离散数学（2）
第十次作业讲解

2024 秋季学期

1. 如何由邻接矩阵判断图是不是非循环？

知识点：邻接矩阵、非循环图、树

- 设 n 阶图 $G=<V, E, \Psi>$， G 的邻接矩阵 $X(G)$ 为 $n\times n$ 矩阵 (x_{ij})，其中，x_{ij} 为分别以 v_i 和 v_j 为起点和终点的边的数目
  - X^m 的第 i 行第 j 列元素 $x_{ij}^{(m)}$ 等于G中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数
- 非循环图：没有回路的无向图和没有半回路的有向图
  - 回路：连通2度正则图
  - 半回路：基础图是回路的有向图称为半回路
- 树：非循环的连通无向图
  - 等价定义： G 是连通的 且$n(E) = n - 1$

1. 如何由邻接矩阵判断图是不是非循环？

解：设$G = < V, E, \Psi >$ 是 n 阶图，邻接矩阵为 X。

若G是无向图，则G是非循环图$\Leftrightarrow G$ 没有回路；

若G是有向图，则G是非循环图$\Leftrightarrow$ G 没有半回路，即G的基础图没有回路。

因此，只需考虑G为无向图的情形；对于有向图考虑其基础图。

又已知，G为连通非循环图（即树）$\Leftrightarrow$ G为连通的且 $n(E)=n-1$。

有：G为非循环图

$\Leftrightarrow$ G的每个分支G_i满足 $n(E_i)=n_i-1$，其中G_i为n_i阶图且E_i为边集。

综上，首先利用邻接矩阵X，求得可达性矩阵 P，

再从可达性矩阵P求出G的所有分支（按行扫描可达性矩阵可得），

再从邻接矩阵 X 计算每个分支的边数，

如果每个分支都满足边数等于结点数减1，则G为非循环图；否则为循环图。

2.设 n 阶有向图 G具有结点集合 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$，$X$ 是G的邻接矩阵。对于任意两个结点 $u_i, u_j\,(i\neq j)$，如果对于任意 $l\in\{1, 2,\ldots n\text{-}1\}$，$X^l$ 中第 i 行第 j 列的元素$x_{ij}^{(l)}$ 均为0，则 u_i, u_j 必定属于 G 的不同的强分支。

知识点：邻接矩阵的幂、有向图的强分支、路径

- 设n阶图G的$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$X$是$G$ 的邻接矩阵，$m\in I_+$，X^m 的第 i 行第 j 列元素 $x_{ij}^{(m)}$等于 G 中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数
- 设 G 是有向图
  - G是强连通的：G中任意两个结点都互相可达
  - G的强分支：G的极大强连通子图
- 设n阶图 G 的$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，
  - 如果存在从 v 至v' 的路径，则存在从 v 至 v'的基本路径
    - ✓ 基本路径上的结点互不相同
  - n阶图中的基本路径的长度小于 n

2.设 n 阶有向图 G具有结点集合 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$，$X$ 是G的邻接矩阵。对于任意两个结点 $u_i, u_j\,(i \neq j)$，如果对于任意 $l \in \{1, 2, \ldots n-1\}$，$X^l$ 中第 i 行第 j 列的元素$x_{ij}^{(l)}$ 均为0，则 u_i, u_j 必定属于 G 的不同的强分支。

证明：对于G中任意两个结点$u_i, u_j\,(i \neq j)$，

G中 u_i 到 u_j 可达$\Leftrightarrow$ G中有 u_i至 u_j的路径

$\Leftrightarrow$ G中有 u_i至 u_j的基本路径

$\Leftrightarrow$ G中有u_i至 u_j的长度小于等于$n-1$的路径

因此，如果对于任意 $l \in \{1, 2, \ldots n-1\}$，$X^l$ 中第 i 行第 j 列的元素$x_{ij}^{(l)}$ 均为0，

则G中 u_i 到 u_j 不可达，故u_i, u_j 必定属于 G 的不同的强分支。

3. 设G是非平凡的连通无向图，证明G是欧拉图当且仅当G是若干个边不相交的回路之并。

知识点：欧拉图、回路

- 欧拉图：每个节点都是偶结点的无向图
- 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路
  - 图G中包含其所有边的简单闭路径称为 G 的欧拉闭路
- 回路：连通2度正则图
  - 设 v 是图G的任意结点，G是回路当且仅当

    (1) G的阶与边数相等，且

    (2) 在G中存在一条 v 到 v 的闭路径，使得除了v在该闭路径中出现两次外，其余结点和每条边都在该闭路中恰出现一次。

3. 设G是非平凡的连通无向图，证明G是欧拉图当且仅当G是若干个边不相交的回路之并。

证明：(充分性) 假设G是n个边不相交的回路的并，下面对n进行第一数学归纳证明G是欧拉图。

(1) 当$n=1$时，G是一个回路，即G是一个2度正则图，每个结点的度数为偶数，

得G是欧拉图。

(2) 假设当$n=k$时结论成立。

当$n=k+1$时，设G为$k+1$个边不相交的回路$C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$的并。

令G'为$C_1, C_2, \ldots, C_k$的并，由归纳假设得G'是欧拉图。

因此，G'存在一个欧拉闭路，设为$v_0e_1v_1e_2\ldots\ldots v_me_mv_0$。

此时，由G的连通性知$m>0$，且G'与C_{k+1}没有公共边。

假设C_{k+1}为l阶回路($l>0$)，由定理3.6知，C_{k+1}形成一条闭路径，设为

$$P: v_0'e_1'v_1'e_2' \ldots v_{l-1}'e_l'v_0',$$

其中除了v_0'外，C_{k+1}的其余结点和每条边都在该闭路径中恰巧出现一次。

由于G是连通图，因此P与G'一定有公共点，假设v_i为公共点，且$v_i = v_j'$。

则G'与C_{k+1}形成一条边互不相同的闭路径：

$$v_0'e_1'v_1'e_2' \ldots v_j'e_{i+1}v_{i+1}\ldots v_me_mv_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_ie_{j+1}'v_{j+1}'\ldots v_{l-1}'e_l'v_0'$$

