# Chapter 1

# Manifold

## 1.1 Foundation

**(1.1.1)** 一个局部 $n$ 维欧几里得空间是一个 Hausdorff 空间 $M$ 满足，对每一个点 $p \in M$，存在一个 $p$ 的邻域 $U \underset{\text{open}}{\subset} M$ 和一个同胚 $\varphi : U \to V$, 其中 $V$ 是一个 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。这个同胚有时候被称为一个坐标、坐标映射等，而资料 $(U, \varphi)$ 被称为一个坐标卡。

坐标 $\varphi$ 经常写成分量形式，$\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$，其中 $x^i : U \to \mathbb{R}$.

**(1.1.2)** 局部欧几里得空间 $M$ 上的一个光滑微分结构 $\mathscr{F}$ 是这样一族坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，满足：$\{U_\alpha\}$ 构成 $M$ 的开覆盖，$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ 是光滑映射，后者被称为坐标卡的相容性条件。此外，如果有一个坐标卡 $(U, \varphi)$ 和每一个坐标卡都相容，那么可以推断出他在 $\mathscr{F}$ 中，这样的微分结构被称为极大微分结构。极大微分结构当然不一定是唯一的，不过我们不担心这个，因为我们往往是固定一个微分结构来研究流形的，下面假设出现的微分结构总是极大的。

**(1.1.3)** 一个 $n$ 维光滑流形 $(M, \mathscr{F})$ 是一个赋予了光滑微分结构 $\mathscr{F}$ 的第二可数的局部欧几里得空间 $M$.

我们想要做一个范畴，现在已经有了对象，那么自然需要态射，态射被如下定义：

**(1.1.4)** 设 $(M, \mathscr{F})$ 和 $(N, \mathscr{G})$ 是两个光滑流形，连续函数 $f : M \to N$ 被称为一个光滑映射，如果 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是一个光滑函数对任意的 $\mathscr{F}$ 中的坐标卡 $(U, \varphi)$ 和 $\mathscr{G}$ 中的坐标卡 $(V, \psi)$ 成立。

这样，光滑流形就构成了一个范畴，其中态射是流形间的光滑映射。他是拓扑空间范畴的子范畴。

从此以后，我们对一个固定的流形 $(M, \mathscr{F})$，常常会略去他的微分结构，只写作 $M$。对于一个光滑流形 $M$ 的非空开子集 $U$，显然，他有继承自 $M$ 的一个拓扑结构和微分结构，所以 $U$ 也是一个光滑流形。很容易看到，$\mathbb{R}^n$ 是一个光滑流形，按照上面的结论，我们可以得到一类光滑流形，$\mathbb{R}^n$ 的开子集。比如把 $n \times n$ 矩阵放入 $\mathbb{R}^{n^2}$ 内，那么行列式不为零的那些矩阵就构成一个光滑流形，记作 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，称作一般线性群。

特别地，$\mathbb{R}$ 也是一个光滑流形。我们称光滑映射 $f : M \to \mathbb{R}$ 是一个 $M$ 上的光滑函数。光滑函数 $f$ 限制在 $U \underset{\text{open}}{\subset} M$ 上也是一个光滑函数 $f|_U$.

**(1.1.5)** 设 $M$ 是一个光滑流形，$U \underset{\text{open}}{\subset} M$ 上的光滑函数的集合记作 $\mathcal{F}(U)$，$\mathcal{F}$ 被称为 $M$ 上的光滑函数层。由于可以逐点定义加法和乘法，所以 $\mathcal{F}(U)$ 拥有 $\mathbb{R}$-代数结构。设 $p \in M$，我们定义如下等价关系：设 $U$ 和 $V$ 都是 $p$ 的邻域，以及 $f \in \mathcal{F}(U)$ 和 $g \in \mathcal{F}(V)$，如果在一个 $W \underset{\text{open}}{\subset} U \cap V$ 上，$f|_W = g|_W$，则 $f \sim g$. 所有这样的等价类记作 $\mathcal{F}_p$，称为 $p$ 处的光滑函数茎，他的代表元素可以写成 $f_p = \langle U, f \rangle$，称为芽.

显然 $\mathcal{F}_p$ 有继承自 $\mathcal{F}(U)$ 的自然的 $\mathbb{R}$-代数结构。

设 $p \in M$，茎 $\mathcal{F}_p$ 是一个局部环。实际上，$\langle U, f\rangle \in \mathcal{F}_p$ 且 $f(p) = 0$ 的元素构成了 $\mathcal{F}_p$ 的一个理想。不在这个理想内的 $\langle U, f\rangle$，由于 $f(p) \neq 0$，那么适当缩小 $U$ 到 $V$，由 $f$ 的连续性，总可以找到 $V$ 使得 $f|_V$ 处处不为零，这样 $\langle V, 1/f|_V\rangle$ 便是 $\langle U, f\rangle$ 的一个逆。因此上面这个理想即 $\mathcal{F}_p$ 唯一的极大理想，我们其记作 $\mathfrak{m}_p$。容易看到 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{R}$，实际上，对每一个芽 $f_p \in \mathcal{F}_p$，都成立 $f_p = f_p - f(p) + f(p)$，在 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$ 中看，他和 $f(p) \in \mathbb{R}$ 也就没区别了。

**Lemma (1.1.6)** 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 光滑，则

$$f(x) = f(0) + \partial_i f(0)x^i + \frac{1}{2}g_{ij}(x)x^i x^j,$$

其中 $g_{ij}$ 光滑。

**Proof:** 利用微积分基本定理

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t = \int_0^1 \partial_i f(tx)x^i\mathrm{d}t = h_i(x)x^i,$$

可以得到 $h_i(0) = \partial_i f(0)$，然后再对 $h_i$ 使用上面的步骤即可得到我们想要的表达式。 □

**(1.1.7)** 使用一个局部坐标 $\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$ 且 $\varphi(p) = 0$，可以将上面的引理翻译到流形上。设设 $f : U \to \mathbb{R}$ 光滑，则在 $p$ 的一个邻域 $V$ 上对任意的 $q \in V$ 成立

$$f(q) = f(p) + \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}(p)x^i(q) + \frac{1}{2}g_{ij}(q)x^i(q)x^j(q),$$

其中 $g_{ij}$ 在 $V$ 上光滑，以后我们就将那个偏微分记作 $\partial_i f(p)$.

