第二章 关系

第二章 关系

1 关系及其性质

2 关系的运算

3 次序关系

4 等价关系与划分

2.1 关系及其性质

主要内容:

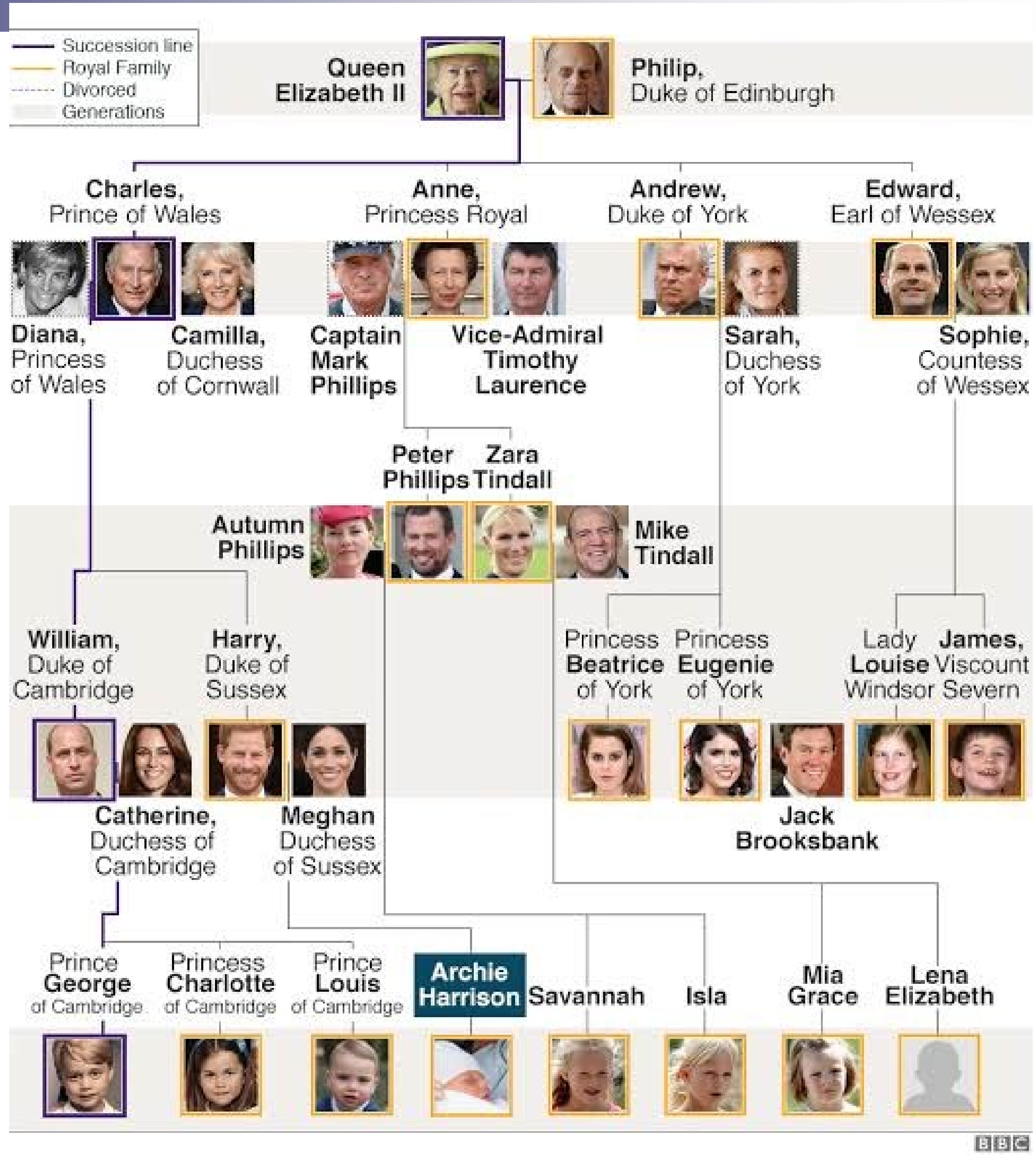
2.1.1 关系的相关定义

2.1.2 关系的表示方法

2.1.3 关系的性质

人物关系图

母子
父子
夫妻
兄弟
姐妹
祖先后代



论文引用网络

Data set	#paper	#Citation Relationship
Citation-network V1	629,814	>632,752
Citation-network V2	1,397,240	>3,021,489
DBLP-Citation-network V3	1,632,442	>2,327,450
DBLP-Citation-network V4	1,511,035	2,084,019
DBLP-Citation-network V5	1,572,277	2,084,019
DBLP-Citation-network V6	2,084,055	2,244,018
DBLP-Citation-network V7	2,244,021	4,354,534
DBLP-Citation-network V8	3,272,991	8,466,859
ACM-Citation-network V8	2,381,688	10,476,564
ACM-Citation-network V9	2,385,022	9,671,893
DBLP-Citation-network V9	3,680,007	1,876,067
DBLP-Citation-network V10	3,079,007	25,166,994
DBLP-Citation-network V11	4,107,340	36,624,464
DBLP-Citation-network V12	4,894,081	45,564,149
DBLP-Citation-network V13	5,354,309	48,227,950

关系举例：五元关系

Table 1: Grade

学号(I)	姓名(N)	班级(C)	学院(S)	分数(G)
01	张三	1	计算机学院	90
02	李四	1	北京学院	87
03	王五	2	计算机学院	85
04	赵六	2	北京学院	95
05	孙七	3	计算机学院	88
06	周八	3	北京学院	88

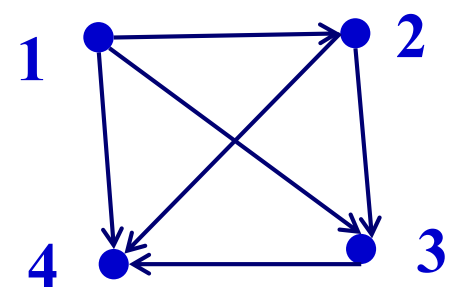
例：考虑集合A={1, 2, 3 ,4}上的小于关系“<”：

$$1 < 2,\ 1 < 3,\ 1 < 4,\ 2 < 3,\ 2 < 4,\ 3 < 4$$

用序偶$<i, j>$表示“$i<j$”，令

$R_< = \{<1, 2>, <1,3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$

则 $R_<$ 为集合A上的小于关系.



例：实数集合上的大于关系“ > ”表示如下：

$R_> = \{ <x, y> \mid x , y$ 是实数 且 $x > y \}$

2.1.1 关系的相关定义

***n*元关系**

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

两类特殊关系

全关系

恒等关系

关系的相等

关系的定义域与值域

（1）n 元关系

定义1 (关系)：设$n \in \mathrm{I}_+$, 且$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个任意的集合，$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$,

(1) 称 R 为$A_1, A_2, \ldots, A_n$间的 n元关系；

(2) 若 $n = 2$，则称 R为从 A_1到 A_2的二元关系；

(3) 若 $R = \varnothing$, 则称 R为空关系；

(4) 若 $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，则称 R 为全关系

(5) 若 $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, 则称 R 为A上的n元关系.

对于二元关系R,

- 若 $<x, y> \in R$, 则可表示成 $x\ R\ y$, 读做 "x与y有关系R"
- 若 $<x, y> \notin \mathrm{R}$, 则记作 $x\overline{R}y$, 读作 " x与y不存在关系R"

例：令 $R_1 = \{<2n> \mid n\in \mathrm{N}\}$

N上的一元关系

$R_2 = \{<n, n+1> \mid n\in \mathrm{N}\}$

N上的二元关系

$R_3 = \{<n, m, k> \mid n, m, k \in \mathrm{N}$ 且$n^2+m^2=k\}$

N上的三元关系

问题：设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为有限集，则最多能有多少个$A_1, A_2, \ldots, A_n$的 n 元关系？

（2）X 上的两类特殊二元关系

- X上的全(域)关系：

$$U_X = \{ <x_i, x_j> \mid x_i, x_j \in X \} = X \times X$$

- X上的恒等关系：

$$I_X = \{ < x, x > \mid x \in X \}$$

例：设 $X = \{ 0, 1, 2 \}$,

$$U_X = \{ <0, 0>, <0, 1>, <0, 2>, <1, 0>, <1, 1>, <1, 2>, <2, 0>, <2, 1>, <2, 2> \}$$

$$I_X = \{ <0, 0>, <1, 1>, <2, 2> \}$$

例：设集合$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{0, 2, 4\}$,

$R_1=\{<x, y>|\ x, y \in A \cap B\}$,

$R_2=\{<x, y>|\ x \in A-B,\ y \in B-A\}$.

列出R_1, R_2中的所有序偶.

解：$R_1=\{<0, 0>, <0, 2>, <2, 0>, <2, 2>\}$

$R_2=\{<1, 4>\}$

（3）关系的相等

定义2 (关系的相等)：设R_1为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 间的 n元关系， R_2为 $B_1, B_2, \ldots, B_m$ 间的m元关系。如果

(1) $n = m$;

(2) 若 $1 \leq i \leq n$, 则 $A_i = B_i$;

(3) 把 R_1和R_2作为集合看，$R_1=R_2$.

则称 n元关系 R_1与 m元关系R_2相等，记为$R_1=R_2$.

问题：与集合相等的区别？

例： 设$R_1 \subseteq \mathrm{N} \times \mathrm{I}_+$， $R_2 \subseteq \mathrm{I} \times \mathrm{I}$, $R_3 \subseteq \mathrm{I} \times \mathrm{I}$， 且

$R_1=\{<n, m> \mid n \in \mathrm{N}, m \in \mathrm{I}_+, \text{且} m=n+1\}$

$R_2=\{<n, n+1> \mid n \in \mathrm{I}, \text{且} n \geq 0\}$,

$R_3=\{<|n|, |n|+1> \mid n \in \mathrm{I}\}$

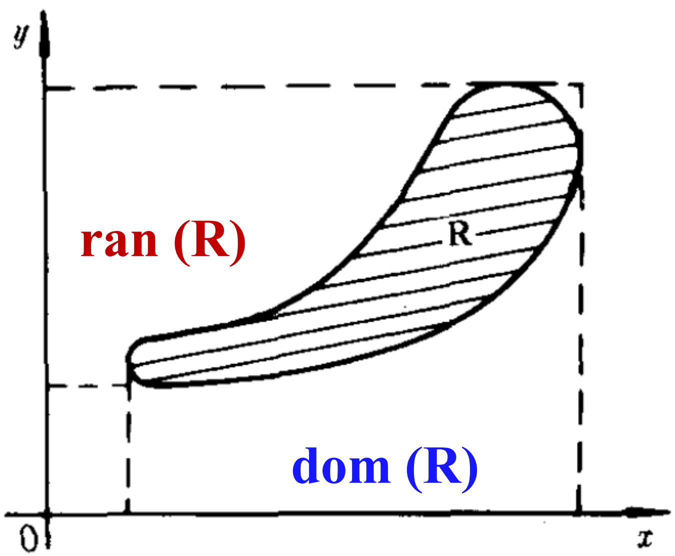
- 作为集合看，$R_1=R_2=R_3$
- 作为关系看，$R_1 \neq R_2$， $R_2=R_3$

（4）关系的定义域与值域

定义3 设 $R \subseteq A \times B$, R中所有有序偶$<x, y>$ 的第一元的集合称为 R 的定义域，记为 **dom (R);** 所有第二元的集合，称为R 的值域，记为 **ran (R)**，即

$$\mathbf{dom}(R) = \{ x \in A \mid \exists y \in B: <x, y> \in R \},$$

$$\mathbf{ran}(R) = \{ y \in B \mid \exists x \in A: <x, y> \in R \},$$



- 二元关系R 可看作坐标平面上的一个点集
- **dom(R)**：R 在横坐标轴上的投影
- **ran(R)**：R 在纵坐标轴上的投影

（4）关系的定义域与值域

定义3 设 $R \subseteq A \times B$, R中所有有序偶$<x, y>$ 的第一元的集合称为 R 的定义域，记为 dom (R); 所有第二元的集合，称为R 的值域，记为 ran (R)，即

$$\text{dom}(R) = \{ x \in A \mid \exists y \in B: <x, y> \in R \},$$

$$\text{ran}(R) = \{ y \in B \mid \exists x \in A: <x, y> \in R \},$$

例: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

$R = \{<1, a>, <1, b>, <2, b>\}$是 A 到 B的关系.

dom (R)=$\{1, 2\}$, ran(R)=$\{a, b\}$

2.1.2 二元关系的表示方法

有限集A与B间的二元关系
$R \subseteq A \times B$

关系图

关系矩阵

两种表示方法

（1）关系图

- 仅讨论从有限集到有限集的二元关系

定义 4 (关系图) 设 A 和 B 为任意的非空有限集，R 为任意从 A 到 B 的二元关系.

以 $A \cup B$ 中的每个元素为一个顶点，对每个 $<x, y> \in R$，皆画一条从 x 到 y 的有向边，

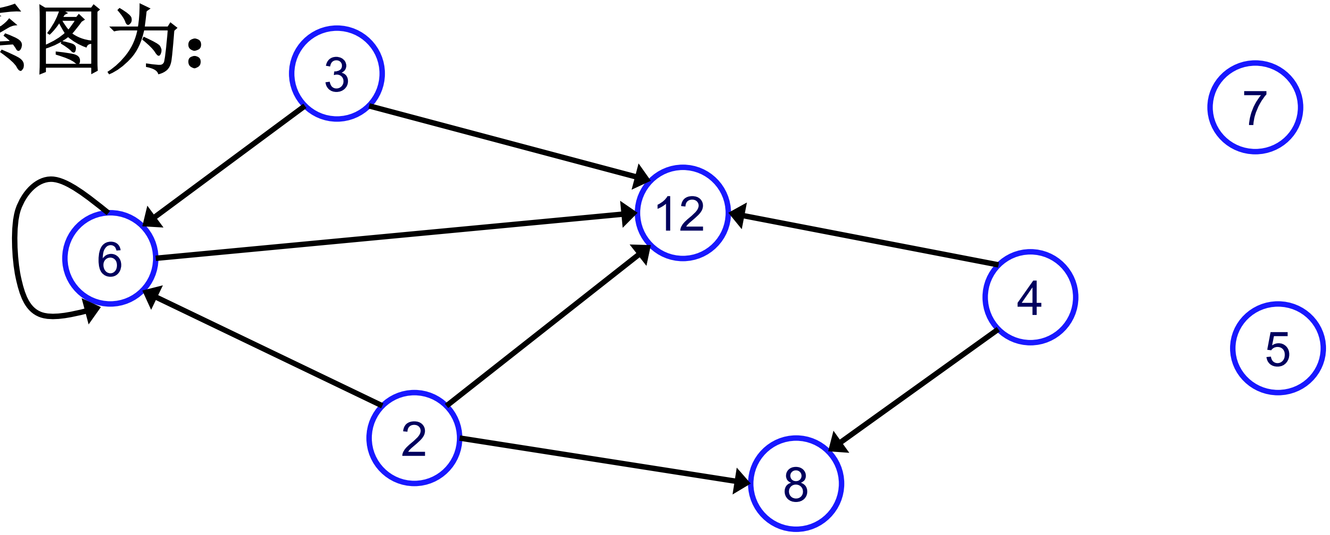
就得到一个有向图 G_R, 称为 R 的关系图

例：设集合A={ 2, 3, 4, 5, 6}, B={6, 7, 8, 12}，从A到B的二元关系R为：

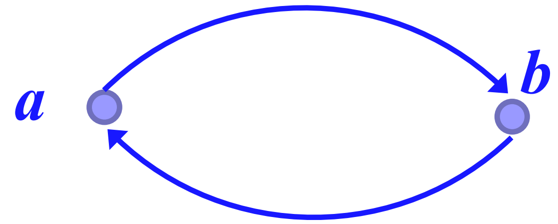
$$a\,R\,b \text{ 当且仅当 } a \in A,\ b \in B \text{ 且 } a|b.$$

显然，R= { <2, 6>, <2, 8>, <2, 12>, <3, 6>, <3, 12>, <4, 8>, <4, 12>, <6, 6>, <6, 12> }.

