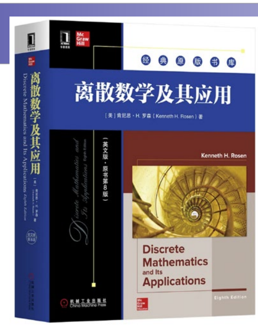
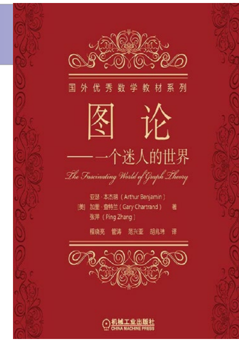
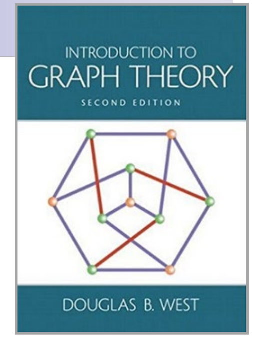
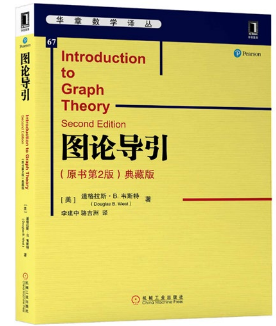
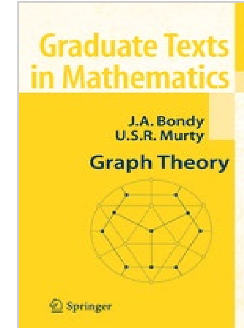










离 散 数 学 2

《图 论》

北航计算机学院

主要内容

1. 图论的基本概念
2. 子图和图的运算
3. 路径、回路和连通图
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 图的矩阵表示
6. 树、有向树和有序树

第二章 子图和图的运算

主要内容

目的： 了解子图和图的基本概念；

重点： 子图、可运算、图的运算；

难点： 图的运算、子图。

- **思考:**

  生成子图 vs 导出子图?

  图的运算关系？计算结果是否唯一？

2.1子图

- 主要内容

1、子图

2、真子图

3、生成子图

4、结点导出子图

5、边导出子图

（1）子图、真子图、生成子图

定义2.1 设 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$, $G'=\langle V', E', \Psi'\rangle$为图。

(1) 如果 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，$\Psi'\subseteq\Psi$，则称G'是G的子图，记为 $G'\subseteq G$，并称 G 是 G'的母图。

(2) 如果 $V'\subseteq V$，$E'\subset E$，$\Psi'\subset\Psi$，则称G'是G的真子图，记为 $G'\subset G$。

(3) 如果 $V'=V$，$E'\subseteq E$，$\Psi'\subseteq\Psi$，则称G'是G的生成子图 (Spanning Subgraph)。

（1）子图、真子图、生成子图

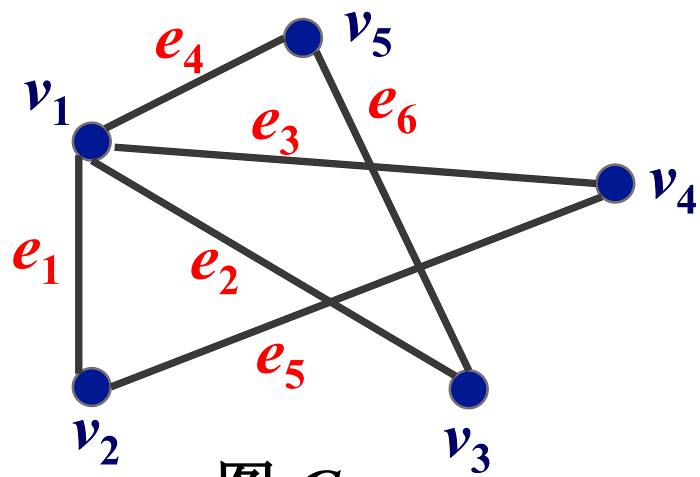


图 G

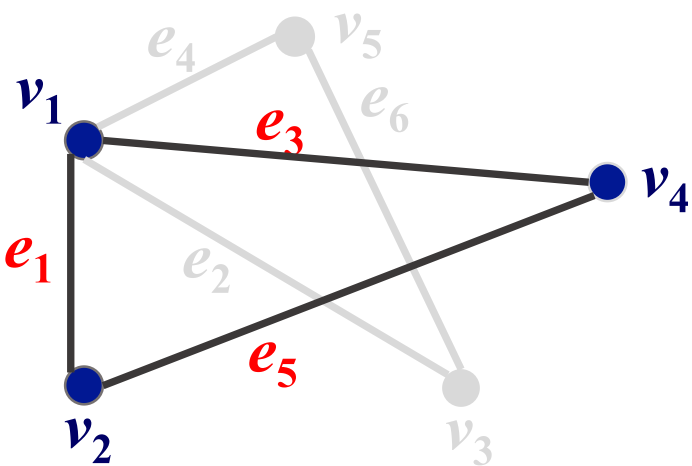


图 G的真子图

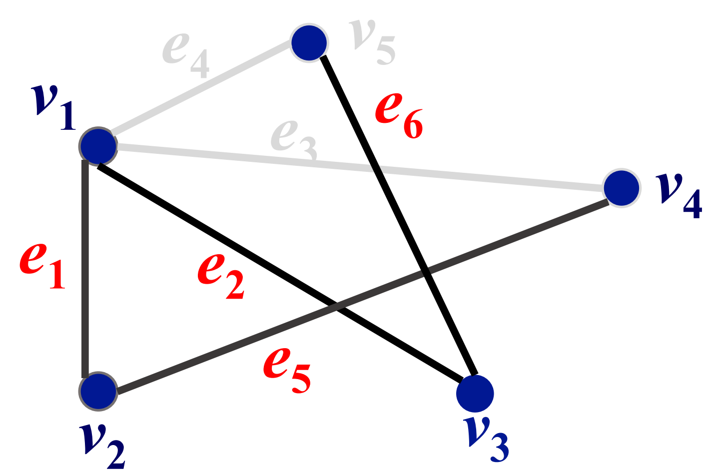
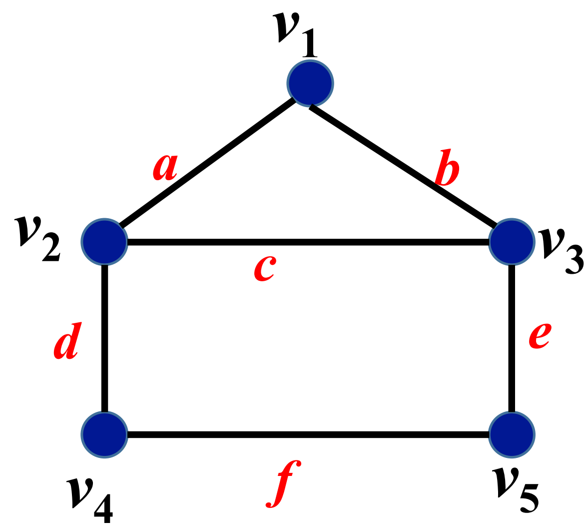
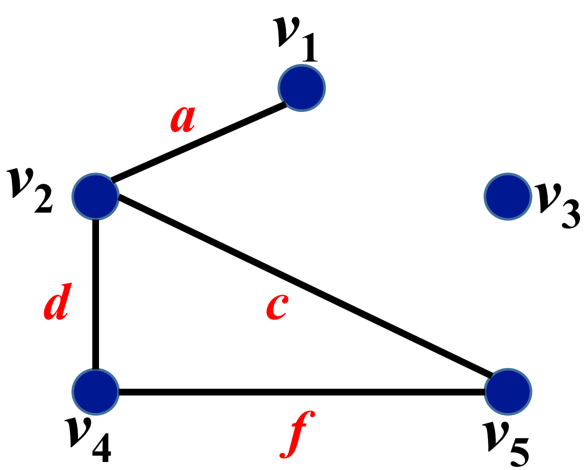


图 G的生成子图

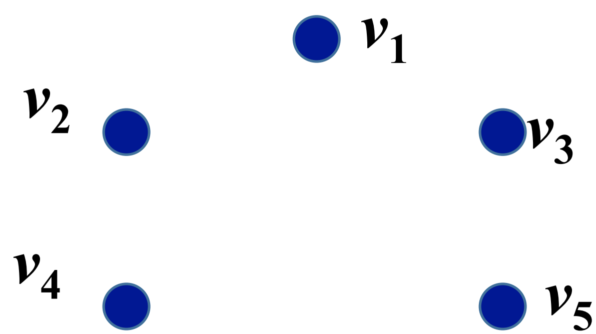
（1）子图、真子图、生成子图



G



不是G的子图



是G的真子图

是G的生成子图

（2）结点导出子图：由结点集导出的子图

（Induced Subgraph）

定义2.2 设图 $G=<V, E, \Psi>$，$V' \subseteq V$ 且 $V' \neq \varnothing$。

(1) 以 V' 为结点集合，以所有起点和终点均在V' 中的边的全体为边集合的 G 的子图，称为由V'导出的G的子图，记为 $G[V']$。

(2) 若 $V' \subset V$，导出子图 $G[V-V']$ 记为 $G-V'$。

- 直观理解：
  - $G[V']$：以 V' 为结点集合的最大子图。
  - $G-V'$：从 G 中去掉 V'中的结点以及与这些结点关联的所有边而得到的G的子图。