**(1.1.8)** 设 $p \in M$，$p$ 处的茎为 $\mathcal{F}_p$，他的极大理想为 $\mathfrak{m}_p$，此时 $p$ 处的余切空间被定义为自然的矢量空间 $T_p^*M := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$。余切空间的元素被称为余切矢量。

$\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 确实是一个矢量空间。首先它显然是一个 $\mathcal{F}_p$-模，然后任取 $a \in \mathfrak{m}_p$，由于 $a\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 = 0$，所以 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 是一个 $\mathcal{F}_p/\mathfrak{m}_p$-模，即 $\mathbb{R}$-矢量空间。这样定义的余切空间，可以看到，是所有的那些一阶小量构成的集合，即其中的元素为“微分”。

**(1.1.9)** 设 $p \in M$，$M$ 是一个 $n$ 维流形，则 $T_p^*M := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 是 $n$ 维的。

我们可以选取一组局部坐标来算维数，由于选取不同的局部坐标都是通过同胚联系的，所以不同的选取对维数没什么影响。由上面的引理，设 $f_p \in \mathfrak{m}_p$，则他可以写作

$$f_p = \partial_i f(p)x_p^i + \frac{1}{2}g_{ij}(q)x_p^i x_p^j$$

考虑一个局部坐标 $\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$，设自然同态 $\mathrm{d}_p : \mathfrak{m}_p \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$，很简单就可以看到 $\mathrm{d}_p(x_p^i) \neq 0$. 实际上，如果 $x_p^i \in \mathfrak{m}_p^2$，那么 $x_p^i = rs$，其中 $r, s \in \mathfrak{m}_p$，然后根据上面的引理 $r = a_i x_p^i + \cdots$ 以及 $s = b_i x_p^i + \cdots$，于是 $x^i = rs = a_j b_k x_p^j x_p^k + \cdots$，但显然这是不可能的。

所以，如果 $f_p \in \mathfrak{m}_p$，则

$$\mathrm{d}_p(f_p) = \partial_i f(p)\mathrm{d}_p(x_p^i). \tag{1.1}$$

这样所有的 $T_p^*M = \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 中的元素都可以由 $\mathrm{d}_p(x_p^i)$ 展开，他们都是非零的，而且容易证明是线性无关的，所以这是 $T_p^*M$ 的一组基，余切空间的维数计算完毕。

以后我们用 $\mathrm{d}_p(f)$ 乃至 $\mathrm{d}_p f$ 来记 $\mathrm{d}_p(f_p)$。实际上，我们可以将 $\mathrm{d}_p$ 定义在 $\mathcal{F}_p$ 上，设 $a$ 是一个常值芽，补充定义 $\mathrm{d}_p a = 0$，可以看到，此时式(1.1)依旧满足。以后我们就这样来看 $\mathrm{d}_p : \mathcal{F}_p \to T_p^*M$，他被称为外微分算子。

**(1.1.10)** 此时

$$\mathrm{d}_p(fg) = \mathrm{d}_p\big(\big(f - f(p)\big)\big(g - g(p)\big) + f(p)\big(g - g(p)\big) + \big(f - f(p)\big)g(p)\big) = f(p)\mathrm{d}_p g + \mathrm{d}_p f g(p).$$

**(1.1.11)** 设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，上面的光滑函数层分别为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$。任取 $\varphi \in \mathcal{G}(V)$，可以通过 $f^*\varphi = \varphi \circ f$ 定义 $f^*\varphi \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

下面我们考虑两个流形余切空间之间的映射。设 $\langle V, \varphi \rangle \in \mathcal{G}_{f(p)}$，于是 $\langle f^{-1}(V), \varphi \circ f \rangle \in \mathcal{F}_p$，所以 $f^*$ 诱导了一个 $\mathbb{R}$-代数同态 $f_p^*: \mathcal{G}_{f(p)} \to \mathcal{F}_p$，特别地，可以看到 $f_p^*: \mathfrak{m}_{f(p)} \to \mathfrak{m}_p$，于是 $f_p^*: \mathfrak{m}_{f(p)}^2 \to \mathfrak{m}_p^2$.

**(1.1.12)** 设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，他诱导了一个线性映射[1] $f_p^*: T_{f(p)}^*N \to T_p^*M$.

**(1.1.13)** 对于复合，$(f \circ g)_p^* = g_p^* \circ f_{g(p)}^*$. 很容易看到 $\mathrm{id}_p^* = \mathrm{id}_{T_p^*M}$，所以如果 $f: M \to N$ 是同胚，则 $f_p^*: T_{f(p)}^*N \to T_p^*M$ 是同构。

**(1.1.14)** 利用复合公式，设 $f: M \to N$ 是光滑映射，则 $f_p^*\big(\mathrm{d}_{f(p)}g\big) = \mathrm{d}_p(f^*g) = \mathrm{d}_p(g \circ f)$.

**(1.1.15)** 设 $p \in M$，$M$ 是 $n$ 维光滑流形，则*切空间*$T_pM$ 被定义为余切空间 $T_p^*M$ 的对偶空间。切空间的元素被称为*切矢量*。由于余切空间是有限维的，他的对偶空间也和他有着相同的维度，即 $n$ 维。

**(1.1.16)** 由于切空间是余切空间的对偶空间，所以他是余切空间上的线性函数构成的空间，反过来，由于是有限维的，所以可以认为对偶空间的对偶空间就是原本的空间，这就是说可以将余切空间的矢量看成切空间矢量的线性函数：设 $\mathrm{d}_pf \in T_p^*M$ 和 $v \in T_pM$，定义 $\mathrm{d}_pf(v) := v(\mathrm{d}_pf)$.

虽然上面这些个定义都很短也很清楚，不过操作上却没有那么简单。下面，我们将一个切矢量扩张到 $\mathcal{F}_p^*$ 上面去。

**(1.1.17)** 设 $f$ 是在 $p$ 附近的光滑函数，而 $v \in T_pM$，可以通过 $D_v(f_p) := v(f_p - f(p))$ 定义线性映射 $i_p: v \mapsto i_p(v) = D_v \in \mathcal{F}_p^*$，他是一个单射。

注意到 $(fg)_p = f_pg_p$，所以

$$
\begin{aligned}
D_v(f_pg_p) &= v(f_pg_p - f(p)g(p)) \\
&= v\big((f_p - f(p))(g_p - g(p)) + f(p)(g_p - g(p)) + (f_p - f(p))g(p)\big) \\
&= f(p)D_v(g_p) + D_v(f_p)g(p),
\end{aligned}
$$

我们将满足这条性质的线性映射 $D_v \in \mathcal{F}_p^*$ 称为 $p$ 处的导子，所有 $p$ 处的导子构成的空间暂时记作 $V_p$，而他其实和 $T_pM$ 是同构的。