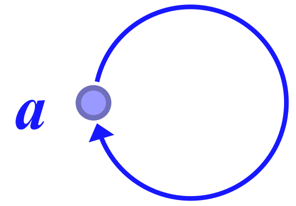
R 的关系图为：



- 如果 *aRb* 且*bRa*，则在*a* 和 *b* 之间 画上两条方向相反的弧线



- 如果 *aRa*，则画一条从*a* 出发又返回顶点 *a*的弧线，称这一条弧线为自环



（2）关系矩阵

定义5 (关系矩阵)：设 $X = \{ x_1, \cdots\cdots, x_m \}$, $Y = \{ y_1, \cdots\cdots, y_n \}$ ， R 是 X 到 Y 的二元关系． R 的关系矩阵，记作 $M_R = (r_{ij})_{m\times n}$ ， 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, 若\ x_i\, R\, y_j \\ 0, 若\ x_i\, \overline{R}\, y_j \end{cases}$$

例：设集合A={ 2, 3 ,4, 5, 6}, B={6, 7, 8, 12}，从A到B的二元关系R为：

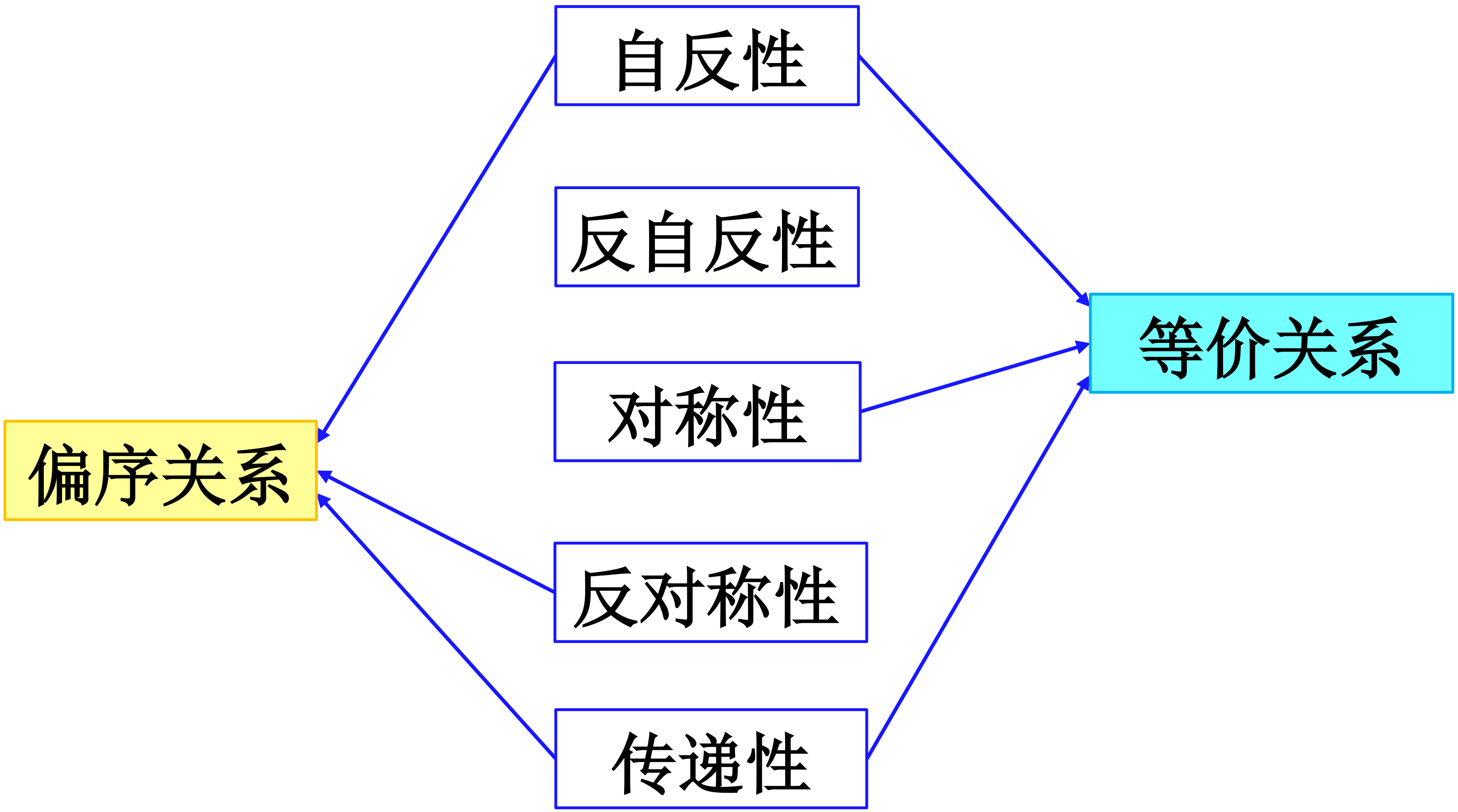
$$a\ R\ b \text{ 当且仅当 } a \in A,\ b \in B \text{ 且 } a | b.$$

显然，R= { <2, 6>, <2, 8>, <2, 12>, <3, 6>, <3, 12>, <4, 8>, <4, 12>, <6, 6>, <6, 12> }.

R 的关系矩阵为：

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.1.3 关系的性质

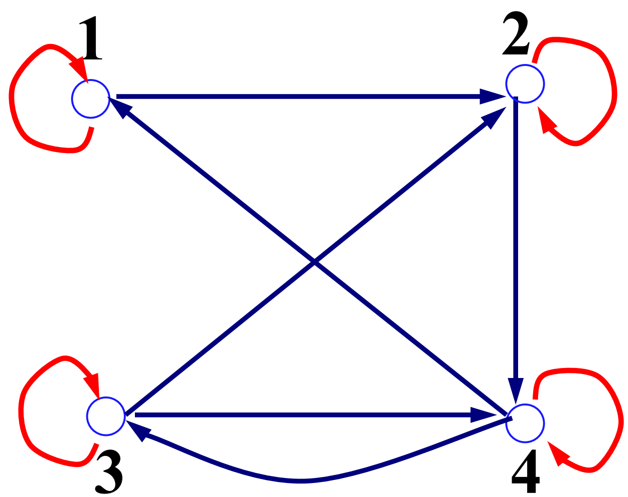


集合 X 上的二元关系 R

定义 6 (自反性) 设 R 是集合 X 上的二元关系，

R是**自反**的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$

$X=\{1, 2, 3, 4\}$，$R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

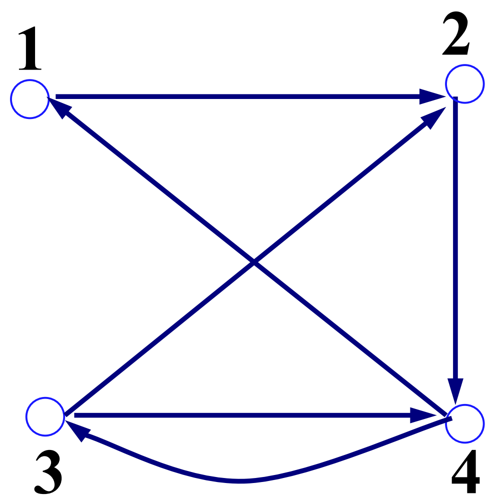
- 在R的关系图中，<u>每个顶点均有自环</u>；
- 在R的关系矩阵中，<u>主对角线的元素均为 1</u>.

定义7(反自反性) 设 R是集合X上的二元关系.

R是 反自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$

$X=\{1, 2, 3, 4\}$,

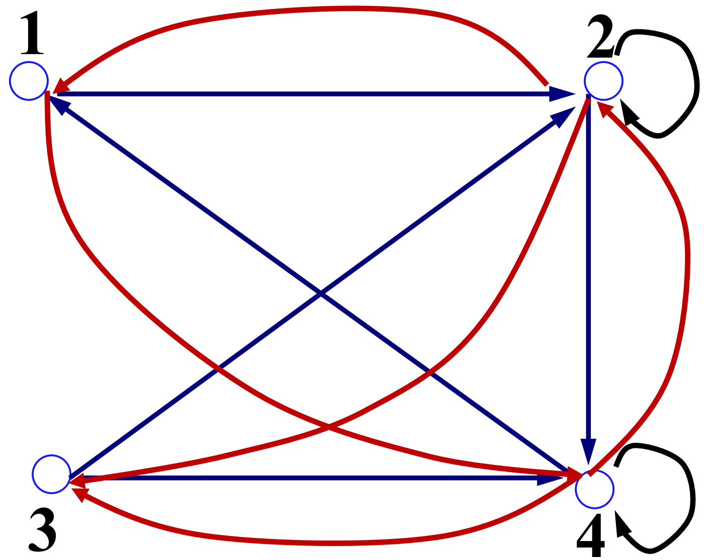
$R=\{\langle 1, 2\rangle\ \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，<u>每个顶点均无自环</u>;
- 在 R 的关系矩阵中，<u>主对角线的元素均为 0</u>.

定义8(对称性) 设 R是集合X上的二元关系． R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall x\ \forall y\ (x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$



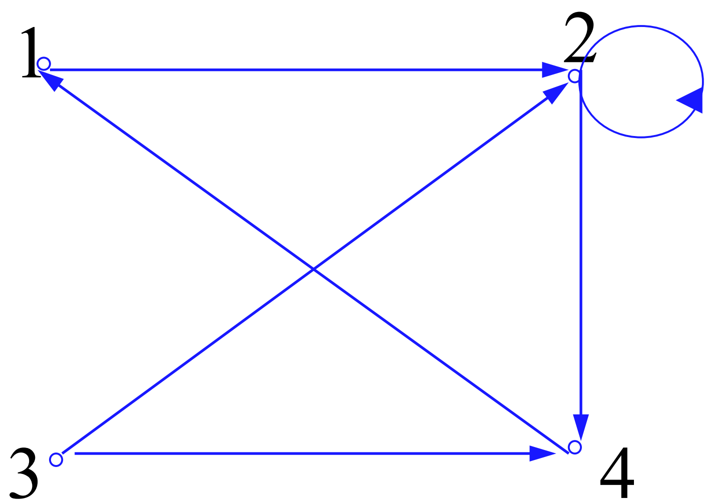
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，任意两个不同顶点之间：或者无弧 或者 有两条方向相反的弧；
- R 的关系矩阵是 对称矩阵.

定义9(反对称) 设R是集合X上的二元关系. R 是反对称的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (\, x \in X \wedge y \in X \wedge <x\,,y> \in R \wedge <y,x> \in R \rightarrow x = y\,)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (x \in X \wedge y \in X \wedge <x\,,y> \in R \wedge x \neq y \rightarrow <y\,,x> \notin R\,)$



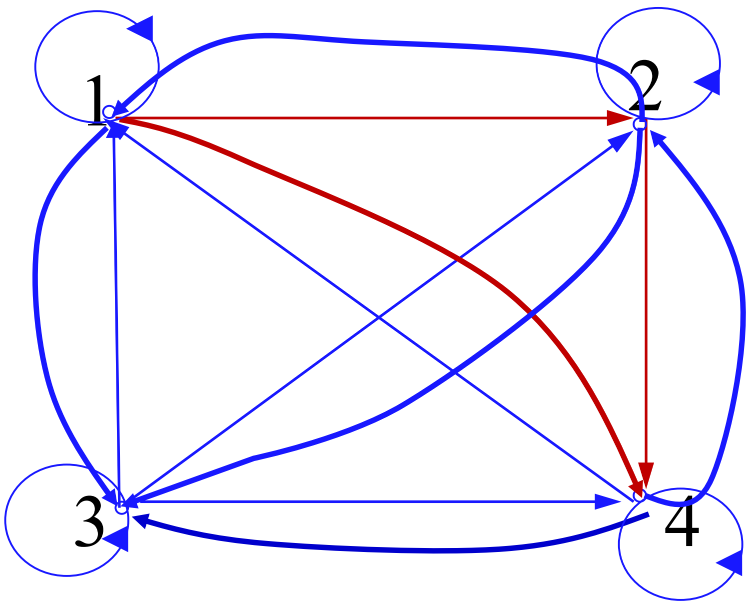
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，任意不同顶点之间至多有一条弧
- 在 R 的矩阵中， 若 $i \neq j$ 且 $r_{ij} = 1$， 则 $r_{ji} = 0$

或 $r_{ij} \cdot r_{ji} = 0\ (\, i \neq j\,)$

定义10(传递性) 设 R是集合X上的二元关系． R是传递的 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\ (x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge$

$$<x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \rightarrow <x, z> \in R\ )$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，若顶点 x 到顶点 y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条边
- 在关系矩阵：若有 k 使 $r_{ik} \cdot r_{kj} = 1$, 则 $r_{ij} = 1$

关系图和关系矩阵中五种性质的表述

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
M_R	对角线元素全1	对角线元素全0	对称矩阵	$r_{ij} \cdot r_{ji} = 0$ $(i \neq j)$	若有k使 $r_{ik} \cdot r_{kj} = 1$, 则 $r_{ij} = 1$
G_R	所有结点都有自环	所有结点都无自环	不同结点间的有向边只能成对出现	结点间无成对出现的有向边	若 x 到y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条边

例 (1) 非空集X上的恒等关系$I_X = \{<x, x> \mid x \in X\}$：

自反、对称、反对称、传递

(2) N上的"$<$"：

反自反、反对称、传递

例：(1) 非空集 X 上的空关系 $\varnothing$：

反自反、对称、反对称、传递

(2) 空集 $\varnothing$上的空关系 $\varnothing$：

自反、反自反、对称、反对称、传递

例：设 $X = \{1, 2, 3\}$判断 X 上的以下二元关系的性质

$R_1 = \{ <1, 2>, <2, 3>, <3, 1> \}$

反自反，反对称

$R_2 = \{ <1, 2>, <1, 3> \}$

反自反，反对称，传递

$R_3 = \{ <1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 2> \}$

反自反

$R_4 = \{ <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <2, 2>,$

$<3, 3> \}$

自反、对称

例：指出实数集 R上的下列二元关系的性质：

$$S=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in \mathbf{R}\text{且 } xy>0\};$$

解：(1) 由于$0\cdot 0=0$, 因此$\langle 0,0\rangle \notin S$, 因此 S 不是自反的；

(2) 由于$\langle 1, 1\rangle \in S$, 因此$S$不是反自反的；

(3)由于对任意的$x, y \in \mathbf{R}$, 有$x\cdot y>0$ 当且仅当$y\cdot x>0$，因此$\langle x, y\rangle \in S$且$\langle y, x\rangle \in S$.

