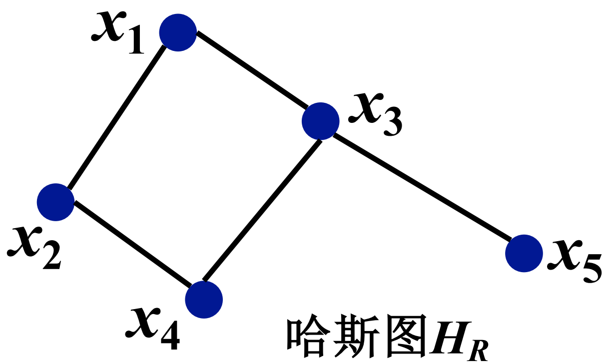
离散数学（2）
第四次作业讲解

2024 秋季学期

1.设集合$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$上的偏序$R$的哈斯图如右图所示。

a) 求P的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求$\{x_2, x_3, x_4\}$、$\{x_3, x_4, x_5\}$和$\{x_1, x_2, x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



哈斯图H_R

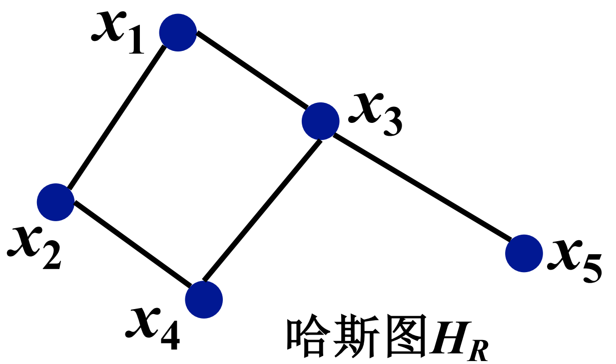
知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

偏序 $R\subseteq A\times A$	严格偏序
自反的、反对称的和传递的	反自反的、反对称的和传递的
表示为“$\leqslant$”，用$<A,\leq>$表示偏序结构	表示为“$<$”，用$<A,<>$表示严格偏序结构
$x, y\in A, x\leqslant y$ 读作x小于或等于y	$x, y\in A, x<y$ 读作x小于y
R $\longrightarrow$	$R-I_A$
$R\cup I_A$ $\longleftarrow$	R

1.设集合$P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R的哈斯图如右图所示。

a) 求P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求$\{x_2, x_3, x_4\}$ 、$\{x_3, x_4, x_5\}$和 $\{x_1, x_2, x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



哈斯图H_R

知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

- 设偏序结构$<A, \leq>$是一个偏序结构，
  - 对于任意两个元素 $x, y \in A$，如果 $x < y$ 且不存在任何其它元素 $z \in A$，使得 $x < z$ 且 $z < y$，则称 y 为 x关于 $\leq$ 的覆盖（或遮盖），简称为 y 为 x的覆盖.
  - 其哈斯图是一个无向图$H_{\leq}$，满足

    (1) 集合A的每一个元素为$H_{\leq}$中一个点，且

    (2) 对于任意 $x, y \in A$，

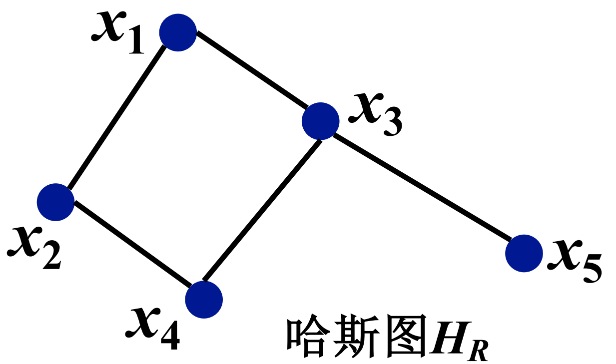
    (a) 如果 $x < y$，则点 x 画在点 y 之下，且

    (b) 如果 y 覆盖 x，则 x 和 y 之间存在一条无向边.