为了证明这点，任取导子 $D \in V_p$，由于 $D(1) = D(1 \times 1) = 2D(1)$，所以 $D(1) = 0$，继而靠着 $D$ 的线性性，对于常值函数的芽 $a$ 来说，$D(a) = aD(1) = 0$。因为每一个 $\mathcal{F}_p$ 中的元素 $f_p$ 都可以写成 $f_p - f(p) + f(p)$ 的形式，所以 $D(f_p) = D(f_p - f(p))$，这就是说，一个导子的性质完全由他在 $\mathfrak{m}_p$ 上的值决定，这种关系是一对一的。即 $\pi_p: D \mapsto D|_{\mathfrak{m}_p}$ 是一个线性同构。

同时，设 $f_p, g_p \in \mathfrak{m}_p$，则 $\pi_p(D)(f_pg_p) = f(p)\pi_p(D)(g_p) + g(p)\pi_p(D)(f_p) = 0$，于是 $\pi_p(D)(\mathfrak{m}_p^2) = 0$，所以，$\pi_p(D) \in T_pM$，即 $D|_{\mathfrak{m}_p}$ 是一个切矢量，因此导子 $D$ 完全由一个切矢量 $D|_{\mathfrak{m}_p} = \pi_p(D)$ 决定。这样，$i_p: T_pM \to V_p$ 也是一个满射，所以他是一个同构。当然我们也可以直接计算验证 $\pi_p \circ i_p = \mathrm{id}_{T_pM}$ 以及 $i_p \circ \pi_p = \mathrm{id}_{V_p}$。

因为有这个同构，所以以后我们用 $T_pM$ 来标记导子构成的矢量空间，一个导子才是一个切矢量。这样的好处是，我们在具体计算的时候，可以直接在 $\mathcal{F}_p$ 上进行而非 $\mathfrak{m}_p$ 上，特别地，现在对于一个切向量 $v$ 来说，成立 $\mathrm{d}_pf(v) = v(f_p)$，这是因为对一个导子 $v$ 来说 $v(f_p) = v(\mathrm{d}_pf)$.

**(1.1.18)** 设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，定义它在 $p \in M$ 处的导数为 $T_pf = f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$ 使得对任意的 $v \in T_pM$ 和任意的 $g_{f(p)} \in \mathfrak{m}_{f(p)}$ 成立 $(f_{*p}v)(g_{f(p)}) = v(f_p^*g_{f(p)})$.

[1] 这里我们滥用一下记号。

为以后的处理方便，不妨通过等同 $\partial_i$ 和标准基 $e_i$ 来等同 $T_p\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$。此外，通过坐标卡上的同胚 $\varphi$，我们用 $\partial_i$ 来标记 $\varphi_{*p}^{-1}(e_i)$，这显然是 $T_pM$ 处的一组基。

**(1.1.19)** 设 $f$ 是在 $p$ 附近的光滑函数，任取 $v \in T_pM$. 因为 $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$，所以 $f_{*p}(v)$ 是一个数，故而

$$f_{*p}(v) = f_{*p}(v)(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = v\big((\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f)_p\big) = v(f_p) = \mathrm{d}_p f(v).$$

因为对所有的切矢量 $v$ 都成立上式，所以 $f_{*p} = \mathrm{d}_p f$.

选定一个局部坐标，因为 $\mathrm{d}_p x^i(\partial_j) = \partial_j x^i(p) = \delta^i_j$，所以 $\mathrm{d}_p x^i$ 就是 $\partial_i$ 的对偶基。下面我们来计算一个特别的例子，设 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 是一个流形 $M$ 上的矢量值光滑函数，则 $f^i: M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，那么 $f_{*p} = \mathrm{d}_p f^i e_i$，其中 $e_i$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。再设 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，则 $\mathrm{d}_p f^i = \partial_j f^i(p)\mathrm{d}x^j = \partial_j f^i(p)e^j$. 写成矩阵即

$$(f_{*p})^i{}_j = \partial_j f^i(p),$$

此即 $f$ 的 Jacobian.

**(1.1.20)** 复合函数求导法则：$(f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}$. 抽象表现出来是线性映射复合，表现在矩阵（即 Jacobian）上就是两个矩阵相乘。

**(1.1.21)** 设 $U$ 上光滑曲线 $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$，在时间为零的时候经过点 $p$，即 $\sigma(0) = p$，于是 $\sigma_{*0} = \dot\sigma(0) \in T_pM$. 局部来说，他可以写作

$$\dot\sigma(0) = \frac{\mathrm{d}x^i \circ \sigma}{\mathrm{d}t}(0)\partial_i = \dot\sigma^i(0)\partial_i,$$

当他作用在一个光滑函数上时，写作

$$\dot\sigma(0)(f) = \dot\sigma^i(0)\partial_i f(p).$$

对于固定的 $f$，$\dot\sigma(0)(f)$ 可以看做 $f$ 沿着 $\sigma$ 在点 $p$ 切矢量的方向导数，实际上，在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们通常将上式写作 $\dot\sigma(0)(f) = v \cdot \nabla f$，其中 $v = \dot\sigma^i(0)e_i$.

**(1.1.22)** 反过来，给定一个点 $p$ 处的切矢量 $v$，我们可以找到一个光滑曲线 $\sigma$ 使得在他点 $p$ 的切矢量就是 $v$。这是局部结论，在欧式空间里去证明就可以了。在欧式空间中，$\sigma(t) = p + vt$ 就是我们需要的光滑曲线。

**(1.1.23)** 由于 $v(f_p)$ 可以看做 $f$ 沿着 $v$ 方向在 $p$ 点的方向导数，以及等式 $\mathrm{d}_p f(v) = v(f_p)$，所以 $\mathrm{d}_p f(v)$ 也理解为 $f$ 沿着 $v$ 方向在 $p$ 点的方向导数。

## 1.2 Submanifold

**(1.2.1)**$\varphi : M \to N$ 是一个光滑映射，$(a)$. 称 $\varphi$ 是一个浸入，如果 $\varphi_{*p}$ 处处非退化。$(b)$. 称 $(M, \varphi)$ 是一个子流形，如果 $\varphi$ 是单的。不是所有浸入都是子流形，比如圆周的参数表示 $(\cos t, \sin t)$ 是一个浸入，但不是单的。

显然，对于光滑流形的一个开子集，他可以继承大流形的流形结构而形成一个新的流形，他是一个子流形，被称为开子流形。

后面我们经常会说“设流形 $M$ 上有某某”这样的话，但一般来说，某某在流形上的整体存在性是很难保证的，往往他只是局部存在，即可以在流形 $M$ 的某个开集上存在。但是注意到 $M$ 的开集现在也有流形结构，即开子流形结构，于是我们的命题就可以在这个新的流形上正常工作了。所以经常为了方便，对于不少命题的陈述，我们会把对象直接定义到整个流形上。

