离散数学（2）
第六次作业讲解

2024 秋季学期

1.设$f:A\to B$且$n(A)\geq 2$。证明 f是可逆的当且仅当 f有唯一的左(右)逆。

知识点：可逆、左可逆、右可逆

- 设 X 和 Y 为集合 且 $f: X\to Y$.
  - 若有$g: Y\to X$使 $g\circ f = I_X$，则称 f 为左可逆的，并称 g为 f 的一个左逆
  - 若有$g: Y\to X$ 使 $f\circ g = I_Y$，则称 f 为右可逆的，并称 g为 f 的一个右逆
  - 若有 $g: Y\to X$ 使 $g\circ f = I_X$ 且 $f\circ g = I_Y$，则称 f 为可逆的，并称 g 为 f 的一个逆
- 设 X 和 Y 为集合 且 $f: X\to Y$.
  - 若$X\neq\emptyset$，f 为单射 $\Leftrightarrow f$ 为左可逆
  - f 为满射$\Leftrightarrow f$ 为右可逆
  - f 为双射$\Leftrightarrow f$ 为可逆
- 设 X 和 Y 为二集合，若 $f: X\to Y$ 既是左可逆的，又是右可逆的，则 f 是可逆的，且 f 的左逆和右逆都等于 f 的唯一的逆.

1.设$f:A\to B$且$n(A)\geq 2$。证明 f是可逆的当且仅当 f有唯一的左(右)逆。

证明： （必要性）假设 f 是可逆的，则 f 的 逆 f^{-1} 是f 的唯一的左（右）逆.

（充分性）假设 f 有唯一的左逆 g，则 $g\circ f=I_A$.

由于 I_A 是单射，得 f 是单射.

下面用反证法证明 f 是满射.

假设 f 不是满射，则存在$b'\in B$，使得$b'\notin f[A]$.

假设 $g(b')=a$。由于$n(A)\geq 2$，则一定存在$a'\in A$且$a'\neq a$。

如下定义 $g':B\to A$：对任意的$b\in B$,

$$g'(b)=\begin{cases} g(b), \text{若} b\neq b' \\ a', \text{若 } b=b' \end{cases}$$

对任意的 $a\in A$, $g'\circ f(a)=g'(f(a))=g(f(a))=a$.

因此 $g'\circ f=I_A$， 即g' 也是 f 的左逆， 矛盾.

故 f 是满射，得 f 是双射，因此 f 可逆。

2. 判断以下函数是否为左可逆、右可逆、可逆，并写出对应的左逆、右逆和逆。

(1) f: N→N，满足$f(x) = x+1$，x =0, 1, 2, 3；$f(x)=0$, x = 4; $f(x) = x$，$x \geq 5$.

(2) g: N→ N，满足$g(x)=x/2$，x为偶数；$g(z) = 3$，x 为奇数.

解： (1) f 为可逆的，因此也为右可逆和左可逆的。

如下定义 f^{-1}： N→N，是f的逆，也是右逆和左逆：

$f^{-1}(x) = x-1$, x= 1, 2, 3, 4； $f(x)=4$, x=0； $f(x) = x$，$x \geq 5$

(2) 由于g(5) =g(7) =3，因此，g不是单射。

对任意的 $y \in$ N, 有g(2y)=y，因此，g是满射。

故 g是右可逆，不是左可逆，也不是可逆。

令 h: N→N，满足：对任意 $x \in$ N有 $h(x)=2x$。显然有， $g \circ h = I_N$。

因此，h 是g的右逆。

3. 设 $f: X\to Y$且$g: Y\to Z$. 证明:

(1)若 $g\circ f$ 为满射，g 为单射，则 f 为满射;

(2)若 $g\circ f$ 为单射，f 为满射，则g为单射。

知识点：单射、满射、双射

- 若 $f: X\to Y$,
  - 若 ran $f = Y$，则称 f 为满射，即 $\forall y\,(\,y\in Y \to \exists x\,(\,x\in X \land f(x) = y\,)\,)$
  - 若 f 是 1-1的，则称 f 是单射（内射），即

$$\forall x_1\forall x_2(\,x_1\in X \land x_2\in X \land f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2)$$

$$\forall x_1\forall x_2(\,x_1\in X \land x_2\in X \land x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2))$$

  - 若 f 既是满射，又是单射，则称 f 为双射.

3. 设 $f: X\to Y$且$g: Y\to Z$. 证明:

(1)若 $g\circ f$ 为满射，g 为单射，则 f 为满射;

(2)若 $g\circ f$ 为单射，f 为满射，则g为单射。

知识点：单射、满射、双射

- 设 $f: X \longrightarrow Y$ 和 $g: Y \longrightarrow Z$，则
  - 若 f 和 g 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射
  - 若 f 和 g 都是单射，则 $g\circ f$ 也是单射
  - 若 f 和 g 都是双射，则 $g\circ f$ 也是双射
  - 若 $g\circ f$ 是满射，则 g 是满射
  - 若 $g\circ f$ 是单射，则 f 是单射
  - 若 $g\circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射

3. 设 $f: X\to Y$且$g: Y\to Z$. 证明:

(1)若 $g\circ f$ 为满射，g 为单射，则 f 为满射;