所以S是对称的，且不是反对称的；

(4)假设对任意的$x, y, z \in \mathbf{R}$, $x\cdot y>0$ 且$y\cdot z>0$.

若x为正实数，则 y, z必为正实数，且若x为负实数，且y, z必为负实数，因此 $x\cdot z>0$.

因此$\langle x, y\rangle \in S$，$\langle y, z\rangle \in S$ 且$\langle x, z\rangle \in S$.

因此S是传递的.

综上所述，S是 对称、传递的.

例： 设 A 为恰有 n 个元素的非空有限集，

(1) A 上共有多少个 不同的自反关系？

(2) A 上共有多少个 不同的对称关系？

(3) A 上共有多少个 不同的既是对称又是反对称的关系？

解: (1)设R是A上的自反关系，则对任意$a\in A$, $<a,a>\in R$.

对于A上的其他序偶$<b, c>$, $b\neq c$, $<b, c>$可能属于R, 也可能不属于R.

已知A上的其他序偶个数为$n(n-1)$，因此A上的自反关系的个数为$C^1_{n(n-1)}+C^2_{n(n-1)}+\ldots+C^{n(n-1)}_{n(n-1)}=2^{n(n-1)}$

例： 设 A 为恰有 n 个元素的非空有限集，

(2) A 上共有多少个不同的对称关系？

解: (2) 设R是A上的对称关系, 则

(a)对于A上的序偶$<b, c>$, $b \neq c$, $<b, c> \in R$ 当且仅当 $<c,b> \in R$，即A上的序偶对$<b, c>$和$<c, b>$, $b \neq c$, 必须成对出现，且

(b) 对任意的$a \in A$, $<a, a>$ 可能属于R，也可能不属于R，

已知A上的序偶对$<b, c>$和$<c, b>$ ($b \neq c$)个数为 $n(n-1)/2$，$<a, a>$个数为n个，因此A上的对称关系的个数为

$$2^{n(n-1)/2+n} = 2^{n(n+1)/2}.$$

例： 设 A 为恰有 n 个元素的非空有限集，

(3) A 上共有多少个 不同的既是对称又反对称的关系？

解: (3) 设R是A上的关系, 且既是对称又反对称,

则 R只可能包含以下序偶：$<a, a>$, $a \in R$.

因此，关系R的个数为2^n .

2.2 关系的运算

主要内容

2.2.1 作为集合时的运算

2.2.2 逆运算

2.2.3 复合运算

2.2.4 闭包运算

关系运算下是否保持五大性质

2.2.1 关系的集合运算

主要内容：

（1） 关系的集合运算：

$\cap$、$\cup$、$-$、$\oplus$、$\sim$

（2） 集合运算下是否保持五个性质

（1）集合运算

定义11 设R和S是从集合A到B的关系, 取全集为$A\times B$, 则

$R\cap S$, $R\cup S$, $R-S$, $\sim R$, $R\oplus S$

仍是A到B的关系，并且对于任意 $x\in A$, $y\in B$:

$$x\,(R\cap S)\,y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\cap S \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,S\,y$$

$$x\,(R\cup S)\,y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\cup S \Leftrightarrow x\,R\,y \vee x\,S\,y$$

$$x\,(R-S)\,y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R-S \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,\overline{S}\,y$$

$$x\,(\sim R)\,y \Leftrightarrow x\,\overline{R}\,y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in \sim R$$

$$x\,(R\oplus S)\,y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\oplus S \Leftrightarrow x\,(R-S)\,y \vee x\,(S-R)\,y$$

例：设 R 和 S 是集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$上的关系，其中

$$R=\{\langle x, y\rangle \mid x-y \text{ 是 2 的非零整倍数}\}$$

$$S=\{\langle x, y\rangle \mid x-y \text{ 是 3 的非零整倍数}\}$$

求：$R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$和$\sim R$.

集合运算

解：$R=\{\langle 1, 3\rangle,\langle 3, 1\rangle,\langle 2, 4\rangle,\langle 4, 2\rangle\}$,

$S=\{\langle 1, 4\rangle,\langle 4, 1\rangle\}$.

则 $R\cap S=\varnothing$,

$R\cup S=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle,\langle 2, 4\rangle,\langle 4, 2\rangle,\langle 1, 4\rangle,\langle 4, 1\rangle\}$,

$R-S=\{\langle 1, 3\rangle,\langle 3, 1\rangle,\langle 2, 4\rangle,\langle 4, 2\rangle\}$

$\sim R=U_A-R=\{\langle 1, 1\rangle,\langle 1, 2\rangle,\langle 1, 4\rangle,\langle 2, 1\rangle,\langle 2, 2\rangle,\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle,\langle 3, 4\rangle,\langle 4, 1\rangle,\langle 4, 3\rangle,\langle 4, 4\rangle\}$.

例：设 R 和 S 是集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$上的关系，

$R=\{<x, y> \mid x\text{-}y$ 是 2 的非零整倍数 $\}$

$S=\{<x, y> \mid x\text{-}y$ 是 3 的非零整倍数 $\}$

求：$R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$和$\sim R$.

解：$R\cap S=\{<x, y> \mid x\text{-}y$是 6 的非零整倍数 $\}$

$R\cup S=\{<x, y> \mid x\text{-}y$是 2的非零整倍数或$x\text{-}y$是 3的非零整倍数$\}$

$R-S=\{<x, y> \mid x\text{-}y$是 2的非零整倍数，但不是 3的非零整倍数$\}$

$\sim R=\{<x, y> \mid x\text{-}y$不是 2 的非零整倍数 $\}$

（略）

- 设R是从集合A到集合B的二元关系
  - $\mathrm{dom}(R)=\{x\in A \mid \exists y\in B$ 使得 $<x,y>\in R\}$
  - $\mathrm{ran}(R)=\{y\in B \mid \exists x\in A$ 使得 $<x,y>\in R\}$

例: 设R_1和R_2是从集合A到集合B的二元关系，则

(1) $\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)=\mathrm{dom}(R_1)\cup\mathrm{dom}(R_2)$

(2) $\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)\subseteq\mathrm{ran}(R_1)\cap\mathrm{ran}(R_2)$

解: (1) $\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)$

$$
\begin{aligned}
&=\{x\in A \mid \exists y\in B, <x,y>\in R_1\cup R_2\}\\
&=\{x\in A \mid \exists y\in B, <x,y>\in R_1 \vee <x,y>\in R_2\}\\
&=\{x\in A \mid \exists y\in B, <x,y>\in R_1\}\cup\\
&\quad\ \{x\in A \mid \exists y\in B, <x,y>\in R_2\}\\
&=\mathrm{dom}(R_1)\cup\mathrm{dom}(R_2)
\end{aligned}
$$

例: 设R_1和R_2是从集合A到集合B的二元关系. 证明

(1) $\mathrm{dom}(R_1 \cup R_2) = \mathrm{dom}(R_1) \cup \mathrm{dom}(R_2)$

(2) $\mathrm{ran}(R_1 \cap R_2) \subseteq \mathrm{ran}(R_1) \cap \mathrm{ran}(R_2)$

解: (2) 略。

问题： $\mathrm{ran}(R_1) \cap \mathrm{ran}(R_2) \subseteq \mathrm{ran}(R_1 \cap R_2)$??

例：$A=B=\{1, 2, 3\}$,

$R_1=\{<1, 2>\}$, $R_2=\{<3, 2>\}$,

$R_1 \cap R_2 = \emptyset$,

$\mathrm{ran}(R_1 \cap R_2) = \emptyset$, $\mathrm{ran}(R_1) \cap \mathrm{ran}(R_2)=\{2\}$

（2）集合运算下是否保持五个性质

例: 若 R 和 S 都是非空集 X 上的自反(反自反、对称、反对称、传递)关系, 判断 $R\cap S$, $R\cup S$, $R-S$, $\sim R$, $R\oplus S$是否是自反 (反自反、对称、反对称、传递)的.

R, S	$R\cap S$	$R\cup S$	$R-S$	$R\oplus S$	$\sim R$
自反	√	√			
反自反	√	√	√	√	
对称	√	√	√	√	√
反对称	√		√		
传递	√				

2.2.2 关系的逆运算

主要内容：

（1）逆运算

（2）逆运算的性质

- 逆运算下是否保持关系的五个性质
- 逆运算本身的结论

（1）逆运算

定义12 (逆关系) 将关系R中每个有序偶的第一元和第二元对换所得到的关系，称为R的逆关系，记作R^{-1}，

$$R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x> \in R\}.$$

例：$R = \{<a, 1>, <a, 3>, <b, 1>, <b, 2>, <c, 1>\}$

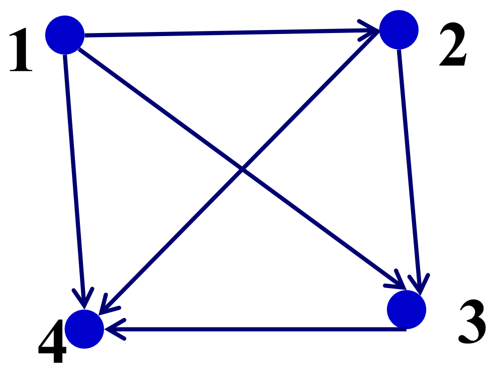
$R^{-1} = \{<1, a>, <3, a>, <1, b>, <2, b>, <1, c>\}$

- 显然，$\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$

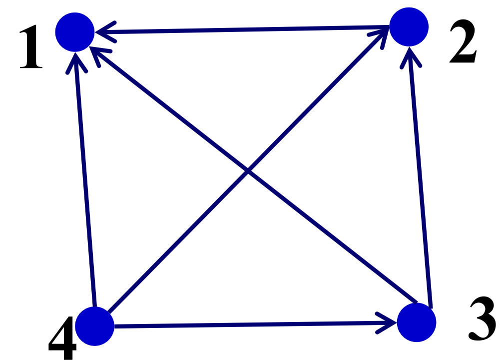
  $\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$.

问题：逆关系的矩阵表示与图表示

X={1, 2, 3, 4}上的小于关系R：



G_R



$G_{R^{-1}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_R$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R^{-1}}$$

定理1: 设A,B为非空有限集合, R为从A到B的二元关系.

(1) $M_{R^{-1}}=M_R^{\ T}$（转置）

(2) 把G_R的每个有向边反向后, 得到R^{-1}的关系图$G_{R^{-1}}$

（2）逆运算的性质

定理 2: 若R, R_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$都是从集合A到集合B的二元关系，K 为 N 的非空子集，则有

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;

(2) $(\sim R)^{-1}= \sim(R^{-1})$;

(3) 如果$R_1 \subseteq R_2$, 则$R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;

(4) 如果$R_1 = R_2$, 则$R_1^{-1} = R_2^{-1}$;

(5) $(\bigcup_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcup_{n\in K}(R_n^{-1})$;

(6) $(\bigcap_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcap_{n\in K}(R_n^{-1})$;

(7) $(R_1 - R_2)^{-1}=R_1^{-1} - R_2^{-1}$;

(8) $(R_1 \oplus R_2)^{-1}=R_1^{-1} \oplus R_2^{-1}$.

- 问题：

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
R^{-1}	√	√	√	√	√

- 逆运算保持关系的五个性质

定理 2: 设 R为集合A上的二元关系．则

R 是自反的（反自反、对称、反对称、传递）当且仅当

R^{-1}是自反的（反自反、对称、反对称、传递）

定理3. 集合A上的二元关系R**是对称的**当且仅当$R=R^{-1}$.

证明：（必要性）

假设 R是对称的，则对任意的 $x, y \in A$，

$<x, y>\in R \Leftrightarrow <y, x> \in R$ （ R 是对称的）

$\Leftrightarrow <x, y> \in R^{-1}$ （R^{-1} 的定义）

因此，$R=R^{-1}$。

（充分性）

假设$R=R^{-1}$，则对任意$x, y \in A$，

$<x, y>\in R \Rightarrow <x, y>\in R^{-1}$ （ $R=R^{-1}$ ）

$\Rightarrow <y, x>\in R$ （R^{-1} 的定义）

因此， R是对称的。

问题：假设集合 R是 A 上的二元关系，找出

1) R 是反对称的充分必要条件；

2) 包含R的最小对称关系；

3) 包含在R中的最大对称关系。

2.2.3 关系的复合（合成）运算

主要内容：

（1）复合运算

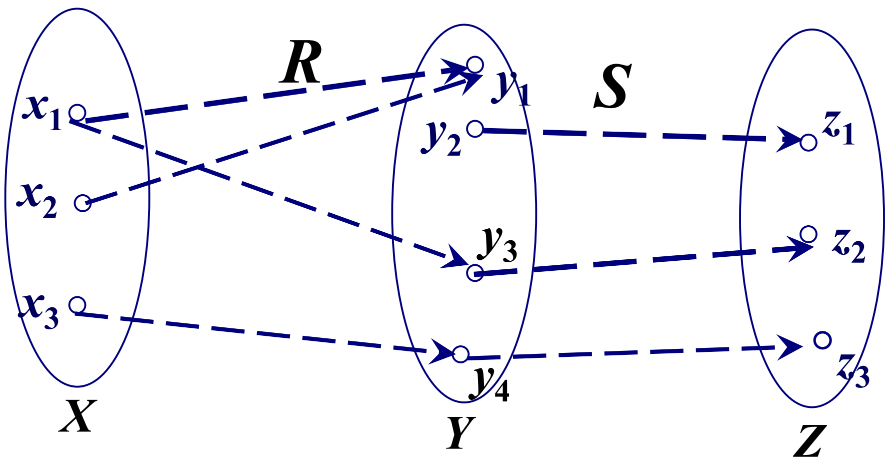
（2）复合运算的性质

- 复合运算下是否保持关系的五个性质
- 复合运算本身的结论

（3）关系的幂次

（1）复合运算

定义12 (复合) 设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是 Y 到 Z 的关系，则 $R\circ S=\{<x,z>|\exists y\in Y$ 使得 $xRy\wedge ySz\}$ 为 X 到 Z 的关系，称为 R 和 S 的复合（或合成）关系.

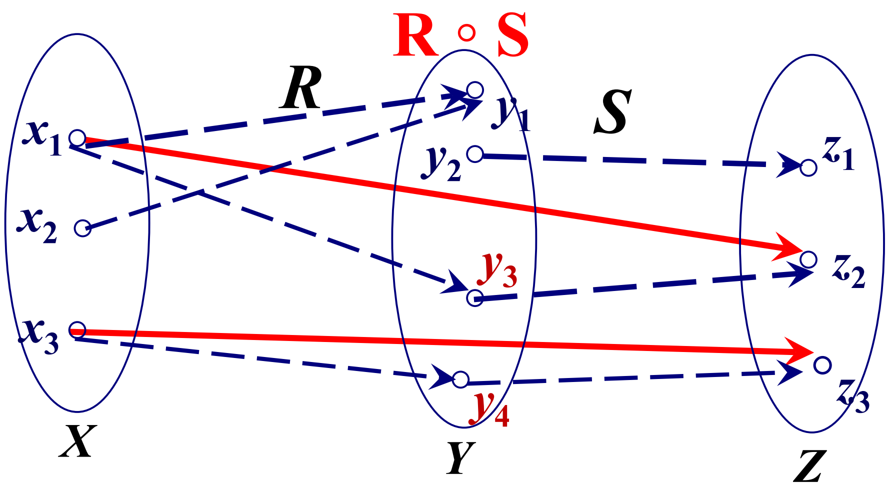


$R=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_3>,<x_2,y_1>,<x_3,y_4>\}$

$S=\{<y_2,z_1>,<y_3,z_2>,<y_4,z_3>\}$

（1）复合运算

定义12 (复合) 设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是 Y 到 Z 的关系，则 $R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists y \in Y \text{ 使得 } xRy \wedge ySz \}$ 为 X 到 Z 的关系，称为 R 和 S 的复合（或合成）关系.