**(1.2.2)** 设 $\varphi : M \to N$，如果 $M$ 微分同胚于 $N$ 的开子流形 $\varphi(M)$，则称子流形 $(M, \varphi)$ 是一个嵌入。

浸入子流形不一定是嵌入子流形，比如秩为 1 的单的光滑曲线 $f(t) = ((t^3+t)/(t^4+1), (t^3-t)/(t^4+1))$，在 $\mathbb{R}^2$ 中他的图像看起来是可以有自交点的。

**(1.2.3)** 设 $U$ 是 $M$ 的一个子集，但 $U$ 本身有一个流形的结构，如果此时 $i : U \hookrightarrow M$ 是一个嵌入，则称 $U$ 是 $M$ 的一个正则子流形。

所谓的正则子流形就是说，它本身的流形结构和从大的流形那里继承来的流形结构是相同的的。

**(1.2.4)** 设 $M$ 和 $N$ 是光滑流形，$f : M \to N$ 是一个单浸入。我们可以赋予 $f(M)$ 一个微分结构通过把 $f : M \to f(M)$ 做成一个微分同胚。此时，$f(M)$ 是 $N$ 的正则子流形当且仅当 $f$ 是一个嵌入。

**(1.2.5)** 反函数定理：设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，映射 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 光滑，如果 Jacobian 在 $p$ 处非奇异，即 $f_{*p}$ 可逆，则存在 $p$ 的一个邻域 $V \underset{\text{open}}{\subset} U$，使得 $f|_V : V \to f(V)$ 是一个（光滑）同胚。

证明见微积分教材，常见的证明有比如压缩映像定理。该定理说明，如果函数局部线性化后性质不错，那么在那点附近性质也不错。由于是局部性质，所以可以直接翻译到流形上没什么改变。

**Theorem (1.2.6)** 流形上的反函数定理：设 $M$ 和 $N$ 的维度相同，映射 $f : M \to N$ 光滑，如果 $f_{*p}$ 可逆，则存在 $p$ 的一个邻域 $U$，使得 $f|_U : U \to f(U) \subset N$ 是一个（光滑）同胚。换句话说，浸入局部是嵌入。

**(1.2.7)** 称一族 $M$ 上的光滑函数 $\{f_i\}_{1\le i\le n}$ 在点 $p$ 相互无关,即指 $\{\mathrm{d}_p(f_i) = (f_i)_{*p} \in T_p^*M\ 1 \le i \le n\}$ 们线性无关。

如果 $\{f_i\}_{1\le i\le n}$ 相互无关，则函数 $f = (f_1, \cdots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ 在点 $p$ 上的导数 $f_{*p}$ 可逆，所以按照反函数定理，可以在 $p$ 附近找一个领域，使得 $f|_V$ 是一个 $V$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中开集的同胚，这样 $(V, f|_V)$ 就是一张坐标卡。如果 $\{f_i\}$ 个数不到 $n$，那么补几个进去，照样可以找到一张坐标卡，其中前几个分量是 $\{f_i\}$.

**Lemma (1.2.8)** 设 $f_* : V \to W$ 是一个有限维矢量空间间的线性映射以及他的对偶映射是 $f^* : W^* \to V^*$，则 $\mathrm{rank}(f_*) = \mathrm{rank}(f^*)$. 特别地，当 $f_*$ 是单（满）的时候，$f^*$ 是满（单）的。

**(1.2.9)** 设 $\varphi : M \to N$ 光滑，且 $\varphi_{*p}$ 是单射。令 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\varphi(p)$ 附近的一个坐标，那么 $x_i \circ \varphi$ 是 $p$ 附近的一个坐标。特别地，$\varphi$ 在 $p$ 附近是一个单射。如果 $\varphi_{*p}$ 是满射，则 $x_i \circ \varphi$ 是 $p$ 附近的一个坐标中的一部分。

若 $\varphi_{*p}$ 是单射，他的对偶映射 $\varphi_p^*$ 就是满射，于是 $\varphi_p^*(x_i)_{*\varphi(p)} = (x_i \circ \varphi)_{*p} = \mathrm{d}_p(x_i \circ \varphi)$ 张成了 $T_p^*M$，在其中选出一组极大线性无关组（不妨设为前 $m$ 个），这就构成了 $p$ 附近的一组坐标。而 $(x_1, \cdots, x_m) \circ \varphi$ 局部是同胚，所以 $\varphi$ 局部是单射。

若 $\varphi_{*p}$ 是满射，他的对偶映射 $\varphi_p^*$ 就是单射，于是 $\varphi_p^* \mathrm{d}_{\varphi(p)} x_i = \mathrm{d}_p(x_i \circ \varphi)$ 相互独立，一般来说，他数量不够构成坐标，但是却可以构成坐标中的一部分。

**(1.2.10)** 设 $f : M \to N$ 是一个光滑映射，则 $\mathrm{rank}_p f$ 被定义为 $\mathrm{rank}_p f_{*p}$. 取 $p$ 和 $f(p)$ 附近的坐标 $\varphi$ 和 $\psi$ 且使得 $\varphi(p) = 0$，则 $f$ 在点 $p$ 的秩就是 Jacobian 矩阵 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{*0}$ 的秩。

选取 $f(p)$ 附近的坐标 $\psi$,则 $\psi \circ f : M \to \mathbb{R}^n$,不妨将其写作 $(f_1, \cdots, f_n)$,则 $\mathrm{rank}_p f$ 就是 $\mathrm{d}_p f_1, \cdots, \mathrm{d}_p f_n$ 张成的线性空间的维度。实际上,因为这是局部结果,所以可以直接假设 $N = \mathbb{R}^n$,而此时 $f_{*p} = (\mathrm{d}_p f_1, \cdots, \mathrm{d}_p f_n)$。

**Theorem (1.2.11)** 设 $M$ 是一个 $m$ 维流形且 $f : M \to N$ 是一个光滑映射，如果存在常数 $l$ 使得 $\mathrm{rank}_p f$ 处处等于 $l$，那么对于 $q \in N$，$f^{-1}(q)$ 要么是空集，要么是 $M$ 的一个正则子流形，维度为 $m - l$。

这个定理我们就不证明了。特别当 $N = \mathbb{R}$ 的时候，$f$ 如果是一个秩处处为 1 的光滑函数（即 $\mathrm{d}_p f$ 处处不为零），则 $f^{-1}(a)$ 或者是一个空集，或者是一个 $m - 1$ 维正则子流形。这就是所谓的等能面，或等势面。

