U_α 上的局部截面 σ_α 为

$$\sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e),$$

转移到其他平凡化里面

$$\sigma_\beta(x)=\psi_\beta^{-1}(x,e)=\psi_\alpha^{-1}(x,g_{\alpha\beta}(x))=\psi_\alpha^{-1}(x,e)\cdot g_{\alpha\beta}(x)=\sigma_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x).$$

对每一个 α，通过联络形式 ω 可以定义一个 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式 ω_α，那么通过截面 $\sigma_\alpha:U_\alpha\to P$ 诱导的 $\sigma_\alpha^*:T^*P\to T^*U_\alpha$，定义

$$\omega_\alpha=\sigma_\alpha^*(\omega).$$

关于他在转移函数下的表现，考察 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$，设 $X\in T_xM$，由截面在转移函数下的表现 $\sigma_\beta(x)=R_{g_{\alpha\beta}(x)}\sigma_\alpha(x)$，求个导数（定义 $L_p(g)=p\cdot g$）

$$(\sigma_\beta(x))_*X=(R_{g_{\alpha\beta}(x)})_*(\sigma_\alpha(x))_*X+\left(L_{\sigma_\alpha(x)}\right)_*(g_{\alpha\beta})_*X,$$

上面式子的第两项是因为 $g_{\alpha\beta}(x)$ 也是和 x 有关的。于是

$$\begin{aligned}
\omega_\beta(x)X&=((\sigma_\beta)^*\omega(x))X\\
&=\omega(\sigma_\beta(x))(\sigma_\beta(x))_*X\\
&=\omega(\sigma_\beta(x))((R_{g_{\alpha\beta}(x)}\sigma_\alpha(x))_*X)\\
&=\omega(\sigma_\beta(x))\left((R_{g_{\alpha\beta}(x)})_*(\sigma_\alpha(x))_*X+\left(L_{\sigma_\alpha(x)}\right)_*(g_{\alpha\beta})_*X\right)\\
&=\mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})\left(\omega(\sigma_\alpha(x))(\sigma_\alpha(x))_*X\right)+\omega(\sigma_\beta(x))\left(\left(L_{\sigma_\alpha(x)}\right)_*(g_{\alpha\beta})_*X\right),\\
&=\mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})\left(\omega_\alpha(x)X\right)+L^*_{\sigma_\alpha(x)}(\omega)(g_{\alpha\beta}(x))\left((g_{\alpha\beta})_*X\right)\\
&=\mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})\left(\omega_\alpha(x)X\right)+g^*_{\alpha\beta}\circ L^*_{\sigma_\alpha(x)}(\omega)(x)\,(X)
\end{aligned}$$

定义 $\theta=L^*_{\sigma_\alpha(x)}(\omega)$，为了证实这个定义是合理的，我们需要检验这和选取的平凡化无关。选一个 $Y\in T_gG$ 的元素，再重用一下符号 L，将其看做群的左乘，那么 $L_{g^{-1}}$ 的导数 $(L_g^{-1})_*:T_gG\to T_eG=\mathfrak{g}$ 且 $(L_g^{-1})_*Y=Y_0$. 现在

$$\begin{aligned}
L^*_{\sigma_\alpha(x)}(\omega)(g)(Y)&=L^*_{\sigma_\alpha(x)}(\omega)(g)((L_g)_*Y_0)\\
&=(\omega)(\sigma_\alpha(x)\cdot g)\left(L_{\sigma_\alpha(x)*}L_{g*}Y_0\right)\\
&=(\omega)(\sigma_\alpha(x)\cdot g)\left(\left(L_{\sigma_\alpha(x)\cdot g}\right)_*Y_0\right),
\end{aligned}$$

注意，$\left(L_{\sigma_\alpha(x)\cdot g}\right)_*Y_0$ 其实是 $(\sigma_\alpha(x)\cdot g)\cdot\exp(tY_0)$ 的切矢量，所以他是 Y_0 诱导的基本矢量场的矢量 $(Y_0)^*_{\sigma_\alpha(x)\cdot g}$，对于基本矢量场，按照联络形式的性质 $\omega_{\sigma_\alpha(x)\cdot g}\left((Y_0)^*_{\sigma_\alpha(x)\cdot g}\right)=Y_0$，综上

$$\theta(Y)=L^*_{\sigma_\alpha(x)}(\omega)(g)(Y)=\omega_{\sigma_\alpha(x)\cdot g}(Y_0^*)=Y_0=\left(L_{g^{-1}}\right)_{*g}Y,$$

所以 θ 的定义是合理的。在 Lie 群理论里面，这个 θ 称为典则左不变 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式，或者 Maurer-Cartan 形式，称为左不变的是因为对任意的群元 g 都有 $L_g^*\theta=\theta$，从定义看这是显然的。

最后 ω_α 在转移函数下的表现就是

$$\omega_\beta=\mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha+g^*_{\alpha\beta}\theta,$$

反之，给定了所有的 ω_β 也就给出了联络形式，当然也给出了联络。

前面说过，一个主丛可以自然地通过表示和一个矢量丛（称为伴随丛）联系在一起。如果已知了表示 $\rho:G\to\mathfrak{gl}(V)$，我们就可以几乎把所有的 $g\in G$ 换成 $\rho(g)\in\mathfrak{gl}(V)$ 而没什么问题，比如现在的矢量丛上的转移函数即 $\varphi_{\alpha\beta}=\rho(g_{\alpha\beta})$.

给定主丛上的联络，即联络形式 ω，可以布局定义 ω_α，由于 $\rho : G \to \mathfrak{gl}(V)$ 是 Lie 群同态，当然就诱导了 Lie 代数同态 $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，那么 $A_\alpha = \rho_*\omega_\alpha$ 就是 $\mathfrak{gl}(V)$ 值 1-形式。

因为一般线性群有直接继承自 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的微分结构，所以

$$(L_g)_{*a}v = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(L_g(a+tv) - L_g(a)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(L_g(tv)) = L_g(v) = gv.$$

其中 g 和 v 都是矩阵，矩阵乘矩阵还是矩阵，所以 Lie 代数也是矩阵的形式。设 $\mathrm{d}g = (\mathrm{d}x_{ij})$，那么 v 就可以写成 $\mathrm{d}g(v)$，因为 $\mathrm{d}x_{ij}(v) = v_{ij}$，则

$$\theta = g^{-1}\mathrm{d}g.$$

所以一般线性群上的 Maurer-Cartan 形式即 $g^{-1}\mathrm{d}g$，将所有的 $\mathfrak{g}$ 值形式 ω 换成 $\rho_*\omega$ 就好，那么按照这个原则

$$\begin{aligned}
A_\beta &= \rho(g_{\alpha\beta})^{-1}A_\alpha\rho(g_{\alpha\beta}) + \rho(g_{\alpha\beta})^*\left(\rho(g)^{-1}\mathrm{d}\rho(g)\right)\\
&= \rho(g_{\alpha\beta})^{-1}A_\alpha\rho(g_{\alpha\beta}) + \rho(g_{\alpha\beta})^{-1}\mathrm{d}\rho(g_{\alpha\beta})\\
&= \varphi_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}^{-1}\mathrm{d}\varphi_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

这是前面我们已经见到过的变换方式。利用 A_α 可以构造矢量丛上的联络，事实上，固定 V 的一组基 e_i，那么可以在每一个 U_α 上定义一个伴随丛的局部截面

$$\mu_{\alpha,i}(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, e_i)$$

记 $\mu_\alpha = (\mu_{\alpha,1}, \cdots, \mu_{\alpha,n})$ 是一个行矢量，那么矩阵乘法给出

$$\mu_\alpha \cdot \rho(g_{\alpha\beta}) = \mu_\alpha \cdot \varphi_{\alpha\beta} = \mu_\beta.$$

将 A_α 写成矩阵形式 $A^i_{\alpha,j}$，我们可以定义些局部联络

$$D_\alpha\mu_{\alpha,i} = \mu_{\alpha,j}\otimes A^j_{\alpha,i},$$

或者写成矩阵形式

$$D_\alpha\mu_\alpha = \mu_\alpha \otimes A_\alpha.$$

如果 $s = s^i\mu_{\alpha,i}$ 是 U_α 中的截面，则定义局部联络算子

$$D_\alpha s = \mu_{\alpha,i}\otimes \mathrm{d}s^i + s^i D_\alpha\mu_{\alpha,i}.$$

容易通过 A_α 和 μ_α 在转移函数下的行为证明在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 上，$D_\alpha = D_\beta$。这样，我们就给出了一个矢量丛上的联络 D。

下面讨论主丛上的曲率。设 η_1, η_2 都是某个流形上的 $\mathfrak{g}$ 值微分形式，取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 e_i，所以

$$\eta_1 = e_i \otimes \eta_1^i, \quad \eta_2 = e_i\otimes\eta_2^i,$$

定义，两个 $\mathfrak{g}$ 值微分形式的对易为

$$[\eta_1, \eta_2] = [e_i, e_j]\otimes \eta_1^i \wedge \eta_2^i,$$

容易验证这个定义和基的选取无关。根据定义，直接计算可以得到

$$[\eta_2, \eta_1] = (-1)^{\deg\eta_1\cdot\deg\eta_2+1}[\eta_1, \eta_2], \quad \mathrm{d}[\eta_1,\eta_2] = [\mathrm{d}\eta_1, \eta_2] + (-1)^{\deg\eta_1}[\eta_1, \mathrm{d}\eta_2],$$

此外对于两个 1-形式，直接的计算也有

$$[\eta_1,\eta_2](X,Y)=[\eta_1(X),\eta_2(Y)]-[\eta_1(Y),\eta_2(X)].$$

注意，根据上面的两个计算有

$$[\eta_1,\eta_1](X,Y)=[\eta_1(X),\eta_1(Y)]-[\eta_1(Y),\eta_1(X)]=2[\eta_1(X),\eta_1(Y)],$$

此时一般是 $[\eta_1,\eta_1]\neq 0$。类比矢量丛 $F=\mathrm{d}A+A\wedge A$，我们定义主丛上的曲率形式为

$$F=\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega].$$

曲率这样定义的合理性以及下面这个定理，不再详细叙述，1/2 来自于 $[\eta_1,\eta_1]$ 的计算，其余的可以自行检验两个表达式在矢量丛上的统一性。

(3.7.1) Bianchi 等式：$\mathrm{d}F=[F,\omega]$.