$\mathrm{dom}(R\circ S) \subseteq \mathrm{dom}(R)$

$\mathrm{ran}(R\circ S) \subseteq \mathrm{ran}(S)$

$R=\{<x_1, y_1>, <x_1, y_3>, <x_2, y_1>, <x_3, y_4>\}$

$S=\{<y_2, z_1>, <y_3, z_2>, <y_4, z_3>\}$

$R\circ S=\{<x_1, z_2>, <x_3, z_3>\}$

例: 设 $R=\{<1, 2>,<2, 2>,<3, 4>\}$,

$S=\{<1, 3>,<2, 5>,<3, 1>,<4, 2>\}$.

求: $R\circ S$, $S\circ R$, $(R\circ S)\circ R$, $R\circ(S\circ R)$.

解: $R\circ S=\{<1, 5>, <2, 5>, <3, 2>\}$

$S\circ R=\{<1, 4>, <3, 2>, <4, 2>\}$

关系的复合运算
不满足交换律

$(R\circ S)\circ R=\{<3, 2>\}$

$R\circ(S\circ R)=\{<3, 2>\}$

可证：关系的复合运算满足结合律.

例: 设 R 和 S 是整数集合 I上的两个关系,

$$R=\{<x, 2x> \mid x\in I\},$$

$$S=\{<x, 7x> \mid x\in I\}$$

试求 $R\circ S$, $R\circ R$, $R\circ R\circ R$ 和 $R\circ S\circ R$.

解: $R\circ S=\{<x, 14x> \mid x\in I\}$

$R\circ R=\{<x, 4x> \mid x\in I\}$

$R\circ R\circ R=\{<x, 8x> \mid x\in I\}$

$R\circ S\circ R=\{<x, 28x> \mid x\in I\}$

例: 若R为任意集合A上的空关系或全关系，试证 $R^2=R$

（2）复合运算的性质

定理 4：设A, B, C和 D 为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$:

1) 若 $R_2 \subseteq R_3$，则 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$ 且 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$;

2) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$;

3) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$;

4) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$;

5) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$;

6) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$;

7) $(R_1 \circ R_2) \circ R_4 = R_1 \circ (R_2 \circ R_4)$.

定理 4：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$， $R_2, R_3 \subseteq B\times C$， $R_4 \subseteq C\times D$:

1) 若 $R_2 \subseteq R_3$， 则 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$ 且 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$;

证： 对任意$<x, z> \in R_1 \blacktriangle R_2$, 存在$y \in B$, 使得

$$<x, y> \in R_1 \text{且} <y, z> \in R_2.$$

由于 $R_2 \subseteq R_3$, 得$<y, z> \in R_3$,

因此 $<x, z> \in R_1 \circ R_3$.

所以 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$.

同理可证 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$.

定理 4：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$， $R_2, R_3 \subseteq B\times C$， $R_4 \subseteq C\times D$:

4) $R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$;

证: 对任意$<x, z> \in R_1\circ (R_2\cap R_3)$, 存在 $y \in B$，使得

$$<x, y> \in R_1, <y, z> \in R_2\cap R_3,$$

从而$<y, z> \in R_2$且$<y, z> \in R_3$.

因此$<x, z> \in R_1\circ R_2$， $<x, z> \in R_1\circ R_3$，得

$$<x, z> \in (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3).$$

从而$R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$.

定理 4：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

4) $R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$；

- 问题：$(R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3) \subseteq R_1\circ (R_2\cap R_3)$?

$R_1=\{<1, 2>, <1, 3>\}$,

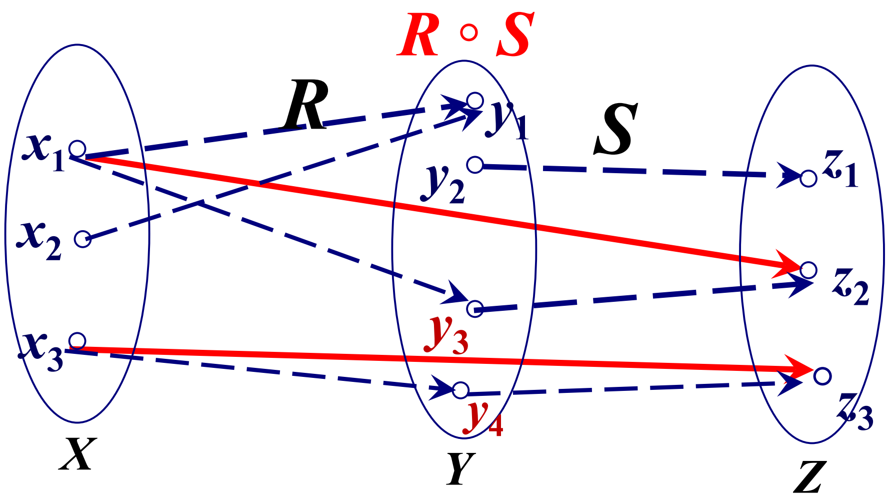
$R_2=\{<2, 4>\}$,

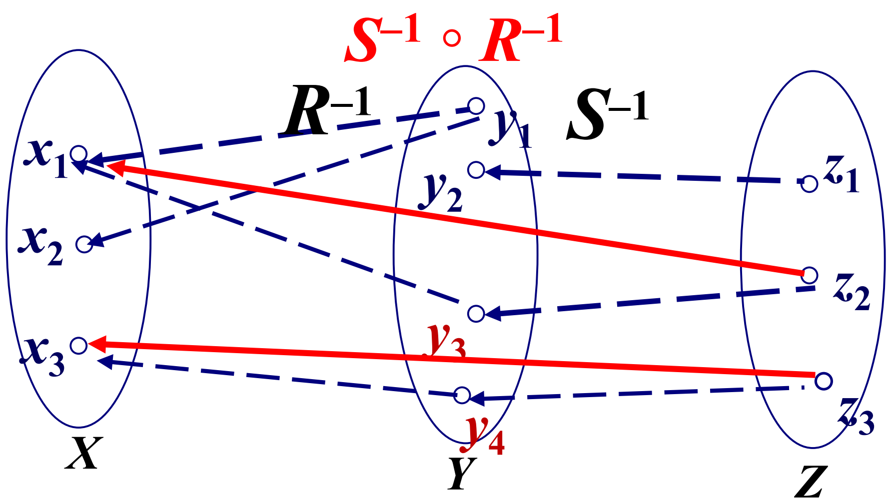
$R_3=\{<3, 4>\}$

定理 4：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

6) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$





定理 4：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

6) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

证: (6) 对于任意$<z, x>$，

$$<z, x> \in (R_1 \circ R_2)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <x, z> \in R_1 \circ R_2$$

$$\Leftrightarrow \exists y\,(<x, y> \in R_1 \land <y, z> \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists y\,(<y, x> \in R_1^{-1} \land <z, y> \in R_2^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <z, x> \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

因此，$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

定理 4：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$， $R_2, R_3 \subseteq B\times C$， $R_4 \subseteq C\times D$：

7) $(R_1\circ R_2)\circ R_4 = R_1\circ (R_2\circ R_4)$

证：(7) 对任意$<x, w>$:

$<x, w> \in (R_1 \circ R_2) \circ R_4$

$\Leftrightarrow \exists z \in C\,(<x, z> \in R_1\circ R_2 \wedge <z, w> \in R_4)$

$\Leftrightarrow \exists z \in C\,(\exists y \in B\,(<x, y> \in R_1 \wedge <y, z> \in R_2) \wedge <z, w> \in R_4)$

$\Leftrightarrow \exists y \in B(<x, y> \in R_1 \wedge \exists z \in C\,(<y, z> \in R_2 \wedge <z, w> \in R_4))$

$\Leftrightarrow \exists y \in B(<x, y> \in R_1 \wedge <y, w> \in R_2 \circ R_4)$

$\Leftrightarrow <x, w> \in R_1 \circ (R_2 \circ R_4)$

（2）复合运算的性质

定理 4：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

1) 若 $R_2 \subseteq R_3$，则 $R_1\circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$ 且 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$;

2) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1\circ R_2) \cup (R_1\circ R_3)$;

3) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2\circ R_4) \cup (R_3\circ R_4)$;

4) $R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$;

5) $(R_2\cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2\circ R_4) \cap (R_3\circ R_4)$;

6) $(R_1\circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$;

7) $(R_1\circ R_2) \circ R_4 = R_1\circ (R_2\circ R_4)$.

（3）关系的幂次

定义13. 设 R 是集合 A 上的关系，n 是自然数，R 的 n 次幂 R^n 定义如下：

(1) R^0 是集合A上的恒等关系 I_A，即 $R^0 = I_A$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$.

- $R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$

定理 5 若$n, m \in N$ 且 R 为集合A上的二元关系，则

(1) $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$;

(2) $R^n \circ R^m = R^{n+m}$;

(3) $(R^m)^n = R^{mn}$.

问题：$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^n, \ldots$是否一直无限下去？

定理 6 设有限集 A 恰有 n个元素．若 R 为 A 上的二元关系，则有 $s, t \in \mathrm{N}$, 使 $s < t \le 2^{n^2}$ 且 $R^s = R^t$ ．

证：因为A恰有n个元素，因此A上的二元关系最多有2^{n^2} 个.

所以在以下的$2^{n^2}+1$个关系

$$R^0, R^1, \ldots, R^{2^{n^2}}$$

中必有两个是相同的。

鸽巢原理（抽屉原理）

所以必有 $s, t \in \mathrm{N}$, 使$s < t \le 2^{n^2}$ 且 $R^s = R^t$.

存在性

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系．判断以下命题是否成立，给出证明或反例．

R, S	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R \circ S$	√				

解: (1) 成立.

因为R_1和R_2都是自反的, 则对任意的 $x \in A$,

有 $<x, x> \in R_1$且$<x, x> \in R_2$,

得$<x, x> \in R_1 \circ R_2$.

所以$R_1 \circ R_2$也是自反的.

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系．判断以下命题是否成立，给出证明或反例．

R, S	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R \circ S$	√				

解: (2) 不成立.

反例?

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系．判断以下命题是否成立，给出证明或反例．

R, S	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R\circ S$	√				

解：(3) 不成立．

反例：令 $A=\{1, 2, 3\}$,

$R_1=\{<1, 2>, <2, 1>\}$, $R_2=\{<2, 3>, <3, 2>\}$是对称的,

但$R_1 \circ R_2=\{<1, 3>\}$ 不是对称的

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系．判断以下命题是否成立，给出证明或反例．

R, S	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R \circ S$	√				

解：(4) 不成立．

反例?

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系．判断以下命题是否成立，给出证明或反例．

R, S	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R \circ S$	√				

解：(5) 不成立．

反例:

$R_1=\{<1, 2>, <3, 1>, <3, 2>\}$, $R_2 = \{<2, 3>, <1, 1>\}$

都是传递的，

但 $R_1 \circ R_2 = \{<1, 3>, <3, 1>, <3, 3>\}$不是传递的．

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(1) R 为自反的 当且仅当 $I_A \subseteq R$;

(2) R为反自反的 当且仅当 $I_A \cap R = \varnothing$;

(3) R 为对称的 当且仅当 $R = R^{-1}$;

(4) R 为反对称的 当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(5) R 为传递的 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(1) R 为自反的 当且仅当 $I_A \subseteq R$；

证: (1) R为自反的

$\Leftrightarrow$ 对任意的$x \in A$, 有$\langle x, x\rangle \in R$

$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$.

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(3) R 为对称的 当且仅当 $R = R^{-1}$；

(3) (必要性) 假设 R是对称的，

则对任意的$<x, y> \in R$，有 $<y, x> \in R$，

得 $<x, y> \in R^{-1}$，因此$R \subseteq R^{-1}$.

对任意的$<x, y> \in R^{-1}$，有 $<y, x> \in R$.

因为 R是对称的，所以 $<x, y> \in R$，得$R^{-1} \subseteq R$.

综上可得 $R = R^{-1}$.

(充分性)

对任意的$<x, y>\in R$, 因为$R=R^{-1}$, 因此$<x, y>\in R^{-1}$,

从而$<y, x> \in R$，得R是对称的.

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(5) R 为传递的 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

证: (5) (必要性)

对任意的$<x, z> \in R \circ R$, 一定存在$y \in$ A, 使得

$$<x, y>, <y, z> \in R.$$

由于R为传递的，必有 $<x, z> \in R$.

因此$R \circ R \subseteq R$.

(充分性)

对任意的$<x, y>, <y, z> \in R$, 有$<x, z> \in R \circ R$.

由于$R \circ R \subseteq R$，因此$<x, z> \in R$. 所以 R 为传递的

关系复合的矩阵表示：

设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$,
R 是 A 到 B 的关系，S 是 B 到 C 的关系，
关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times p}$，$M_S=(s_{ij})_{p\times n}$，$M_{R\circ S}=(t_{ij})_{m\times n}$

问题：如何由 M_R 和 M_S 直接计算 $M_{R\circ S}$？

$$<a_i, c_j>\in R\circ S \Leftrightarrow \exists b_k\in B，使得 <a_i, b_k>\in R 且 <b_k, c_j>\in S.$$

即，$t_{ij}=1 \Leftrightarrow \exists k \in\{1, 2,\ldots, p\}$ 使得 $r_{ik} \wedge s_{kj}=1$

$$\Leftrightarrow (r_{i1}\wedge s_{1j}) \vee (r_{i2}\wedge s_{2j}) \vee \ldots \vee (r_{ip}\wedge s_{pj})$$

$=1$

关系复合的矩阵表示：

设$A=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$,
R 是 A 到 B的关系，S 是 B 到 C的关系，
关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times p}$， $M_S=(s_{ij})_{p\times n}$, $M_{R\circ S}=(t_{ij})_{m\times n}$

问题：如何由 M_R 和 M_S 直接计算 $M_{R\circ S}$?

$R\circ S$ 的关系矩阵 $M_{R\cdot S}=(t_{ij})_{m\times n}$，其中

$$t_{ij}=(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\ldots\vee(r_{ip}\wedge s_{pj})$$
$$=\vee_{k=1}^{p}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

类比矩阵乘法

例：设$A=\{a, b, c, d\}$上的关系

$$R=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\},$$

求 R^2 的关系矩阵.