## 1.3 Vector Field

和我们以前的直观一样，所谓的矢量场就是每一点赋予一个矢量。

**(1.3.1)** 设 $U \underset{\text{open}}{\subset} M$，$U$ 上的映射 $X : p \mapsto X(p) \in T_pM$ 被称为 $U$ 上的（切）矢量场。因为在 $U$ 的每一个局部 $V$（至少一个坐标卡内），矢量场 $X$ 都可以写作 $X = X^i\partial_i$，其中 $X^i$ 是 $V$ 上的实值函数，而 $\partial_i$ 在不同的点分属不同的切空间。如果 $\{X^i\}$ 在点 $p$ 是光滑函数，则称 $X$ 在 $p$ 处光滑。如果 $X$ 在 $U$ 处处光滑，则称 $X$ 是 $U$ 上的一个光滑矢量场。

对矢量场而言，他可以作用在光滑函数上得到一个函数，在局部的作用效果即 $Xf = X^i\partial_i f$. 显然，如果 $X$ 是要给光滑矢量场，则 $Xf$ 是一个光滑函数。反过来，如果 $X^i\partial_i f$ 对任意的光滑函数都光滑，则 $X^i$ 自然也是光滑的，所以有下面一个结论。

**(1.3.2)** 设 $X$ 是一个 $U$ 上的矢量场，如果 $Xf$ 对任意的光滑函数 $f$ 也是光滑的，那么 $X$ 是一个光滑矢量场。

这个命题可以看作矢量场光滑性的一个坐标无关的定义。

**(1.3.3)** 设 $f : M \to N$ 是一个光滑单射，而 $X$ 是 $M$ 上的一个光滑矢量场，则 $f_*X : p \mapsto f_{*f^{-1}(p)}X_{f^{-1}(p)}$ 是 $N$ 上的一个矢量场。因为 $(f_*X)g = X(g \circ f)$ 成立，所以这也是一个光滑矢量场。

**(1.3.4)** 设 $X$ 是一个 $U$ 上的光滑矢量场，如果一条光滑曲线 $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ 且 $\sigma(0) = p$，满足 $X(\sigma(t)) = \dot\sigma(t)$，则称 $\sigma$ 是 $X$ 在 $p$ 附近的一条积分曲线。

将矢量场局部写出来，$X(\sigma(t)) = X^i(\sigma(t))\partial_t$，所以问题归结到了求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^i \circ \sigma}{\mathrm{d}t}(t) = X^i(\sigma(t)),$$

他的初值为 $\sigma(0) = p$。微分方程的（光滑）解在局部存在且唯一，所以我们得到了：

**(1.3.5)** 在 $p$ 附近，对 $X$ 存在唯一的积分曲线 $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$.

设 $X$ 是 $U$ 上的光滑矢量场，对 $U$ 上的每一点 $p$，都可以在 $p$ 附近找到他的一条光滑积分曲线 $\sigma_p$，上面的点 $\sigma_p(t)$ 我们也记作 $\sigma_t(p)$，这样我们就得到了一个新的一族映射 $\{\sigma_t : U \to U\}$，当 $t = 0$ 的时候，$\sigma_0 = \mathrm{id}$. 这样的一族映射 $\{\sigma_t\}$ 被称为矢量场 $X$ 的流。如果需要明确是那个矢量场的时候写作 $\{\sigma_t^X\}$. 由微分方程解的唯一性可以发现 $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{s+t}$.

对于一个矢量场，整体流的存在性是不能保证的，比如对 $t = 1$ 的时候，是否对每一个 $p$ 变换 $\sigma_1$ 都有意义？但是，至少在局部，我们可以保证在一定范围内的参数都是有意义的，对于局部的问题，这个存在性已经基本够使了。

**(1.3.6)** 光滑流形 $M$ 上的光滑矢量场 $X$ 的支集被定义那些使 $X$ 不为 0 的点集的闭包。如果 $X$ 有紧支集，则 $X$ 的流的参数可以全局定义到 $\mathbb{R}$ 上面去。特别地，如果流形是紧的，则对每一个光滑矢量场都成立。

设支集为 $K$，找一个他的开覆盖，使得每一个开覆盖内 $\sigma_t$ 都对某一个小区间 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ 上有定义，由于紧，所以可以找到有限的子覆盖，所以在这些子覆盖里面，把最小的 $\epsilon_{\min}$ 挑出来，则在 $K$ 上，对 $t \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$，$\sigma_t$ 都有定义。现在对 $p \notin K$ 定义 $\sigma_t(p) = p$，容易检验 $\epsilon_t$ 定义良好且还是光滑映射。最后，对 $t > \epsilon_{\min}$，我们可以从某个 $t_0 \in (-\epsilon_{\min}, \epsilon_{\min})$ 反复复合 $\sigma_{\epsilon_{\min/2}}$，反之对 $t < -\epsilon$ 亦然。

现在我们将积分曲线的问题稍稍拓展一下，比如我们现在有两个矢量场 $X$ 和 $Y$，他们在每一点张成一个平面，类比于积分曲线，我们要问是否存在一个光滑曲面，使得这个曲面在每一点的切空间都是这俩矢量场张成的平面？

可以直接想象一下怎么处理这样的问题，直观来看，积分曲面可以由积分曲线拼成，即在 $p$ 附近，$X$ 的一条一条积分曲线和 $Y$ 的一条积分曲线编成一张网，这张网其实应该就在积分曲面上。因此积分曲面存在与否当且仅当这张网足够光滑，不能突然错开。此时的错开，就是说，从网格的一个端点处，沿着两条路径走到的终点处于积分曲面的两侧。

为简单见，我们看看这样一个曲边四边形。从 $p$ 出发，沿着 $X$ 的积分曲线走 $s$，走到了 $\sigma_s^X(p)$，再从这点出发，沿着 $Y$ 的积分曲线走 $t$，走到 $\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p)$. 同样，从 $p$ 出发，沿着 $Y$ 的积分曲线走 $t$，走到了 $\sigma_t^Y(p)$，再从这点出发，沿着 $X$ 的积分曲线走 $s$，走到 $\sigma_s^X\circ\sigma_t^Y(p)$。

这样我们就得到了弯曲的四边形，$p$ 是其中一个端点，但是一般来说，沿着两条路径并不会有相同的终点，即 $p$ 的对角线方向的另一端点不存在，此时两条路径并不能闭合成一个弯曲的四边形。甚至，即使积分曲面存在，我们也不能得到一个闭合的四边形（网格），但是，如果沿着两条路径的终点是错开的，则积分曲面依然不存在。

