离散数学（2）
第一次作业讲解

2024 秋季学期

1. 写出下列集合的幂集：

a) $\{a, \{b\}\}$

b) $\{\Phi, \{a\}, \{\Phi\}\}$

c) $\{x, y, z\}$

知识点：幂集

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集，记作 $\mathcal{P}(A)$，即 $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$。

(1) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$

(2) $A \in \mathcal{P}(A)$

(3)设 A 是有穷集合，则 $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

1. 写出下列集合的幂集：

a) $\{a, \{b\}\}$

b) $\{\Phi, \{a\}, \{\Phi\}\}$

c) $\{x, y, z\}$

解：

a) $\mathcal{P}(\{a, \{b\}\}) = \{ \emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a, \{b\}\} \}.$

b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}\})$

$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{a\}, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}\} \}.$

c) $\mathcal{P}(\{x, y, z\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}, \{x, y, z\} \}.$

2. 设$\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$. 证明$A=B$.

知识点：集合相等、集合包含

定义2 (集合相等)（外延性公理）：设 A, B 为任意两个集合，若A和B含有相同的元素，则称 A和B相等， 记作：$A=B$，即

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

或 $A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A\rightarrow x\in B) \wedge \forall x\,(x\in B\rightarrow x\in A)$

定义3 (子集或包含)：若集合A的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A是 B的子集，也称 A包含于B 或 B包含A。记作：$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，即 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \rightarrow x\in B)$

- 欲证$A=B$，可直接证明$A=B$，也可证明$A \subseteq B$且$B \subseteq A$

2. 设$\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$. 证明$A=B$.

证明：对任意 x,

$x\in A$

$\Leftrightarrow \{x\}\in\mathcal{P}(A)$

$\Leftrightarrow \{x\}\in\mathcal{P}(B)$ （因为$\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$）

$\Leftrightarrow x\in B$

因此，$A=B$。

- **关键点：** $x\in A \Leftrightarrow \{x\}\in\mathcal{P}(A)$

3. 设A, B和C为集合。证明或用反例推翻以下命题

(1) 若$A \notin B$, 且 $B \notin C$, 则$A \notin C$

(2) 若$A \in B$, 且$B \notin C$, 则$A \notin C$

(3) 若$A \subseteq B$，且$B \notin C$, 则$A \notin C$

知识点：属于与包含

- 设 a 为任意一个对象，A 为任意一个集合。在 a 和 A 之间有且仅有以下两种情况之一出现：
  - a 是 A 的元素，记为 $a \in A$，称为 a 属于A 或 A 包含 a;
  - a 不是 A中的元素，记为 $a \notin A$，读作 a 不属于A 或 A 不包含 a。
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

3. 设A, B和C为集合。证明或用反例推翻以下命题

(1) 若$A \notin B$, 且 $B \notin C$, 则$A \notin C$

(2) 若$A \in B$, 且$B \notin C$, 则$A \notin C$

(3) 若$A \subseteq B$，且$B \notin C$, 则$A \notin C$

知识点：属于与包含

- **辨析：** $\in$ 与 $\subseteq$

  $\in$：对象与集合间的从属关系

  $\subseteq$：集合与集合间的包含关系

- 特别注意，$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

3. 设A, B和C为集合。证明或用反例推翻以下命题

(1) 若$A \notin B$, 且 $B \notin C$, 则$A \notin C$

(2) 若$A \in B$, 且$B \notin C$, 则$A \notin C$

(3) 若$A \subseteq B$，且$B \notin C$, 则$A \notin C$

解: (1) $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{\{1\}\}$，显然有$A\notin B$, $B\notin C$, 但$A\in C$.

(2) $A=\{1\}$, $B=\{\{1\}, 2\}$, $C=\{\{1\}\}$，显然有$A\in B$, $B\notin C$, 但$A\in C$.

(3) $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{\{1\}\}$, 显然有$A\subseteq B$, $B\notin C$, 但$A\in C$.

4. 设$U = \{1,2,3,4,5\}$，$A = \{1,4\}$，$B = \{1,2,5\}$，$C = \{2,4\}$。

试求下列集合：

a) $A \cap \sim B$

b) $A - (B - C)$

c) $\sim A \cup \sim B$

d) $A \oplus B \oplus C$

知识点：集合运算

设 A 和 B 是任意两个集合

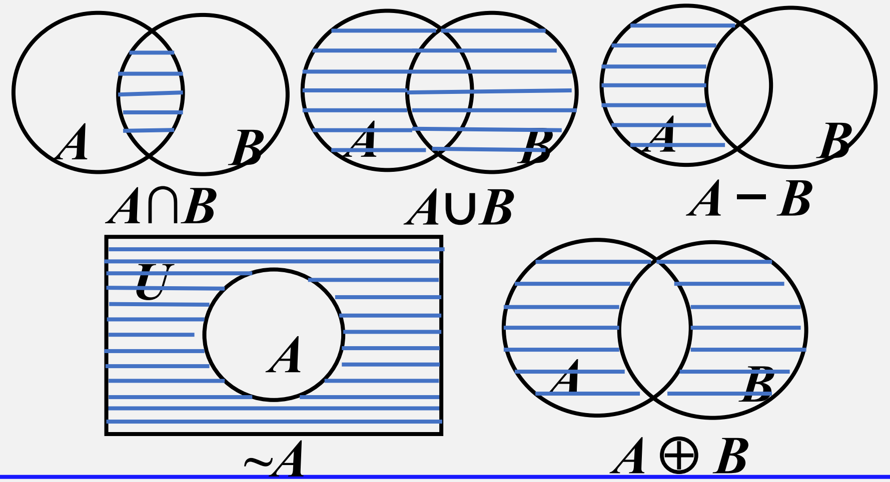
(1) 交集 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