结点的导出子图举例

例： 已知图 G, 结点集合$V=\{ a, b, c, d, e \}$

求: (1) 导出子图 $G[\{a, b, d, e\}]$

(2) $G - \{a, d\}$

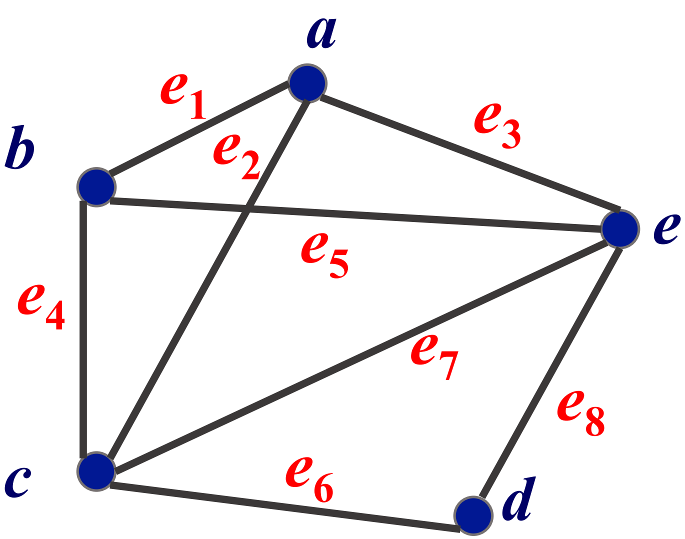


图 G

结点的导出子图举例

例： 已知图 G, 结点集合V={ a, b, c, d, e }

求: (1) 导出子图 $G[\{a, b, d, e\}]$

(2) $G - \{a, d\}$

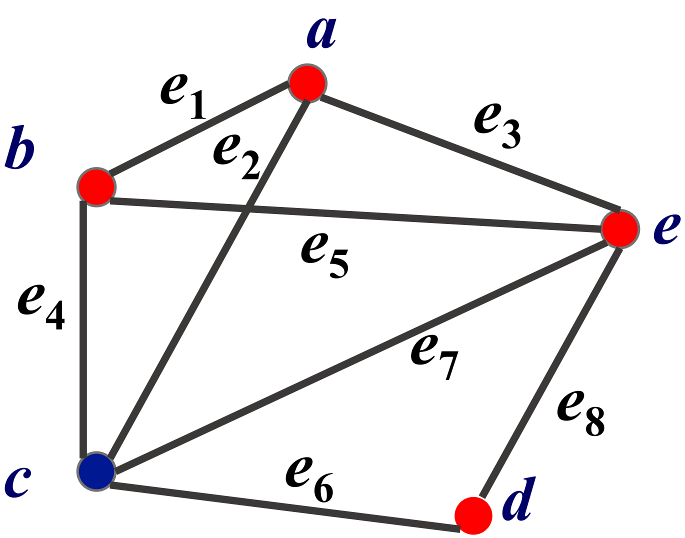


图 G

结点的导出子图举例

例： 已知图 G, 结点集合 $V=\{\ a, b, c, d, e\ \}$

求: (1) 导出子图 $G[\{a, b, d, e\}]$

(2) $G - \{a, d\}$

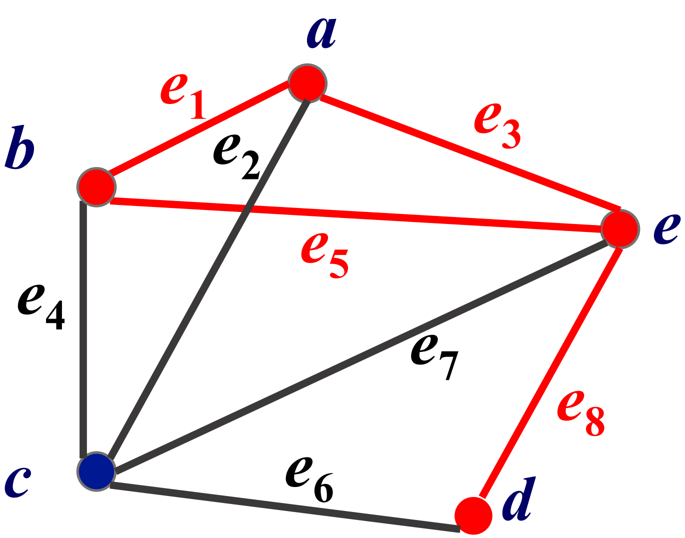


图 G

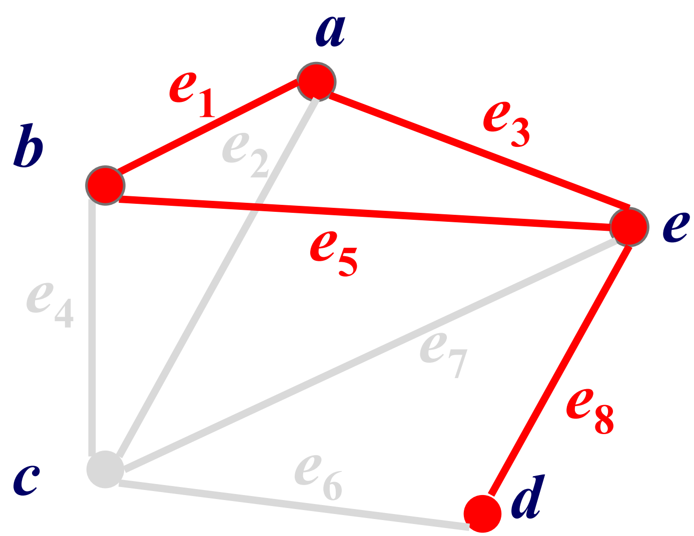


图 $G\ [\{a, b, d, e\}]$

结点的导出子图举例

例： 已知图 G, 结点集合$V=\{ a, b, c, d, e \}$

求: (1) 导出子图 $G[\{a, b, d, e\}]$

(2) $G - \{a, d\}$

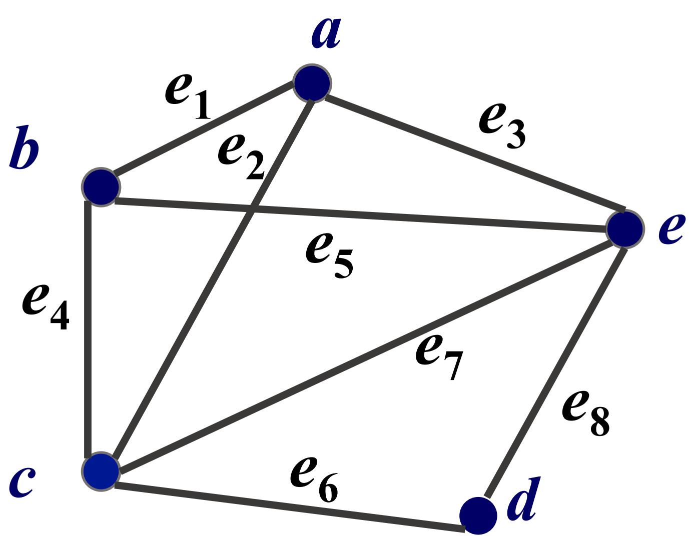


图 G

结点的导出子图举例

例： 已知图 G, 结点集合$V=\{a, b, c, d, e\}$

求: (1) 导出子图 $G[\{a, b, d, e\}]$

(2) $G - \{a, d\}$

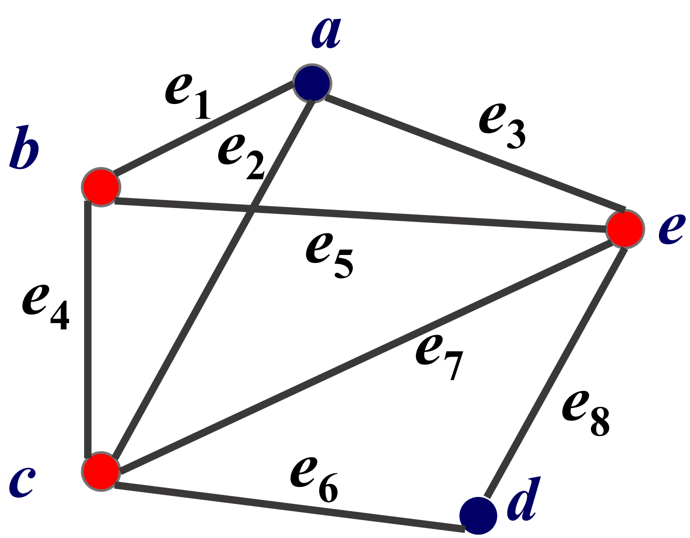


图 G

结点的导出子图举例

例： 已知图 G, 结点集合$V=\{ a, b, c, d, e \}$

求: (1) 导出子图 $G[\{a, b, d, e\}]$

(2) $G - \{a, d\}$

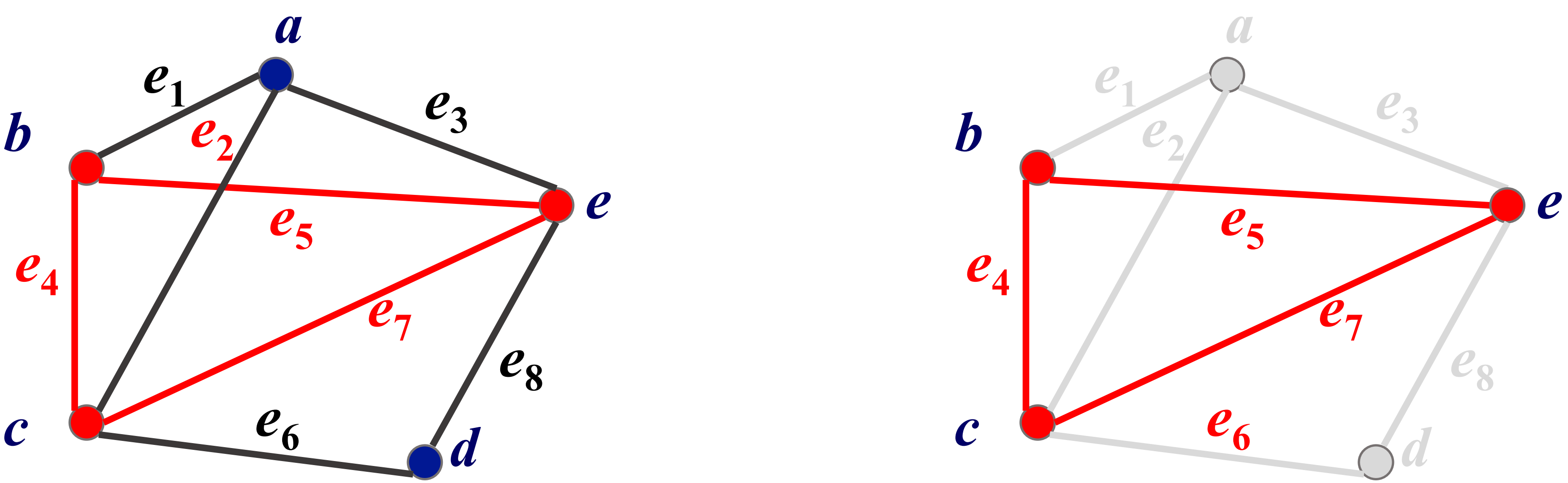
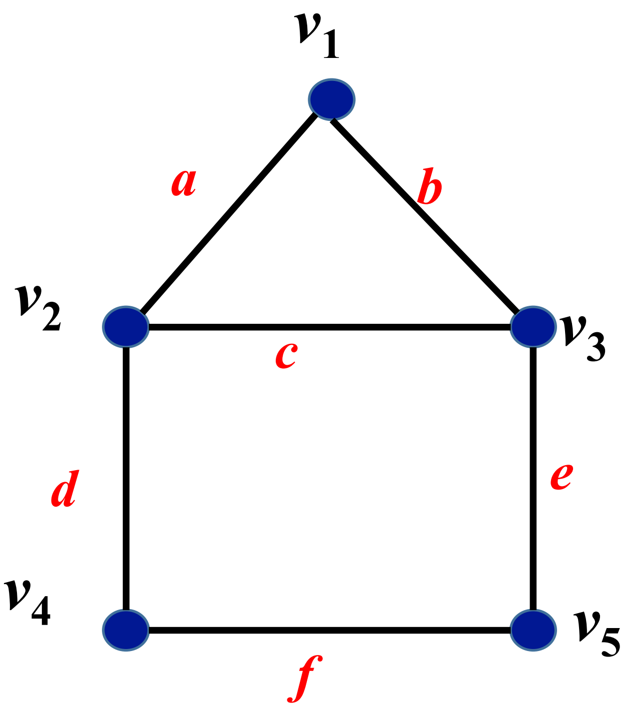


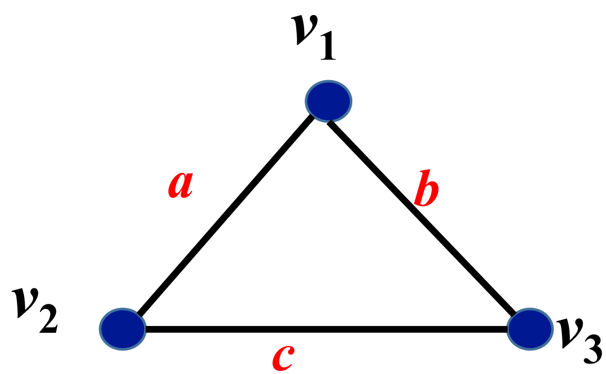
图 G　　　图 $G - \{a, b\}$

例1：G 的导出子图?