1.设集合$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R的哈斯图如右图所示。

a) 求P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求$\{x_2, x_3, x_4\}$ 、$\{x_3, x_4, x_5\}$和 $\{x_1, x_2, x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



哈斯图H_R

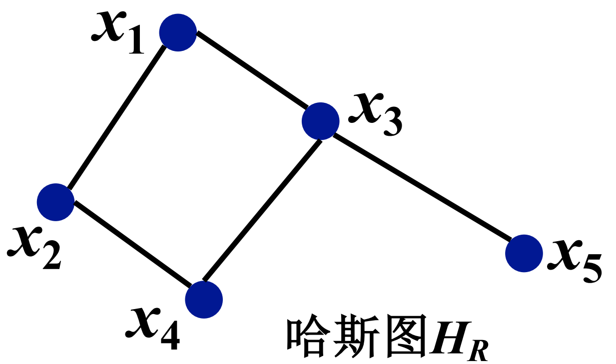
知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

- 设$<A,\leq>$是偏序结构，并且$S\subseteq A$，$S\neq\emptyset$, 则
  - b 是 S 的 最大元 $\Leftrightarrow b\in S\wedge\forall x\,(x\in S\rightarrow x\leq b)$
  - b 是 S 的 极大元 $\Leftrightarrow b\in S\wedge\forall x\,(x\in S\wedge b\leq x\rightarrow x=b)$
  - b 是 S 的 上界 $\Leftrightarrow b\in A\wedge\forall x\,(x\in S\rightarrow x\leq b)$
  - b 是 S 的 最小元 $\Leftrightarrow b\in S\wedge\forall x\,(x\in S\rightarrow b\leq x)$
  - b 是 S 的 极小元 $\Leftrightarrow b\in S\wedge\forall x\,(x\in S\wedge x\leq b\rightarrow x=b)$
  - b 是 S 的 下界 $\Leftrightarrow b\in A\wedge\forall x\,(x\in S\rightarrow b\leq x)$

1.设集合$P = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R的哈斯图如右图所示。

a) 求P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求$\{x_2, x_3, x_4\}$ 、$\{x_3, x_4, x_5\}$和 $\{x_1, x_2, x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



哈斯图H_R

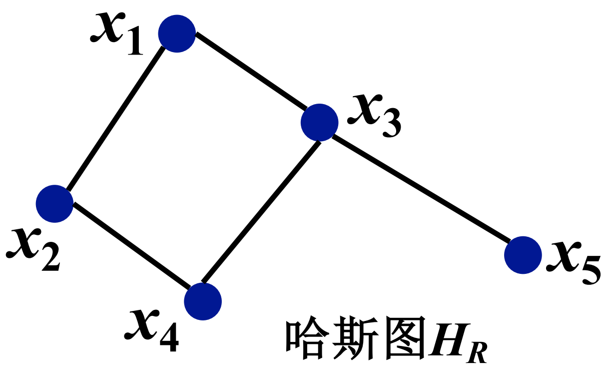
知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

- 设$< A , \leq >$是偏序结构，并且 $S \subseteq A$，$S \neq \emptyset$, 则
  - b 是 S 的最小上界(上确界) $\Leftrightarrow$ b是S的上界, 且对S的任意上界 x，都有 $b \leq x$.
  - b 是 S 的最大下界(下确界) $\Leftrightarrow$ b是S的下界, 且对S的任意下界 x，都有 $x \leq b$.

1.设集合$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R的哈斯图如右图所示。

a) 求P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求$\{x_2, x_3, x_4\}$ 、$\{x_3, x_4, x_5\}$和 $\{x_1, x_2, x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



哈斯图H_R

解：a) 最小元：无，最大元：x_1

极小元：x_4，x_5，极大元：x_1

b) $\{x_2, x_3, x_4\}$ 的上界为 x_1，下界为 x_4

上确界为x_1, 下确界为 x_4

$\{x_3, x_4, x_5\}$的 上界为 x_1，x_3，无下界

上确界为 x_3，无下确界

$\{x_1, x_2, x_3\}$的上界为x_1，下界为 x_4

上确界为x_1，下确界为 x_4

2.设R为集合S上的全序关系。证明：R和R^{-1} 同时为S上的良序当且仅当 S为有限集。

知识点：全序关系、良序

- 设$<A,\leq>$是一个偏序结构，
  - 如果对于任意$x, y \in A$，或者 $x \leq y$，或者 $y \leq x$，即 x与 y可比，则称$\leq$为 A上的全序（或线序），并称 $<A,\leq>$ 为全序结构或链，即

$$(\forall xy)(x \in A \land y \in A \rightarrow x \leq y \lor y \leq x)$$

  - 如果 A 的每一个非空子集都有一个最小元，则称$\leq$为良序关系，$<A,\leq>$为良序结构。
- 偏序结构 $<A,\leq>$是良序结构的充要条件
  - $\leq$为A上的全序关系，且 A 的每个非空子集都有极小元.
  - $\leq$为A上的全序关系，且不存在 A 中元素的无穷序列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$，使得对每个 $i \in \mathrm{N}$，皆有 $a_{i+1} < a_i$，即不存在 A 中元素的无穷递降序列。