解：

$$M_R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.4 关系的运算——闭包

回顾：

设 R 为 A 上的二元关系：

自反闭包

对称闭包

传递闭包

- R是自反的

$\Leftrightarrow \forall x\,(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$

- R为对称的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$

- R 为传递的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\,(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R)$

（1）闭包的定义

定义14 设 R是集合 A 上的关系.

关系R'称为 R的自反（对称、传递）闭包，当且仅当 R'满足以下三个条件：

(1) R'是自反的(对称的、传递的);

(2) $R \subseteq R'$;

(3) 对于A上的任何自反（对称、传递）关系R''，

如果 $R \subseteq R''$，则 $R' \subseteq R''$.

将 R的自反，对称，传递闭包分别记作 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

- R的自反（对称、传递）闭包即为包含R 的最小自反(对称、传递)关系.

定理 7: 设R为集合A上的二元关系，则

(1) R是自反的 当且仅当 $r(R) = R$;

(2) R是对称的 当且仅当 $s(R) = R$;

(3) R是传递的 当且仅当 $t(R) = R$.

■ 问题：怎么计算闭包？

定理 8： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$;

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

定理 8： 设 R 是集合 A 上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$；

证: (1) 显然， $R \cup I_A$ 是自反的，且 $R \subseteq R \cup I_A$.

由自反闭包 $r(R)$ 的定义可知，$r(R) \subseteq R \cup I_A$.

由于 $r(R)$ 是 A 上的自反关系，

因此 $I_A \subseteq r(R)$.

又因于 $R \subseteq r(R)$, 所以 $R \cup I_A \subseteq r(R)$.

故 $r(R) = R \cup I_A$.

定理 8： 设 R 是集合A上的关系，则

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

证：(2) 显然 $R \subseteq R \cup R^{-1}$.

因为 $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$,

因此，$R \cup R^{-1}$ 是对称的.

设 R' 是A上任意对称关系且$R \subseteq R'$, 下面证明$R \cup R^{-1} \subseteq R'$.

由于 $R \subseteq R'$， 得 $R^{-1} \subseteq (R')^{-1}$.

因为 R'是对称的，所以 $(R')^{-1} = R'$,

故 $R^{-1} \subseteq R'$，所以 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$.

由对称闭包定义知，$s(R) = R \cup R^{-1}$

定理 8： 设 R 是集合A上的关系，则

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证明: (3) 首先，显然 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

下面证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的.

对任意$<x, y> \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，$<y, z> \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$,

则存在正整数 s 和 k，使得

$$<x, y> \in R^s, <y, z> \in R^k,$$

得 $<x, z> \in R^s \circ R^k = R^{s+k}$.

因此有$<x, z> \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的.

因此，由传递闭包的定义知， $t(R) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

定理 8： 设 R 是集合A上的关系，则

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证(续)：下面证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq t(R)$.

定理 9 设 A 为任意集合， $\mathcal{B}$为任意集类。

(1) 若 $B \in \mathcal{B}$， 则 $\cap\mathcal{B} \subseteq B$ 且 $B \subseteq \cup\mathcal{B}$；

(2) 若对每个$B \in \mathcal{B}$皆有$A \subseteq B$，则 $A \subseteq \cap\mathcal{B}$；

(3) 若对每个$B \in \mathcal{B}$皆有 $B \subseteq A$，则$\cup\mathcal{B} \subseteq A$。

定理 8：设 R 是集合A上的关系，则

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证(续)：下面证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq t(R)$.

只需证明对任意$n \in I_+$，皆有$R^n \subseteq t(R)$。

对n进行归纳证明：

1) $n=1$时，由传递闭包的定义知 $R \subseteq t(R)$.

2) 假设对任意的$k \in I_+$，当$n=k$时，$R^k \subseteq t(R)$.

当$n=k+1$时，证明：$R^{k+1} \subseteq t(R)$。

定理 8：设 R 是集合 A 上的关系，则

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证(续)：下面证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq t(R)$.

当 $n=k+1$ 时，证明： $R^{k+1} \subseteq t(R)$。

任取 $<x, z> \in R^{k+1}$,

由于 $R^{k+1} = R \circ R^k$,

因此，存在 $y \in A$，使 $<x, y> \in R$, $<y, z> \in R^k$.

由假设归纳知，$R \subseteq t(R)$, $R^k \subseteq t(R)$,

得 $<x, y>, <y, z> \in t(R)$.

又由于 $t(R)$ 是传递的，所以 $<x, z> \in t(R)$.

因此，$R^{k+1} \subseteq t(R)$.

归纳证明得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq t(R)$.

综上可得 $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

定理 9：设 R 是集合A上的关系，A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

证：若$n=0$, 则$t(R)= \phi = \bigcup_{i=1}^{0} R^i$

当$n>0$时，只需证：对于任意 $k \geq 0$，$R^{n+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

对 k 进行数学归纳证明：

$k=0$ 时，$R^{n+k} = R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$;

假设$m \in I_+$, 当 $k<m$时，皆有 $R^{n+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$;

下面证明$R^{n+m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

定理 9：设 R 是集合A上的关系，A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

证(续)：下面证明$R^{n+m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

任取$<x, y> \in R^{n+m}$，则存在$u_0, u_1, \ldots, u_{n+m} \in A$,使得

$u_0=x$, $u_{n+m}=y$, 且$<u_i, u_{i+1}> \in R$, $i = 0, \ldots, n+m-1$.

由于$n+m>n$, 且A中只有n个元素，

因此$u_1, \ldots, u_{n+m}$中一定有两个元素相等.

设 $u_i = u_j$ $(1 \le i < j \le n+m)$, 则有

$<u_0, u_1>, \ldots, <u_{i-1}, u_i>, <u_i, u_{j+1}>, <u_{j+1}, u_{j+2}> \ldots, <u_{n+m-1}, u_{n+m}> \in R$,

即$<u_0, u_{n+m}> = <x, y> \in R^{n+m-(j-i)}$,

由归纳知 $R^{n+m-(j-i)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$，从而$<x, y> \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$,

得$R^{n+m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。故定理成立。

小结

定理 8： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$；

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$；

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

定理 9： 设 R 是集合A上的关系， A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

例：设集合$A=\{a, b, c\}$上的关系

$$R=\{<a, b>,<b, c>,<c, c>\},$$

试求 $r(R), s(R), t(R)$.

解：$r(R) = R\cup I_A = \{<a, b>,<b, c>,<c, c>,<a, a>,<b, b>\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<a, b>,<b, c>,<c, c>,<b, a>,<c, b>\}$

$R^2=\{<a, c>,<b, c>,<c, c>\}$

$R^3=\{<a, c>,<b, c>,<c, c>\}=R^2$

$t(R) = R\cup R^2=\{<a, b>,<b, c>,<c, c>, <a, c>\}$

（2）闭包的性质

定理10：　设二元关系 R_1, R_2 是集合A上的二元关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

三个闭包运算均保持关系的包含关系

证: (1) 由$r(R_2)$的定义知，

$r(R_2)$是自反的，且$R_2 \subseteq r(R_2)$.

由于 $R_1 \subseteq R_2$，得$R_1 \subseteq r(R_2)$.

因为 $r(R_1)$是包含R_1的最小自反关系，

因此 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$.

(2) , (3) 同理可证.

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

仅自反、对称闭包运算保持关系的并

证: (1) $r(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup I_A$

$= (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A)$

$= r(R_1) \cup r(R_2)$

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证: (2) $s(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1}$

$$= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$$

$$= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1})$$

$$= s(R_1) \cup s(R_2)$$

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证: (3) 由于$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$,

由定理10知，$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$ 且

$$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2),$$

得 $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

$t(R_1 \cup R_2) \subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$?

反例： 令$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R_1=\{<1, 2>, <2, 3>\}$, $R_2=\{<3, 4>\}$,

得 $t(R_1)=\{<1,2>, <2,3>, <1, 3>\}$,

$t(R_2)=\{<3, 4>\}$,

$t(R_1) \cup t(R_2) =\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 3>\}$,

$R_1 \cup R_2 = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$

$t(R_1 \cup R_2) =\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 3>, <2, 4>, <1, 4>\}$

问题：闭包运算是否保持自反性、对称性和传递性

R	$r(R)$	$s(R)$	$t(R)$
自反性	√	√	√
对称性	√	√	√
传递性	√	?	√

问题：闭包运算是否保持自反性、对称性和传递性

定理 11：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的

证明: (1) 由于R是自反的，因此 $I_A \subseteq R$.

又由于$R \subseteq s(R), R \subseteq t(R)$,

得$I_A \subseteq s(R), I_A \subseteq t(R)$.

所以 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的.

问题：闭包运算是否保持自反性、对称性和传递性

定理 11：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则
(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；
(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；
(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的

证：(2) 因为R是对称的，因此$R=R^{-1}$.

则 $r(R)^{-1}=(R\cup I_A)^{-1} = R^{-1}\cup I_A^{-1}=R \cup I_A=r(R)$.

所以 $r(R)$是对称的.

可证明$(t(R))^{-1}= (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1}= \bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1} =\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(R^{-1}\right)^n$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n= t(R)$。（定理2）

因此$t(R)$是对称的.

问题：闭包运算是否保持自反性、对称性和传递性

定理 11：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的

证: (3) 由R是传递的，得$R \circ R \subseteq R$.

$$
\begin{aligned}
r(R) \circ r(R) &= (R \cup I_A) \circ (R \cup I_A) \\
&= (R \circ R) \cup R \cup I_A \qquad \text{(定理4)} \\
&\subseteq R \cup I_A = r(R).
\end{aligned}
$$

因此$r(R)$ 也是传递的.

问题：闭包运算是否保持自反性、对称性和传递性

定理 11： 设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的

(3) 给出一个实例, 使得 $s(R)$不是传递的：

$R = \{<1, 2>, <2,3>, <1,3>\}$

$S(R)=\{<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <3, 1>\}$

不是传递的.

问题：闭包运算是否保持自反性、对称性和传递性

定理 11：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则
(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；
(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；
(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的

问题：如何从R构造出一个满足自反性、对称性和传递性的关系？

$R \to r(R) \to s(r(R)) \to t(s(r(R)))$ √

$R \to t(R) \to s(t(R)) \to r(s(t(R)))$?

定理 12：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$.

$rs(R)=r(s(R))$

证: (1) 由于 $R \subseteq s(R)$, 得 $r(R) \subseteq rs(R)$. （定理10）

由于 $s(R)$ 是对称的，因此 $rs(R)$ 也是对称的.

由对称闭包的定义知 $sr(R) \subseteq rs(R)$.

由于 $R \subseteq r(R)$, 得 $s(R) \subseteq sr(R)$. （定理10）

由于 $r(R)$ 是自反的，因此 $sr(R)$ 也是自反的.

由自反闭包的定义知，$rs(R) \subseteq sr(R)$.

综上， $rs(R) = sr(R)$。

定理 12：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$；

(2) $rt(R) = tr(R)$；

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$.

证: (2) 由于 $R \subseteq t(R)$, 得 $r(R) \subseteq rt(R)$.

由于 $t(R)$ 是传递的，因此 $rt(R)$ 也是传递的.

由传递闭包的定义知 $tr(R) \subseteq rt(R)$.

由于 $R \subseteq r(R)$, 得 $t(R) \subseteq tr(R)$. 由于 $r(R)$ 是自反的，因此 $tr(R)$ 也是自反的.

由自反闭包的定义知 $rt(R) \subseteq tr(R)$.

故 $rt(R) = tr(R)$.

定理 12：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$.

证: (3) 由于$R \subseteq s(R)$, 得$t(R) \subseteq ts(R)$. （定理10）

由于$s(R)$是对称的，因此$ts(R)$也是对称的. （定理11）

由对称闭包的定义知 $st(R) \subseteq ts(R)$.

定理 12：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$.

问题：给出一个实例 使得 $ts(R) \not\subseteq st(R)$

$R=\{\langle 1, 2\rangle\}$,

$s(R)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$,

$ts(R)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$t(R)=\{\langle 1, 2\rangle\}$,