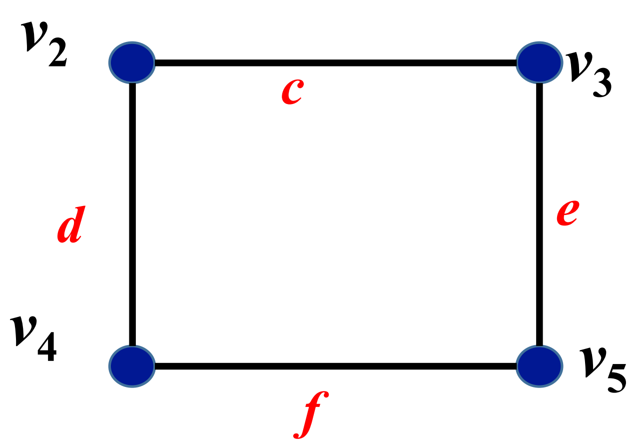


G

$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$



$V' = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ $G' = G[V']$



$V'' = \{ v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ $G'' = G[V'']$

（3）边导出子图：由边集导出的子图

定义2.3 设图 $G=<V, E, \Psi>$， $E' \subseteq E$ 且 $E' \neq \varnothing$，

$$V' = \{v \mid v \in V \text{ 且存在 } e \in E' \text{ 使 } v \text{ 与 } e \text{ 关联}\}。$$

以 V' 为结点集合，以 E' 为边集合的 G 的子图称为由 E' 导出的子图，记为 $G[E']$。

例：已知图 G, 边集合 $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

求: $G[\{e_1, e_2, e_5, e_7\}]$

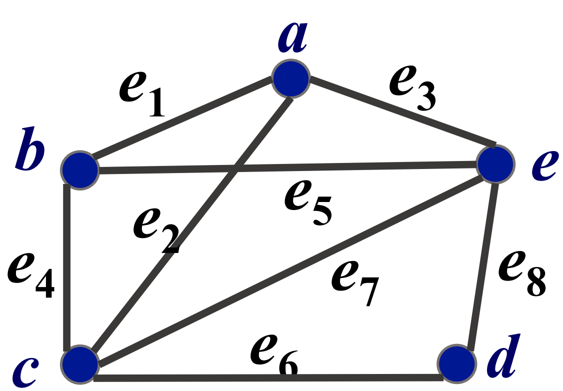


图 G

（3）边导出子图：由边集导出的子图

定义2.3 设图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$， $E'\subseteq E$ 且 $E'\neq\varnothing$，

$$V'=\{v \mid v\in V \text{ 且存在 } e\in E' \text{ 使 } v \text{ 与 } e \text{ 关联}\}。$$

以 V' 为结点集合，以 E' 为边集合的 G 的子图称为由 E' 导出的子图，记为 $G[E']$。

例：已知图 G, 边集合 $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

求: $G[\{e_1, e_2, e_5, e_7\}]$

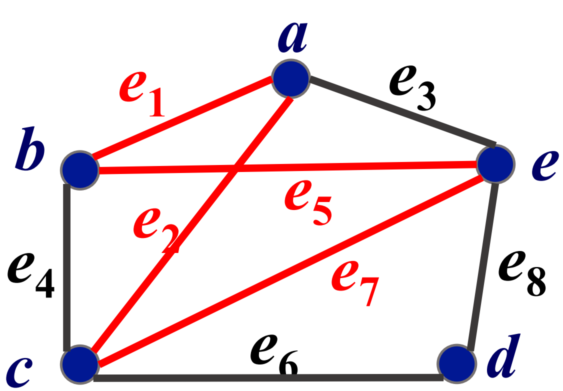


图 G

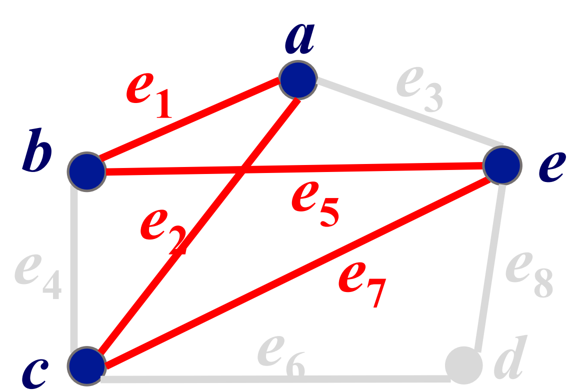


图 $G[\{e_1, e_2, e_5, e_7\}]$

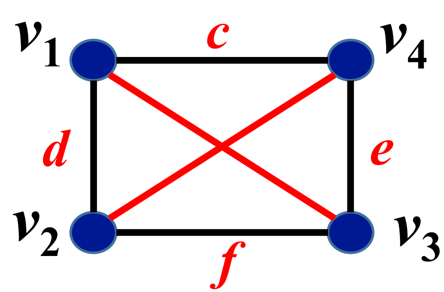
典型性质

- 图 G 的子图是 G 的一部分，
- G 的真子图的边比 G 的边少，
- G 的生成子图与 G 有相同的结点，
- G 的导出子图 $G[V']$是 G的以V'为结点集合的最大子图。

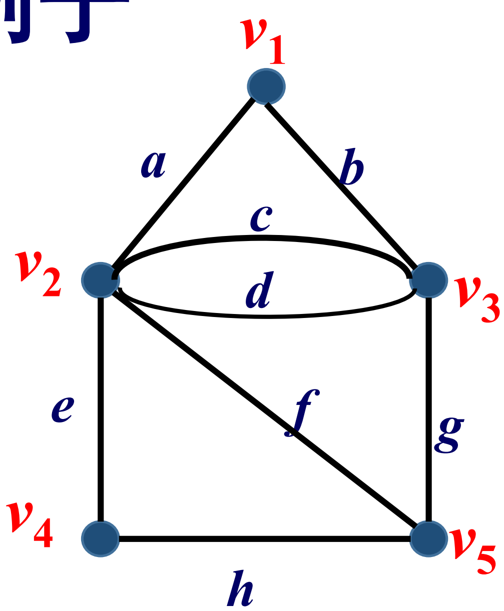
例：设图 G' 既是图 G的生成子图，又是图 G导出子图，则图 G'是什么图？ 图 G