3.8 Guage Field

定义一个规范场论需要一个 Lie 群 G，一个主 G-丛 P，底流形为 M，此外 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上面有一个双不变度量，即 $\langle \mathrm{Ad}_g X,\mathrm{Ad}_g Y\rangle=\langle X,Y\rangle$ 对任意的 $g\in G$ 和 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 都成立。

P 上的一个联络被称为一个规范场，正如上面看到的，给出规范场只要给出其规范形式 A 即可，所以经常称呼 A 为规范场，但实际上，A 不是坐标无关的，他依赖于局部化的选取，所以一个规范场是确定到一个联络上面的。在不同的局部化选取，或者说在不同规范下，规范场 A 的变换为

$$A_\beta=\mathrm{Ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})A_\alpha+g_{\alpha\beta}^*\theta,$$

如果 G 是一个矩阵群，那么变换写作

$$A_\beta=g_{\alpha\beta}^{-1}\cdot A_\alpha\cdot g_{\alpha\beta}+g_{\alpha\beta}^{-1}\cdot\mathrm{d}g_{\alpha\beta}.$$

规范场 A 的曲率 F_A 由下式定义：

$$F_A=\mathrm{d}A+\frac{1}{2}[A,A].$$

定一个规范，矩阵群下设 $A=A_i\mathrm{d}x^i$，那么

$$F=\frac{1}{2}\left(\partial_{[i}A_{j]}+[A_i,A_j]\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j.$$

现在来看经典电动力学确实是一种规范场论，取 M 为 $\mathbb{R}^{3+1}$，$G=U(1)$，$P=M\times G$ 是一个平凡主 G-丛。由于 $\mathfrak{u}(1)=\mathbb{R}$，所以所谓的 $\mathfrak{u}(1)$ 值 1-形式 $A=A_i\mathrm{d}x^i$ 其实就是普通的 1-形式，其中 A_i 是标量函数。记规范场为 $A=(\boldsymbol{A},\varphi)$，转移函数 $\psi:M\to U(1)$ 的作用就变成了

$$A'=A+\psi^{-1}\mathrm{d}\psi=A+\mathrm{d}\ln(\psi),$$

由于定义了同一个联络，所以也就是同一个场。此外，曲率 F_A 就是

$$F=\frac{1}{2}\partial_{[i}A_{j]}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j,$$

他的矩阵当然就是熟悉的定义 $F_{ij}=\partial_{[i}A_{j]}$，即电磁场张量。因为这里曲率是反对称的，他的 $1+2+3=6$ 个独立分量确定了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的全部空间分量。Bianchi 等式 $\mathrm{d}F_A=[F_A,A]$ 或在矢量丛下写作 $DF_A=0$ 就告诉了我们第一组 Maxwell 方程。

第二组 Maxwell 方程的写出需要作用量，类比电磁场，一个纯经典规范场的作用量写作

$$S_{YM}(A) = -\frac{1}{2}\int_M F_A \wedge (\star F_A),$$

他被称为 Yang-Mills 作用量。一般在定义星算子的时候，会选择 Killing 形式作为非退化双线型（加上半单假设）。经典电动力学的作用量中的 Killing 形式即两个实数相乘。如果含有源，则作用量写作

$$S(A) = -\int_M A \wedge \star j - \frac{1}{2}\int_M F_A \wedge \star F_A.$$

如果考虑 Lie 群是矩阵群，那么可以在矢量丛下对其变分就得到了第二组 Maxwell 方程

$$\star D \star F_A = -j.$$

3.9 Orbital Geometry of the Adjoint Action

上面看过了 Lie 代数的伴随表示，现在来看看 Lie 群的伴随作用，其中担任有趣的角色的就是极大交换子群，类似于 Cartan 子代数是极大交换子代数。

由于我们考虑是紧 Lie 群 G，那么我们总可以得到他的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上伴随作用下不变的内积，因此我们就可以定义 $\mathfrak{g}$ 上面的一组正交基，选定正交基之后我们拓展到对应的左不变矢量场上，我们就得到了一个标架场，也就是确定了 G 上唯一的 Riemann 结构使得那些左不变矢量场在每一个点都相互正交。

这样定义的 Riemann 结构，由于标架场是左不变矢量场，所以左平移 $(l_a)_*$ 是等距同构，而伴随作用因为我们定义的内积也是等距同构，那么右平移作为左平移和伴随作用的复合，也是等距同构。

伴随作用的轨道确定了 Lie 群的共轭类，而又因为伴随作用是等距同构，这就是说共轭类在几何结构上大致是相同的。这节中重要的定理即明确了这个事实。

(3.9.1) 一个紧 Lie 群的环子群是一个紧的连通交换 Lie 子群。一个极大环子群就是说这个环子群不能真包含在其他的环子群里面。

SO(2) 是 SO(3) 的极大环子群，SO(2) $\times$ SO(2) 是 SO(4) 的极大环子群，环面 $\mathrm{T}^n = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) : 0 \le \theta_i < 2\pi\}$ 是 $U(n)$ 的极大环子群。由于 SO(2) 同构于环 S^1，而 T^n 同构于 $\mathrm{S}^1 \times \cdots \times \mathrm{S}^1$，所以环子群的名字是十分形象的。

Proposition (3.9.2) 令 T 是 G 的环子群以及 $F(T,\mathfrak{g})$ 或 $F(T,G)$ 是 T 在 $\mathfrak{g}$ 或者 G 上的伴随作用的不动点集，那么 T 是极大环子群当且仅当 $\dim F(T,\mathfrak{g}) = \dim T$ 或者 $F(T,G)$ 包含 T 作为其中之一的连通分支。

让 $\mathfrak{t}$ 是 T 的 Lie 代数，那么每一个 $t \in T$ 都满足 $\mathrm{Ad}_t\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$，这是 Abel 群的自然结果，所以

$$\mathfrak{t} \subset F(T,\mathfrak{g}).$$

如果 T 不是极大的，那么存在一个 T_1 使得 $T \subset T_1$，且他的 Lie 代数满足 $\mathfrak{t}_1 \subset F(T_1,\mathfrak{g})$. 所以

$$\dim T = \dim \mathfrak{t} < \dim \mathfrak{t}_1 \le \dim F(T,\mathfrak{g}).$$

反过来，如果 $\dim F(T,\mathfrak{g}) > \dim T$，那么存在 $X \in F(T,\mathfrak{g}) - \mathfrak{t}$ 使得分布 $\{X,\mathfrak{t}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Lie 子代数，且上面的交换子都为 0。于是存在一个 Abel 子群 H 其 Lie 代数为 $\{X,\mathfrak{t}\}$，我们现在考虑 H 的闭包，他是一个紧集中的闭集，所以也是紧的（Hausdorff 性是流形保证的），所以他是一个真包含 T 的环子群，这和 T 是极大环子群相悖。

至于剩下的关于 Lie 群的结论，显然来自于其 Lie 代数和 Lie 群的联系。

下面这个定理就是这节的主要内容。

Theorem (3.9.3) 令 T 是紧 Lie 群 G 的极大环子群，那么每个 $g \in G$ 共轭于某个 T 的元素。

因此所有的极大环子群都是相互共轭的。

令 φ 是 Lie 群 G 的伴随表示在 T 上的限制 $\varphi = \mathrm{Ad}|_T$，且 $\mathfrak{t}$ 是 T 的 Lie 代数。因为 T 是极大环子群，所以从上一个命题可以推知 $F(T, \mathfrak{g}) = \mathfrak{t}$，注意到极大环子群是 Abel 群，所以他的每一个复的不可约有限维表示都是一维的，则实的不可约有限维表示都是二维的，因此

$$\varphi = \dim \mathfrak{t} \cdot 1 \oplus \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_l.$$

其中 1 表示为一维平凡表示，φ_i 是一维非平凡不可约表示，由于 φ_i 都可以表示为一个幺正表示，也即 $e^{i\theta}$，那么 φ_i 也可以看成一个非平凡的从 T 到 $\mathrm{SO}(2)$ 的群同态，那么 φ_i 的核是余维度为 1 的闭 Lie 子群，他们的并 $\cup \ker(\varphi_i)$ 的补集是 T 的一个开子流形，我们记做 W.