$st(R)=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

总结：关系的运算

1. 关系的集合运算
2. 关系的逆
3. 关系的合成
4. 关系的闭包（自反、对称、传递）

第二章 关系

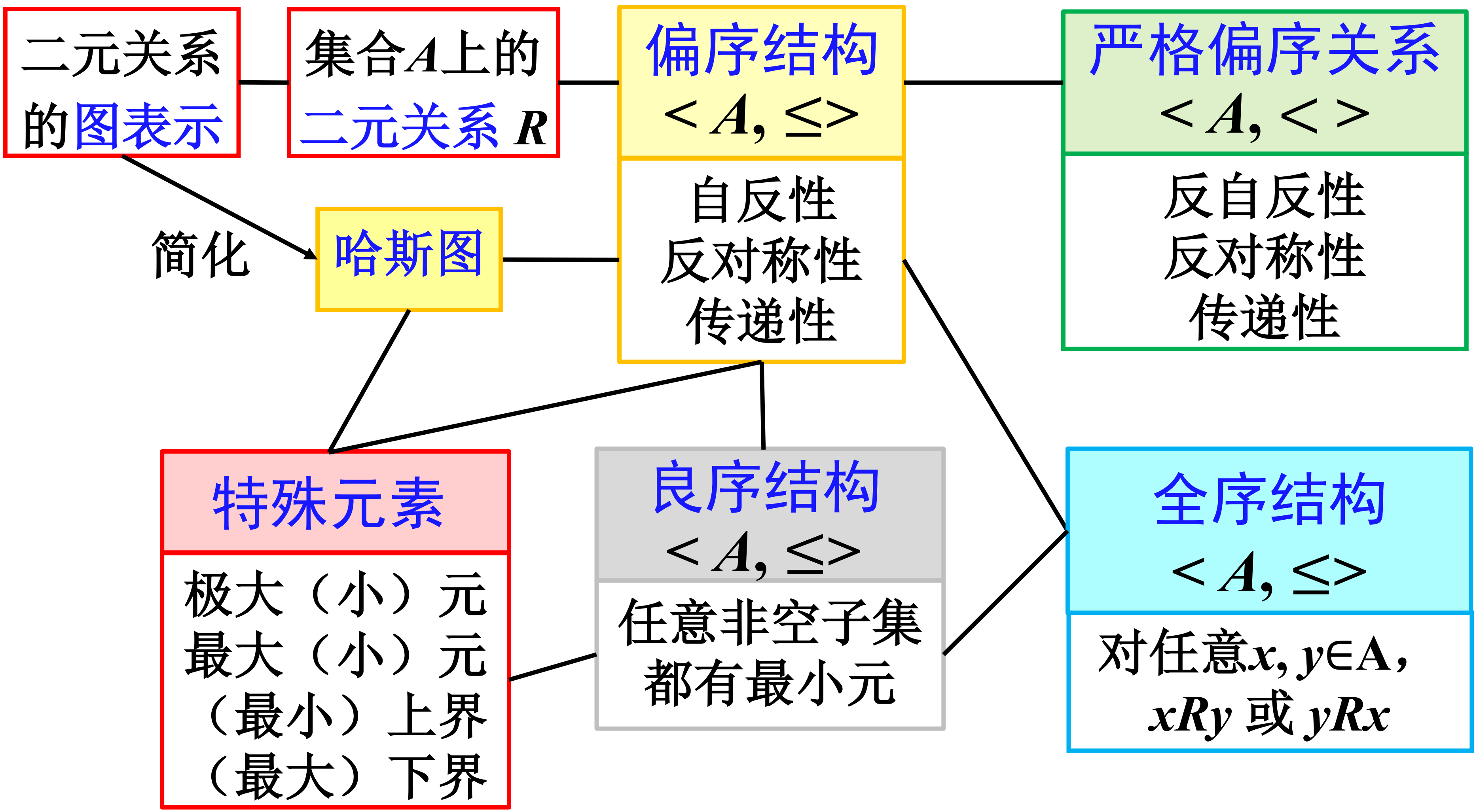
1 关系及其性质

2 关系的运算

3 次序关系

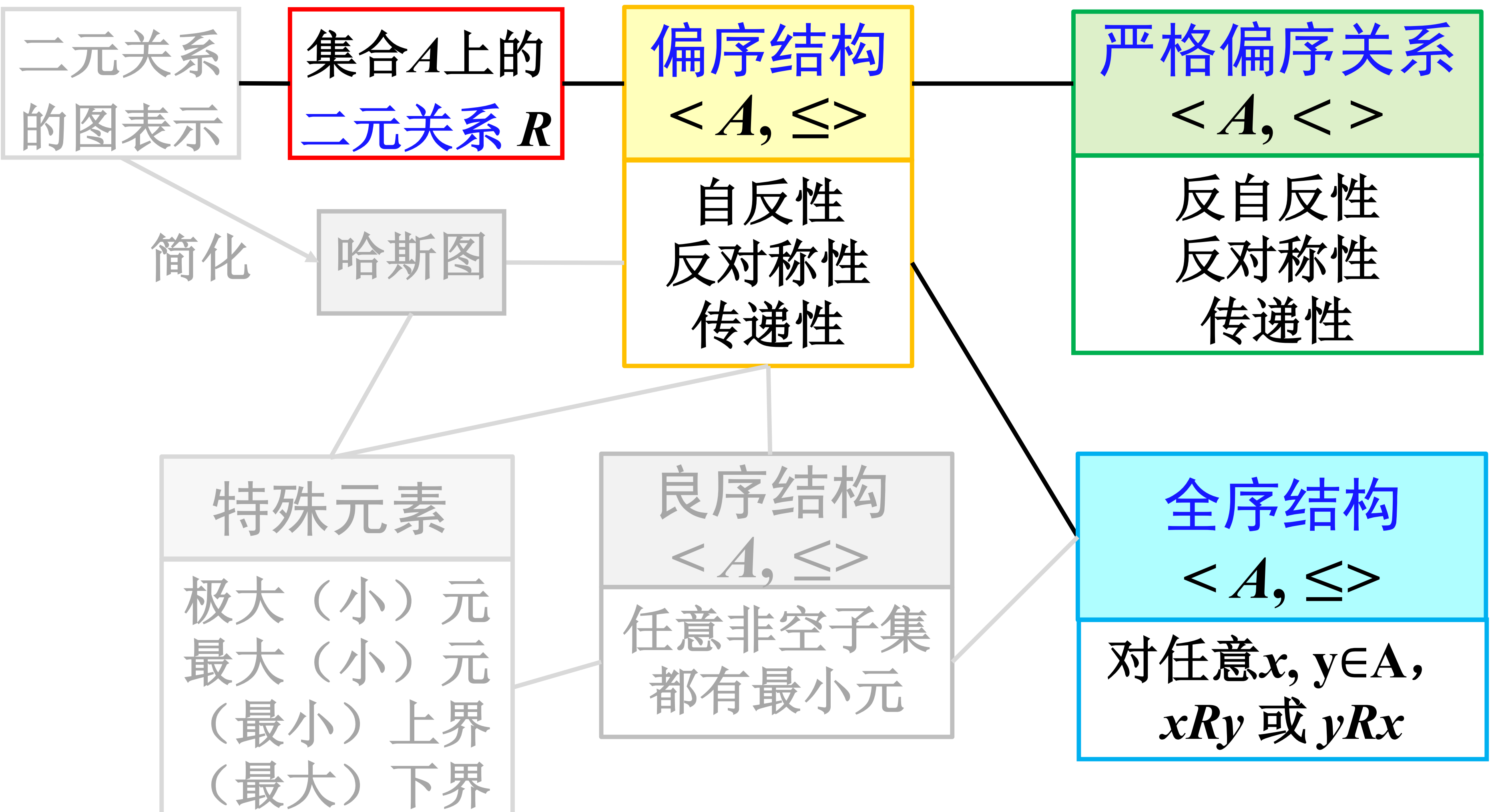
4 等价关系与划分

2.3 次序关系



二元关系的图表示
集合A上的二元关系 R
偏序结构
< A, ≤>
自反性
反对称性
传递性
严格偏序关系
< A, < >
反自反性
反对称性
传递性
简化
哈斯图
特殊元素
极大（小）元
最大（小）元
（最小）上界
（最大）下界
良序结构
< A, ≤>
任意非空子集都有最小元
全序结构
< A, ≤>
对任意x, y∈A,
xRy 或 yRx

2.3.1 偏序关系


二元关系的图表示
集合A上的二元关系 R
偏序结构 $< A, \leq >$
自反性
反对称性
传递性
严格偏序关系 $< A, < >$
反自反性
反对称性
传递性
简化
哈斯图
特殊元素
极大（小）元
最大（小）元
（最小）上界
（最大）下界
良序结构 $< A, \leq >$
任意非空子集都有最小元
全序结构 $< A, \leq >$
对任意x, y∈A, xRy 或 yRx

（1）偏序关系

定义15（偏序关系）集合 A上的二元关系 R 称为 A上的偏序关系（或半序关系），当且仅当 **R是自反的、反对称的和传递的.**

例：整数集 I 上的小于等于关系 $\leq$ 是 I 上的偏序关系

- 用“$\leq$”表示任意偏序关系，并用$\langle A, \leq \rangle$表示偏序结构
- 如果 $x, y \in A$ 且 $x \leq y$，则称“ x 小于或等于y ”或“ x 在 y 之前 ”
- 对于偏序结构 $\langle A, \leq \rangle$，$x, y \in A$，如果有$x \leq y$ 或者 $y \leq x$，称 A的元素 x 和 y 是可比的

例：以下哪些是偏序结构

(1) $< \mathbf{N}, \leq >$

(2) $< \mathbf{N}, \geq >$

(3) $< \mathcal{P}(A), \subseteq >$

(4) $< I_+, | >$

（2）全序关系

定义16（全序关系）设$<A,\leq>$是一个偏序结构，如果对于任意 $x, y \in A$，或者 $x \leq y$，或者 $y \leq x$，即 x 与 y 可比，则称 $\leq$ 为 A上的全序或 线序，并称 $<A,\leq>$ 为全序结构 或 链． 即

$$(\forall xy)\,(x\in A \wedge y\in A \rightarrow x\leq y \vee y\leq x)$$

例：考虑如下偏序结构：

$$<\mathbf{N},\leq>,\ <\mathbf{N},\geq>,\ <\mathcal{P}(\mathbf{A}),\subseteq>,\ <\mathbf{I}_+,|>$$

- $<\mathbf{N},\leq>$, $<\mathbf{N},\geq>$ 均是全序结构
- $<\mathcal{P}(\mathbf{A}),\subseteq>$, $<\mathbf{I}_+,|>$ 不是全序结构

（3）严格偏序关系

定义 17（严格偏序关系，又称拟序关系） R是集合 A 上的严格偏序关系当且仅当 R是反自反的和传递的.

- 用“<”表示 严格偏序关系，并称“ x 小于 y ”
- 称$<A, <>$为严格偏序（拟序）结构.

例: 考虑$<\mathbf{N}, <>, <\mathbf{N}, >>, <\mathcal{P}(\mathbf{A}), \subset>$,

- 均是严格偏序结构.

严格偏序关系的性质

定理13：若 R是A上严格偏序关系，则 R是反对称的.

证明：由于 R 是 A 上的严格偏序关系，因此 R是反自反和传递的。

假设 R不是反对称的，则存在 $x, y \in A$ 且 $x \neq y$，使得

$$<x, y> \in R \quad 且 <y, x> \in \mathrm{R}.$$

因为R是传递的，所以 $<x, x> \in R$，

这与 R是反自反的矛盾。

因此，假设不成立，即 R 是反对称的。

偏序关系与严格偏序关系

- 区别：　偏序：　自反、反对称、传递的

　　严格偏序：反自反、反对称、传递的

- 联系：

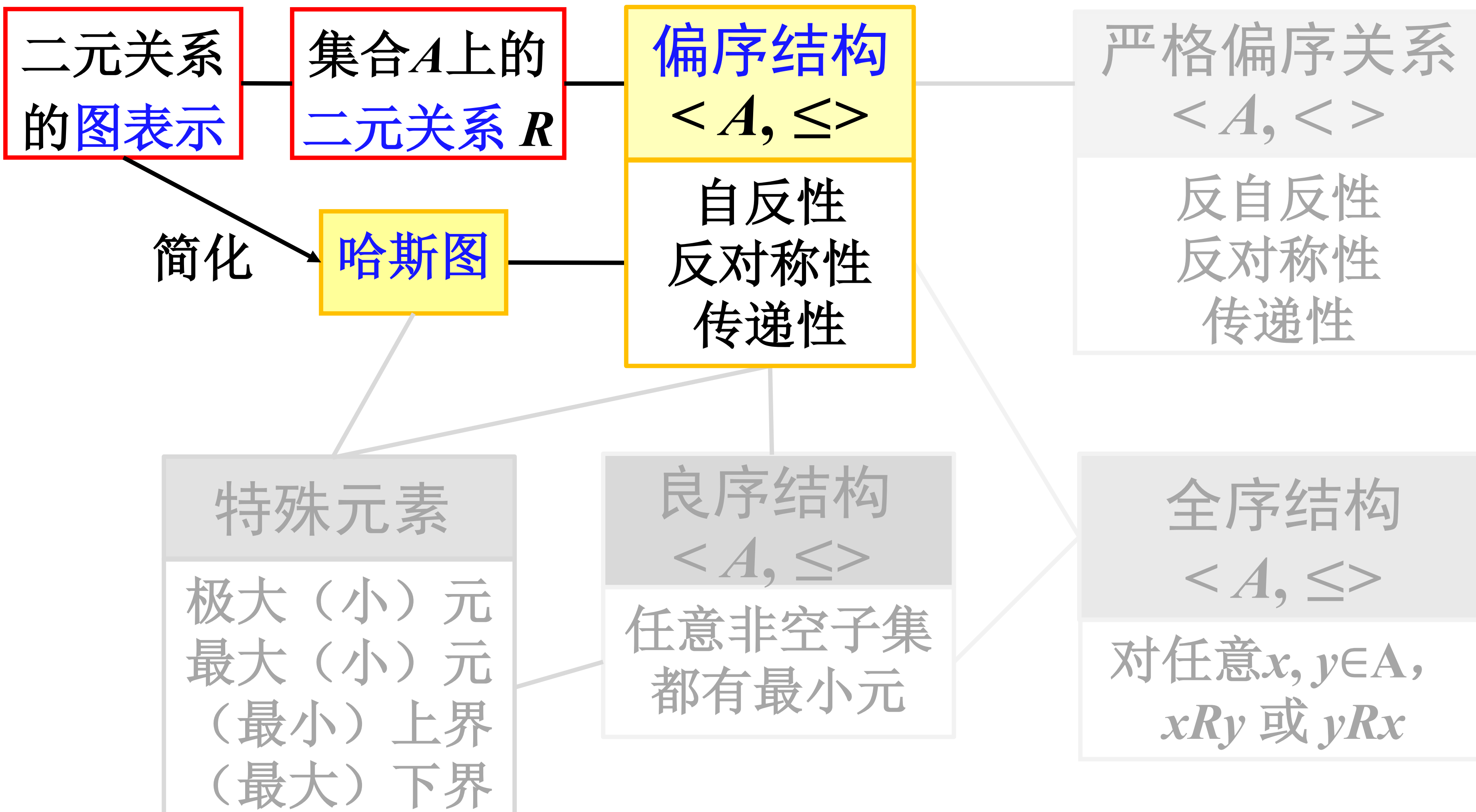
定理14: 设 R 是集合A上的二元关系.

(1)若 R 是 A 上的严格偏序关系, 则 $r(R)=R\cup I_A$是 A 上的偏序关系;

(2)若R是A上的偏序关系，则 $R-I_A$ 是A上的严格偏序关系.

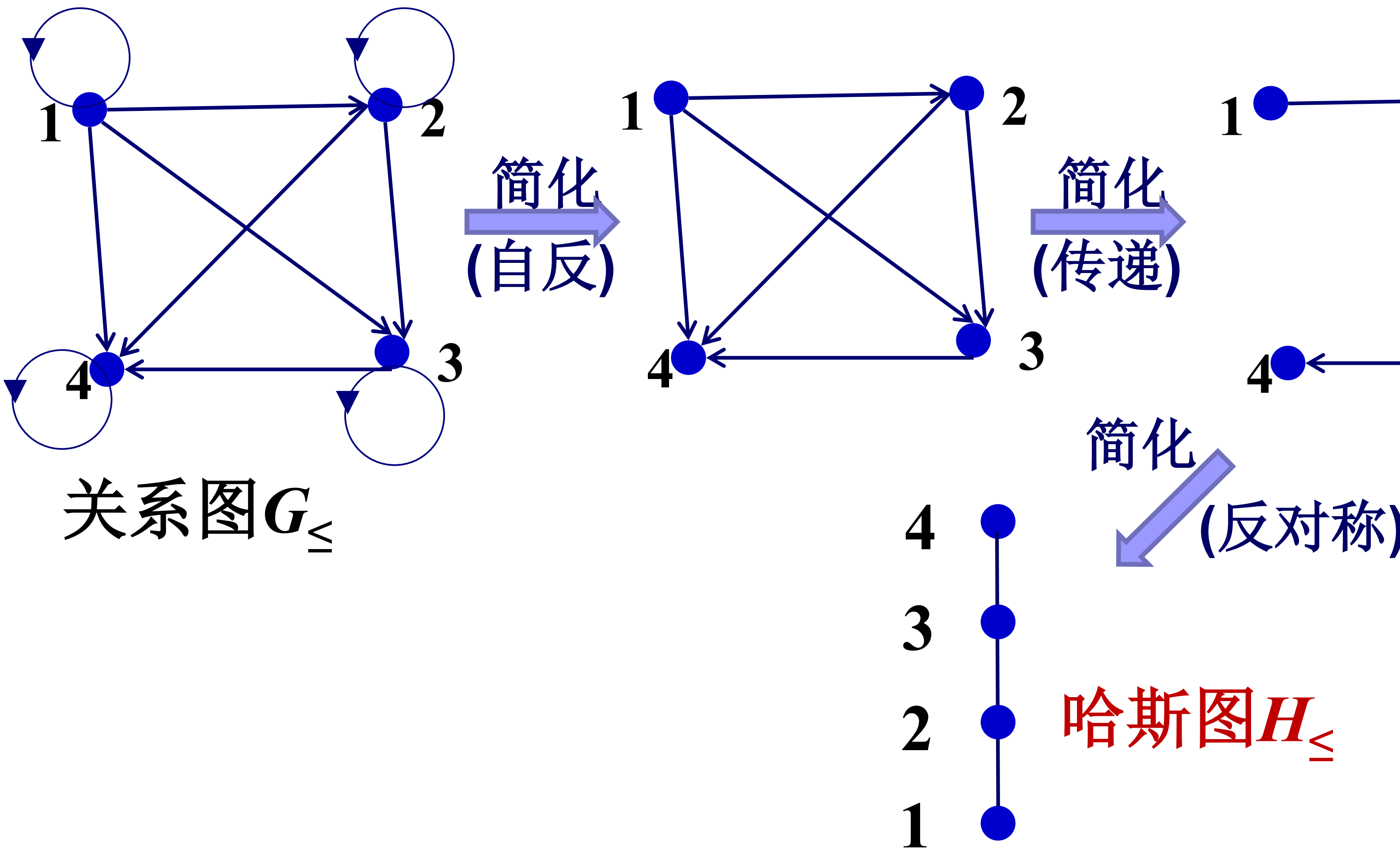
问题：既是偏序又是严格偏序的关系？空集上的空关系

2.3.2 偏序关系的简化关系图——哈斯图



2.3.2 偏序关系的简化关系图——哈斯图

例：设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$\leq$ 是 A 上的小于或等于关系.