例：图G 的以结点集 V_1 导出的子图和以边集E_2（点集为V_1）导出的子图，是否一样？

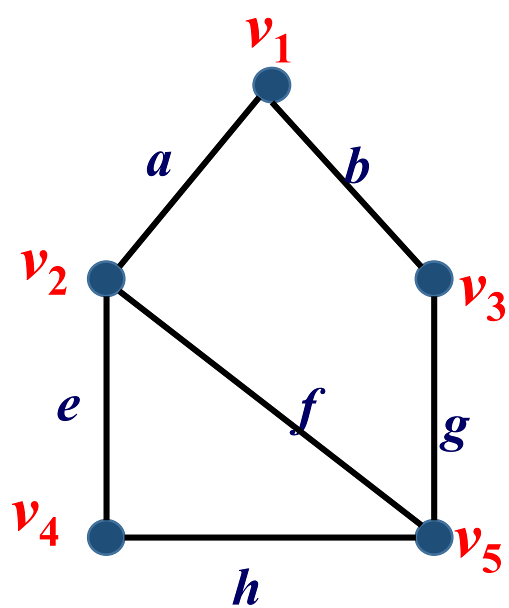
不一定



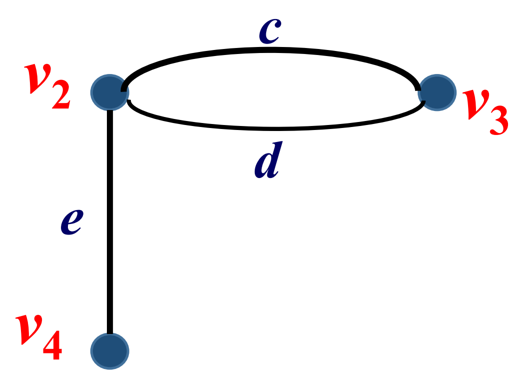
例子



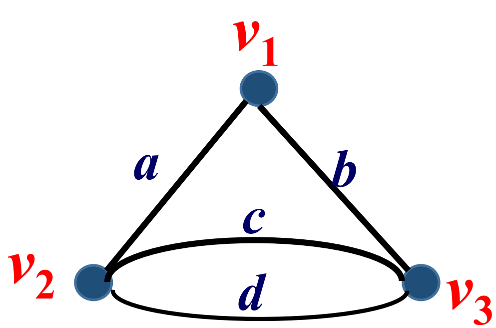
G



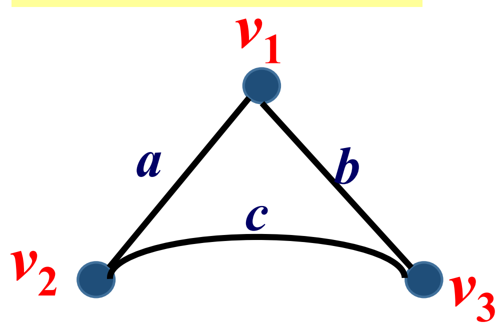
G的生成子图



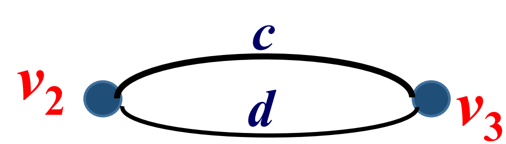
$G-\{v_1, v_5\}$



$G[\{v_1, v_2, v_3\}]$



$G[\{a, b, c\}]$



可以用什么表示？

2.2 图的运算

1、可运算

2、（点）不相交

3、边不相交

4、图的交

5、图的并

6、图的差

7、图的环和

8、图与边计算G+/-E

9、相对于完全图的补图

（1）图的可运算、不相交

定义2.4 设 $G=<V, E, \Psi>$， $G'=<V', E', \Psi'>$同为无向图或同为有向图。

(1)如果对于任意 $e \in E \cap E'$，均有 $\Psi(e) = \Psi'(e)$，

则称 G 和 G'是可运算的。

(2)如果$V \cap V' = E \cap E' = \varnothing$，则称 G 和 G'是不相交的。

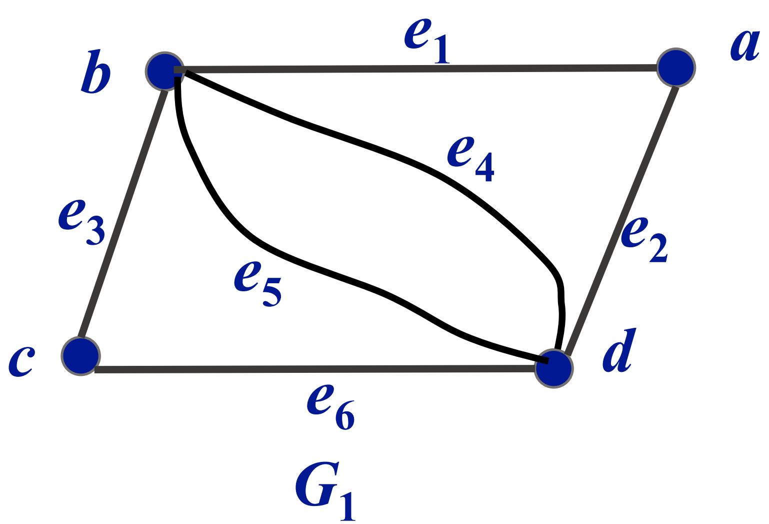
- 无公共结点、无公共边

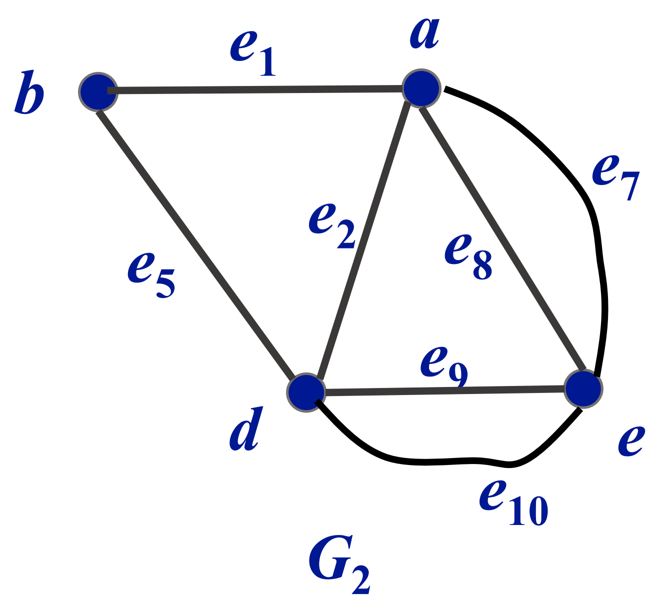
(3)如果 $E \cap E' = \varnothing$，则称 G 和 G'是边不相交的。

- 无公共边，可能有公共结点

图的可运算举例

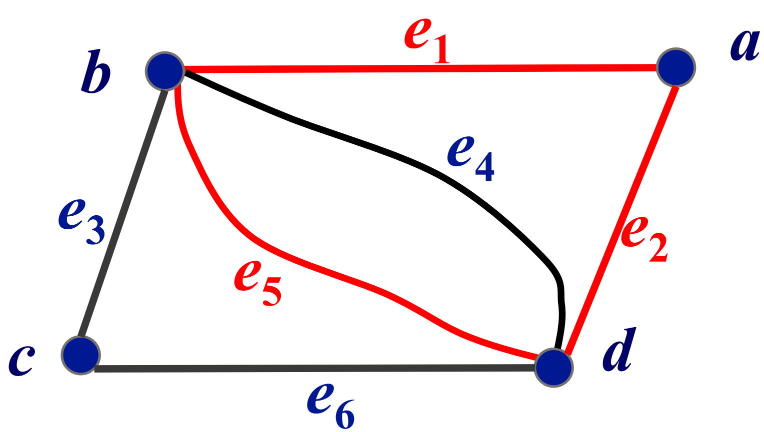
例： G_1和G_2是否是可运算的？



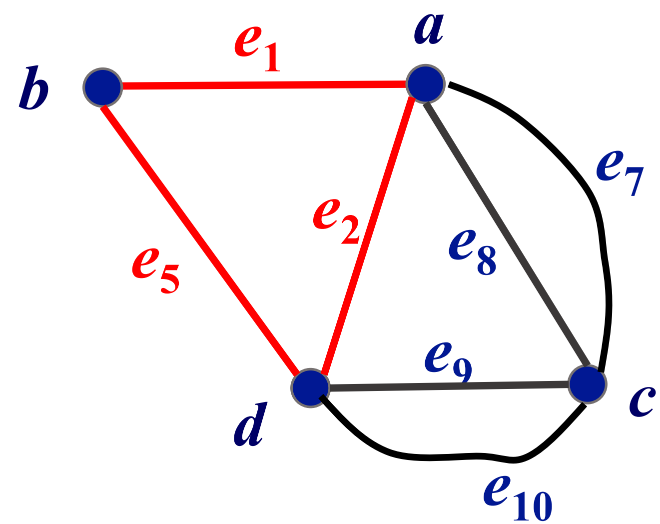


图的可运算举例

例： G_1和G_2是否是可运算的？



$G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$



$G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$

$$E_1 \cap E_2 = \{ e_1, e_2, e_5 \}$$

$\Psi_1(e_1) = \{a, b\} = \Psi_2(e_1)$ $\Psi_1(e_2) = \{a, d\} = \Psi_2(e_2)$

$\Psi_1(e_5) = \{b, d\} = \Psi_2(e_5)$ G_1和G_2是可运算的

2）图的运算：交、并、环和

定义2.5 设图$G_1=<V_1, E_1, \Psi_1>$和$G_2=<V_2, E_2, \Psi_2>$ 可运算。

(1) 称以$V_1 \cap V_2$为结点集合，以$E_1 \cap E_2$为边集合的G_1和G_2的公共子图为 G_1和G_2 的交，记为 $G_1 \cap G_2$ 。

$$G_1 \cap G_2 = <V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2,\ \Psi_1 \cap \Psi_2>$$

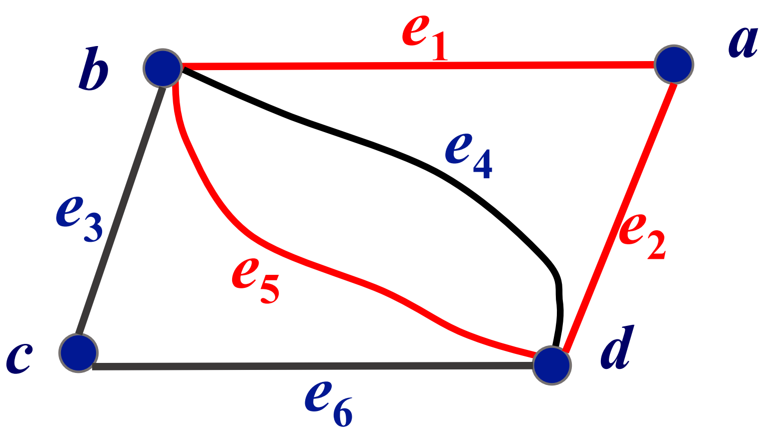
(2) 称以$V_1 \cup V_2$ 为结点集合，以$E_1 \cup E_2$ 为边集合的G_1和G_2的公共母图为G_1和G_2 的并，记为 $G_1 \cup G_2$ 。

$$G_1 \cup G_2 = <V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2,\ \Psi_1 \cup \Psi_2>$$

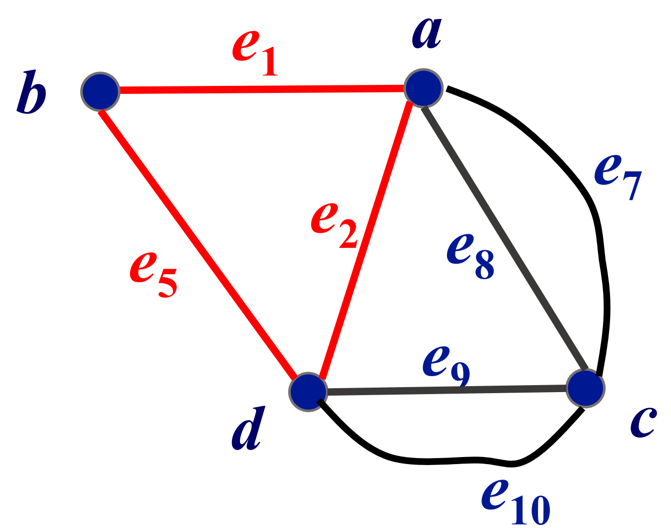
(3) 称以$V_1 \cup V_2$为结点集合，以 $E_1 \oplus E_2$ 为边集合的 $G_1 \cup G_2$的子图为G_1和G_2的环和，记为$G_1 \oplus G_2$。

$$G_1 \oplus G_2 = <V_1 \cup V_2,\ E_1 \oplus E_2,\ \Psi_1 \cup \Psi_{2\ E1 \oplus E2}>$$