实际上，因为 $X$ 和 $Y$ 的光滑，我们可以适当延长（或缩短）相比 $s$ 和 $t$ 小量的在一条路径上走的时间使得弯曲的四边形变成一个网格（此时局部积分曲面存在），或者，永远是错开的（此时局部积分曲面不存在）。

我们现在需要比较两条路径两个终点的差，在欧式空间里面，我们可以比较这两个点的距离。但是在流形上这样做是不方便的，我们可能连一个很直接的计算两个点距离的手段都没有。为了克服这个困难，我们可以采用“表示”的手段，取一个 $U$ 上的光滑函数 $f$，比较 $f(\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p))$ 和 $f(\sigma_s^X\circ\sigma_t^Y(p))$。但光取一个 $f$ 肯定是不够的，取而代之，我们可以取遍 $U$ 上所有的光滑函数，如果我们关于所有的光滑函数都计算出了 $f(\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p))-f(\sigma_s^X\circ\sigma_t^Y(p))$（在 $s,t$ 都很小时），那么就可以确认这两个坐标相差很小的程度。所以现在就是要计算在 $s,t$ 都很小时的

$$g(s,t)=f(\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p))-f(\sigma_s^X\circ\sigma_t^Y(p)).$$

因为 $g$ 是光滑函数，我们在 $(0,0)$ 局部展开他，求导就可以得到系数。显然，他到二阶为止的导数都为 0，并且 $\partial_s^2 g(0,0)=\partial_t^2 g(0,0)=0$，所以他最低阶不为零的只可能是 $\partial_s\partial_t g(0,0)$，这就是说，我们要求 $\lim_{s,t\to 0} g(s,t)/st$.

**(1.3.7)** 在 $t$ 很小的时候，$f(\sigma_t^X p)=f(p)+tXf(p)+o(t^2)$. 为了证明他，只要求 $p$ 处的导数就行了，设 $\sigma^X(t)$ 是 $\sigma^X(0)=p$ 的 $X$ 的积分曲线，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\sigma_t^X p)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\circ\sigma^X(t)=f_{*p}X=Xf(p).$$

所以（暂时在记号上略去高阶项）

$$f(\sigma_t^Y\circ\sigma_s^X(p))=f(\sigma_s^X(p))+tYf(\sigma_s^X(p))=f(p)+sXf(p)+tY(\sigma_s^X\circ f(p)),$$

以及

$$g(s,t)=sXf(p)+tY(\sigma_s^X\circ f(p))-tYf(p)-sX(\sigma_t^Y\circ f(p)),$$

其中

$$Y(\sigma_s^X\circ f(p))-Yf(p)=sX(Y(f))(p),$$

所以

$$g(s,t)=st\big(X(Y(f))(p)-Y(X(f))(p)\big),$$

这就是说 $\partial_s\partial_t g(0,0) = X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p)$.

**(1.3.8)** 定义两个矢量场 $X, Y$ 的 Lie 括号为 $[X,Y]$，他满足 $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$。

如果采用局部表示 $X = X^i\partial_i$ 和 $X = Y^i\partial_j$，则我们可以计算出

$$\begin{aligned}[X,Y](f) &= X^i\partial_i(Y^j\partial_j f) - Y^i\partial_i(X^j\partial_j f)\\ &= X^i\partial_i Y^j\partial_j f - Y^i\partial_i X^j\partial_j f\\ &= (X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j)\partial_j f.\end{aligned}$$

因此，尽管形式上是二阶的，但 $[X,Y]$ 还是一个切矢量场，局部写作 $[X,Y] = (X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j)\partial_j = (X(Y^j) - Y(X^j))\partial_j$.

**(1.3.9)** 设 $X_1, \cdots, X_k$ 是一族切矢量场，记

$$D = \{f_1X_1 + \cdots + f_kX_k : \forall 1 \le i \le k,\ f_i \in \mathcal{F}(M)\},$$

称他为流形 $M$ 上的一个被 $\{X_i\}$ 张成的分布。

**(1.3.10)** 设 $X$ 和 $Y$ 张成一个分布 $D$，则局部积分曲面存在当且仅当在 $[X,Y] \in D$.

如果局部积分曲面存在，那么曲边四边形完全处于积分曲面上面，尽管沿着两条路径得到的终点可能不同，但是这两个点的连线（或者他的切矢量）应该在 $s \to 0$, $t \to 0$ 的时候确定了一个切矢量（由于 $X$ 和 $Y$ 的光滑性，所以这个切矢量并不依赖于连线的选取），他处于积分曲面的切子空间（由 $X_p$ 和 $Y_p$ 张成）里面，且正比于 $[X,Y]_p$，所以 $[X,Y]_p = a(p)X_p + b(p)Y_p$. 而 $a$ 和 $b$ 的光滑性是显然的。

如果不存在，就是说两个端点分处 $X_p$ 和 $Y_p$ 张成的切子空间两侧，所以两个点的连线确定的那个切矢量应该不在和 $X_p$ 和 $Y_p$ 张成的切子空间里，即 $[X,Y]_p \neq aX_p + bY_p$.

**(1.3.11)** 问题可以问得更广一点，设 $X_1, \cdots, X_k$ 是一族切矢量场，他们是否（至少在局部）有积分“曲面”存在？回答是 Frobenius 定理：设 $X_1, \cdots, X_k$ 在点 $p$ 张成的分布为 $D$，则局部存在积分“曲面”当且仅当对任意的 $i$ 和 $j$ 成立 $[X_i, X_j] \in D$。

当然，这个结论可以更加形式地证明他，如果不信任上面的直观想法，则可以参看任何一本微分流形的教材，我这里就略去了。

**(1.3.12)** 令 $\varphi$ 是流形 $M$ 上的光滑可逆变换，设矢量场 $X$ 的流为 $\sigma_t$，则 $\varphi_*X$ 的流为 $\varphi\circ\sigma_t\circ\varphi$.

设在 $p$ 处的切矢量为 $X_p$，经过 $p$ 的 $X$ 的积分曲线为 $\sigma(t)$，使用变换 $\varphi$，变成了 $q = \varphi(p)$，$q$ 处的切矢量 $\varphi_{*p}X_p = (\varphi_*X)_q$ 以及积分曲线 $\varphi(\sigma(t)) = \varphi(\sigma_t q) = \varphi\circ\sigma_t\circ\varphi^{-1}(p)$. 此即结论。

**(1.3.13)** 所以，$\varphi_*X = X$ 当且仅当 $\varphi\circ\sigma_t^X = \sigma_t^X\circ\varphi$ 成立。

**(1.3.14)** 直接的计算，我们有：

$$[X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(Y - (\sigma_t^X)_*Y\big).$$

所以，如果 $\sigma_t^X$ 和 $\sigma_s^Y$ 可交换，即 $\sigma_t^X\circ\sigma_s^Y = \sigma_s^Y\circ\sigma_t^X$，则 $(\sigma_t^X)_*Y = Y$ 以及 $[X,Y] = 0$.