2.设R为集合S上的全序关系。证明：R和R^{-1} 同时为S上的良序当且仅当 S为有限集。

证明： (充分性)

（反证法）若S为有限集，假设R与R^{-1}中至少有一个不是良序。

假设 R不是良序，

则必存在S 的一个非空子集有关于R的无限递降序列。

与 S 为有限集矛盾。

假设 R^{-1}不是良序时， 同理可证

因此假设不成立，即R和R^{-1}均为S的良序。

2.设R为集合S上的全序关系。证明：R和R^{-1}同时为S上的良序当且仅当S为有限集。

证明：（必要性）反证法：假设S是无限集。

由于R为S上的良序，则S必有关系R下的最小元，记为a_1。

考虑集合$S_1=S-\{a_1\}$，则S_1也为无限集。

同样，由R为S上的良序，得S_1也有关系R下的最小元a_2，且$a_1 \neq a_2$，$a_1 R a_2$。

一直继续下去，令$S_n = S_{n-1}-\{a_n\}$，则S_n也有关系R下的最小元a_{n+1}，

此时，有S中元素构成的序列：$a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$，满足

$$a_i \neq a_{i+1},\ a_i\, R\, a_{i+1},\ i=1, 2, \ldots, n。$$

因此，由于S为无限集，如上可得S关于关系R的无穷递增序列：

$$a_1, a_2, \ldots., a_n, \ldots$$

显然，该序列为S在关系R^{-1}下的无穷递降序列。

由于R是全序，则对任意$x, y \in S$, 有xRy或yRx，即$yR^{-1}x$或$xR^{-1}y$，得R^{-1}也是全序。

由上可得R^{-1}不是良序，矛盾。

故假设不成立，即S是有限集。

3.设$<A, \leq>$为偏序结构，证明 A 的每个非空有限子集都至少有一个极小元和极大元。

知识点：极小元、极大元

- 设$<A, \leq>$是偏序结构，并且 $S \subseteq A$，$S \neq \emptyset$, 则
  - b 是 S 的 极大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge b \leq x \rightarrow x = b)$

    $\Leftrightarrow$ S中大于或等于 b的元素只有b.

    S中可能有元素与b 不可比
  - b 是 S 的 极小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge x \leq b \rightarrow x = b)$

    $\Leftrightarrow$ S中小于或等于 b的元素只有b.
  - b 是 S 的 最大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow x \leq b)$
  - b 是 S 的 最小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow b \leq x)$

    S中所有元素均与b 可比

3.设$<A, \leq>$为偏序结构，证明 A 的每个非空有限子集都至少有一个极小元和极大元。

证明：(反证法)

假设 S 为A的一个非空有限子集，且 S 没有极小元。

令$a_0 \in S$，由于 S 没有极小元，则一定存在 $a_1 \in S$，使得 $a_1 < a_0$;

否则，对S中任意元素 b，必有 $a_0 < b$ 或 $a_0 = b$，即a_0是S的极小元。

同样，由于S 没有极小元，则一定存在$a_2 \in S$，使得$a_2 < a_1$; 否则a_1是S的极小元。

归纳可证，对任意的$n \in I_+$，若存在$a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$，满足

$$a_n < a_{n-1} < \ldots < a_1 < a_0,$$

由于 S 没有极小元，则一定存在$a_{n+1} \in S$，使得$a_{n+1} < a_n$。

因此，S中一定存在一个无限递降序列$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$，与 S 为有限集矛盾.

故，假设不成立，即A 的每个非空有限子集都至少有一个极小元。

同理可证，S一定有一个极大元.

4.设 R_1和R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1-R_2)$

2) $R_1 \circ R_2$

3) $t(R_1 \cup R_2)$

知识点：二元关系在运算下是否仍然保持自反性、对称性和传递性

R, S	$R \cap S$	$R \cup S$	$R-S$	$R \oplus S$	$\sim R$	$R \circ S$
自反	√	√	-	-	-	√
反自反	√	√	√	√	-	-
对称	√	√	√	√	√	-
反对称	√	-	√	-	-	-
传递	√	-	-	-	-	-

4.设 R_1和R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1-R_2)$

2) $R_1\circ R_2$

3) $t(R_1\cup R_2)$

解：1) 不一定是。

例如：令$A=\{1, 2, 3\}$, $R_1=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>,<2, 1>\}$, $R_2=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>\}$，