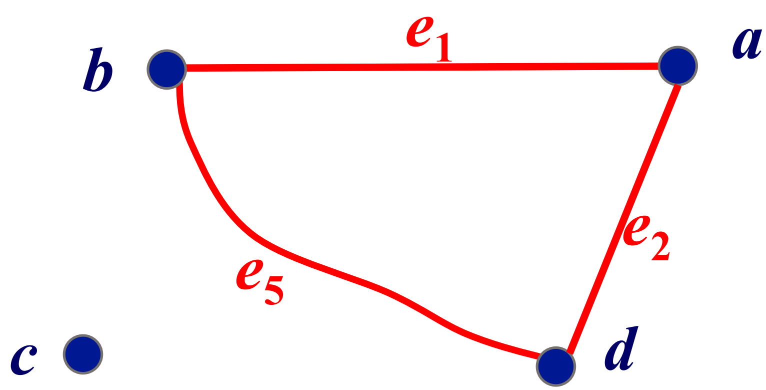
举例：交



$G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$

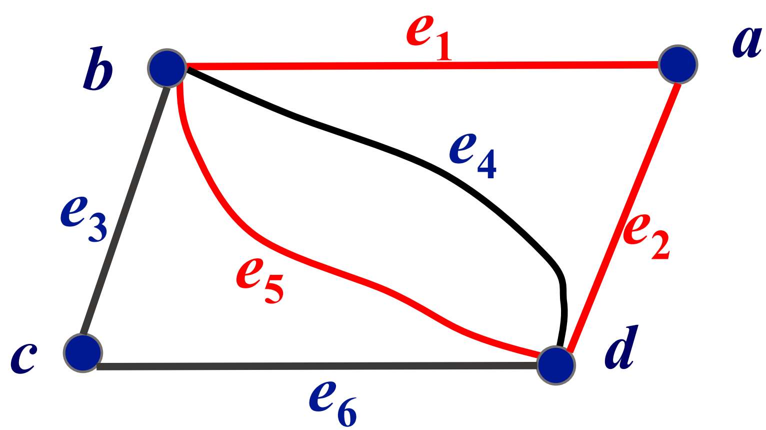


$G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$

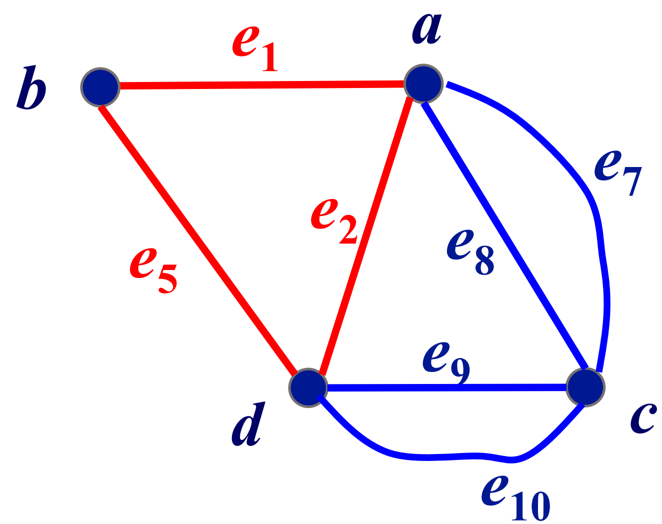


$G_1 \cap G_2 = <V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2,\ \Psi_1 \cap \Psi_2>$

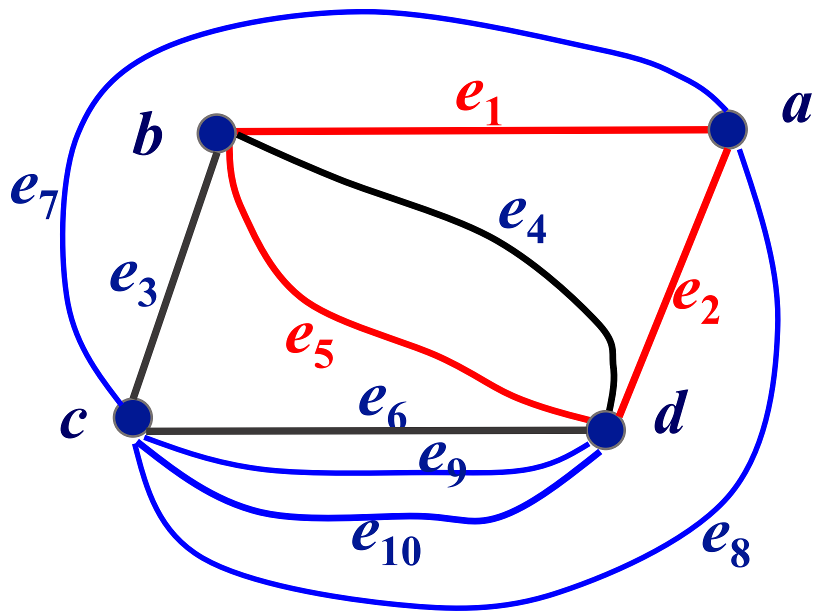
举例：并



$G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$

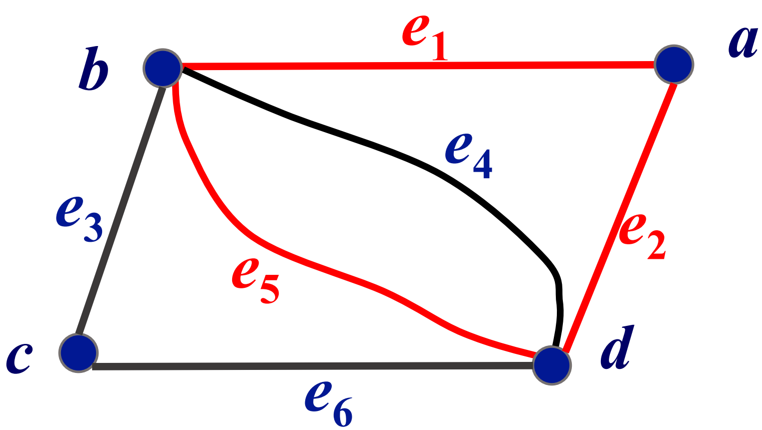


$G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$

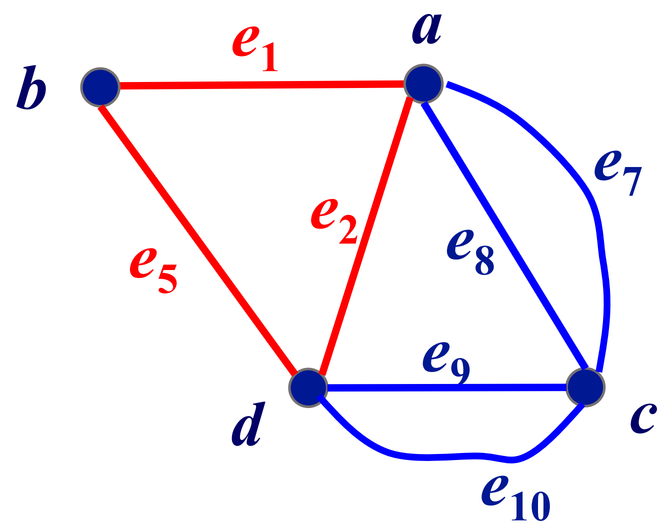


$G_1 \cup G_2 = <V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2,\ \Psi_1 \cup \Psi_2$

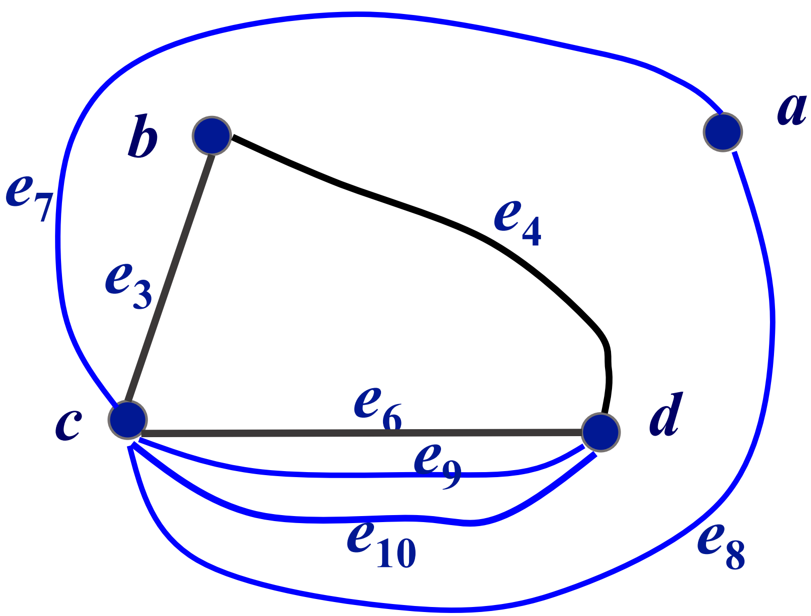
举例：环和



$G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$



$G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$



$G_1 \oplus G_2 = <V_1 \cup V_2,\ E_1 \oplus E_2,\ \Psi_1 \cup \Psi_{2\ E1 \oplus E2}>$

图运算的唯一性

定理2.1 设图$G_1=<V_1, E_1, \Psi_1>$和 $G_2=<V_2, E_2, \Psi_2>$ 可运算。

(1) 如果 $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$，则存在唯一的 $G_1 \cap G_2$。

（ ∵ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ 时，$G_1 \cap G_2$ 不存在 ）

(2) 存在唯一的 $G_1 \cup G_2$和 $G_1 \oplus G_2$ 。

证明：不妨设G_1和G_2同为有向图，若同为无向图同样证明。

(1)（存在性）定义 Ψ: $E_1 \cap E_2 \rightarrow (V_1 \cap V_2) \times (V_1 \cap V_2)$ 为：

对于任意的 $e \in E_1 \cap E_2$，$\Psi(e) = \Psi_1(e) = \Psi_2(e)$ 。

显然，$<V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2, \Psi> = G_1 \cap G_2$ 。

图运算的唯一性

定理2.1 设图$G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$和 $G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$ 可运算。

(1) 如果 $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$，则存在唯一的 $G_1 \cap G_2$。

（ ∵ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ 时，$G_1 \cap G_2$ 不存在 ）

(2) 存在唯一的 $G_1 \cup G_2$和 $G_1 \oplus G_2$ 。

证明（续）(1)（唯一性）

设图 $G = < V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2, \Psi >$ 和

$G' = < V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2, \Psi' \rangle$ 均为 G_1和G_2的交。

因为 $G \subseteq G_1$，所以对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ 皆有 $\Psi(e) = \Psi_1(e)$ 。

因为 $G' \subseteq G_1$，所以对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ 皆有 $\Psi'(e) = \Psi_1(e)$ 。

这表明 $\Psi = \Psi'$。因此，$G = G'$ 。

图运算的唯一性

定理2.1 设图$G_1=<V_1, E_1, \Psi_1>$和 $G_2=<V_2, E_2, \Psi_2>$ 可运算。

(1) 如果 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$，则存在唯一的 $G_1\cap G_2$。

（$\because V_1\cap V_2=\varnothing$ 时，$G_1\cap G_2$ 不存在）

(2) 存在唯一的 $G_1\cup G_2$和 $G_1\oplus G_2$。

证明：(2)（存在性）定义 $\Psi: E_1\cup E_2\to(V_1\cup V_2)\times(V_1\cup V_2)$：对于任意 $e\in E_1\cup E_2$，

$$\Psi(e)=\begin{cases}\Psi_1(e), & e\in E_1\\ \Psi_2(e), & e\in E_2-E_1\end{cases}。$$

显然，$<V_1\cup V_2, E_1\cup E_2, \Psi>=G_1\cup G_2$。

图运算的唯一性

定理2.1 设图$G_1=<V_1, E_1, \Psi_1>$和 $G_2=<V_2, E_2, \Psi_2>$ 可运算。

(1) 如果 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$，则存在唯一的 $G_1\cap G_2$。