(2) 并集 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

(3) 差集 $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

(4) 补集 $\sim A = U - A$

(5) 对称差集 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$



4. 设$U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$。试求下列集合：

a) $A\cap\sim B$

b) $A-(B-C)$

c) $\sim A\cup\sim$B

d) $A\oplus B\oplus C$

解：a) $A\cap\sim B=\{1,4\}\cap\{3,4\}=\{4\}$;

b) $A-(B-C)=\{1,4\}-\{1,5\}=\{4\}$;

c) $\sim A\cup\sim B=\{2,3,5\}\cup\{3,4\}=\{2,3,4,5\}$

d) $(A\oplus B)\oplus C=\{2,4,5\}\oplus\{2,4\}=\{5\}$.

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：

a) $A - B = \emptyset$ 当且仅当 $A \subseteq B$

b) $A \oplus B = \emptyset$ 当且仅当 $A = B$

c) $A \oplus B = A \oplus C$ 当且仅当 $B = C$

知识点：集合运算、空集、对称差的等价式

定义 6（空集$\varnothing$）：不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，即 $\varnothing = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\}$，其中$P(x)$ 是任意谓词。

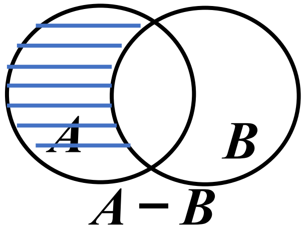
定理 3：设 A 是任意集合，则 $\varnothing \subseteq A$。

- 对称差的等价式：$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

  $= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$ （定理6）

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：

a) $A-B=\emptyset$ 当且仅当 $A\subseteq B$



证明思路：

- 要证明$A\subseteq B$，即需证明：

对任意$x\in A$， 有$x\in B$

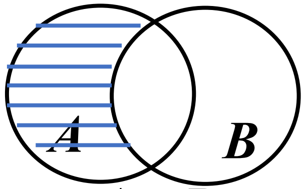
结合集合差的定义易证

- 要证明$A-B=\emptyset$，不妨采用反证法将任意问题转换为存在问题

假设存在 $x\in A-B$，结合集合差的定义推出矛盾

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：

a) $A - B = \emptyset$ 当且仅当 $A \subseteq B$



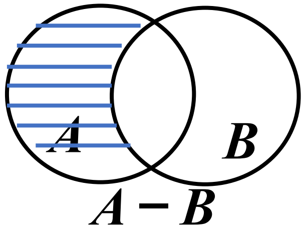
证明：$(\Longrightarrow)$

对任意 $x \in A$，

得，$x \in B$.

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：

a) $A-B=\emptyset$ 当且仅当 $A\subseteq B$



证明：($\Rightarrow$)

对任意 $x\in A$，

由于$A-B=\emptyset$，因此 $x\notin A-B$.

由集合差的定义得，$x\in B$.

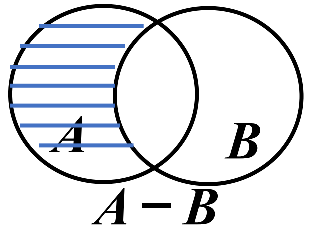
故有 $A\subseteq B$.

($\Leftarrow$)（反证法）

假设$A-B\neq\emptyset$，则一定存在 $x\in A-B$.

由集合差的定义得，$x\in A$且 $x\notin B$，

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：



a) $A - B = \emptyset$ 当且仅当 $A \subseteq B$

证明：($\Longrightarrow$)

对任意 $x \in A$，

由于$A-B=\emptyset$，因此 $x \notin A-B$.

由集合差的定义得，$x \in B$.

故有 $A \subseteq B$.

($\Longleftarrow$)（反证法）

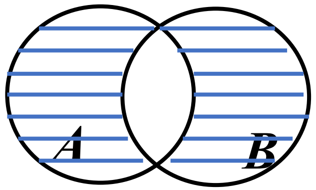
假设$A-B \neq \emptyset$，则一定存在 $x \in A-B$.

由集合差的定义得，$x \in A$且 $x \notin B$，与$A \subseteq B$矛盾。

因此，假设不成立，即$A-B=\emptyset$.