(2)若 $g\circ f$ 为单射，f 为满射，则g为单射。

证明：(1) 对任意 $y\in Y$，有$g(y)\in Z$。

由于$g\circ f$为满射，因此存在 $x\in X$，使得$g\circ f(x)=g(y)$，即$g(f(x))=g(y)$。

由于 g为单射，得 $y=f(x)$。

因此 f 为满射。

(2) 因为$g\circ f$ 为单射，所以 f 为单射，而 f 又是满射，所以 f 为双射。

对任意 $y_1, y_2\in Y$ 且$y_1\neq y_2$，因为 f 为双射，因此存在$x_1, x_2\in X$且$x_1\neq x_2$，使得$y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$。

又因为$g\circ f$为单射，因此有$g\circ f(x_1)\neq g\circ f(x_2)$，即 $g(y_1)\neq g(y_2)$。

因此，g是单射。

4. 设 $A=\{1, 2, \ldots, n\}$。有多少个分别满足以下条件的从A到A的函数 f :

(1) $f \circ f = f$

(2) $f \circ f = I_A$

证明：(1) 已知函数 f 满足 $f^2 = f$，则对任意$a \in A$,

若 $f(a) = a$，则 $f^2(a) = f(a) = a$. (a)

若 $f(a) = b$ ($b \neq a$)，则由 $f^2(a)=f(b) = f(a)=b$, 得 $f(b) = b$. (b)

下面证明满足(a)与(b)的函数 f 一定满足 $f^2 = f$. 对任意的$a \in A$,

若$f(a) = a$, 则$f^2(a)=a=f(a)$;

若$f(a)=b\neq a$, 且 $f(b)=b$，则 $f^2(a) = f(f(a)) = f(b)=b = f(a)$.

综上可得：f是满足 $f^2 = f$ 的函数当且仅当对任意 $a\in A$，$f(a)=a$，或$f(a)=b\neq a$且$f(b)=b$.

假设只存在k个A中的元素 a 使得$f(a)=a$，且假设A'为这k个元素的集合，

则对任意的$b\in A-A'$, 一定存在 $c\in A'$, 有$f(b)=c$.

否则，若存在$c' \in A-A'$,使得$f(b)=c'$，则$f(c')=c'$，与只存在k个A中的元素a使得$f(a)=a$矛盾.

因此，满足$f^2 = f$ 的函数的个数为$\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{n-k}$。

4. 设 $A=\{1, 2, \ldots, n\}$。有多少个分别满足以下条件的从A到A的函数 f：

(1) $f \circ f = f$

(2) $f \circ f = I_A$

证明：(2) 已知函数 f 满足 $f^2 = I_A$，则对任意$a \in A$,

若 $f(a) = a$，则 $f^2(a) = I_A(a)=a$ (a)

若 $f(a) = b$ ($b \neq a$)，则由 $f^2(a)=f(b) = I_A(a)=a$, 得 $f(b) = a$ (b)

下面证明满足(a)与(b)的函数 f 一定满足 $f^2 = I_A$. 对任意的$a \in A$,

若$f(a) = a$, 显然有 $f^2(a)=f(a)=a= I_A(a)$;

若$f(a)=b \neq a$, 且 $f(b)=a$，则 $f^2(a) = f(f(a)) = f(b)=a = I_A(a)$.

综上可得：f是满足 $f^2 = I_A$ 的函数当且仅当对任意 $a \in A$，$f(a)=a$，或$f(a)=b \neq a$且$f(b)=a$.

假设只存在k个A中的元素 a 使得$f(a)=a$，且假设A' 为这 k个元素的集合，

则对任意的$a \in A - A'$, 则一定存在 $b \in A - A'$且$b \neq a$，有$f(a)=b$和$f(b)=a$.

令(n-k)=2m，满足 $f^2 = I_A$ 的函数的个数为

$\sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k+1} \frac{(2m)!}{2^m m!}$。（n为奇数） $\sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k} \frac{(2m)!}{2^m m!}$。（n为偶数）

其中$\frac{C_{2m}^2 C_{2m-2}^2 \cdots C_2^2}{n!} = \frac{(2m)!}{2^m m!}$ 代表从(n-k)个元素中两两组合，并除去重复的组合情况

5. 设 f, g, h 都是从 R到 R的部分函数，对于 $x \neq 0$，$f(x)= 1/x$，对于$x \in$ R，$g(x)= x^2$，对于$x \geq 0$，$h(x)= \sqrt{x}$。试求 $f \circ f$，$h \circ g$，$g \circ h$ 及它们的定义域和值域。

解：(1) $f \circ f$是从 R到 R的部分函数，满足：对于 $x\in$R且$x\neq 0$ ，$f\circ f(x) = x$。

$\mathrm{dom}(f\circ f)= \mathrm{R}-\{0\}$, $\mathrm{ran}(f\circ f) = \mathrm{R} -\{0\}$.

(2) $h \circ g$是从 R到 R的函数，满足：对于 $x\in$R, $h\circ g(x) = |x|$.

$\mathrm{dom}(h\circ g)=\mathrm{R}$, $\mathrm{ran}(h\circ g)=\mathrm{R}_+\cup\{0\}$.

(3) $g \circ h$是从 R到 R的部分函数，满足：对于$x\in$R 且$x\geq 0$, $g \circ h(x)=x$.

$\mathrm{dom}(g \circ h) = \mathrm{R}_+\cup\{0\}$, $\mathrm{ran}(g \circ h)=\mathrm{R}_+\cup\{0\}$.