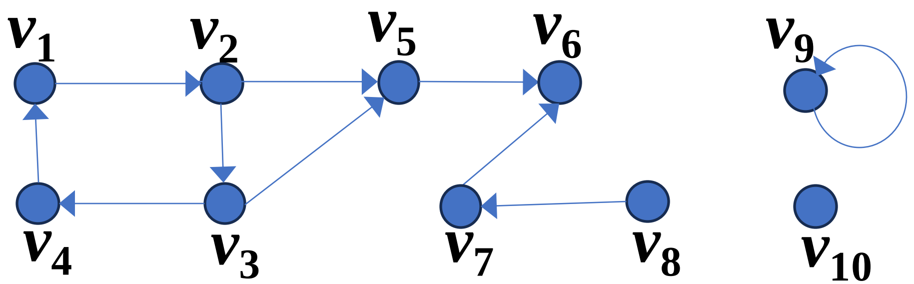
离散数学（2）
第九次作业讲解

2024 秋季学期

1. 考虑右图。

(a) 对于每个结点v，求$R(v)$；

(b) 找出所有强分支、单向分支、弱分支；



(c) 求出该图的基础图中v_1到v_8的所有简单路径和基本路径，并求出从v_1到v_8的距离和基础图的直径。

知识点：可达、距离、直径、无向图和有向图的连通性

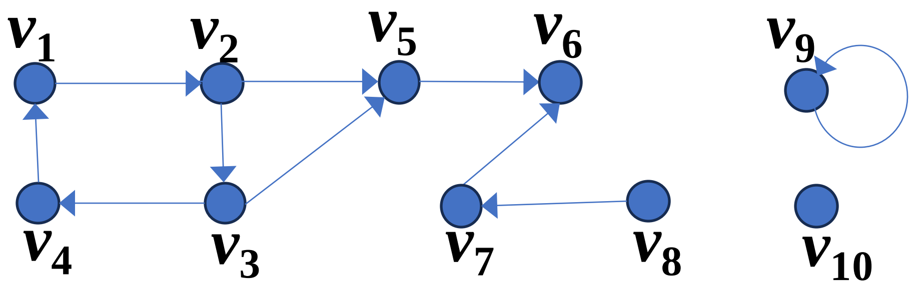
- 设图 $G = <V, E, \Psi>$，$v_1, v_2 \in V$。
  - 在G中从v_1可达v_2：存在从 v_1 至 v_2 的路径
  - 在G 中从 v_1 不可达 v_2：不存在从 v_1 至 v_2 的路径
  - $R(v_1)$ 表示从v_1可达的全体结点的集合
  - 从 v_1 至 v_2 的距离$d(v_1, v_2)$：从 v_1 至 v_2 的路径中长度最短者的长度；若从 v_1 不可达 v_2，则$d(v_1, v_2)= \infty$
  - G的直径$\max_{v,v' \in V} d(v, v')$

1. 考虑右图。

(a) 对于每个结点v，求$R(v)$；

(b) 找出所有强分支、单向分支、弱分支；

(c) 求出该图的基础图中v_1到v_8的所有简单路径和基本路径，并求出从v_1到v_8的距离和基础图的直径。



知识点：可达、距离、直径、无向图和有向图的连通性

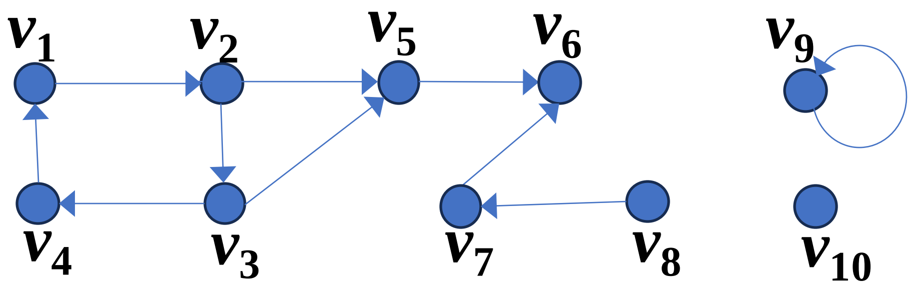
- 设 G 是无向图，
  - G是连通的：G中任意两个结点都互相可达
  - G是不连通的：G中存在两个结点不可达
- 设G'是图G的具有某性质 P 的子图，并且对于G 的具有该性质的任意子图 G''，只要$G'\subseteq G''$就有 $G'= G''$，则称 G'相对于该性质是 G 的极大子图
- 无向图G 的（连通）分支：G的极大的连通子图