（ $\because$ $V_1\cap V_2=\varnothing$ 时，$G_1\cap G_2$ 不存在 ）

(2) 存在唯一的 $G_1\cup G_2$和 $G_1\oplus G_2$ 。

证明： (2)（唯一性）设图 $G=<V_1\cup V_2, E_1\cup E_2, \Psi>$ 和

$G'=<V_1\cup V_2, E_1\cup E_2, \Psi'>$ 均为 G_1 和 G_2 的并。

因为 $G_1\subseteq G$且$G_1\subseteq G'$, 所以对任意 $e\in E$，皆有

$$\Psi(e)=\Psi_1(e)=\Psi'_1(e)。$$

因为 $G_2\subseteq G$且$G_2\subseteq G'$，所以对任意 $e\in E_2-E_1$，皆有

$$\Psi(e)=\Psi_2(e)=\Psi'(e)。$$

因此$\Psi=\Psi'$，从而 $G=G'$。

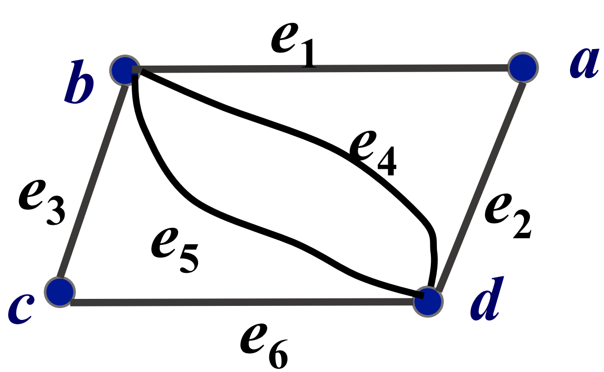
（3）图的运算： $G - E'$

定义2.6 设图 $G = < V, E, \Psi >$。

(1) 若 $E' \subseteq E$，记 $< V, E - E', \Psi|_{(E-E')} >$ 为 $G - E'$；

(2) 若 $e \in E$，则记 $G - \{e\}$ 为 $G - e$。

- $G - E'$ 是从 G 中去掉 E' 中的边所得到的G的子图。
- **注意： 与 E' 中的边相关联的结点并不去掉。**



G_1

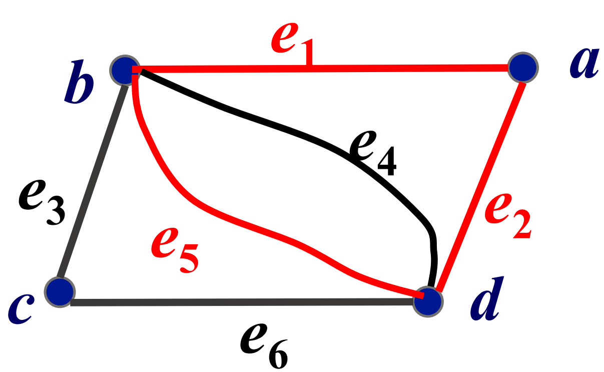
（3）图的运算： $G-E'$

定义2.6 设图 $G=<V, E, \Psi>$。

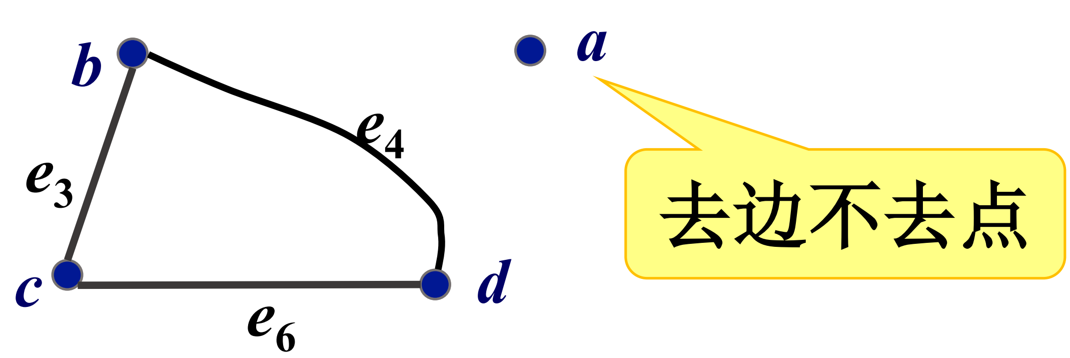
(1) 若 $E' \subseteq E$，记 $<V, E-E', \Psi|_{(E-E')}>$ 为 $G-E'$；

(2) 若 $e \in E$，则记 $G-\{e\}$ 为 $G-e$。

- $G-E'$ 是从 G 中去掉 E' 中的边所得到的G的子图。
- 注意： 与 E' 中的边相关联的结点并不去掉。



G_1

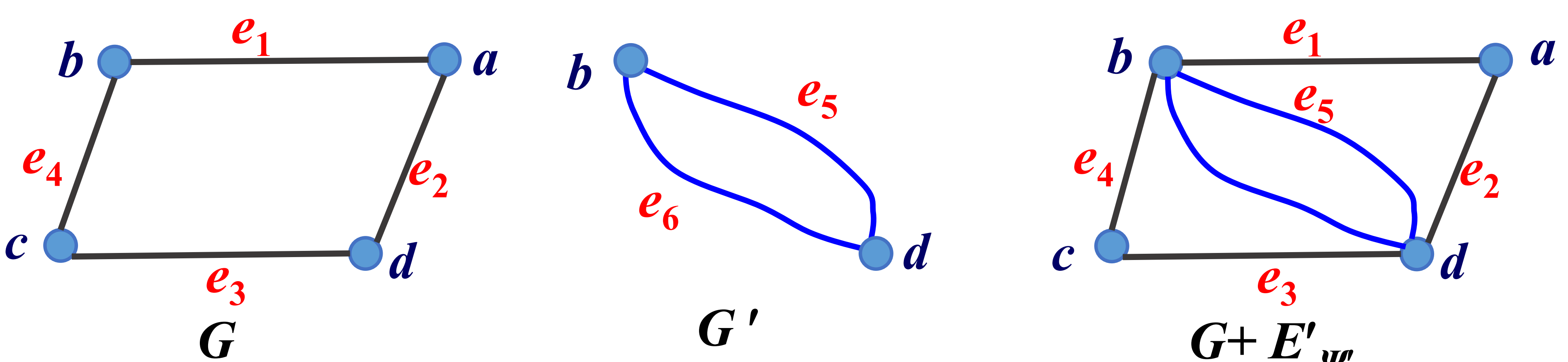


$G_1-\{e_1, e_2, e_5\}$

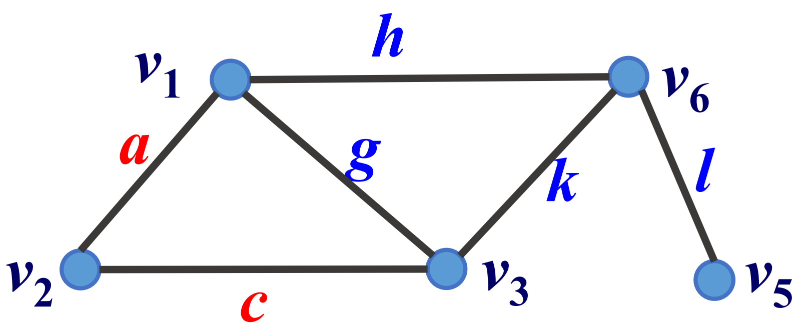
（4）图的运算： $G+E'_{\Psi'}$

定义2.7 设图 $G=<V,E,\Psi>$ 和 $G'=<V',E',\Psi'>$ 同为无向图或同为有向图，若G 和 G' 边不相交，且 G' 无孤立点，则记 $G\cup G'$ 为 $G+E'_{\Psi'}$。

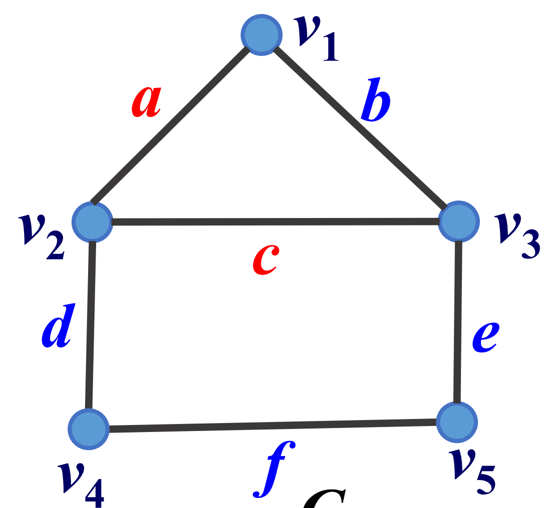
- $G+E'_{\Psi'}$ 是由 G 增加 E' 中的边所得到的图，其中 Ψ' 指出 E' 中的边与结点的关联关系。



例：已知G_1, G_2，试画出$G_1 \cup G_2$，$G_1 \cap G_2$，$G_1 \oplus G_2$，$(G_1 \cup G_2) - \{v_5, v_6\}$, $(G_1 \cup G_2) - \{g, h\}$, $G_2 + E'_{\Psi'}$, 其中$E' = \{g\}$, $\Psi' = \{<g, \{v_1, v_3\}>\}$



G_1



G_2

$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$

$E_1 = \{a, c, g, h, k, l\}$

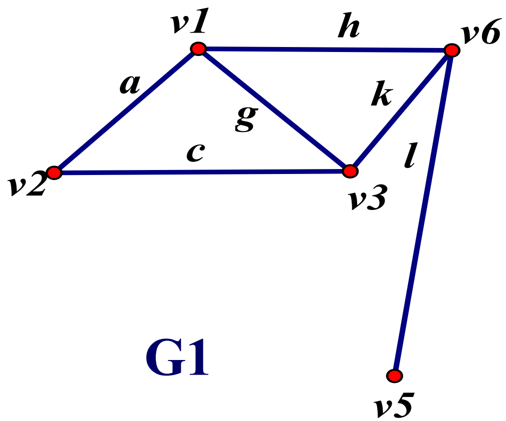
$E_1 \cap E_1 = \{a, c\}$

$V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

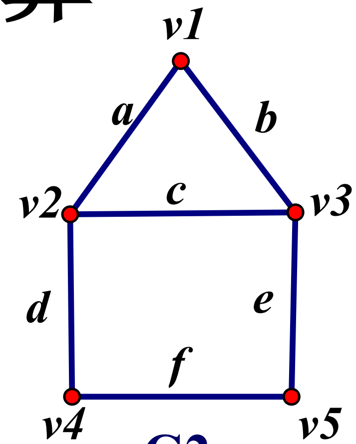
$E_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$