定义18: (覆盖) 在偏序结构$<A, \leq>$中，对于任意两个元素 $x, y \in A$，如果 $x<y$ 且不存在任何其它元素 $z \in A$，使得 $x<z$ 和 $z<y$，则称 y 为 x关于$\leq$的覆盖（或遮盖），简称为 y 为 x的覆盖. 即

$$y\text{是}x\text{的覆盖} \Leftrightarrow x<y \wedge \neg\exists z\,(z \in A \wedge x<z \wedge z<y)$$

例: $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $\leq$是 A上的小于或等于关系，

则 4 是 3的覆盖，3是 2的覆盖，2 是 1的覆盖 .

若$\leq$是A上的大于或等于关系, 则上述覆盖关系恰好相反

例: 考虑下列两个偏序结构:

(1) $<\mathbf{R}, \leq>$, 其中 $\leq$ 是实数集 **R**上的小于或等于关系.

(2) $<\mathbf{N}, \leq>$, 其中 $\leq$ 是自然数集 **N**上的小于或等于关系.

(1) 任何实数都没有覆盖.

对于任意实数 $a, b \in \mathbf{R}$， 如果$a<b$，则一定有

$$a< \frac{a+b}{2} < b$$

(2) 任何自然数都有唯一的覆盖.

对于任意实数 $n \in \mathbf{N}$，$n+1$是n的覆盖.

哈斯图

设$<A, \leq>$是一个偏序结构，其哈斯图是一个无向图$H_{\leq}$，满足

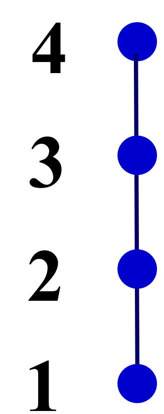
(1) 集合A的每一个元素为$H_{\leq}$中一个点，且

(2) 对于任意$x, y \in A$，

(a) 如果$x<y$，则点x画在点y之下，且

(b) 如果y覆盖x，则x和y之间存在一条无向边.

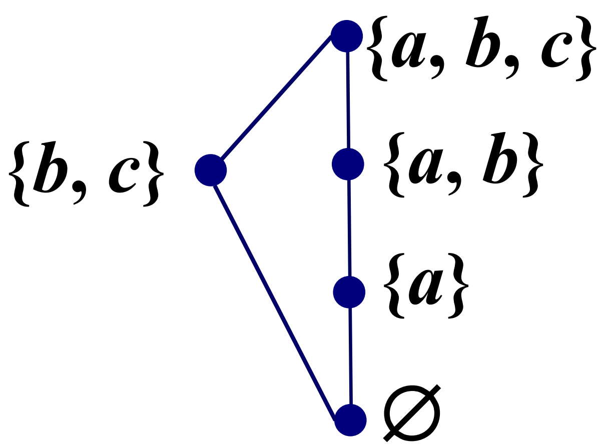
例：设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$\leq$是A上的小于或等于关系，其哈斯图为



例：画出满足下列条件的哈斯图 .

$<A, \leq>$: A＝{ $\varnothing$, $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ }，且

$\leq$ 是 A上的包含关系.



例：设 $X=\{2，3，6，12，24，36\}$，$\leq$ 为整除关系，如果 x 整除 y 则有 $x \leq y$. 画出 $<X, \leq>$ 的哈斯图 .

$\leq = \{ <2, 6>, <2, 12>, <2, 24>, <2, 36>,$

$<3, 6>, <3, 12>, <3, 24>, <3, 36>,$

$<6, 12>, <6, 24>, <6, 36>,$

$<12, 24>, <12, 36> \}$

例：设 $X = \{2，3，6，12，24，36\}$，$\leq$ 为整除关系，如果 x 整除 y 则有 $x \leq y$．画出 $<X, \leq>$ 的哈斯图．

< ={ <2, 6>, <2, 12>, <2, 24>, <2, 36>,

<3, 6>, <3, 12>, <3, 24>, <3, 36>,

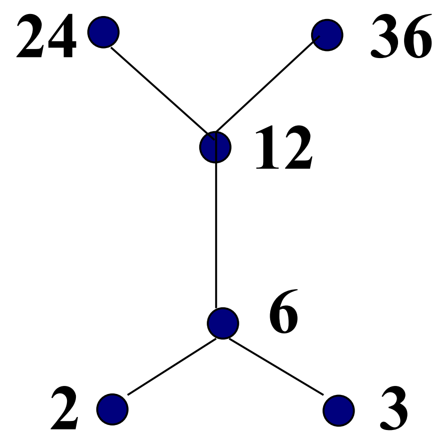
<6, 12>, <6, 24>, <6, 36>,

<12, 24>, <12, 36>}

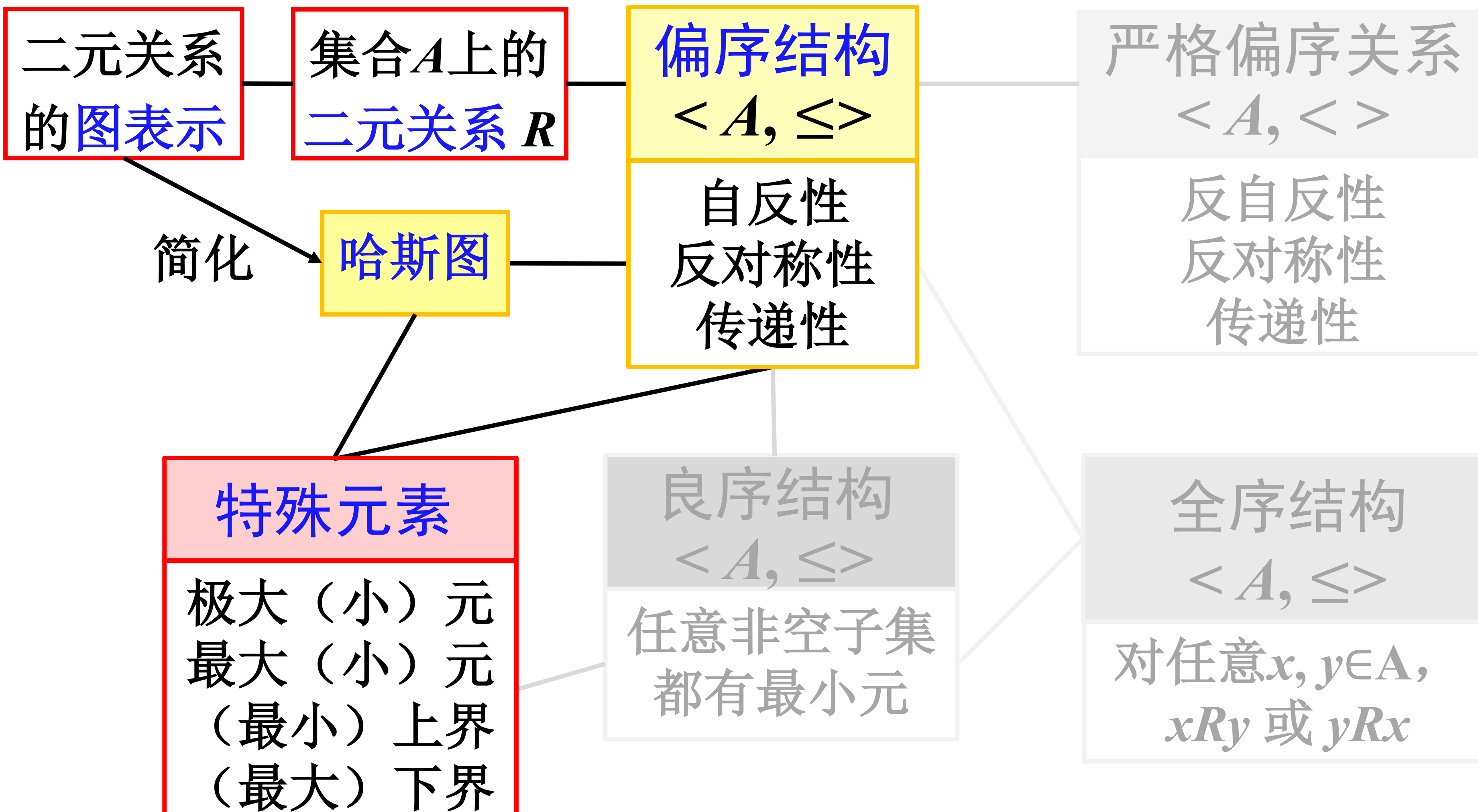
6是2和3的覆盖

12是6的覆盖

24与36是12的覆盖



2.3.3 偏序结构中的特殊元素



2.3.3 偏序结构中的特殊元素

定义19 设$<A, \leq>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \emptyset$, 则

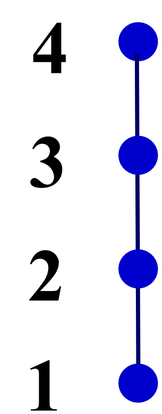
(1) b 是 S 的**最大元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow x \leq b)$

(2) b 是 S 的**最小元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow b \leq x)$

(3) b 是 S 的**极大元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge b \leq x \rightarrow x = b)$

(4) b 是 S 的**极小元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge x \leq b \rightarrow x = b)$

例. $(A, \leq)$: $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$\leq$是A上的小于或等于关系 .



A上的极大元：4　极小元：1

A上的最大元：4　最小元：1

定义19　设$<A, \leq>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \emptyset$, 则

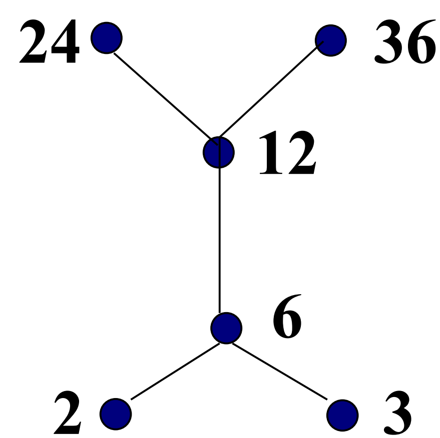
(1) b 是 S 的最大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow x \leq b)$

(2) b 是 S 的最小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow b \leq x)$

(3) b 是 S 的极大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge b \leq x \rightarrow x = b)$

(4) b 是 S 的极小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge x \leq b \rightarrow x = b)$

例: $(A, \leq)$: $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$，$\leq$ 为整除关系：如果 x 整除 y，便有 $x \leq y$.



A的极大元：24, 36

极小元：2, 3

A 无最大元，也无最小元

定义19 设$<A, \leq>$是偏序结构，并且 $S \subseteq A$，$S \neq \emptyset$, 则

(1) b 是 S 的最大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \rightarrow x \leq b)$

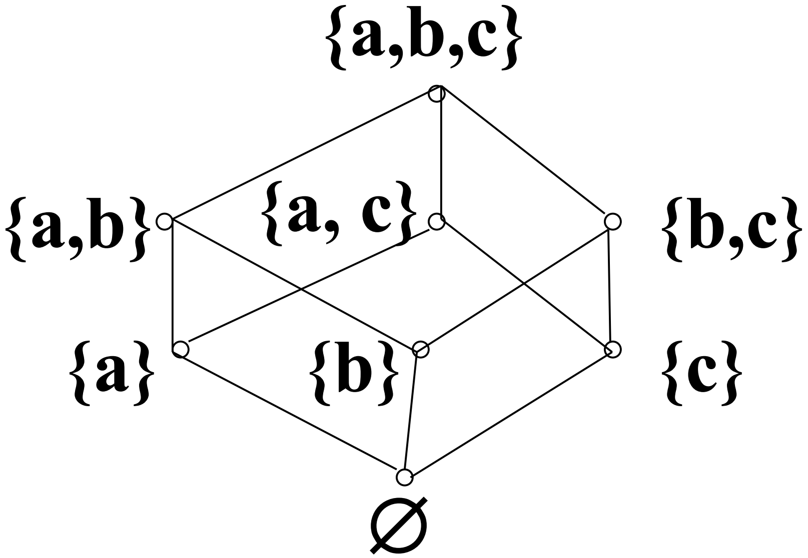
(2) b 是 S 的最小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \rightarrow b \leq x)$

(3) b 是 S 的极大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \wedge b \leq x \rightarrow x = b)$

(4) b 是 S 的极小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \wedge x \leq b \rightarrow x = b)$

- S的最大元、最小元 若存在，则唯一
- S的极大元、极小元若存在，不一定唯一
- 若 S是有穷集，则S的极大元、极小元必存在，但 S 的最大元、最小元不一定存在
- 最大元（最小元）一定是极大元（极小元）；反之不成立

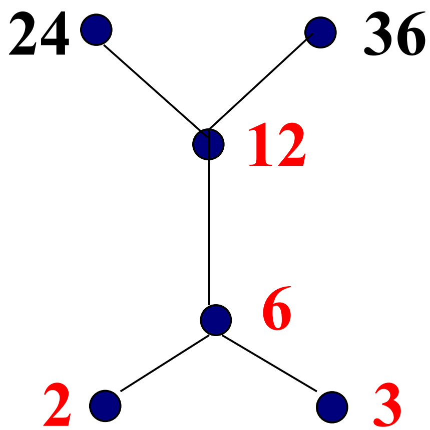
例. $<\mathcal{P}(A), \le>$： $A = \{a, b, c\}$， $\le$ 是幂集 $\mathcal{P}(A)$ 上的包含关系.



$\mathcal{P}(A)$的极大元： $\{a,b,c\}$，　　极小元： $\varnothing$

$\mathcal{P}(A)$的最大元： $\{a,b,c\}$，　　最小元： $\varnothing$

例: $(A, \leq)$: $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36\}$，$\leq$ 为整除关系，如果 x 整除 y，便有 $x \leq y$.