令 $t_0 \in W$，则每一个 $\varphi_i(t_0)$ 都是一个不平凡的旋转，因此 $F(\varphi(t_0), \mathfrak{g}) = \mathfrak{t}$，令 $G_{t_0} = \{g \in G : gt_0g^{-1} = t_0\}$ 是 t_0 的中心化子，以及 e^{sX} 是 G_{t_0} 的任意的单参子群，于是

$$e^{sX} = t_0 e^{sX} t_0^{-1} = e^{s\mathrm{Ad}(t_0)X}$$

对任意的 $s \in \mathbb{R}$ 都成立，于是 $X \in F(\varphi(t_0), \mathfrak{g}) = \mathfrak{t}$. 所以 G_{t_0} 的 Lie 代数就是 $\mathfrak{t}$，那么他带单位元的连通分支就是 T，因此 $\dim G(t_0) = \dim G - \dim G_{t_0} = \dim G - \dim T$，其中 $G(t_0)$ 是 t_0 的共轭作用的轨道，或者说是 t_0 的共轭类。我们下面要证明 $G(t_0)$ 是 T 在 t_0 处的正交补。

注意到两个 $t_0, t \in T$ 是可交换的，因此 $\sigma_t : x \mapsto txt^{-1}$ 和 l_{t_0} 对任意的 $x \in G$ 都是可以交换的。因此 $(l_{t_0})_*$ 是 $\mathfrak{g}$ 和 $T_{t_0}G$ 对于伴随作用等价的映射，即 $(l_{t_0})_*(\sigma_t)_* = (\sigma_t)_*(l_{t_0})_*$, 这样 $(l_{t_0})_*$ 就类似一个缠结映射。

因为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^{\perp},$$

所以有

$$\varphi|_{\mathfrak{t}} = \dim \mathfrak{t} \cdot 1, \quad \varphi|_{\mathfrak{t}^{\perp}} = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_l.$$

因为 $(l_{t_0})_*\mathfrak{t}$ 就是 T 在 t_0 处的切空间，为了证明 $G(t_0)$ 在 t_0 处的切空间就是 T 在 t_0 处的切空间的正交补，我们可以去证明 T 的伴随作用诱导在切空间上的作用不包含任意固定的方向。

Proposition (3.9.4) 令 H 是 G 的紧 Lie 子群，他们的 Lie 代数分别为 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$，则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$。那么在 G/H 基点处的切空间 $T_0(G/H)$ 诱导的 H 作用等价于 H 的伴随作用在 $\mathfrak{h}^{\perp}$ 上的限制。

设 $p(x) = xH \in G/H$ 是正则投影，那么

$$p \circ \sigma_h(x) = p(hxh^{-1}) = hxh^{-1} \cdot H = hx \cdot H = l_h(x \cdot H) = l_h \circ p(x),$$

对所有 $h \in H$ 都成立。那么

$$p_{*e} : \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp} \to T_0(G/H)$$

是 $\mathfrak{h}^{\perp}$ 和 $T_0(G/H)$（作为 H-线性空间）间的一个同构映射。

注意到作为群作用的共轭类，该作用的轨道就是共轭类，而给定元素的定点子群就是该元素的中心化子。所以 t_0 的轨道就是 G 和 t_0 的中心化子的商群，即 $G(t_0) = G/G_{t_0}$，那么我们就得到了 $\mathfrak{t}^{\perp}$ 和 $T_0(G/G_{t_0})$ 之间的同构，而这和 $(l_{t_0})_*\mathfrak{t}$ 的正交是显然的。

Theorem (3.9.5) G 上的两个有限维表示 ψ_1, ψ_2 是等价的，当且仅当他们在极大环子群上的限制是等价的。

ψ_1, ψ_2 等价和 $\chi_{\psi_1} = \chi_{\psi_2}$ 是一个意思，那么因为每一个 $g \in G$ 都共轭于某个 T 的元素，而共轭对迹没影响，所以 $\chi_{\psi_1} = \chi_{\psi_2}$ 和 $\chi_{\psi_1}|_T = \chi_{\psi_2}|_T$ 是一个意思，而 $\chi_{\psi_1}|_T = \chi_{\psi_2}|_T$ 又和 $\psi_1|_T, \psi_2|_T$ 等价是一个意思，所以 ψ_1, ψ_2 等价和 $\psi_1|_T, \psi_2|_T$ 等价是一个意思。

注意到极大环子群是 Abel 群，所以他的有限维不可约表示都是一维的，而紧 Lie 群保证了完全可约性，那么我们只要确定了这些一维不可约表示，也就确定了整个 Lie 群上面的表示。

(3.9.6) 群 $W(G) = N_G(T)/T$ 被称为 G 的 Weyl 群，其中 $N_G(T)$ 是 T 的正规化子，就是说是所有和 T 可交换的元素构成的群。

Appendix A

Tensors and Exterior Algebra

张量抽象了多线性函数，尤其是双线性函数。

(A.1) 设 A 是右 R-模，B 是左 R-模，那么我们称 $f : A \times B \to G$，其中 G 是一个交换群，为一个双线性函数，如果他满足

$$f(a+b,a') = f(a,a') + f(b,a'), \quad f(a,a'+b') = f(a,a') + f(a,b'),$$

以及对 $r \in R$ 满足 $f(ar,b) = f(a,rb)$.

特别地，如果我们存在一个双线性函数 φ，以及一个交换群 G，使得每一个 $A \times B$ 上的双线性函数 $f : A \times B \to H$ 都可以唯一分解为

$$f : A \times B \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{h_f} H,$$

其中 h_f 对每一个双线性函数 f 存在且唯一，则称呼 G 为 A 与 B 的张量积，记做 $A \otimes_R B$，而 $\varphi(a,b)$ 记做 $a \otimes_R b$，如果下标 R 不重要，那么我们可以省略他。

Lemma (A.2) 在模范畴内，张量积存在。而且由上面的泛性质，他确定到一个同构。

Proof: 对于唯一性，我们考虑两个张量积 (G,φ) 和 (G',φ')，那么根据张量积的性质，有分解

$$\varphi : A \times B \xrightarrow{\varphi'} G' \xrightarrow{h_\varphi} G, \quad \varphi' : A \times B \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{h_{\varphi'}} G',$$

所以只要验证 $h_\varphi \circ h_{\varphi'} = \mathrm{id}_G$ 和 $h_{\varphi'} \circ h_\varphi = \mathrm{id}_{G'}$ 就好了，这样我们就得到了 G 和 G' 之间的同构。而上述等式来自于分解的唯一性，显然，我们有分解

$$A \times B \xrightarrow{\varphi'} G' \xrightarrow{h_\varphi} G \xrightarrow{h_{\varphi'}} G', \quad A \times B \xrightarrow{\varphi'} G' \xrightarrow{\mathrm{id}_{G'}} G',$$

显然，所以由唯一性得到了 $h_{\varphi'} \circ h_\varphi = \mathrm{id}_{G'}$，同理有另一个等式。

对于存在性，我们可以直接构造，首先，我们知道在交换群范畴有直和存在，那么我们可以构造自由交换群 $F = \bigoplus_{(a,b)\in A\times B} \mathbb{Z}\langle (a,b)\rangle$. 令 $1_{a,b}$ 是 $\mathbb{Z}\langle (a,b)\rangle$ 中的 1，我们令 H 是由

$$1_{a,b} + 1_{a',b} - 1_{a+a',b}, \quad 1_{a,b} + 1_{a,b'} - 1_{a,b+b'}, \quad 1_{ar,b} - 1_{a,rb}$$

生成的子群，那么我们 $A \otimes B$ 就可以构造为 F/H，令 $\varphi(a,b) = a \otimes b = [1_{a,b}]$，即 $1_{a,b}$ 的陪集。这确实是张量积，具体的检验这里就不进行了。 $\square$

设 R 是交换环，A 和 B 都是双边模，那么 $A\otimes_R B$ 显然有一个 R-模结构，比如 $r(a\otimes b)$ 可以定义为 $(ra)\otimes b$. 特别地，如果交换环 T 是一个 R-代数[1]，设 A 是一个 R-模，则 $A\otimes_R T$ 就是一个 T-模。这是因为，我们可以通过 $t(a\otimes b)=a\otimes(tb)$ 来定义标量乘法。

由于矢量空间是域上的模，那么矢量空间之间也存在张量积，两个矢量空间的张量积还是一个矢量空间。设 V 和 W 都是 $\mathbb{R}$ 上的矢量空间，那么 $V\otimes W$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的矢量空间。如果他们都是有限维的，且 $\{v_i\}_{i\in I}$ 和 $\{w_j\}_{i\in J}$ 分别是他们的基，则可以检验 $\{v_i\times w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ 构成 $V\otimes W$ 的一组基，所以如果 V 是 m 维的，W 是 n 维的，则 $V\otimes W$ 是 mn 维的。

(A.3) 有同构 $A\otimes\bigoplus_i B_i\cong\bigoplus_i(A\otimes B_i)$，$R\otimes A\cong A$ 以及 $(R/I)\otimes B\cong B/IB$，其中 I 是 R 的一个理想。这俩的证明完全是利用泛性质，这里就不说了。

(A.4) 有了两个模的张量积，我们自然也可以拓展为三个模的张量积，我们可以通过模仿两个模的张量积的泛性质[2]，定义一个新的三个模之间的张量积 $A\otimes B\otimes C$，然后可以检验 $(A\otimes B)\otimes C$ 和 $A\otimes(B\otimes C)$ 同时也满足泛性质，所以他们之间是同构的。在这层意义上，我们可以认为张量积满足结合律，因此我们自然也有了有限个模的张量积。

将一个矢量空间 V 自己张量自己 k 次得到的空间 $V\otimes\cdots\otimes V$ 记做 V^k.

(A.5) 设我们有 n 维度矢量空间 V，那么我们多线性函数（即对每个变元都线性）

$$f:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{k\text{ 个}}\to\mathbb{R}$$

所构成的矢量空间自然同构于 $(V\otimes\cdots\otimes V)^*=(V^k)^*$，这是因为对多线性函数我们有唯一分解 $f=h_f\circ\varphi$，其中 $h_f\in(V^k)^*$，令 $\alpha:f\mapsto h_f$，显然这是双射，剩下只要检验这是线性的就好了。因为 $af+bg$ 同时有两个分解 $h_{af+bg}\circ\varphi$ 和 ah_f+bh_g，那么由分解的唯一性，我们就得到了 $h_{af+bg}=ah_f+bh_g$，故而同构。以后我们就直接认为 $(V^k)^*$ 是多线性函数构成的矢量空间。

因为这个等同，所以多线性函数通常直接写成 $f:V^k\to\mathbb{R}$.

(A.6) 类似于 V^k，我们可以将 V 的对偶空间和自己张量 k 次，即 $V_k=V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ 构成一个新的矢量空间，他和 $(V^k)^*$ 是自然同构的。

显然他们的维数相同，剩下只要找两个空间之间的一个单或者满线性映射就可以了。设 $f_1\otimes\cdots\otimes f_k\in V_k$，那么 $f_1(v_1)f_2(v_2)\cdots f_k(v_k)$ 自然定义了 $F\in(V^k)^*$. 而且由构造，这是一个单射，所以同构成立。这样，我们以后也不区分 $(V_k)^*$ 和 V_k.