显然，R_1与R_2都是A上的等价关系。

$R_1-R_2=\{<1, 2>, <2, 1>\}$, $r(R_1-R_2)=R_1$ 仍为等价关系。

例如：令 $A=\{1, 2, 3\}$,

$R_1=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <3, 1>\}$，

$R_2=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 3>, <3, 1>\}$。

显然，R_1与R_2都是A上的等价关系。

但 $R_1-R_2=\{<1, 2>, <2, 3>, <2, 1>, <3, 2>\}$，

$r(R_1-R_2)=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 3>, <2, 1>, <3, 2>\}$不满足传递性，不是等价的。

4.设 R_1和R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1-R_2)$

2) $R_1 \circ R_2$

3) $t(R_1 \cup R_2)$

解：2) 不一定是。

例如：令$A=\{1, 2, 3\}$, $R_1=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>,<2, 1>\}$, $R_2=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>\}$，

显然，R_1与R_2都是A上的等价关系。

$R_1 \circ R_2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>,<2, 1>\}$ 仍为等价关系。

例如：令 $A=\{1, 2, 3, 4\}$,

$R_1 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 1>\}$，

$R_2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <2, 3>, <3, 2>\}$。

显然，R_1与R_2都是A上的等价关系。

但 $R_1 \circ R_2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>\}$，显然不满足传递性，不是等价的。

4.设 R_1和R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1-R_2)$

2) $R_1 \circ R_2$

3) $t(R_1 \cup R_2)$

解：3) $t(R_1 \cup R_2)$是等价关系。

由于R_1与R_2是等价关系，因此是自反的，对称的和传递的。

可证 $R_1 \cup R_2$仍然是自反和对称的（证明请补充），

而传递闭包保持自反性和对称性，

因此，得$t(R_1 \cup R_2)$是自反、对称、传递的，即为等价关系。

5. 试判断下列定义在二维欧氏空间R×R上的二元关系T是否为R×R上的偏序、严格偏序、全序和良序？

a) 若$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，则$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$当且仅当$x_1 \le x_2$且$y_1 \le y_2$;

b) 若$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，则$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$当且仅当$x_1 < x_2$，或者$x_1 = x_2$且$y_1 \le y_2$。

解： a) ① 对任意$<x, y> \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$，

由于$x \le x$且$y \le y$，因此，有$<x, y> T <x, y>$，得T是自反的。

② 对任意$<x_1, y_1>, <x_2, y_2> \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$，若$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$且$<x_2, y_2> T <x_1, y_1>$，

则有$x_1 \le x_2$，$y_1 \le y_2$，$x_2 \le x_1$且$y_2 \le y_1$，得$x_1 = x_2$且$y_1 = y_2$，从而$<x_1, y_1> = <x_2, y_2>$。

因此，T是反对称的。

③ 对任意$<x_1, y_1>$，$<x_2, y_2>$，$<x_3, y_3> \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$，若$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$，$<x_2, y_2> T <x_3, y_3>$，

则有$x_1 \le x_2$，$y_1 \le y_2$，$x_2 \le x_3$且$y_2 \le y_3$，得$x_1 \le x_3$且$y_1 \le y_3$，

因此，$<x_1, y_1> T <x_3, y_3>$，即T是传递的。

综上，T是偏序关系，但不是严格偏序关系。

对于$<2, 3>$，$<3, 2> \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$，显然$<2, 3> \overline{T} <3, 2>$，因此，$T$不是全序关系。

令S为大于0且小于1的实数集合，即S为开区间$(0, 1)$，则$S\times S$为R×R的一个非空子集，显然，$S\times S$关于偏序T没有最小元。因此，T不是良序。

5. 试判断下列定义在二维欧氏空间R×R上的二元关系T是否为R×R上的偏序、严格偏序、全序和良序？

a) 若$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，则$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$当且仅当$x_1 \le x_2$且$y_1 \le y_2$;

b) 若$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，则$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$当且仅当$x_1 < x_2$，或者$x_1 = x_2$且$y_1 \le y_2$。

解： b) ① 对任意$<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，

由于$x = x$且$y \le y$，因此，有$<x, y> T <x, y>$，得T是自反的。

② 对任意$<x_1, y_1>, <x_2, y_2> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，若$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$且$<x_2, y_2> T <x_1, y_1>$,