G_1与G_2可运算

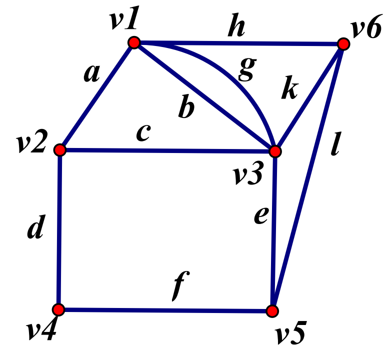
例：图的运算



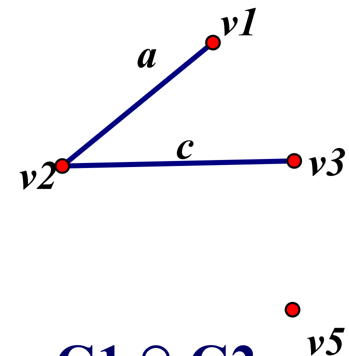
G1



G2



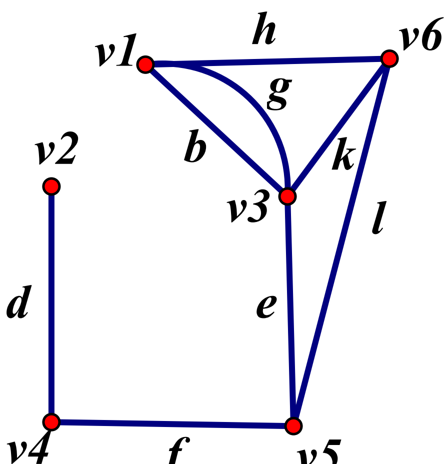
G1 ∪ G2



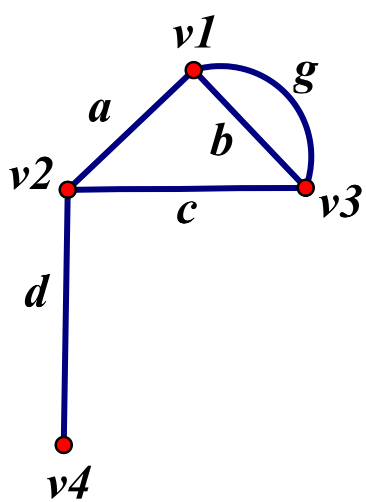
G1 ∩ G2

V_1= {v1, v2, v3, v5, v6} V_2= {v1, v2, v3, v4, v5}

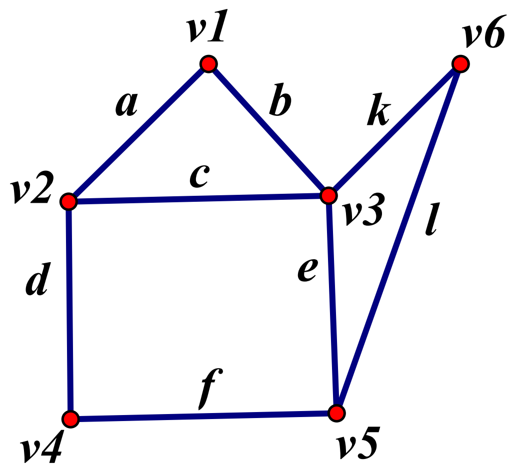
E_1={a, c, g, h, k, *l* } E_1={a, b, c, d, e, f }



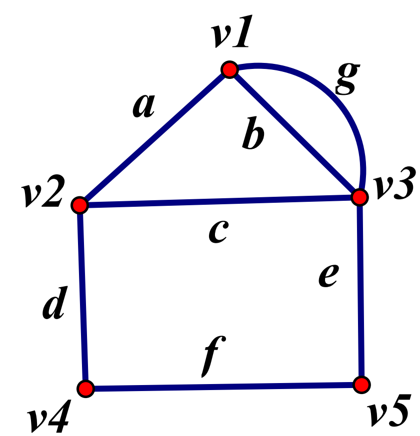
G1 ⊕ G2



(G1 ∪ G2)-{v5,v6}



(G1 ∪ G2)-{g,h}



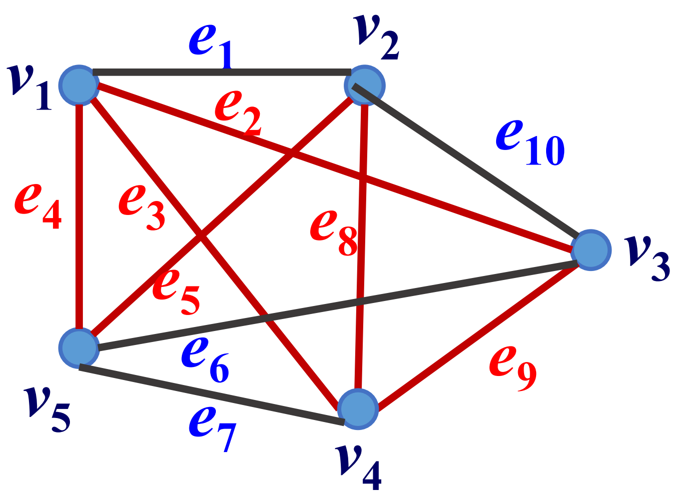
G2+E′$_{\Psi'}$

其中E′={g},

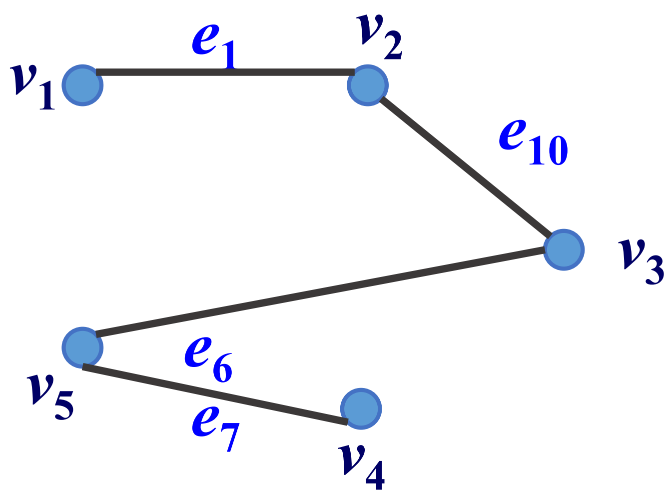
Ψ′={<g,{v1,v3}>}

（5）图的运算—补图

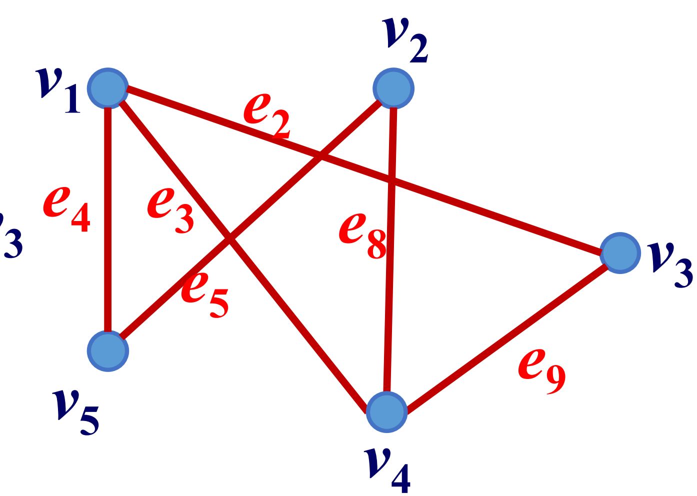
定义2.8 设 n 阶无向图 $G = < V, E, \Psi >$ 是 n 阶完全无向图 K_n 的生成子图，则称 $K_n - E$ 为 G 的补图，记为$\overline{G}$ 。



K_n



$G= < V, E , \Psi >$



$K_n - E$

（5）图的运算—补图

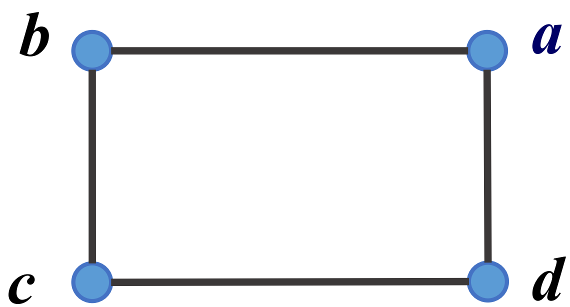
定义2.8 设 n 阶无向图 $G = <V, E, \Psi>$ 是 n 阶完全无向图 K_n 的生成子图，则称 $K_n - E$ 为 G 的补图，记为$\overline{G}$ 。