设 $\varphi : M \to N$ 是一个光滑映射，$X$ 和 $Y$ 分布是 $M$ 和 $N$ 上的光滑函数，称他们是 $\varphi$ 相关的，如果 $\varphi_*X(f) = Y(f)\circ\varphi$ 对任意光滑函数 $f$ 成立。局部来看，$X_p(f\circ\varphi) = Y_{\varphi(p)}(f)$.

若 $X_1$ 与 $Y_1$ 是 $\varphi$ 相关的，$X_2$ 与 $Y_2$ 是 $\varphi$ 相关的，则 $[X_1,X_2]$ 和 $[Y_1,Y_2]$ 是 $\varphi$ 相关的，因为

$$\begin{aligned}\varphi_*[X_1,X_2](f) &= X_1(X_2(f\circ\varphi)) - [1\leftrightarrow 2]\\ &= X_1(Y_2(f)\circ\varphi) - [1\leftrightarrow 2]\\ &= Y_1(Y_2(f))\circ\varphi - [1\leftrightarrow 2]\\ &= [Y_1,Y_2](f)\circ\varphi.\end{aligned}$$

因为对于一个同胚而言，$\varphi_*(X)$ 被定义为 $p\mapsto \varphi_{*\varphi^{-1}(p)}X_{\varphi^{-1}(p)}$，或者 $\varphi(p)\mapsto\varphi_{*p}X_p$，这就是说

$$X_p(f) = \varphi_*(X)_{\varphi(p)}(f),$$

因此 $X$ 与 $\varphi_*X$ 是 $\varphi$ 相关的。

**(1.3.15)** 令 $\varphi$ 是 $U$ 上的光滑同胚 $\varphi:U\to\varphi(U)$，$X$ 和 $Y$ 是 $U$ 上的矢量场，则在 $U$ 上 $\varphi_*[X,Y]=[\varphi_*X,\varphi_*Y]$.

因此，作为局部的同胚，$\sigma_s^X$ 可以适用

$$(\sigma_s^X)_*[X,Y] = [X,(\sigma_s^X)_*Y] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\sigma_s^X)_*Y - (\sigma_{s+t}^X)_*Y\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=s}(\sigma_t^X)_*Y.$$

如果 $[X,Y]=0$，则 $(\sigma_t^X)_*Y$ 是一个常矢量（局部来看，系数为常数），因此 $Y$ 在 $(\sigma_t^X)_*$ 作用下不变，这就是说 $Y=(\sigma_t^X)_*Y$，于是 $\sigma_t^X$ 和 $\sigma_s^Y$ 可交换.

**(1.3.16)**$[X,Y]=0$ 当且仅当 $\sigma_t^X$ 和 $\sigma_s^Y$ 可交换。

既然流是可交换的，那么以前我们谈的那个曲边四边形总是可以闭合的，所以这种情况下积分流形局部肯定存在，因为在局部我们可以一块一块曲边四边形拼起来。由于显然的 $[\partial_i,\partial_j]=0$，如果我们能够选取局部坐标使得一族矢量场 $\{X_i:1\le i\le k\}$ 变成 $\{\partial_i:1\le i\le k\}$，则积分曲面存在。那么什么时候 $\{X_i\}$ 是可以变成 $\{\partial_i\}$ 呢？答案前面已经有了，$[X_i,X_j]\in D$，分布 $D$ 由 $\{X_i\}$ 生成。当然，这可以直接证明，所以这也是证明积分曲面存在性的一种思路。

最后给个例子，$n$ 维欧式空间，$\{\partial_i:1\le i\le k\}$ 的可能的积分曲面 $\{x_i=c_i:k+1\le i\le n\}$，其中 $c_i$ 是常数。如果这个积分曲面还是连通的，设 $\pi$ 是往最后 $n-k$ 个坐标的投影，则 $\pi_*\partial_i=0$，其中 $1\le i\le k$，因此 $(\pi\circ i)_*=0$，其中 $i$ 是积分流形往欧式空间的嵌入，此时由积分流形的连通性，$\pi\circ i$ 是常值映射。此时的积分流形就是上面的 $\{x_i=c_i:k+1\le i\le n\}$.

## 1.4 Cotangent Vector Field

**(1.4.1)** 设 $U\underset{\text{open}}{\subset}M$，$U$ 上的映射 $X:p\mapsto\omega(p)\in T_p^*M$ 被称为 $U$ 上的余切矢量场。因为在 $U$ 的每一个局部 $V$（至少一个坐标卡内），余切矢量场 $\omega$ 都可以写作 $\omega=a_i\mathrm{d}x^i$，其中 $a_i$ 是 $V$ 上的实值函数，而 $\mathrm{d}x^i$ 在不同的点分属不同的余切空间。如果 $\{a_i\}$ 在点 $p$ 是光滑函数，则称 $\omega$ 在 $p$ 处光滑。如果 $\omega$ 在 $U$ 处处光滑，则称 $\omega$ 是 $U$ 上的一个光滑余切矢量场（或者叫做一个 1-形式场）。

一个余切矢量场和一个切矢量场之间存在作用 $\omega(X)=X(\omega)$ 可以得到一个光滑函数，具体来说就是在每一点 $p$，$\omega_p(X_p)\in\mathbb{R}$.

**(1.4.2)** 设 $f$ 是 $U$ 上的光滑函数，显然 $\mathrm{d}f$ 是一个 $U$ 上的光滑余切矢量场。记 $U$ 上的光滑函数的集合为 $\Omega^0(U)$，记 $U$ 上的光滑余切矢量场的集合为 $\Omega^1(U)$，则 $\mathrm{d}:\Omega^0(U)\to\Omega^1(U)$.