特别地，利用上面这种等同，我们有 $V_m\otimes V_n=V_{m+n}$。对于两个多线性函数 $f\in V_m$ 和 $g\in V_n$，张量积 $f\otimes g\in V_{m+n}$ 具体写出来即

$$f\otimes g(v_1,\cdots,v_m,v_{m+1},\cdots,v_{m+n})=f(v_1,\cdots,v_m)g(v_{m+1},\cdots,v_{m+n}).$$

(A.7) 设 V 是 k-矢量空间，记 $V^0=k$，那么 $\bigoplus_{n\le 0}V^k$ 就构成了一个结合代数，记做 $\bigotimes V$. 我们称为张量代数。

设 $f:V\to W$ 是一个线性映射，其中 W 是一个 k-代数，那么通过 $F(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=f(v_1)\cdots f(v_n)$ 我们可以定义出一个 k-代数同态 $F:\bigotimes V\to W$，他满足泛性质：记 $i:V\to\bigotimes V$ 是自然的 k-线性映射，那么对于任意的 $\phi:V\to W$，其中 W 是 k-代数，我们都存在唯一的 k-代数同态 $\Phi:\bigotimes V\to W$ 使得分解 $\phi:V\xrightarrow{i}\bigotimes V\xrightarrow{\Phi}W$ 成立。

(A.8) 设 S^k 是对称群，我们可以将其线性地作用在 $(V^k)^*$ 的元素上，设 $\sigma\in S^k$，而 $f\in(V^k)^*$ 是一个多线性函数，那么我们可以定义一个新的多线性函数 $\sigma(f)$ 通过 $\sigma(f)(v_1,\cdots,v_k)=f(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)})$.

[1] 设 $f:R\to T$ 是一个环同态，那么我们可以通过 $r\cdot t=f(r)t$ 在 T 上定义一个 R-模结构，此时称 T 是一个 R-代数。此外，R-代数同态是一个环同态，同时也是一个 R-模同态。

[2] 即三线性的函数可以唯一分解。

一个多线性函数如果有 $\sigma(f) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} f$，则被称为是反对称的，特别地，对于交换一对元素，反对称多线性函数变号。因为任意一个置换都可以由交换一对元素复合而来，所以上面这个性质也完全描述了反对称多线性函数。

类似的，对称多线性函数即满足 $\sigma(f) = f$ 的函数。

(A.9) 这里复习一下外代数的内容。设 V 是一个 n 维矢量空间，记 $\Omega^k(V)$ 为所有反对称多线性函数 $f \in V_k$ 的集合。这个集合有一个显然的线性结构，构成 V_k 的一个子空间。此外再约定 $\Omega^1(V) = V^*$ 和 $\Omega^0(V) = \mathbb{R}$. 我们将 $\Omega^k(V)$ 称为 V 的 k-次外代数。

(A.10) 设 $\xi \in \Omega^m(V)$ 和 $\eta \in \Omega^n(V)$，定义 ξ 和 η 的外积 $\xi \wedge \eta \in \Omega^{m+n}(V)$ 为

$$\xi \wedge \eta = \frac{1}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(\xi \otimes \eta),$$

其中 σ 属于 $m+n$ 阶置换群。

Proposition (A.11) 设 $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Omega^m(V)$ 和 $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Omega^n(V)$ 还有一个 $\zeta \in \Omega^h(V)$，有

(1) 分配律：

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta,$$
$$\xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2.$$

(2) 反变换律：$\xi \wedge \eta = (-1)^{mn} \eta \wedge \xi$.

(3) 结合律：$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$.

Proof: (1) 由 σ 线性和张量积线性显然。

(2) 设置换

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & m & m+1 & \cdots & m+n \\ 1+n & \cdots & m+n & 1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

容易证明 $(-1)^{\text{sign}(\tau)} = (-1)^{mn}$.

由线性性，我们只要对一个分量证明就可以了。按基打开直接写出

$$\xi \wedge \eta = \frac{\xi^{i_1 \dots i_m} \eta^{j_1 \dots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n})$$
$$\eta \wedge \xi = \frac{\xi^{i_1 \dots i_m} \eta^{j_1 \dots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n} \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m})$$

注意到 σ 跑遍所有置换，那么 σ 和 τ 的复合 $\sigma' = \sigma \circ \tau$ 也跑遍所有置换，且

$$(-1)^{\text{sign}(\sigma')} = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} (-1)^{\text{sign}(\tau)},$$

所以

$$\begin{aligned}
\eta \wedge \xi &= \frac{\xi^{i_1 \cdots i_m} \eta^{j_1 \cdots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma' \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma')} \sigma'(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n} \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}) \\
&= \frac{\xi^{i_1 \cdots i_m} \eta^{j_1 \cdots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} (-1)^{\text{sign}(\tau)} \sigma(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}) \\
&= (-1)^{\text{sign}(\tau)} \frac{\xi^{i_1 \cdots i_m} \eta^{j_1 \cdots j_n}}{m!n!} \sum_{\sigma \in S^{m+n}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \sigma(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}) \\
&= (-1)^{\text{sign}(\tau)} \xi \wedge \eta.
\end{aligned}$$

代入 $(-1)^{\mathrm{sign}(\tau)}=(-1)^{mn}$ 即得证 (2).

第三个性质，也就是结合律的证明可以类比张量积结合律的证明，定义

$$\xi\wedge\eta\wedge\zeta=\frac{1}{m!n!h!}\sum_{\sigma\in S^{m+n+h}}(-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}\sigma(\xi\otimes\eta\otimes\zeta),$$

然后就是直接的计算

$$(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge\eta\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta).$$

□

(A.12) 留意 $v,w\in\Omega^1(V)=V^*$ 的外积 $v\wedge w$ 是有趣的。首先，显然地，$\omega\wedge\omega=0$。然后容易证明对 $a,b\in V$

$$v\wedge w(a,b)=v(a)w(b)-w(a)v(b)=\begin{vmatrix}v(a)&v(b)\\w(a)&w(b)\end{vmatrix}.$$

对于多个 $\omega_i\in\Omega^1(V)$ 的外积，我们可以用归纳法证明

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p(v_1,\ldots,v_p)=\begin{vmatrix}\omega_1(v_1)&\cdots&\omega_p(v_p)\\\vdots&\ddots&\vdots\\\omega_p(v_1)&\cdots&\omega_p(v_p)\end{vmatrix}.$$

(A.13) 还有一个很类似的结论，对于多个 $\omega_i\in\Omega^1(V)$ 的外积来说我们有 $\omega_i\wedge\omega_j=-\omega_j\wedge\omega_i$，而且是线性的。我们考虑 p 个 $\omega_i\in\Omega^1(V)$ 之间的外积 $F(\omega_1,\ldots,\omega_n)=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p$，如果矢量空间 V^* 的基是 $\{v_i\}$，由于 F 是反对称线性映射，我们有熟知的分解：

$$F(\omega_1,\ldots,\omega_p)=\det(\omega_1,\ldots,\omega_p)F(v_1,\ldots,v_p),$$

或者写作

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p=\begin{vmatrix}\omega_{11}&\cdots&\omega_{p1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\omega_{1p}&\cdots&\omega_{pp}\end{vmatrix}v_1\wedge\cdots\wedge v_p.$$

其中 ω_{ij} 值的是 ω_i 在 v_j 方向的分量值。从这里可以看到，若 ω_i 们线性相关的，则 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p=0$. 若 V^* 的维度是 n，而 $p>n$，则 ω_i 必然线性相关，则 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p=0$.

(A.14) 特别地，如果 $\omega'=\mathrm{d}x'$ 和 $\eta'=\mathrm{d}y'$，且 x' 和 y' 可以看做 x 和 y 的函数，而

$$\mathrm{d}x'=\partial_x x'\mathrm{d}x+\partial_y x'\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}y'=\partial_x y'\mathrm{d}x+\partial_y y'\mathrm{d}y,$$

因此

$$\mathrm{d}x'\wedge\mathrm{d}y'=\det\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 $\partial(x',y')/\partial(x,y)$ 是 (x',y') 关于 (x,y) 的 Jacobian. 如果还记得积分学的一些基本事实，会发现这就是和重积分变量替换公式是如此的相似。实际上，对于二个变量的重积分变换公式，他写作

$$\int_S\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\int_S\left|\det\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中绝对值的引入是因为换变量可能会改变积分区域的定向。

所以，从这个角度来看，正如我们对于 $\mathrm{d}x$ 是无穷小距离的直观一样，我们可以认为 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 是无穷小面积。

(A.15) 设 $\{e^i : 1 \le i \le n\}$ 是 V^* 的一组基，则 $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}$ 是 $\Omega^k(V)$ 的一组基。于是当 $k > n$ 时 $\Omega^k(V) = 0$，当 $0 \le k \le n$ 时，$\dim \Omega^k(V) = \binom{n}{k}$.

Lemma (A.16) （Cartan 引理）设 $\{v_i : 1 \le i \le r\}$ 和 $\{w_i : 1 \le i \le r\}$ 是 V^* 中的两组矢量，且 $\sum_{i=1}^r v_i \wedge w_i = 0$。如果 $\{v_i\}$ 线性无关，则每个 w_i 可以由 $\{v_i\}$ 线性组合而成 $w_i = \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} v_j$，且 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Proof: 将 $\{v_i\}$ 扩充为一组基，则 $w_i = \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} v_j$，将其代入条件 $\sum_{i=1}^r v_i \wedge w_i = 0$ 有

$$0 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} v_i \wedge v_j = \sum_{1 \le i < j \le n} (\alpha_{ij} - \alpha_{ji}) v_i \wedge v_j + \sum_{j=r+1}^n \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} v_i \wedge v_j,$$

由于 $v_i \wedge v_j$ 是 $\Omega^2(V)$ 的一组基，所以 $\alpha_{ij} = 0$ 当 $j > r$，且 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ 当 $j \le r$. $\square$

Appendix B

Partition of Unity

函数 f 的支集 $\mathrm{supp}(f)$ 被定义为 $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$ 的闭包。

(B.1) 单位分解：设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 M 的一个开覆盖，如果存在至多可数个光滑函数 $g_i \in (\mathcal{M})$ 满足：

(1) 对于任意的 $x \in M$ 和 $i \in I$，都有 $0 \leq g_i(x) \leq 1$.