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：

b) $A \oplus B = \emptyset$ 当且仅当 $A = B$



$A \oplus B$

证明思路：

- 考虑对称差的展开式：$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$
- 等价推导时需保证每一步均满足等价，否则需分别从充分性与必要性角度证明

证明：

$$A=B \Leftrightarrow A-B = A \cap \sim B = A \cap \sim A = \emptyset \text{ 且}$$

$$B-A = B \cap \sim A = B \cap \sim B = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：

c) $A \oplus B = A \oplus C$ 当且仅当 $B = C$

证明思路：

- $B=C \Leftrightarrow B \subseteq C$ 且 $C \subseteq B$
- 证明 $B \subseteq C$: $\forall x \in B$，有 $x \in C$
  - 观察到等式左右出现第三个集合A，对x与A的属于关系进行分类讨论，结合对称差的定义进行推导证明
  - 同理证明$C \subseteq B$

5. 设 A 与 B 是任意集合。证明以下命题：

c) $A \oplus B = A \oplus C$ 当且仅当 $B = C$

证明：($\Leftarrow$) 若$B=C$，显然有$A\oplus B= A\oplus C$。

($\Rightarrow$) 对任意$x\in B$，

(1) 若$x\in A$，则$x\notin A-B$且 $x\notin B-A$，得 $x \notin A\oplus B$.

由于$A\oplus B=A\oplus C$，得$x\notin A\oplus C$.

假设$x\notin C$，则有$x\in A-C$，得$x\in A\oplus C$，矛盾，因此, 假设不成立，即 $x\in C$.

(2) 若$x\notin A$，则$x\in B-A$，得$x\in A\oplus B$.

由于$A\oplus B=A\oplus C$，得$x\in A\oplus C$.

假设$x\notin C$，则有$x\notin A\oplus C$，矛盾，因此，假设不成立，即$x\in C$.

故有$B\subseteq C$。

同理可证$C\subseteq B$.

综上可得 $B=C$.

6. 证明下列恒等式：

a) $A - B \cap C = (A - B) \cup (A - C)$

b) $(A - B) \oplus B = (A - B) \cup B$

c) $(B \oplus C) \cap A = (B \cap A) \oplus (C \cap A)$

知识点：集合运算的基本定律

- 差、对称差：$A - B = A \cap \sim B$

  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

- 基本定律

幂等律：$A \cup A = A,\ A \cap A = A$ 交换律：$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

同一律：$A \cup \varnothing = A,\ A \cap U = A$ 零律：$A \cup U = U,\ A \cap \varnothing = \varnothing$

否定律：$A \cup \sim A = U,\ A \cap \sim A = \varnothing$ 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$

德·摩尔根律：$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B,\ \sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$ 对合律：$\sim(\sim A) = A,\ \sim \varnothing = U,\ \sim U = \varnothing$

6. 证明下列恒等式:

a) $A - B \cap C = (A - B) \cup (A - C)$

b) $(A - B) \oplus B = (A - B) \cup B$

证明:a) $A-B\cap C = A\cap \sim(B\cap C)$ （定理6）

$= A\cap(\sim B \cup \sim C)$. （德·摩尔根律）

$= (A\cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)$ （分配律）

$= (A - B) \cup (A - C)$

b) $(A-B)\oplus B = ((A-B)-B) \cup(B-(A-B))$ （对称差定义）

$= (A-B) \cup (B\cap \sim(A\cap \sim B))$ （定理6）(1)式

$B\cap \sim(A\cap \sim B) = B\cap(\sim A\cup B)$ （德·摩尔根律、对合律）

$= (B\cap \sim A) \cup B$. （分配律）

因为$(B\cap \sim A)\subseteq B$, 得 $(B\cap \sim A)\cup B = B$, （定理6）

代入(1)式得 $(A-B)\oplus B = (A-B)\cup B$.

6. 证明下列恒等式：

c) $(B \oplus C) \cap A = (B \cap A) \oplus (C \cap A)$

证明: c) $(B\cap A)\oplus(C \cap A)$

$= ((B\cap A)\cap \sim(C\cap A))\cup((C\cap A)\cap \sim(B\cap A))$ （对称差定义、定理6）

$= (B\cap A\cap (\sim C \cup \sim A))\cup(C\cap A\cap (\sim B \cup \sim A))$ （德·摩尔根律）

$= (B\cap A\cap \sim C)\cup (B\cap A\cap \sim A)\cup(C\cap A\cap \sim B)\cup(C\cap A\cap \sim A)$ （分配律）

$= (B\cap A\cap \sim C)\cup(C\cap A\cap \sim B)$ （否定律）

$= ((B\cap \sim C) \cup(C\cap \sim B)) \cap A$ （分配律）

$= (B\oplus C) \cap A$ （对称差定义、定理6）

7.设 A 与 B 是任意集合。证明：

a) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

证明：a) 对任意 $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$，有 $X \in \mathcal{P}(A)$ 或 $X \in \mathcal{P}(B)$.

(1) 若 $X \in \mathcal{P}(A)$，则有 $X \subseteq A$，得 $X \subseteq A \cup B$，即 $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

(2) 同理可证，若 $X \in \mathcal{P}(B)$，则有 $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

综上可得，$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

b) 对任意 X，$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\Leftrightarrow X \in P(A)$ 且 $X \in \mathcal{P}(B)$

$\Leftrightarrow X \subseteq A$ 且 $X \subseteq B$

$\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, 从而，得 $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.