则必须满足$x_1 = x_2$，$y_1 \le y_2$且$y_2 \le y_1$，得$x_1 = x_2$且$y_1 = y_2$，从而$<x_1, y_1> = <x_2, y_2>$。

因此，T是反对称的。

③ 对任意$<x_1, y_1>$，$<x_2, y_2>$，$<x_3, y_3> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，若$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$，$<x_2, y_2> T <x_3, y_3>$,

- 若$x_1 < x_2$：则对于$x_2 < x_3$或$x_2 = x_3$都有$x_1 < x_3$，因此，$<x_1, y_1> T <x_3, y_3>$;
- 若$x_1 = x_2$且$y_1 \le y_2$：若$x_2 < x_3$则有$x_1 < x_3$；若$x_2 = x_3$且$y_2 \le y_3$，则有$x_1 = x_3$且$y_1 \le y_3$。因此，$<x_1, y_1> T <x_3, y_3>$;

因此，T是传递的。

综上，T是偏序关系，但不是严格偏序关系。

5. 试判断下列定义在二维欧氏空间R×R上的二元关系T是否为R×R上的偏序、严格偏序、全序和良序？

a) 若$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，则$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$当且仅当$x_1 \le x_2$且$y_1 \le y_2$;

b) 若$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，则$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$当且仅当$x_1 < x_2$，或者$x_1 = x_2$且$y_1 \le y_2$。

解： b)由上面可知，T是偏序关系。

对任意$<x_1, y_1>, <x_2, y_2> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，

- 若$x_1 = x_2$，则一定有$y_1 \le y_2$或$y_2 \le y_1$，因此一定有$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$或$<x_2, y_2> T <x_1, y_1>$
- 若$x_1 \ne x_2$，则一定有$x_1 < x_2$或$x_2 < x_1$，因此一定有$<x_1, y_1> T <x_2, y_2>$或$<x_2, y_2> T <x_1, y_1>$

在偏序关系T上，$<x_1, y_1>, <x_2, y_2>$始终可比，因此T是全序关系。

令S为大于0且小于1的实数集合，即S为开区间(0, 1)，则$S \times S$为R×R的一个非空子集，显然，$S \times S$关于偏序T没有最小元。因此，T不是良序。

6. 如果集合A上的二元关系R满足 $<x, y>$，$<y, z> \in R$ ，则$<z, x> \in R$，就称R是循环的。证明：集合A上的二元关系R是A上的等价关系，当且仅当R是自反的和循环的。

证明： （必要性）

设R是A上的等价关系，则R是自反的、对称的和传递的，只需证明R是循环的。

对任意 $<x, y>, <y, z>R$，

由 R是传递的，得 $<x, z> \in R$。

又由于R是对称的，得$<z, x> \in \mathrm{R}$。

因此，R是循环的。

6. 如果集合A上的二元关系R满足$<x, y>$，$<y, z> \in R$，则$<z, x> \in R$，就称R是循环的。证明：集合A上的二元关系R是A上的等价关系，当且仅当R是自反的和循环的。

证明：（充分性）

若 R 是自反的和循环的，则只需证明R是<u>对称的和传递的</u>。

(a)对任意 $<x, y>\in R$，

由于R是自反的，因此有$<x, x>\in R$。

又由于R 是循环的，因此，由$<x, x>,<x, y>\in R$ 得$<y, x>\in R$.

所以R是<u>对称的</u>。

(b)对任意$<x, y>, <y, z>\in R$，由于R是循环的，因此，$<z, x>\in R$。

由(a)知R是对称的，因此，$<x, z>\in R$.

所以，R是<u>传递的</u>。

综上，R是等价关系。

7. 设集合A上的二元关系R是自反的。证明R为等价关系的充要条件是：若$<a, b>$，$<a, c> \in R$，则$<b, c> \in R$。

证明： （必要性）

假设 R 为等价关系，则 R 是自反的、对称的和传递的。

若$<a, b>, <a, c> \in R$，由于R为对称的，则$<b, a> \in R$，

由于R是传递的，因此由$<b, a> \in R$，$<a, c> \in R$ 得$<b, c> \in R$。

(充分性) 只需证明 R是对称的和传递的。

a) 对任意$<x, y> \in R$，

由于R是自反的，则$<x, x> \in R$，故有$<y, x> \in R$，

因此，R 是对称的。

b) 对任意 $<x, y>, <y, z> \in R$，

由于R是对称的，因此$<y, x> \in R$，再由$<y, z> \in R$，

得$<x, z> \in R$。

因此，R 是传递的。

综上，得 R是等价关系。