(2) 对每个 g_i，都存在一个 α_i 使得 $\mathrm{supp}(g_i) \subset U_{\alpha_i}$.

(3) 集族 $\{\mathrm{supp}(g_i)\}$ 局部有限，即任取 $p \in M$，存在 p 的邻域 U 使得 U 只和集族 $\{\mathrm{supp}(g_i)\}$ 中的有限个集合相交非空。

(4) 因为上一个性质，所以在一点累加 g_i 时，只有有限项非零。我们最后的要求就是 $\sum_i g_i = 1$.

则称 $\{g_i\}$ 是从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的一个单位分解。

Lemma (B.2) 流形 M 上的每一个开覆盖都存在从属于他的单位分解。

(B.3) （$\mathbb{R}$ 上的截断函数）在 $\mathbb{R}$ 上存在光滑函数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得

$$h(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1; \\ 1, & |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

他的图像大概就是在 0 附件鼓起来一块，然后其他地方全都为零，所以有时候也叫他鼓包函数。单位分解中的任意一个函数都长得和他差不多。

构造这样的函数，我们可以只构造 $x < 0$ 的部分，然后将其偶函数拓展到 $\mathbb{R}$ 上，因为在 0 附近是常值函数，所以这样构造出的函数是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数。剩下的关键在于找一个 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数，他在一段区间上可以光滑连接两个阶梯 0 和 1。

可以证明

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

是一个光滑函数，正半轴的图像大概是在原点为 0，在无穷远为 1，中间光滑连接。那么光滑函数

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \varphi(1-x)},$$

就是在 $[0, 1]$ 上连接两个阶梯的光滑函数。实际上，他在 $x < 0$ 的时候是 0，而在 $x > 1$ 的时候是 1，中间光滑连接。

那么我们所需的 h 就可以如下构造：在 $x<0$ 的时候，$h(x)=g(2x+2)$，仍然扩充为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数。

(B.4) （$\mathbb{R}^n$ 上的截断函数）由于 $\mathbb{R}^n$ 上的范数、或者标准内积是光滑的，则 $\mathbb{R}^n$ 上存在光滑函数 $f(x)=h(\|x\|)$，使得

$$f(x)=\begin{cases}0, & \|x\|\geq 1;\\ 1, & \|x\|\leq 1/2.\end{cases}$$

(B.5) 设 M 是一个局部紧的第二可数空间，则存在一列开集 $\{G_i\}$，使得每个 $\bar{G}_i$ 都是紧集，$\bar{G}_i\subset G_{i+1}$，且 $\cup_i G_i=M$. 这样的一列开集被称为 M 上的一个穷竭。

Proof: 任取 $x\in M$，由于 M 是局部紧的，所以我们可以找一个邻域 V_x 使得 $\bar{V}_x$ 是紧集。由于 M 第二可数，有可数基，所以我们可以找至多可数个 x 使得 V_x 构成 M 的一个开覆盖，由于至多可数，所以我们可以利用正数将其编号。随便选定一个编号就好，我们令 $G_1=V_1$，然后假设在 $0<i<n$ 的时候 G_i 都已经定义，那么考虑紧集 $\cup_{i<n}\bar{G}_i$，开覆盖 $\{V_j\}$ 中可以找到一个有限子覆盖，对应着有限指标集 I，使得 $\cup_{j\in I}V_j$ 也是 $\cup_{i<n}\bar{G}_i$ 的开覆盖，取 $k=\sup(I)$，则

$$\bigcup_{i<n}\bar{G}_i\subset\bigcup_{j\leq k}V_j,$$

那么定义 $G_n=\cup_{j\leq k}V_j$，我们就归纳地找到了 M 上的一个穷竭。 □

由于任意的微分流形都是局部紧且第二可数的，所以任意的微分流形上都存在穷竭。现在，我们来证明 Lemma (B.2)：

Proof: 设 $\{U_\alpha\}$ 是流形 M 的一个开覆盖。在 M 上找一个穷竭 $\{G_i:i>0\}$，并令 $G_0=\varnothing$，现在取 $A_i=\bar{G}_i-G_{i-1}$，则显然 $\{A_i:i>1\}$ 是一组闭集，而流形 Hausdorff 性告诉我们，因为 A_i 是紧集 $\bar{G}_i$ 的闭子集，所以他也是紧的。

此外，$\{A_i:i>1\}$ 是 M 的一个覆盖。这是因为，如果集合 $U\cap A_i=\varnothing$，则 $U\subset G_{i-1}\cup(M-\bar{G}_i)$。如果对每一个 i 都成立的话，则 U 属于 $\{G_{i-1}\cup(M-\bar{G}_i)\}_i$ 的交，但按照穷竭的定义，这是一个空集。

固定一个 A_i，取 $x\in A_i$，找一个坐标卡 (U_x,φ_x)，使得 $\varphi_x(U_x)$ 是欧式空间中半径为 2 的开球，U_x 位于某个开覆盖 $U_{\alpha(x)}$ 之中，且 $U_x\cap A_j=\varnothing$ 当 $|j-i|>1$。

前面两点是显然的，关于第三点，由于处理 $A_i\cap A_{i-1}=\bar{G}_{i-1}-G_{i-1}$ 以及平凡的 $A_i\cap A_i=A_i$，其他的 $A_i\cap A_j=\varnothing$，所以对于 $|j-i|>1$ 的 A_j，我们有 $A_i\subset M-A_j$，而 $M-A_j$ 是一个开集，所以只要把 U_x 选得足够小，使得 $U_x\subset M-A_j$，我们就有 $U_x\cap A_j=\varnothing$ 当 $|j-i|>1$ 成立。或者稍微弱一点的说法，U_x 只与有限个 A_j 相交。

设 h 是 $\mathbb{R}^n$ 上的截断函数，那么我们定义

$$h_x(p)=\begin{cases}h\circ\varphi_x(p), & p\in U_x,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

显然 h_x 是 M 上的光滑函数，实际上，同胚意义下，在半径为 2 的开球内，在半径大于 1 的时候以及是常值函数 0 了，所以在外面拼上 0 就构成了 M 上的光滑函数。

令开球内半径为 r 的闭球为 B_r，那么 $B_{1/2}$ 着截断函数恒为 1 的部分，B_1 对应着截断函数非零的部分，以及开集 $V_x=\varphi_x^{-1}(B_{1/2})$，则 $h_x|_{V_x}=1$. 显然，$\mathrm{supp}(h_x)=\overline{\varphi_x^{-1}(B_1)}$，因为 φ_x 是一个同胚，所以 $\mathrm{supp}(h_x)=\varphi_x^{-1}(\bar{B}_1)\subset U_x$ 是一个紧闭集。

由于 A_i 是紧的，所以存在有限个点 $\{x_{ij}\in A_i:1\leq j\leq k_i\}$ 使得

$$A_i\subset\bigcup_{j=1}^{k_i}V_{x_{ij}}.$$

这样选取的 $\{\mathrm{supp}(h_{x_{ij}})\}$ 局部有限，这是因为对固定的 $i>1$ 和 j，$\mathrm{supp}(h_{x_{ij}})\subset U_{x_{ij}}\subset A_{i-1}\cup A_i\cup A_{i+1}$，然后任取 $p\in M$，我们都有 U_p 只和有限个 A_i 相交，而对每一个 i，j 都是有限的，所以 U_p 最多只和有限个 $\mathrm{supp}(h_{x_{ij}})$ 相交[1]。

设 $\varphi(p)=\sum_{i,j}h_{x_{ij}}(p)$，由于在每一点 U_p 至多只和有限个 $\mathrm{supp}(h_{x_{ij}})$ 相交，所以这个求和有意义。此外，因为 U_p 总和某个 A_i 相交，那么也总和某个 $V_{x_{ij}}$ 相交，而 $h_{x_{ij}}$ 在 $V_{x_{ij}}$ 非零。所以 $\varphi(p)\geq h_{x_{ij}}(p)>0$.

最后，我们验证 $\{h_{x_{ij}}/\varphi\}_{i,1\leq j\leq k_i}$ 就是 M 上从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解。首先，他是至多可数的，然后任取 $p\in M$，由于 φ 的定义，

$$\sum_{i,j}h_{x_{ij}}(p)/\varphi(p)=1$$

显然成立。并且 $\mathrm{supp}(h_{x_{ij}}/\varphi)=\mathrm{supp}(h_{x_{ij}})\subset U_{x_{ij}}$，因为选坐标的时候 $U_{x_{ij}}$ 选在某一个开覆盖 $U_{\alpha(x_{ij})}$ 里面，所以上面的一切就告诉我们 $\{h_{x_{ij}}/\varphi\}_{i,1\leq j\leq k_i}$ 就是 M 上从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解。 □

其实我们构造地得比单位分解引理要求还要多一点。在这里，我们找到了开覆盖 U_α 的一个局部有限开加细 $\{V_{ij}\}$，设我们找到的单位分解为 h_{ij}，令 $\Gamma=\{\alpha(x_{ij}):i,1\leq j\leq k_i\}$（我们是可能存在 β 不包含任意一个 $U_{x_{ij}}$ 的，就是说，$\beta\notin\Gamma$），以及

$$h_\alpha=\sum_{\alpha(x_{ij})=\alpha}h_{ij},$$

如果再令 $h_\alpha=0$ 当 $\alpha\notin\Gamma$，则 $\{h_\alpha\}$ 是 M 上的光滑函数族，$0\leq h_\alpha\leq 1$，$\sum_\alpha h_\alpha=1$ 且 $\mathrm{supp}(h_\alpha)\subset U_\alpha$. 当然，前面 $\mathrm{supp}(h_{ij})$ 还是紧的，这里 $\mathrm{supp}(h_\alpha)$ 就不一定是紧的了。

Lemma (B.6) 设 $A\subset U$，其中 U 是 M 中的开集，而 A 是闭集。再设 $f:M\to V$ 是一个连续映射，其中 V 是一个 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，并且 $f|_U$ 是光滑的，那么对任意 M 上的正连续函数 $\epsilon(x)$，则存在光滑函数 $g:M\to W$ 使得 $f|_A=g|_A$ 且 $\|f(x)-g(x)\|\leq\epsilon(x)$.