1. 考虑右图。

(a) 对于每个结点v，求$R(v)$；

(b) 找出所有强分支、单向分支、弱分支；

(c) 求出该图的基础图中v_1到v_8的所有简单路径和基本路径，并求出从v_1到v_8的距离和基础图的直径。



知识点：可达、距离、直径、无向图和有向图的连通性

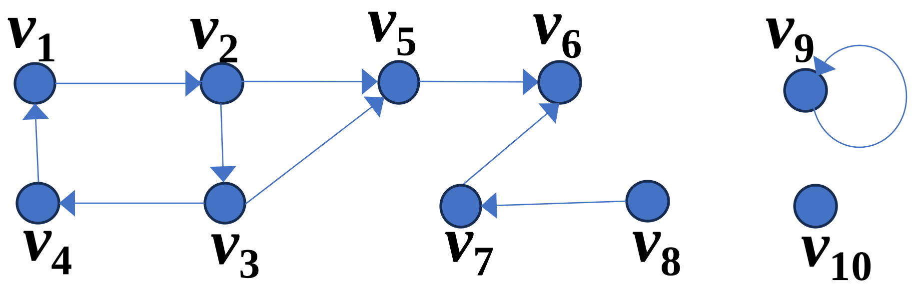
- 设 G 是有向图，
  - G是强连通：G中任意两个结点都互相可达；
  - G是单向连通：对于G的任意两结点，必有一个结点可达另一结点
  - G是弱边通： G 的基础图是连通的
- 有向图G 的极大强连通子图（极大单向连通子图、极大弱连通子图）称为G的强分支（单向分支、弱分支）

1. 考虑右图。

(a) 对于每个结点v，求$R(v)$；

(b) 找出所有强分支、单向分支、弱分支；

(c) 求出该图的基础图中v_1到v_8的所有简单路径和基本路径，并求出从v_1到v_8的距离和基础图的直径。



解： (a) $R(v_1)$ =$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$= $R(v_2)$= $R(v_3)$= $R(v_4)$

$R(v_5)$= $\{v_5, v_6\}$,

$R(v_6)$= $\{ v_6\}$,

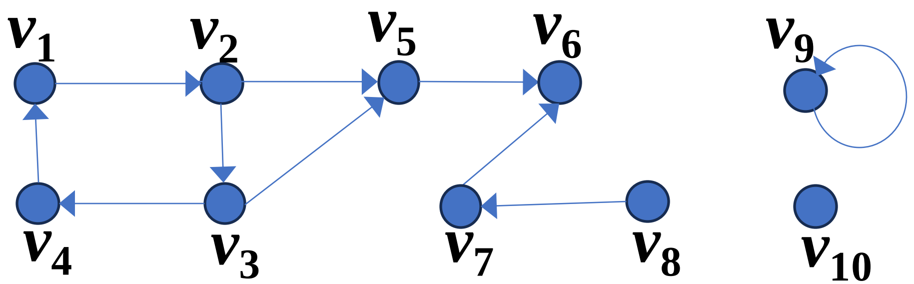
$R(v_7)$= $\{ v_6, v_7\}$,

$R(v_8)$= $\{ v_6, v_7, v_8\}$,

$R(v_9)$= $\{v_9\}$,

$R(v_{10})$= $\{v_{10}\}$。

1. 考虑右图。



(a) 对于每个结点v，求$R(v)$；

(b) 找出所有强分支、单向分支、弱分支；

(c) 求出该图的基础图中v_1到v_8的所有简单路径和基本路径，并求出从v_1到v_8的距离和基础图的直径。

解： (b) 强分支：

$G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}], G[\{v_5\}], G[\{v_6\}], G[\{v_7\}], G[\{v_8\}], G[\{v_9\}], G[\{v_{10}\}]$。