- 简单无向图都有补图，并且一个简单无向图的所有补图都同构。
- 对于任意两个简单无向图G_1和G_2，如果G_2是G_1的补图，那么G_1也是G_2的补图。

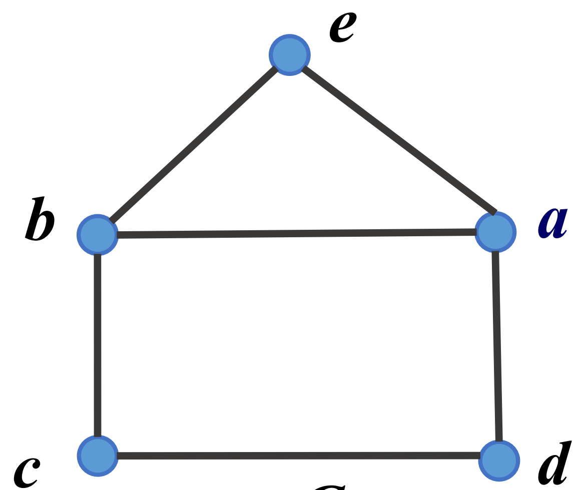
- 问题：完全图的补图是什么？
  零图的补图是什么？

补图举例

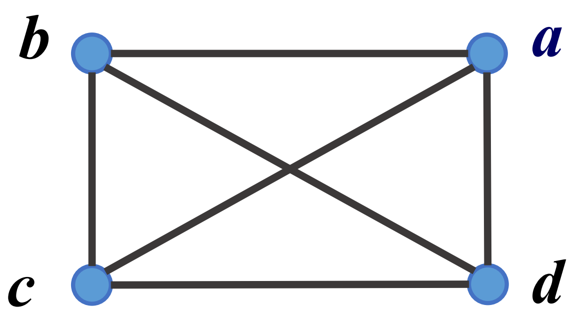
例：求 G_1和 G_2 的补图。



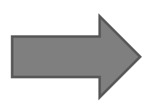
G_1

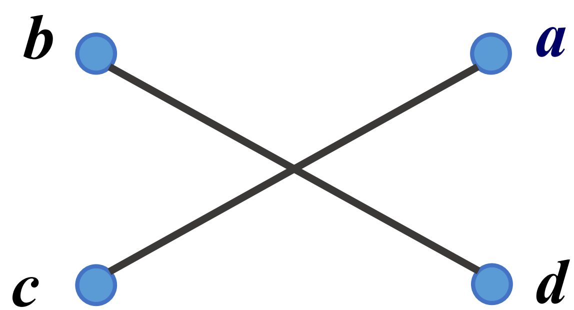


G_2



K_4

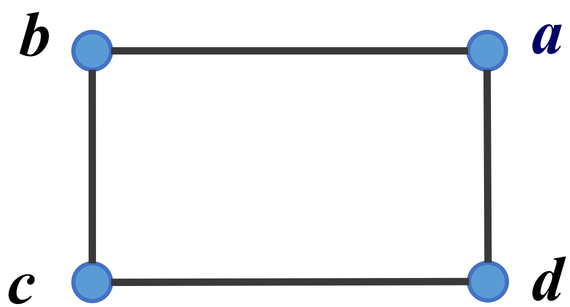




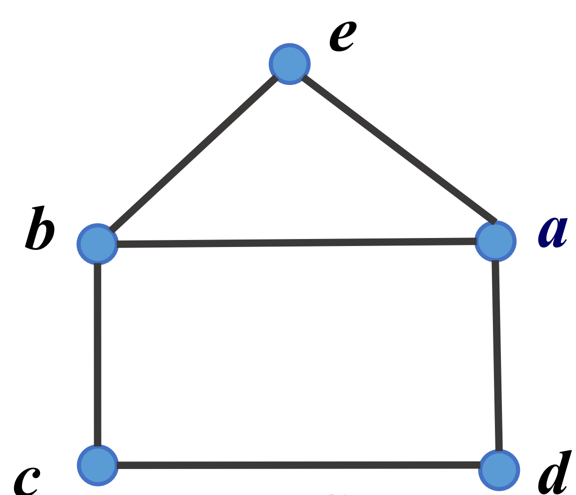
$\overline{G_1}$

补图举例

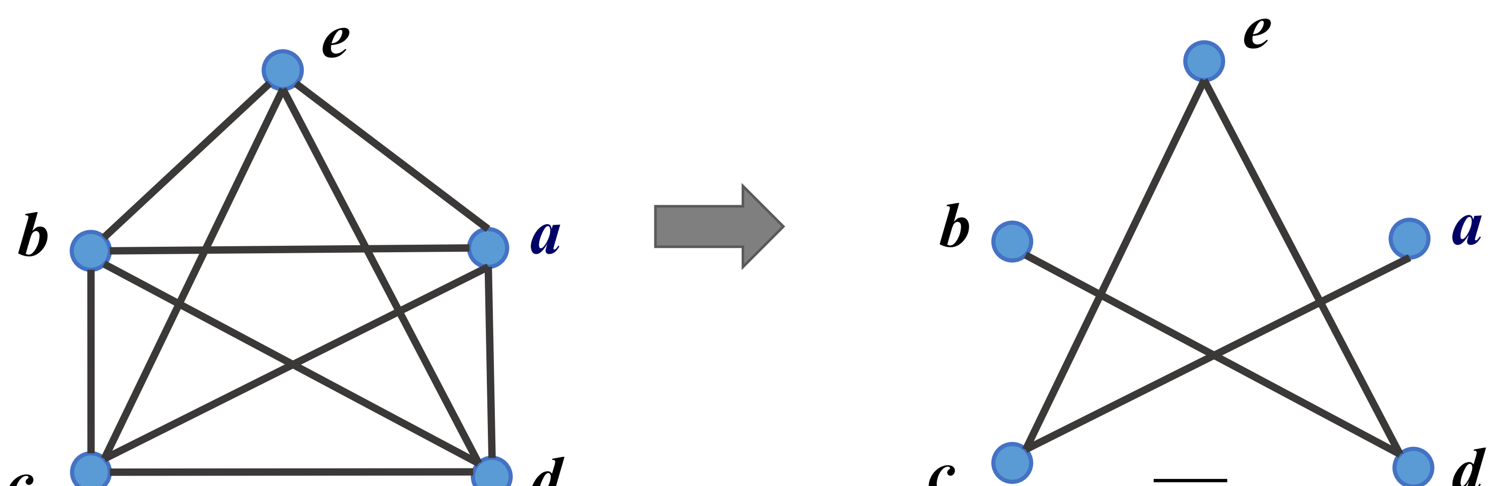
例：求 G_1和 G_2 的补图。



G_1

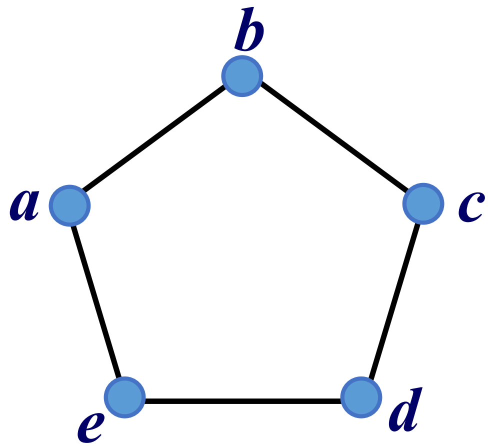


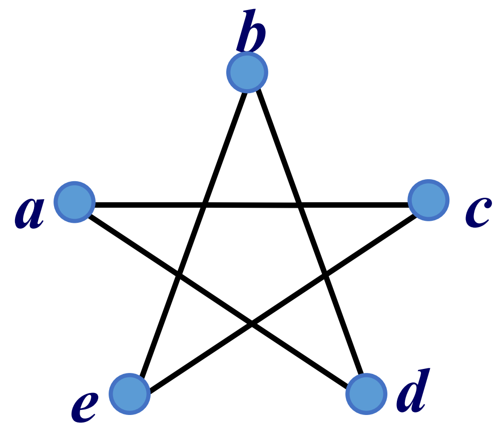
G_2

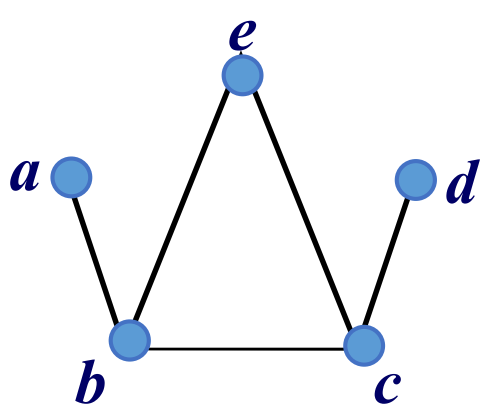


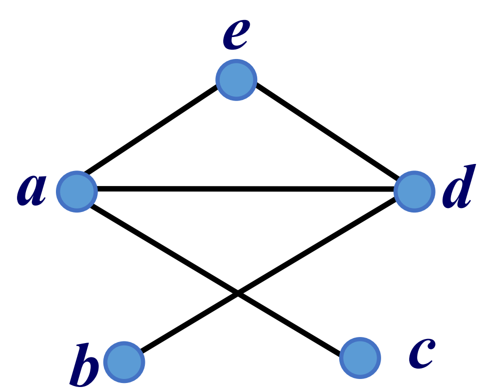
G_2 $\overline{G_2}$

自补图：与其补图同构的简单无向图









互为补图且自补图

小结

子图
- 生成子图 *spanning subgraph*
- 导出子图 *induced subgraph*
  - 由点导出子图
  - 由边导出子图

图和图的关系：

可运算
- 三类典型运算：交、并、环和 $G-E'$、$G+E'$
- 补图、自补图

图同构的必要条件

定理2.2 设 f 和 g 为图 $G=<V, E, \Psi>$ 和 $G'=<V', E', \Psi'>$ 之间的同构映射。

(1) 若 $v \in V$ 且 $v' = f(v)$，则 $d_G(v) = d_{G'}(v')$；

(2) 若 $S \subseteq V$ 且 $S' = f(S)$，则

$$G[S] \cong G'[S'] \text{ 且 } G - S \cong G' - S'\text{；}$$

(3) 若 $K \subseteq E$ 且 $K' = g(K)$，则

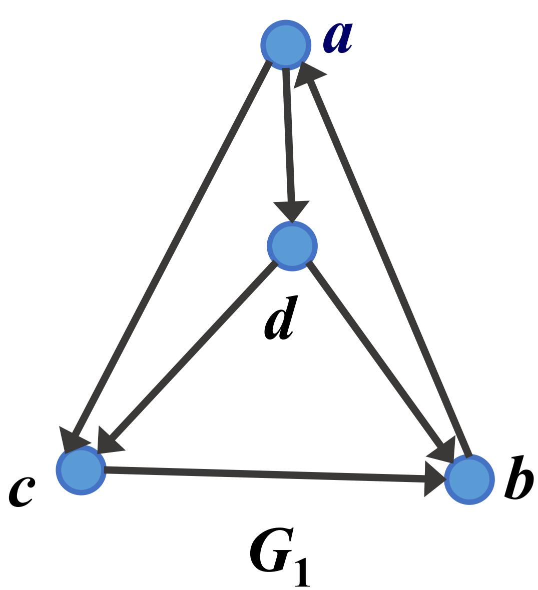
$$G[K] \cong G'[K'] \text{ 且 } G - K \cong G' - K'\text{；}$$

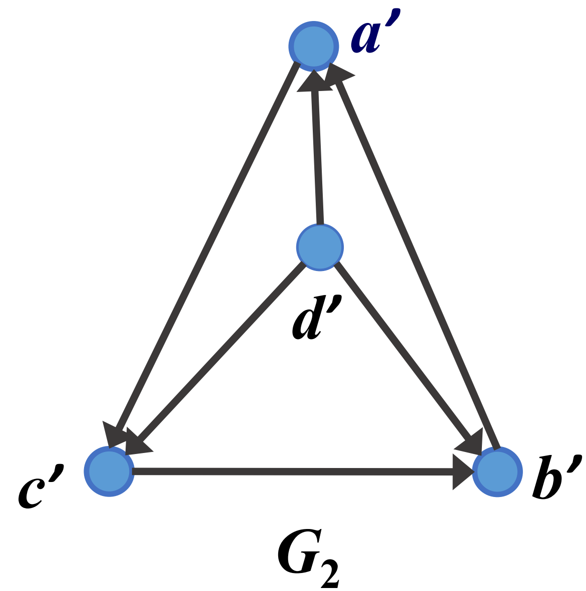
(4) $\overline{G} \cong \overline{G'}$，即 G 的补图与 G' 的补图仍同构。

- 若G, G'是有向图，若 $v \in V$ 且 $v' = f(v)$，则

$$d^+_G(v) = d^+_{G'}(v'),\quad d^-_G(v) = d^-_{G'}(v')$$

例：图 G_1与 G_2是否同构?





不同构：G_1中结点 d 的入度为 1，出度为 2，
但在 G_2中不存在这样的点。

例. 证明：每个自补图的阶能被 4 整除或被 4 除余数为1.

证明：设G为 n 阶完全无向图K_n的生成子图，

K_n-G 为 G 的补图，且 G 与 K_n-G 同构。

由于K_n的边数为$n(n-1)/2$，且 G 与 K_n-G 同构，

因此 G 与 K_n-G 的边数均为$n(n-1)/4$。

由于 $n(n-1)/4$ 为整数，设为 k，即 $n(n-1)/4 = k$。

得 $4|\,n(n-1)$。

下面证明 当 $4|n(n-1)$ 时，$4|\,n$ 或 $n= 4i+1$，$i, n\in$N, $n\geq 1$。

由于 n 与 n-1 不能同为奇数，也不能同为偶数，

因此必有 $4|n$ 或 $4|n-1$。因此结论成立。