Proof: 先对 $U=\varnothing$ 的情况证明。如果 $V\neq\mathbb{R}^n$，那么我们可以定义

$$\epsilon'(x)=\min\left(\epsilon(x),\frac{1}{2}\inf\big(\|h(x)-y\|,y\in\mathbb{R}^n-V\big)\right),$$

如果使用 $\epsilon'(x)$ 代替 $\epsilon(x)$ 且存在 g，则我们自然会有 $g(M)\subset V$. 所以我们不妨设 $V=\mathbb{R}^n$.

由 f 和 ϵ 的连续性，任意的 $x\in M$ 都存在开邻域 U_x 使得对任意的 $y\in U_x$ 都成立 $\epsilon(y)\leq\epsilon(x)/2$ 以及 $\|f(y)-f(x)\|\leq\epsilon(x)/2$，找从属于 $\{U_x\}$ 的一个单位分解 $\{h_i\}$，则对于每一个 i，取 $x_i\in M$ 使得 $\mathrm{supp}\,h_i\subset U_{x_i}$。我们定义 $g(x)=\sum_i h_i(x)f(x_i)$，则

$$\begin{aligned}\|g(x)-f(x)\|&=\left\|\sum_i h_i(x)(f(x_i)-f(x))\right\|\leq\sum_i h_i(x)\|f(x_i)-f(x)\|\\&=\sum_{h_i(x)\neq 0}h_i(x)\|f(x_i)-f(x)\|\leq\sum_{h_i(x)\neq 0}h_i(x)\epsilon(x_i)/2\\&\leq\sum_{h_i(x)\neq 0}h_i(x)\epsilon(x)=\epsilon(x).\end{aligned}$$

这样我们就证明完了特殊情况。

现在对于 M 的开子流形 $M-A$，我们可以应用这个特殊情况，在 $M-A$ 对 $\epsilon|_{M-A}$ 可以找到一个函数 $M-A$ 上的光滑函数 $g:M-A\to U$，使得在 $M-A$ 上成立 $\|f|_{M-A}(x)-g(x)\|\leq\epsilon|_{M-A}(x)$.

[1] 这里用了一个直观：设 $A\subset B$，则只有当 $C\cap B$ 非空的时候才有可能 $C\cap A$ 非空。

然后对 U 和 $M-A$ 应用单位分解，找到两个光滑函数 h_1 和 h_2，h_1 在 A 上恒为 1，在 U 外恒为 0，h_2 则正好相反，因为 $h_1+h_2=1$. 那么 h_1f+h_2g 就是一个 M 上的光滑函数，而且满足所有我们需要的条件。 $\square$

Proposition (B.7) 设 $f: M \to U$ 是一个连续映射，U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，则他同伦于一个光滑映射 $g: M \to U$.

Proof: 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 如果 $f: M \to U$ 是一个连续函数, 则在 M 的每一点 x, 我们连续地找一个 $\epsilon(x)>0$ 使得以 $f(x)$ 为球心的, $\epsilon(x)$ 为半径的开球完全处于 U 内, 那么按上面的引理, 我们可以找到 M 上的一个光滑函数 g 使得 $\|g(x)-f(x)\|<\epsilon(x)$ 对 $x \in M$ 恒成立, 则我们定义 $H(x,t)=tf(x)+(1-t)g(x)$, 由于

$$\|H(x,t)-f(x)\|=(1-t)\|f(x)-g(x)\| \leq \epsilon(x),$$

所以 $H(x,t) \in U$，这样 $H(x,t): M \times [0,1] \to U$ 就是 f 和 g 的一个同伦映射。 $\square$

Lemma (B.8) 设光滑映射 $f: M \to U$ 和 $g: M \to U$ 同伦，其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，则我们可以找到一个光滑的同伦映射 $H: M \times \mathbb{R} \to U$ 满足 $F(x,0)=f_1(x)$ 和 $F(x,1)=f_2(x)$.

Proof: 令 $\varphi: R \to [0,1]$ 为这样一个光滑函数，他在 $t \leq 1/3$ 的时候恒为 0，他在 $t \geq 2/3$ 的时候恒为 1，中间光滑连接。因为 f 和 g 是同伦的，必然存在连续的同伦映射 $F: M \times [0,1] \to N$，令 $G(x,t)$ 为 $F(x,\varphi(t))$，则这样我们定义了连续函数 $G: M \times \mathbb{R} \to N$，他在 $M \times (-\infty,1/3) \cup M \times (2/3,\infty)$ 上光滑。因为，$M \times \{0,1\}$ 是他的一个闭子集，所以根据上面的引理，我们可以找一个 $M \times \mathbb{R}$ 上的光滑函数 H 使得 G 和 H 在 $M \times \{0,1\}$ 上相同。 $\square$

虽然我们没有证明, 但实际上, 每一个光滑流形都可以嵌入欧式空间内。所以这些命题也就推出了看上去更广义的命题：光滑流形间的一个连续映射可以同伦于一个光滑映射；流形间同伦的光滑映射之间有光滑的同伦映射。所以按照这俩命题，两个光滑流形间的同伦类只要对光滑的情况讨论就好。

Appendix C

The Covering Space and Topological Group

Covering Space

(1.6.12) 复习一下：两个连续函数 f，$g : X \to Y$ 被称为同伦的，就是说存在一个连续函数 $H : X \times [0,1] \to Y$ 使得 $H(0,x) = f(x)$ 以及 $H(1,x) = g(x)$. 同伦是等价关系，就是说，如果还有 h 和 f 同伦，则 g 和 h 也同伦。一个空间 X 是可缩的，如果 id_X 同伦于映到自身的常值映射。比如 $\mathbb{R}^n$ 或者与他同胚的开实心球 D^n 都是可缩的。

两个拓扑空间 X 和 Y 称为同伦等价的，如果存在 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$ 满足 $f \circ g$ 和 id_Y 同伦以及 $g \circ f$ 和 id_X 同伦。

(C.1) 如果 p 和 q 是连续路径 $[0,1] \to X$，其中 X 是拓扑空间，如果存在一个同伦 H 满足 $H(t,0) = p(0) = q(0)$, $H(t,1) = p(1) = q(1)$，那么我们就称这两条路径为*道路同伦*的，记做 $p \approx q$. 容易看到，道路同伦是一个等价关系，道路同伦的道路构成的等价类被称为道路类，设 p 是其中一个代表元，则道路类记做 $[p]$.

如果 $f : [0,1] \to [0,1]$ 是一个连续函数满足 $f(0) = 0$ 以及 $f(1) = 1$，那么 $p \approx p \circ f$ 因为有道路同伦 $H(t,u) = p\big(tf(u) + (1-t)u\big)$. 我们称 $p \circ f$ 是道路 p 的一个重参数化，所以道路在重参数化后依然道路同伦于自己。

设 $p : [0,1] \to X$ 和 $q : [0,1] \to X$ 是拓扑空间 X 中的两条路径，他们头尾相接，即 $p(1) = q(0)$，那么我们能构造一个新的连续路径 $p \cdot q$ 通过

$$(p \cdot q)(t) = \begin{cases} p(2t) & 0 \le t \le 1/2, \\ q(2t-1) & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

不难检验 $(p \cdot q) \cdot r \approx p \cdot (q \cdot r)$ 因为这俩条路径不过差一个重参数化而已。同时我们也能定义道路逆 $\bar{p}$ 通过 $p^{-1}(t) = p(1-t)$.

(C.2) 设 $x_0 \in X$，则所有满足 $p(0) = p(1) = x_0$（被称为一个*回路*）的连续路径 $p : [0,1] \to X$ 按上述运算在道路同伦意义下构成一个群。换句话说，回路 p 在道路同伦下确定到一个等价类 $[p]$，我们定义的回路的乘法和逆在等价类上诱导的乘法和逆满足群公理。具体检验，比如乘法结合律，可以利用重参数化等手段，这里不具体展开了。这个群被称为 X 在 x_0 处的*基本群*，记做 $\pi_1(X, x_0)$，下标 1 的意思其实是指他是第一同伦群。

如果 X 是道路连通的，那么基本群处处同构，实际上，我们可以找一个路径连接 x_0 和 x_1，记做 α，则基点在 x_0 处的回路 p，我们可以通过 $\alpha \cdot p \cdot \alpha^{-1}$ 定义出 x_1 处的回路，然后不难检验 $f : [p] \mapsto [\alpha] \cdot [p] \cdot [\alpha]^{-1}$

是基本群的同构。

如果 X 的基本群是平凡的，则他被称为单连通的。

(C.3) 设 $f: X \to Y$ 是一个连续映射，则他自然诱导了基本群同态 $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ 通过 $f_*[p] = [f \circ p]$.