因此，G是欧拉图，即$n=k+1$时，结论成立。充分性证毕。

3. 设G是非平凡的连通无向图，证明G是欧拉图当且仅当G是若干个边不相交的回路之并。

证明：(必要性) 假设G为欧拉图，对 G 的边数 p进行第二数学归纳法证明。

(1) 当$p=1$时，G 必为一个自圈，结论成立。

(2) 假设当$p<k$时，结论成立。

当$p=k$时，由于 G 是非平凡连通图且为欧拉图，因此，G 中每个结点的度均 >1，

由定理3.9知，G 不是非循环图，因此，G有回路，记为C_1。

设 C_1为 m阶回路，则由定理3.6知，C_1是一条边互不相同的闭路径： $v_0e_1v_1e_2....v_me_mv_0$。

令 $G' = G-\{ e_1, e_2, \dots, e_m\}$，则$G'$有$s$（$s\geq1$）个分支，记为 $G_1, \dots, G_s$。

显然每个分支G_i的所有结点的度均为偶数，因此仍为欧拉图，且边数$<k$。

由归纳假设知，G_i为若干个边不相交的回路的并，$i=1, 2, \dots, s$，

得G'也是若干个边不相交的回路的并。

由于 G 是连通的，因此，C_1与每个G_i均有交点，但必没有公共边。

否则，不妨假设C_1与G_1有公共边e, 其两个端点为 u, v, 则 u与v的度必为奇数，与 G 为欧拉图矛盾。

故，G是若干个边不相交的回路的并，即$n=k$时结论成立。

综上由数学归纳证明知，结论成立。

4. 证明：基础图是完全无向图的有向图有哈密顿路径。

知识点：哈密顿图、哈密顿回路、哈密顿路径

- C是G的一个回路（有向回路）
  - C 为 G 的哈密顿回路（哈密顿有向回路）$\Leftrightarrow$ C 是 G 的生成子图
- G的哈密顿路径：图G中包含它的所有结点的基本路径
- 哈密顿图（哈密顿有向图）：有哈密顿回路（哈密顿有向回路）的图

4. 证明：基础图是完全无向图的有向图有哈密顿路径。

证明: 设该有向图为 $G = \langle V, E, \psi \rangle$， $n = |V|$。

对G的阶数n用第二数学归纳法。

1) 当 $n=1$ 时，图 G 只包含一个点，命题显然成立。

2)当 $n=2$ 时，图 G 只包含两个点与两点间的一条边，命题显然成立。

对于任意 $k>1$，假设当 $n = k$ 时，命题成立。

则当 $n = k+1$ 时，考虑 G 的情况:

在 G 中任选结点 v_{k+1}，显然 $G - v_{k+1}$ 的基础图也是完全无向图。

根据归纳假设，k 阶图 $G - v_{k+1}$ 必有哈密顿路径 P，记为 P: $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_{k-1} v_k$

因 G 的基础图是完全无向图，故 v_{k+1} 与 $G - v_{k+1}$ 中的每个结点均存在有向边。

4. 证明：基础图是完全无向图的有向图有哈密顿路径。

证明（续）: 分情况考虑:

1) 若存在从 v_{k+1} 到 v_1 的有向边e，

则 $v_{k+1}ev_1\ e_1v_2\ e_2\ldots e_{k-1}v_k$为 G 的哈密顿路径，

2) 若存在从 v_k 到 v_{k+1} 的有向边e'，

则 $v_1\ e_1v_2\ e_2\ldots e_{k-1}v_k\ e'v_{k+1}$ 为G 的哈密顿路径

3) 否则，一定存在 v_1到v_{k+1}的有向边 e'' 和 v_{k+1}到 v_k有向边 e'''。

此时，必存在结点 $v_i\,(1\leq i\leq k\text{-}1)$，使得 v_i 到v_{k+1} 有有向边且 v_{k+1}到 v_{i+1}有有向边，

分别记为 f_1 与 f_2, 因此，G 中依然存在哈密顿路径:

$$v_1\ e_1v_2\ e_2\ldots e_{i\text{-}1}\ v_i\ f_1v_{k+1}\ f_2v_{i+1}\ e_{i+1}\ldots v_k\ 。$$

5. 设n是大于2的奇数，证明：n阶完全无向图有 (n-1)/2个边不相交的哈密顿图。

证明：设 $n=2k+1$，将结点编号为 0, 1, 2..., 2k, 如下面左图所示，摆放节点。
显然，左图中可取一条哈密顿回路C_1，其中结点排序为： （这里忽略边）

$$0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1, 4, 2k-2, 5, ..., k+3, k, k+2, k+1, 0 .$$

然后将圆周上的结点按逆时针方向依次转动一个位置，然后可以得到另一条回路C_2，其中结点排序为：

$$0, 2, 3, 1, 4, 2k, 5, ..., k+4, k+1, k+3, k+2, 0。$$

显然， C_1与C_2没有公共边。
继续把圆周上的结点按逆时针方向依次转动，一个位置，一共可以产生 $k=(n-1)/2$ 条无公共边的哈密顿回路。
(注意:当结点 k+1 转到左图 中结点 1 的位置时，此时的哈密顿回路与左图的重复，且再进行逆时针旋转时，将与前面得到哈密顿回路重复。)