下面我们要把 Frobenius 定理改写成余切矢量场的形式，这就变成了经典的 Pfaff 方程，正是当年关于 Pfaff 方程的研究，Cartran 第一次提出了（高阶）外微分和微分形式的概念（我们现在只谈了一阶的情况），在他那里，1-形式之间的乘法被定义成反对称的。从前一节谈论 Frobenius 定理来看，Pfaff 方程是一个关于积分曲面的问题，所以从这个角度来看，反对称的来由归根结底是为了积分。

**(1.4.3)** 称一个 1-形式 $\omega$ 是完全可积的，如果存在两个光滑函数 $f$ 和 $g$ 使得 $\omega = f\mathrm{d}g$，此时 $f$ 被称为 $\omega$ 的积分因子。

1-形式的完全可积性联系着所谓的首次积分问题。

设 $f$ 是一个光滑函数且 $\mathrm{d}_p f$ 处处不为零，则 $f(p) = a$（如果解存在）决定了 $M$ 中的一个正则子流形 $N_a$（有时候叫做一个曲面）。再设 $X$ 是 $M$ 内的光滑矢量场，则 $\mathrm{d}f(X) = 0$ 恒成立当且仅当处处成立 $X_p \in T_pN_{f(p)}$。

实际上，任取一点 $p \in M$，只要检验 $X_p(f) = 0$ 即可，选一条 $N_{f(p)}$ 上的一条光滑曲线 $c$，使得 $c(0) = p$ 且 $c'(0) = X_p \in T_pN_{f(p)}$，由于 $f(c(t)) = f(p)$ 恒成立，对其在 $t = 0$ 处求导就得到了 $\mathrm{d}_pf(X_p) = X_p(f) = 0$. 反过来，如果在一点处 $X_p \notin T_pN_{f(p)}$，则 $X_p(f) \neq 0$。

固定 $f$，将所有 $\mathrm{d}f(X) = 0$ 的 $X$ 拿出来，他组成一个 $n-1$ 维的分布，$\{N_a\}$ 就是这个分布的一族积分流形，因为 $X$ 在每一点都完全位于经过那一点的某个 $N_a$ 的切空间内。我们称 $N_a = \{p \in M : f(p) = a\}$ 是 Paffa 方程 $\mathrm{d}f = 0$ 的解。从上面来看，一个 Paffa 方程要有解，那么解应该是一个积分曲面才是，即，Paffa 方程 $\omega = 0$ 的解是使得 $\omega(X) = 0$ 的所有的 $X$ 的积分曲面。

现在假设一个 1-形式 $\omega$ 是完全可积的，即他可以写作 $\omega = f\mathrm{d}g$，那么 Paffa 方程 $\omega = 0$ 等价于 $\mathrm{d}g = 0$，这就确定了一个积分曲面。

**(1.4.4)**$\omega$ 是一个 1-形式，设分布 $D$ 是由满足 $\omega(X) = 0$ 的所有 $X$ 张成的一个分布，则这个 $\omega$ 完全可积当且仅当 $D$ 存在积分曲面。

**(1.4.5)** 因为局部存在积分曲面的充要条件是任取 $X$, $Y \in D$ 满足 $[X, Y] \in D$，所以上式应该有 $\omega([X, Y]) = 0$。一般而言，设 $\omega = f\mathrm{d}g$，其中 $f$ 和 $g$ 是光滑函数，则对一般的光滑矢量场 $X$, $Y$ 成立

$$\begin{aligned}\omega([X,Y]) = f\mathrm{d}g([X,Y]) &= f[X,Y](g) \\ &= fX(Y(g)) - fY(X(g)) \\ &= X(fY(g)) - X(f)Y(g) - Y(fX(g)) + Y(f)X(g) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \big(X(f)Y(g) - Y(f)X(g)\big).\end{aligned} \tag{1.2}$$

对于 $X(f)Y(g) - Y(f)X(g)$，我们可以将其改写为 $\mathrm{d}f(X)\mathrm{d}g(Y) - \mathrm{d}g(X)\mathrm{d}f(Y)$，因为这是关于 $X$ 和 $Y$ 的双线性函数，我们可以引入一个张量 $\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g$ 使得 $\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g(X, Y) = \mathrm{d}f(X)\mathrm{d}g(Y)$，则

$$\mathrm{d}f(X)\mathrm{d}g(Y) - \mathrm{d}f(Y)\mathrm{d}g(X) = \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g(X,Y) - \mathrm{d}g \otimes \mathrm{d}f(X,Y) = (\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g - \mathrm{d}g \otimes \mathrm{d}f)(X,Y).$$

记 $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g - \mathrm{d}g \otimes \mathrm{d}f$，其中的 $\wedge$ 被称为楔积，则式 (1.2) 变成了

$$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

从式子右端来看，$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g(X, Y)$ 并不依赖于 $\omega$ 的具体形式 $\omega = f\mathrm{d}g$。实际上，一个 1-形式 $\omega$ 可以写作 $\omega = \sum_i f_i\mathrm{d}g_i$，所以对于一般的情况，式 (1.2) 应该写作

$$\sum_i \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}g_i(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

所以等式左边应该也可以通过 $\omega$ 表示，记 $\mathrm{d}\omega = \sum_i \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}g_i$，则最后将式 (1.2) 改写为

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]). \tag{1.3}$$

当然，我们也可以反过来通过式 (1.3) 来定义 $\mathrm{d}\omega$，顺序在这里不是紧要的。紧要的是，我们引入了一个 1-形式之间的楔积，使得他构成了一个（吃掉两个矢量场的）反对称函数，这里来看反对称性的来源应该是为了处理积分曲面的存在性，由 $[X,Y]$ 自然诱导出来的。这样的反对称函数被称为一个 2-形式。

**(1.4.6)** 现在让我们暂时脱离主线来看看楔积 $\omega \wedge \eta$ 的构造，他对于 $\omega$ 和 $\eta$ 都是双线性的，并且满足 $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$。显然地，$\omega \wedge \omega = 0$。

此外，设 $\omega' = a\omega + b\eta$ 和 $\eta' = c\omega + d\eta$，即

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix},$$

其中 $a$, $b$, $c$ 和 $d$ 都是光滑函数，将系数矩阵记做 $A$，则可以计算得

$$\omega' \wedge \eta' = (ad - bc)\omega \wedge \eta = \det(A)\omega \wedge \eta.$$

特别地，如果 $\omega' = \mathrm{d}x'$ 和 $\eta' = \mathrm{d}y'$，且 $x'$ 和 $y'$ 可以看做 $x$ 和 $y$ 的函数，而

$$\mathrm{d}x' = \partial_x x' \mathrm{d}x + \partial_y x' \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y' = \partial_x y' \mathrm{d}x + \partial_y y' \mathrm{d}y,$$

因此

$$\mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}y' = \det\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 $\partial(x',y')/\partial(x,y)$ 是 $(x',y')$ 关于 $(x,y)$ 的 Jacobian. 如果还记得积分学的一些基本事实，会发现这就是和重积分变量替换公式是如此的相似。实际上，对于二个变量的重积分变换公式，他写作

$$\int_S \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \int_S \left|\det\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right)\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中绝对值的引入是因为换变量可能会改变积分区域的定向。

所以，从这个角度来看，正如我们对于 $\mathrm{d}x$ 是无穷小距离的直观一样，我们可以认为 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 是无穷小面积。