不难验证，$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$，于是两个同伦等价的拓扑空间的基本群是同构的。因此，我们建立了一个拓扑空间范畴到群范畴的协变函子。

(1.3.4) 设 E, B, F 是三个拓扑空间，$\pi: E \to B$ 是一个光滑映射，若在每一点 $p \in B$，都存在一个邻域 U 和同胚 φ 使得 $\pi^{-1}(U)$ 同胚于 $U \times F$，且如下交换图成立

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

则我们称 (E, B, π, F) 是一个以 B 为底，以 F 为纤维的纤维丛 (fiber bundle)。此外，一般称呼 $B \times F$ 为平凡丛，所以，纤维丛是局部平凡的。

(2.4.5) 设 M 是底空间为 B 的一个纤维丛，他的纤维被赋予离散拓扑（比如继承了 $\mathbb{R}$ 拓扑的 $\mathbb{Z}$，或者一个有限集），此时，M 被称为 B 的一个覆叠空间，投影 π 现在被称为覆叠映射。一般来说，我们要求覆叠空间是连通的，如果覆叠空间还是单连通的，则被称为万有覆叠空间。

显然 $\pi: t \mapsto \exp(2\pi i t)$，是一个 $\pi: \mathbb{R} \to S^1$ 的覆叠映射，其中 S^1 是 $\mathbb{C}$ 内的单位圆周。

Proposition (C.4) 设 $\pi: E \to B$ 是一个覆叠映射，那么对于路径 $p: [0,1] \to B$ 是一条路径，且 $y \in \pi^{-1}(p(0))$，那么存在唯一一条路径 $P: [0,1] \to E$ 使得 $\pi \circ P = p$ 且 $P(0) = y$，这样的 P 被称为 p 的一个提升。

Proof: 首先注意到，平凡覆叠空间上提升是一定唯一存在的，实际上，如果 $y = (p(0), f)$，那么 $P(t) = (p(t), f)$ 就是唯一的提升。然后，因为 $[0,1]$ 是紧的，所以 $p([0,1])$ 是紧的，那么存在有限个开集 $\{U_i\}$ 覆盖 $p([0,1])$，且存在一个划分 $0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ 使得对于每个 $[x_i, x_{i+1}]$ 成立 $p([x_i, x_{i+1}]) \subset U_i$。因为局部平凡性导出了局部提升存在，然后把这有限条路径拼起来就好。唯一性由构造显然。 $\square$

Proposition (C.5) 如果 p 和 q 是 E 上的路径，满足 $p(0) = q(0)$ 且 $\pi \circ p$ 和 $\pi \circ q$ 道路同伦，则 p 和 q 道路同伦。

假设同伦 $h(t, s)$，固定 t，$h_t(s) = h(t, s)$ 是一个路径，我们将其提升上去变成 $H_t(s)$，剩下只要检验他还对 t 连续且 $H_0 = P$ 以及 $H_1 = Q$ 即可，这里略去。

(C.6) 覆叠映射 π 诱导的基本群同态 π_* 是单同态，这是因为，覆叠空间的道路类自然地由 π_* 诱导出了底空间的道路类，又由上一条，这诱导出的道路类提升后又恰好是原道路类。

这意味着，一般而言，覆叠空间的基本群比底空间的基本群简单。因为，万有覆叠空间的基本群已经是最简单的了，所以在这意义上，万有覆叠空间是最大的覆叠空间。

(C.7) 如果 B 是单连通的，E 是 B 的道路连通的覆叠空间，则 E 同胚于 B.

实际上，因为覆叠映射局部是同胚，所以我们只要证明他是双射就好了，首先他肯定是满的。现在设 $\pi(x) = \pi(y)$，以及设 p 连接 x 和 y，那么 $\pi \circ p$ 在底空间中是一个回路，因为底空间道路连通，他的基本群平凡，所以 $\pi \circ p$ 道路同伦于平凡回路（即一个常值映射），那么 p 也道路同伦于一个平凡回路，因此 $x = y$.

这又再一次佐证了万有覆叠空间是最大的覆叠空间。

(C.8) 对拓扑空间而言，研究他的覆叠空间，通常会做一些方便的假设，比如流形会被取作道路连通以及局部道路连通。而对流形的覆叠空间，我们一般会加强定义中条件，要求局部微分（对光滑流形就

是光滑）同胚，这样，覆叠空间就有了自然的流形结构。因为流形很强的拓扑结构，所以上面那些方便的假设在流形的语境里面就变得相当自然。

Theorem (C.9) 对于道路连通以及局部道路连通的拓扑空间，如果他局部可缩，即每一点都存在一个可缩的邻域，那么他存在万有覆叠空间。

证明就不证明了，事实上，适当改弱结论，我们甚至可以得到一个充分必要条件。在流形上，局部可缩是自然满足的，因为流形上每一点都有一个邻域同胚于欧式空间的开集，而欧式空间里，开球们组成了拓扑基且开球显然是可缩的。所以对于连通的流形，他就有万有覆叠空间。

(C.10) 设 $\pi : E \to B$ 是一个覆叠映射，如果 X 道路连通以及局部道路连通以及连续映射 $f : X \to B$，取定 $x \in X$ 以及 $e \in \pi^{-1}(f(x))$，则存在分解 $f : X \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{\pi} B$ 满足 $f'(x) = e$ 的充要条件是 $f_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_*(\pi_1(E, e))$.

这个命题被称为映射提升定理，从范畴角度来看，这里定理可以理解为，群范畴上分解

$$f_* : \pi_1(X, x) \xrightarrow{f'_*} \pi_1(E, e) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B, f(x))$$

和拓扑空间范畴上有分解

$$f : X \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{\pi} B$$

的存在性等价。当然这比上面充要条件还强一些。

必要性是显然的，充分性是直接的构造。

假设 $f_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_*(\pi_1(E, e))$，任取 $y \in X$，然后取一个 x 到 y 的道路 α，那么可以把 $f'(y)$ 定义为道路类 $[\beta] = f_*([\alpha])$ 从 e 出发的提升的道路类（道路类的提升）的终点。这样定义的 $f'(y)$ 和 α 的选取没有关系，因为如果有两条 α_1 和 α_2，则 $\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1} \in \pi_1(X, x)$，由假设条件 $\beta_1 \cdot \beta_2^{-1} \in \pi_*(\pi_1(E, e))$，他的提升是一个闭道路，即 β_1 和 β_2 有着相同的终点。

至于构造的 f' 的连续性，以及在流形语境下的 f' 的光滑性，这里就略去检验了。

(C.11) 假设 X 是单连通的，则上述定理条件一定满足，因为 $f_*(\pi_1(X, x))$ 就是单位元。考虑两个万有覆叠映射 $\pi_1 : M' \to M$ 以及 $\pi_2 : N' \to N$，由于 M' 是单连通的，所以按照上面的映射提升定理，存在提升 $f' : M' \to N'$ 使得下面的图表成立。

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N' \arrow[d, "\pi_2"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

这就构成了万有覆叠空间的函子性质，就是说，拓扑空间之间的连续映射将诱导出他们万有覆叠空间之间的连续映射。

前面我们已经知道，覆叠映射诱导的基本群同态是单同态，这里要更加细化这些关系。

Proposition (C.12) 设覆叠映射 $\pi : E \to B$，且 $\pi(e) = b$，记 $\pi_*(\pi_1(E, e)) = H_e$，则他是 $\pi_1(B, b)$ 的子群。那么 $\pi^{-1}(b)$ 的元素和 H_e 在 $\pi_1(B, b)$ 中的右陪集一一对应。特别地，如果 π 是万有覆叠映射，那么 $\pi^{-1}(b)$ 和 $\pi_1(B, b)$ 之间存在双射。

Proof: 由于 $\pi_1(B, b)$ 中的每一个道路类 $[\alpha]$ 都存在从 e 出发提升的道路类 $[p(\alpha)]$，设他的终点为 $q([\alpha])$，这样就定义了映射 $q : \pi_1(B, b) \to \pi^{-1}(b)$，他是满的，因为任取 $e' \in \pi^{-1}(b)$，我们取一条 e 到 e' 的道路 a，令 $\alpha = \pi \circ a$，则 $q([\alpha]) = e'$.

下面证明 $q([\alpha]) = q([\beta])$ 当且仅当 $[\alpha][\beta^{-1}] \in H_e$. 如果 $q([\alpha]) = q([\beta])$，则 $[p(\alpha)]$ 和 $[p(\beta)]$ 的终点相同，因此，我们可以讨论 $[p(\alpha) \cdot p(\beta)^{-1}]$，他是 $[\alpha][\beta^{-1}]$ 的提升，同时也是一个以 e 为基点的闭道路，所以 $[\alpha][\beta^{-1}] \in H_e$.

反之，记 $[\gamma]$ 为 $[\beta^{-1}]$ 以起点为 $q([\alpha])$ 的提升，如果 $[\alpha][\beta^{-1}] \in H_e$，则 γ 的终点就是 e，此时 γ^{-1} 就是 β 的提升的道路，他两个端点都与 $p([\alpha])$ 相同，所以 $q([\alpha]) = q([\beta])$.

因为 $q([\alpha]) = q([\beta])$ 当且仅当 $[\alpha][\beta^{-1}] \in H_e$，也当且仅当 $H_e[\alpha][\beta^{-1}] = H_e$ 或者 $H_e[\alpha] = H_e[\beta]$. □

Topological Group

(C.13) 群 G 被称为一个拓扑群，如果他有拓扑空间结构且群运算是连续的群。

(C.14) 显然左乘或者右乘是一个同胚，所以如果 U 是一个开集，那么 $gU = \{gh : h \in U\}$ 也是一个开集。

(C.15) 设 G 是拓扑群 G 是 T_1 的当且仅当含有单位元的开集们的交集 H 是 G 的子群。如果 $x \in H$，那么 $e \in xU^{-1}$ 里面，U 是任意包含 e 的邻域而 $U^{-1} = \{x^{-1} | x \in U\}$，因此 $x \in \overline{\{e\}}$，反之亦然，所以 $H = \overline{\{e\}}$，因此 H 是一个闭集，同样，他的陪集也都是闭集，故而商拓扑而得的拓扑群 G/H 中的单点集都是闭集。故而，G 中的单点集是闭集当且仅当 $H = \{e\}$.