单向分支：$G[\{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}], G[\{v_6, v_7, v_8\}], G[\{v_9\}], G[\{v_{10}\}]$。

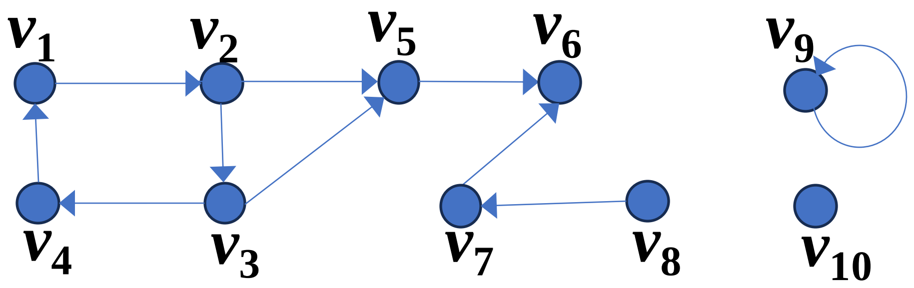
弱分支：$G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}], G[\{v_9\}], G[\{v_{10}\}]$

1. 考虑右图。

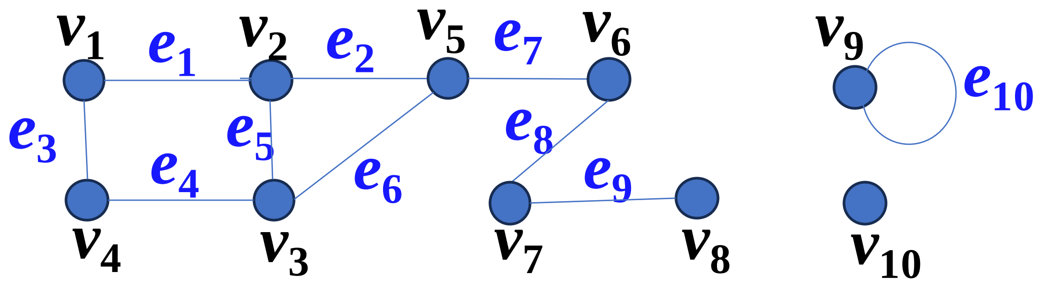
(a) 对于每个结点v，求$R(v)$；

(b) 找出所有强分支、单向分支、弱分支；

(c) 求出该图的基础图中v_1到v_8的所有简单路径和基本路径，并求出从v_1到v_8的距离和基础图的直径。



解：(c) 右图为该图的基础图，其中v_1到v_8的所有基本路径为



$v_1e_1v_2e_2v_5e_7v_6e_8v_7e_9v_8$，

$v_1e_1v_2e_5v_3e_6v_5e_7v_6e_8v_7e_9v_8$，

$v_1e_3v_4e_4v_3e_5v_2e_5v_3e_2v_5e_7v_6e_8v_7e_9v_8$，

$v_1e_3v_4e_4v_3e_6v_5e_7v_6e_8v_7e_9v_8$。

以上基本路径均为简单路径，且图中没有其他简单路径。

基础图中v_1到v_8 距离为 5，基础图的直径为∞。

2. 证明有向图的每个结点和每条边恰好处于一个弱分支中。

知识点： 有向图的基础图、弱连通、弱分支

- 无向图 $G' = \langle V, E, \Psi' \rangle$是有向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 的基础图，其中，

$$\Psi': E \to \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V \wedge v_2 \in V \},$$

使得，对任意 $e \in E$ 和 $v_1, v_2 \in V$，

$$\text{若 } \Psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle, \text{ 则 } \Psi'(e) = \{v_1, v_2\}$$