所以拓扑群是 T_1 的当且仅当 $\{e\}$ 是闭集。

(C.16) 因为 $\mu : (x, y) \mapsto x^{-1}y$ 是连续映射，所以如果 $\{e\}$ 闭集，那么 $\Delta = \mu^{-1}(e) \subset G \times G$ 是闭集，其中 $\Delta = \{(x, x) : x \in G\}$，故而 G 是一个 Hausdorff 空间（利用 Hausdorff 性的对角线判别法），所以在拓扑群语境下，T_1 和 T_2 是等价的。

因此拓扑群是 T_2 的当且仅当 $\{e\}$ 是闭集。

上面讨论了所有单位元邻域的交，由此产生了分离性的讨论。下面说明，任意一个单位元邻域都可以生成整个含有单位元的连通分支。

(C.17) 对于连通拓扑群，设 U 是单位元的任意一个邻域，则 $G = \bigcup_{n \geq 1} U^n$，其中 $U^k = \{g_1 \cdots g_k : g_i \in U, 1 \leq i \leq k\}$ 是开集。

Proof: 令 $V = U \cap U^{-1}$，其中 $U^{-1} = \{g^{-1} : g \in U\}$，显然 $V = V^{-1} \subset U$ 以及 $H = \bigcup_{n \geq 1} V^n \subset \bigcup_{n \geq 1} U^n$，而且 H 还是一个子群。下面我们只要证明 $H = \bigcup_{n \geq 1} V^n$ 既是开的也是闭的，那么连通性自然给出了结论。

他是开的，如果 $\sigma \in V^k$，那么 $\sigma V \in V^{k+1} \subset H$ 就是他的一个开邻域。他是闭的，因为每一个 σH 都是开的，于是 $H = G - \bigcup_{\sigma \notin H} \sigma H$ 是一个闭集。 □

结合上面两点不难看到，因为拓扑群有着代数结构，一般而言，这就使得拓扑群的很多拓扑性质都来自于其单位元附近的性质。

(C.18) 设 f 和 g 是 G 中的道路，每一个时刻，利用群乘法我们有一个新的道路 $t \mapsto f(t)g(t)$，记做 fg. 显然，如果 f 和 f' 道路同伦，那么 fg 和 $f'g$ 道路同伦，这可以很显然地直接构造出道路同伦映射。同理如果 g 和 g' 道路同伦，则 fg 和 fg' 道路同伦。

还记得，我们定义了道路的连接 $f \cdot g$，在基点为单位元的回路情况下，fg 和 $f \cdot g$ 是两种运算，但我们指出，这两种乘法在道路同伦意义下是等价的，即，$[fg] = [f][g]$.

首先，fg 显然是基于单位元 e 的连续回路。其次，注意到 $(f_1 \cdot g_1)(f_2 \cdot g_2) = (f_1 f_2) \cdot (g_1 g_2)$. 最后，因为 $f \approx f \cdot e \approx e \cdot f$ 和 $g \approx e \cdot g \approx g \cdot e$，所以成立

$$fg \approx f(g \cdot e) \approx (e \cdot f)(g \cdot e) \approx g \cdot f,$$
$$fg \approx f(e \cdot g) \approx (f \cdot e)(e \cdot g) \approx f \cdot g,$$

因此 $fg \approx f \cdot g \approx g \cdot f \approx gf$.

(C.19) 故而，拓扑群 G 的基本群 $\pi_1(G,e)$ 是交换群。

(C.20) 我们知道，$\pi_1(G,e)$ 和 $\pi^{-1}(e)$ 之间存在着双射 q，所以短正合列

$$0 \to \pi_1(G,e) \hookrightarrow G' \xrightarrow{\pi} G \to 0$$

至少在集合意义下是成立的，其中正和性来自于 $\pi_1(G,e)$ 被嵌入到 G' 中即是 $\pi^{-1}(e)$，他经 π 作用就变成了 G 中的单位元。那么在群的情况下呢？这至少要求我们给 G' 一个群结构，使得 π 和 $i \circ q$ 是群同态，其中 $i : \pi^{-1}(e) \hookrightarrow G'$.

Theorem (C.21) 设 G 是道路连通的拓扑群，而 G' 是他的一个万有覆叠空间，覆叠映射为 π，选定一个 $e' \in \pi^{-1}(e)$，则 G' 上存在一个群结构，使得 e' 是 G' 的单位元，且使得短正合列

$$0 \to \pi_1(G,e) \hookrightarrow G' \xrightarrow{\pi} G \to 0$$

成立。

Proof: 设 $[\alpha_{g'}]$ 是 G' 中连接 e' 与 g' 的道路类，那么我们得到了道路类 $[\pi \circ \alpha_{g'}] = [\beta_{g'}]$ 连接 e 和 $\pi(g')$. 反过来，G 的道路类 $[\alpha]$ 在 G' 中以 e' 为起点提升的唯一的道路类的终点记做 $q([\alpha])$，和我们以前的习惯一样。显然 $q([\beta_{g'}]) = g'$，这是因为 $[\alpha_{g'}]$ 是 $[\beta_{g'}]$ 以 e' 为起点的提升，而提升是唯一的。

设 g' 和 h' 都是 G' 中的元素，此时由于 G 的群结构，在 G 中有道路类 $[\beta_{g'}\beta_{h'}]$，我们定义 $g'h' = q([\beta_{g'}\beta_{h'}])$. 可以看到，我们定义的乘法即 $q([\beta_{g'}])q([\beta_{h'}]) = q([\beta_{g'}\beta_{h'}])$

这样定义的 $g'h'$ 显然是唯一的，而且满足结合律 $g'(h'k') = (g'h')k'$，这是因为 $[(\beta_{g'}\beta_{h'})\beta_{k'}] = [\beta_{g'}(\beta_{h'}\beta_{k'})]$.

此外，单位元就是 e'. 因为 G' 万有覆叠空间，即他是单连通的，所以 $\alpha_{e'}$ 道路同伦于 e' 处的平凡回路，则 $\beta_{e'} = \pi \circ \alpha_{e'}$ 道路同伦于 G 中 e 处的平凡回路，所以 $[\beta_{g'}\beta_{e'}] = [\beta_{g'}] = [\beta_{e'}\beta_{g'}]$.

最后是逆元的存在性，即对 g' 要存在一个 h' 使得 $g'h' = e'$，再即 $[\beta_{g'}\beta_{h'}] = [\beta_{e'}]$。设 γ 是 G 中 e 处的平凡回路，所以我们直接来解方程 $\beta_{g'}\eta = \gamma$，可以解出 $\eta(t) = \beta_{g'}(t)^{-1}$，我们定义 $h' = q([\eta])$，不难验证 $[\beta_{g'}\beta_{h'}] = [\gamma]$，所以这就是我们要求的逆元。

构造完了，我们检验 π 确实是群同态。这只要检验 $\pi(g'h') = \pi(g')\pi(h')$，因为 $g'h' = q([\beta_{g'}\beta_{h'}])$，即 $\pi(g'h')$ 就是道路类 $[\beta_{g'}\beta_{h'}]$ 的终点，也就是 $\pi(g')\pi(h')$. 此外 $\pi(e') = e$ 这是显然的。

最后，我们检验 $\pi_1(G,e) \hookrightarrow G'$ 是一个群同态，这就是要检验 $q([\eta][\xi]) = q([\eta])q([\xi])$，其中 $[\eta], [\xi] \in \pi_1(G,e)$，因为基本群里的元素都是回路，所以有 $[\eta\xi] = [\eta][\xi]$，所以我们只要检验 $q([\eta\xi]) = q([\eta])q([\xi])$ 即可。

将 $[\eta]$ 和 $[\xi]$ 以 e' 为起点往上提升，然后再用 π 下降回来，他总可以写成某种 $[\beta_{g'}]$ 和 $[\beta_{h'}]$ 的形式，所以我们只要检验 $q([\beta_{g'}\beta_{h'}]) = q([\beta_{g'}])q([\beta_{h'}])$，而这就是我们乘法的定义。 □

(C.22) 给予群结构之后，验证运算的连续性这里就不进行了。于是，道路连通的拓扑群的万有覆叠空间也有拓扑群结构。

(C.23) 由上面这个定理，我们有群同构 $\pi_1(G,e) \cong \ker(\pi)$. 所以，对于道路连通的拓扑群，我们只要找到他的一个万有覆叠空间，那么覆叠映射的核就将给出拓扑群的基本群。

作为一个例子，我们知道 $e^{2\pi it} : \mathbb{R} \to S^1 = \mathrm{U}(1)$ 是一个覆叠映射，且 $\mathbb{R}$ 可缩，所以 $\mathbb{R}$ 单连通，因此这还是一个万有覆叠映射，故 $\pi_1(S^1,e) \cong \ker\pi = \mathbb{Z}$.

再来一个例子，$\mathrm{SU}(2)$ 是 $\mathrm{SO}(3)$ 的万有覆叠，$\ker(\pi) = \{-I, I\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，所以 $\pi_1(\mathrm{SO}(3),e) \cong \ker(\pi) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

References

把参考文献列出来，就不写那么正式了：

- Frank W.Warner, GTM 94
- Daniel Bump, GTM 225
- R.W.Sharpe, GTM 166
- V.S.Varadarajan, GTM 102
- Jeffrey M. Lee, Manifolds and Diferential Geometry
- S Kobayashi & K Nomizu, Foundations of Differential Geometry. Vol. I
- W.Y.Hsiang, Lectures on Lie Groups
- Shlomo Sternberg, Semi-Riemann Geometry and General Relativity
- Yvette Kosmann-Schwarzbach, Groups and Symmetries
- Steven Weinberg, The Quantum Theory of Fields. Vol. I
- Ib H. Madsen & Jxrgen Tornehave, From Calculus to Cohomology
- 梅加强， 流形与几何初步