- 有向图 G 是弱连通的：G的基础图是连通的
  - 有向图 G 的极大弱连通子图称为 G 的弱分支
  - 弱连通有向图恰有一个弱分支
  - 非弱连通有向图有一个以上弱分支

2. 证明有向图的每个结点和每条边恰好处于一个弱分支中。

证明：令G为一个有向图， G'是 G的基础图。
显然，由弱分支的定义知，每个结点和每条边都处于一个弱分支中。

下面用反证法证明每个结点和每条边仅处于一个弱分支中。

(a) 假设 G 中一个结点 v 处于两个不同的弱分支G_1与G_2中。
考虑 G_1 与 G_2 的基础图 G_1' 与 G_2'，则G_1' 与 G_2'是基础图 G' 的分支，且v 是G_1'与G_2'的公共结点，得$G_1' \cup G_2'$是连通的，矛盾。
因此假设不成立，即G中每个结点仅处于一个弱分支中。

(b)假设 G 中一条边 e 处于两个不同的弱分支G_1与G_2中，同样可证e也处于G_1 与 G_2的基础图 G_1' 与 G_2'中，得$G_1' \cup G_2'$是连通的，矛盾。
因此假设不成立，即G中每条边仅处于一个弱分支中。

3. 设G是弱连通有向图，证明：如果对于G的任意结点 v，皆有$d_G^+(v)=1$，则G恰有一条有向回路。

解：证明： (a) 首先证明有向回路的存在性。

因为G是弱连通有向图，不妨设 G 的一条最长的基本路径为

$$P: v_0e_1v_1e_2\ldots v_{m-1}e_mv_m.$$

由于G的任一结点v, 有 $d_G^+(v)=1$，因此，对于v_m，G中必有边e，满足

$$\Psi(e)=<v_m, v>。$$

由于 P 是最长的基本路径，因此，必存在$i\in\{0, 1, 2,\ldots, m\}$，使得$v=v_i$，

否则将得到一条更长的基本路径$v_0e_1v_1e_2\ldots v_{m-1}e_mv_mev$，矛盾。

故 G 中存在有向回路：$v_ie_{i+1}v_{i+1}\ldots e_mv_mev_i$。

(或者直接由定理3.7可证)

定理3.7 如果有向图 G 有子图 G'，使得对于 G'的任意结点 v，皆有 $d_{G'}^+(v)>0$，则 G 有有向回路。

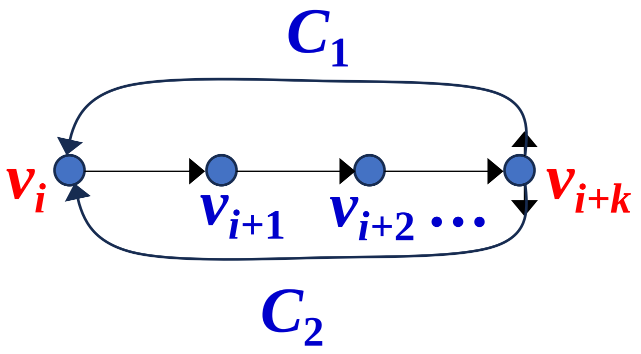
3. 设G是弱连通有向图，证明：如果对于G的任意结点 v，皆有$d_G^+(v)=1$，则G恰有一条有向回路。

证明（续）： (b) 下面用反证法证明有向回路的唯一性。

假设G有两条不同的有向回路C_1与 C_2，其中C_1 为m阶有向回路且 C_2为 k阶有向回路。

由定理3.6得， C_1与C_2分别存在一条闭路径，记为：

$$v_0e_1v_1e_2\ldots v_{m-1}e_mv_0 \text{ 与 } u_0e'_1u_1e'_2\ldots u_{k-1}e'_ku_0$$



由于G是弱连通有向图，因此 G 的基础图 G'是连通的，

则必存在两点 v_i 与 u_j，使得 v_i 在基础图 G'中可达 u_j。

考虑以下两种情况：

- 若 $v_i=u_j$（即v_i与u_j为同一个结点），由于C_1与C_2是 G 的两条不同的有向回路，则一定存在$k\geq 0$，使得 $v_{i+k}=u_{j+k}$（即v_{i+k}与u_{j+k}为同一个结点），但以该点为起点的边在C_1与C_2上有不同的终点，得 v_{i+k}在 G 中的出度至少为2，与 G 中所有点出度均为1矛盾。

3. 设G是弱连通有向图，证明：如果对于G的任意结点 v，皆有$d_G^+(v)=1$，则G恰有一条有向回路。

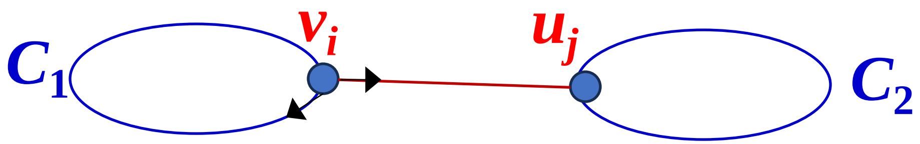
证明（续）：(b) 下面用反证法证明有向回路的唯一性。

考虑以下两种情况：

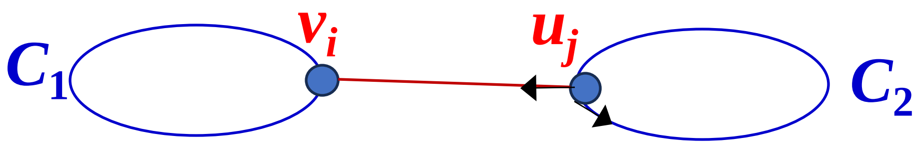
- 若 $v_i \neq u_j$（即v_i与u_j是不同的结点），则 v_i与 u_j在G 中存在一条半路径（即基础图G'中的一条路径）。

不妨设该半路径上不包括有向回路C_1或C_2上的其他点，否则将归纳为上一种情况。

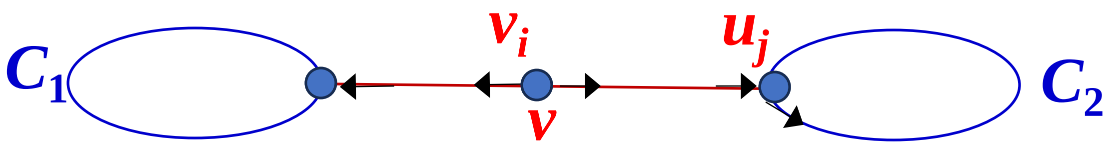
1) 若v_i 在该半路径上关联的边在 G 中以v_i为起点，则 v_i 的出度至少为2，矛盾；



2) 若u_j 在该半路径上关联的边在 G 中以u_j为起点，则u_j的出度至少为2，矛盾；



3) 否则，半路径上必存在一点v，使得v在半路径上关联两条边e与e'，满足v在 G 中是e与e'的起点，则 v的出度至少为2，同样矛盾。



综上，假设不成立，得G 中恰有一条有向回路。

4. 证明非连通简单无向图的补图必连通。

证明：设 G 是一个非连通简单无向图，其补图为 $\bar{G}$。
只需证明对 G 中任意两个结点u与v，u在$\bar{G}$ 中可达 v。
考虑以下两种情况：

(1) 若u与v在 G 中不可达，则u与v在 G 中不邻接，得u与v在 $\bar{G}$ 中一定邻接，从而可达。

(2) 若u与v在 G 中可达，则 u 与 v 一定处于 G 的一个连分支中，假设该分支为G_1。
由于 G 非连通，因此一定存在另一个分支 G_2，且对G_2中的任意节点 w，有u与w不邻接且v与w不邻接。
则在$\bar{G}$中，u与w邻接且v与w邻接，得u可达v。

综上，得证。