$S=\{2, 3, 6, 12\}$

S的最大元：12

最小元：无

极大元：12

极小元：2, 3

定义20 设$<A, \leq>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \emptyset$, 则

(1) b 是 S 的上界 $\Leftrightarrow b \in A \wedge \forall x (x \in S \to x \leq b)$

（b 是 S 的最大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \to x \leq b)$）

(2) b 是 S 的下界 $\Leftrightarrow b \in A \wedge \forall x (x \in S \to b \leq x)$

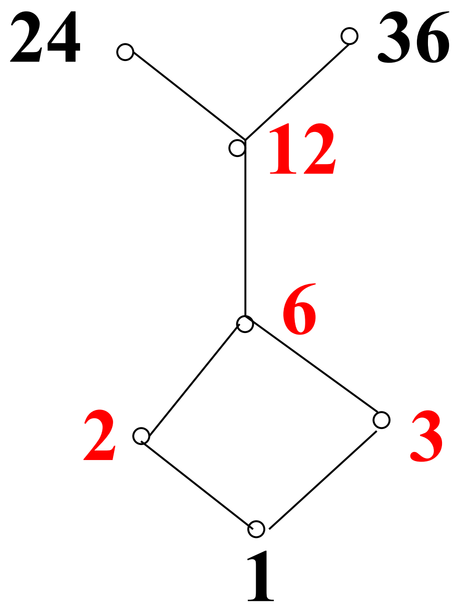
（b 是 S 的最小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \to b \leq x)$）

(3) b 是 S 的最小上界(上确界) $\Leftrightarrow$ b是S的上界, 且对S的任意上界 x， 都有 $b \leq x$.

(4) b 是 S 的最大下界(下确界) $\Leftrightarrow$ b是S的下界, 且对S的任意下界 x,都有 $x \leq b$.

- S的上界和下界可能不唯一；
- S的最小上界和最大下界若存在，则唯一.

例: $(A, \leq)$: $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36\}$，$\leq$ 为整除关系，如果 x 整除 y，便有 $x \leq y$.



设 $S=\{2, 3, 6, 12\}$

S的 极大元：12,　　极小元：2, 3

最大元：　12　　最小元：无

上界：　12, 24, 36　下界：1

最小上界：12　　　最大下界：1

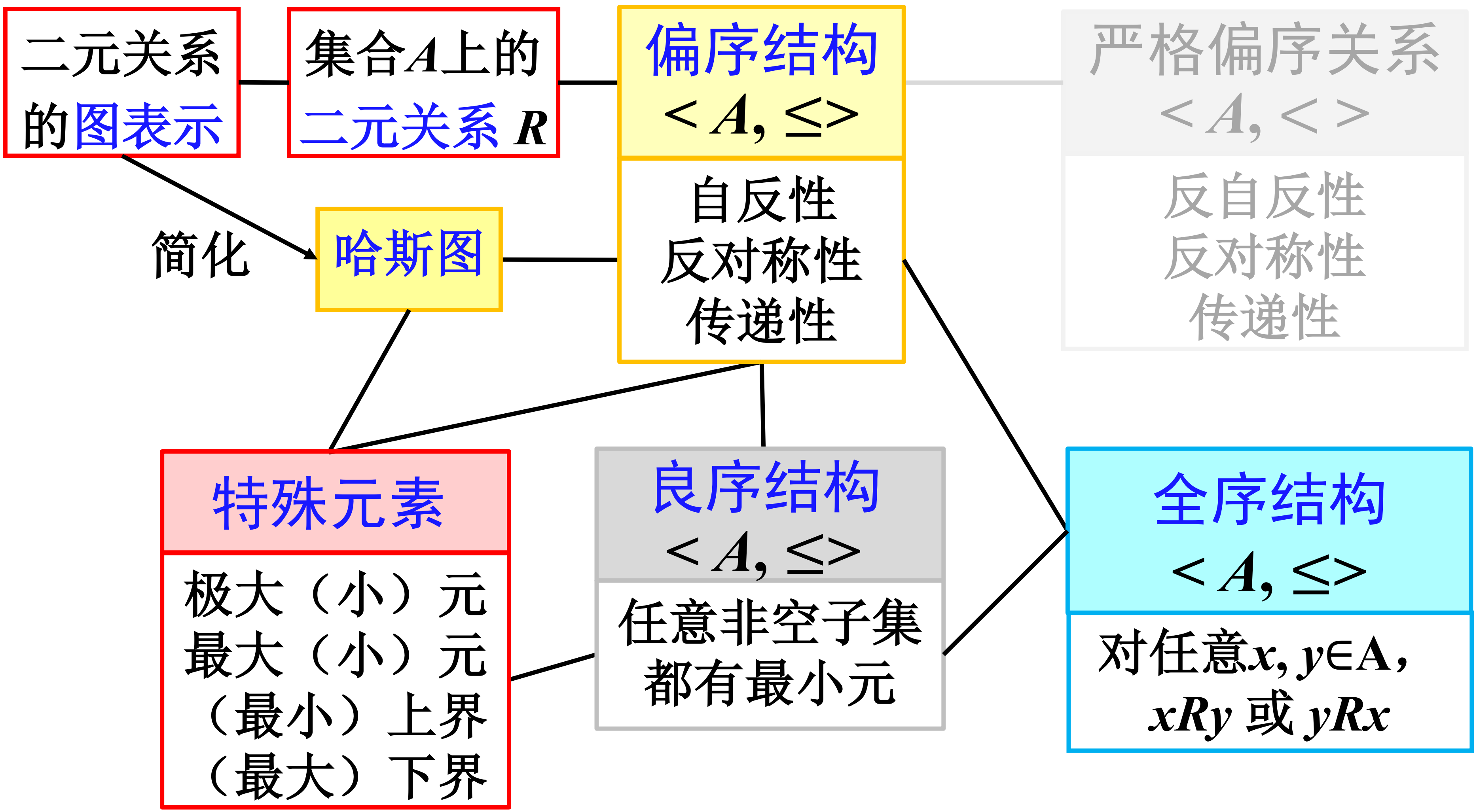
问题：A 有上界吗？

例：若 $S=\{x|\ x\in \mathbf{R}$ 且$1< x< 2\}$，$\leq$是实数集R上的小于或等于关系，给出S的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界、最大下界．

解：S 无极大元、极小元、最大元、最小元

S的最小上界为2，最大下界为1

2.3.4 良序



二元关系的图表示
集合A上的二元关系 R
偏序结构
$< A, \leq >$
自反性
反对称性
传递性
严格偏序关系
$< A, < >$
反自反性
反对称性
传递性
简化
哈斯图
特殊元素
极大（小）元
最大（小）元
（最小）上界
（最大）下界
良序结构
$< A, \leq >$
任意非空子集都有最小元
全序结构
$< A, \leq >$
对任意$x, y \in A$，xRy 或 yRx

2.3.4 良序

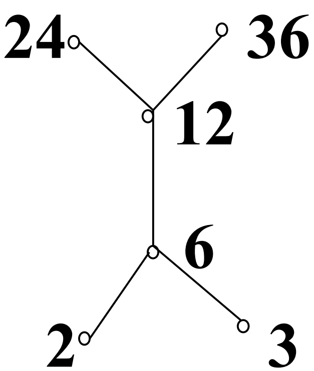
定义21（良序结构）：设有偏序结构$<A, \leq>$，如果 A 的每一个非空子集都有一个最小元，则称$\leq$为良序关系，$<A, \leq>$为良序结构．

- 良序关系一定是全序关系，反之不一定成立
- 有穷的全序关系一定是良序关系（？？）

例: $<A, \leq>$: $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$，

$\leq$为整除关系，如果 x 整除 y，便有 $x \leq y$.

$<A, \leq>$不是全序，也不是良序结构.



例：证明 $<\mathrm{N}, \leq>$ 是良序结构

证明：任取N的非空子集 A，下面证明A一定有最小元.

任取$m \in A$, 构造 $S=\{ i \mid i \in A$ 且 $i \leq m\}$，则有

$$S \subseteq \mathrm{N}, \text{且} m \in S.$$

可证，若S有最小元a，则a必为A的最小元（请补充）.

因此，只需证 S 有最小元.

例：证明 $<\mathrm{N}, \leq>$ 是良序结构

证明（续）： 下面对$|S|$ 进行数学归纳：

当$|S|=1$时，$S=\{m\}$，此时m为S的最小元；

假设对任意的$k \in \mathrm{I}_+$, 结论成立， 即此时 S 有最小元。

当$|S|=k+1$时，任取$b \in S$, 有$S-\{b\}$只有k个元素，

因此由归纳假设$S-\{b\}$必有最小元，设为c,

则 b 与 c 中的最小值 必为 S 的最小元.

即结论对 $k+1$ 时成立.

由归纳假设知， S 一定有最小元。

综上，$<\mathrm{N}, \leq>$ 是良序结构 .

例：判断 $<\mathbf{I}, \leq>$、$<\mathbf{Q}_+, \leq>$、$<\mathbf{R}_+, \leq>$ 是否为良序结构.

解：(1) $<\mathbf{I}, \leq>$ 不是良序结构：

负整数集合没有最小元。

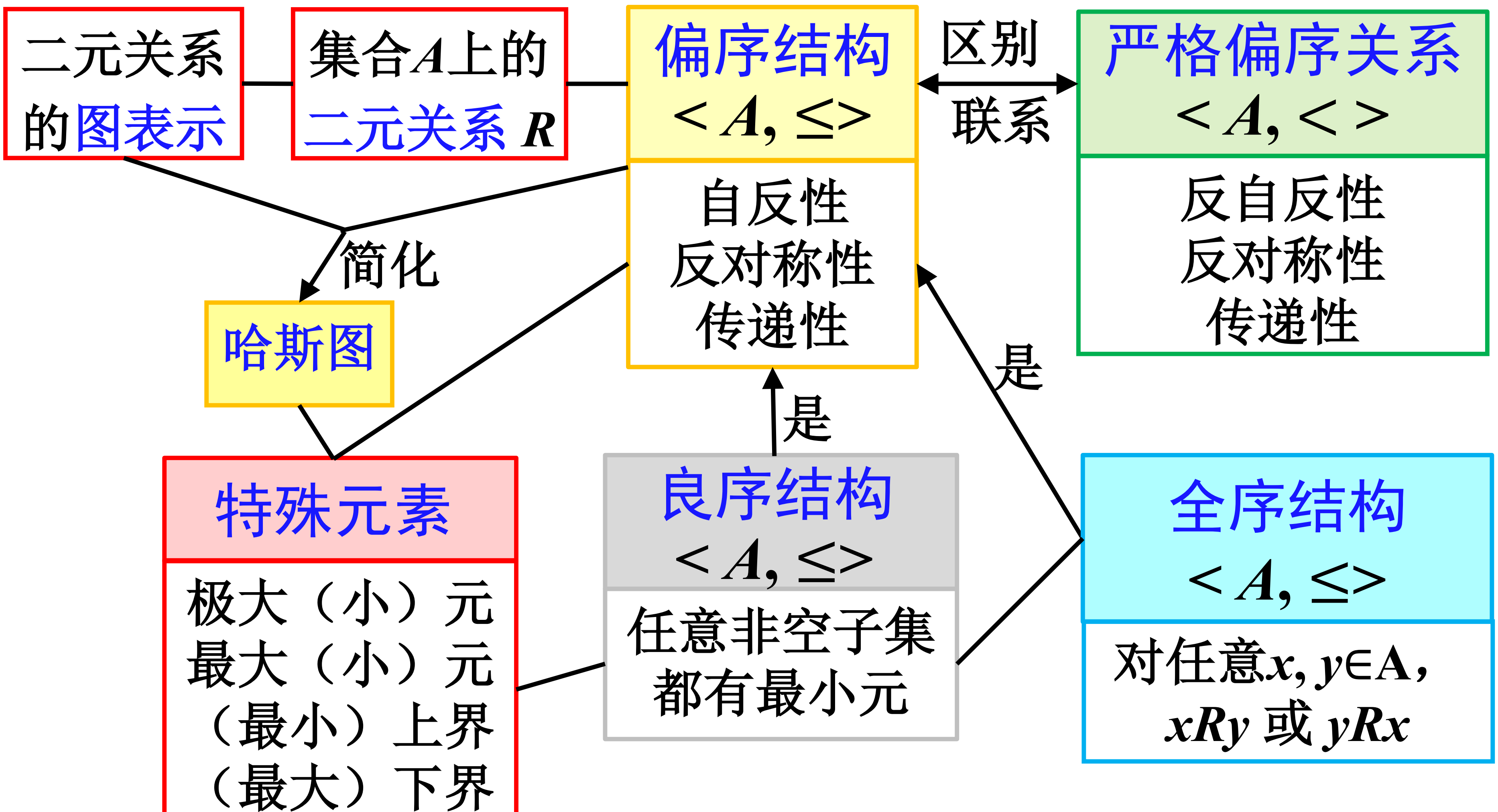
(2) $<\mathbf{Q}_+, \leq>$ 不是良序结构：

$\mathbf{Q}_+$ 无最小元，$\{\frac{1}{2^n} | n \in \mathbf{I}_+\}$没有最小元。

(3) $<\mathbf{R}_+, \leq>$ 不是良序结构：

$\mathbf{Q}_+$ 无最小元，$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$无最小元。

2.3 次序关系



二元关系的图表示
集合A上的二元关系 R
偏序结构
$< A, \leq >$
自反性
反对称性
传递性
区别
联系
严格偏序关系
$< A, < >$
反自反性
反对称性
传递性
简化
哈斯图
特殊元素
极大（小）元
最大（小）元
（最小）上界
（最大）下界
是
良序结构
$< A, \leq >$
任意非空子集都有最小元
是
全序结构
$< A, \leq >$
对任意$x, y \in A$，xRy 或 yRx

良序的充要条件

定理15 若 $<A, \le>$为偏序结构， $<A, \le>$是良序结构的充要条件是:

(1) $\le$ 为A上的全序关系；且

(2) A 的每个非空子集都有极小元.

定理16 设$<A, \le>$为全序结构，则$<A, \le>$是良序结构的充要条件是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

使得对每个 $i \in \mathbf{N}$，皆有 $a_{i+1} < a_i$. 即不存在 A 中元素的无穷递降序列.

定理15 若 $<A, \leq>$为偏序结构， $<A, \leq>$是良序结构的充要条件是：

(1) $\leq$ 为A上的全序关系；且

(2) A 的每个非空子集都有极小元.

证: (必要性) 设$<A, \leq>$是良序结构，

则对任意的$x, y \in A$, $\{x, y\}$有最小元.

若最小元为x, 则有$x \leq y$; 若最小元为y, 则$y \leq x$,

所以$\leq$为A上的全序关系.

因为$\leq$为A上良序关系，因此A的每个非空子集都有最小元，即有极小元.

定理15 若 $<A, \leq>$为偏序结构， $<A, \leq>$是良序结构的充要条件是:

(1) $\leq$ 为A上的全序关系；且

(2) A 的每个非空子集都有极小元.

证: (充分性) 设S为A的任意非空子集，且a 为 S 的极小元。

下面证明 a 为 S 的最小元.

对任意 $x \in S$, 由于 $\leq$ 为 A上的全序关系,

所以有$x \leq a$或 $a \leq x$.

当$x \leq a$ 时，因为a为 极小元，所以 $x=a$,

因此，必有$a \leq x$.

从而 a 为 S 的最小元.

因此， $\leq$ 为A上良序关系.

定理16 设$<A, \leq>$为全序结构，则$<A, \leq>$是良序结构的充要条件是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ \cdots,$$

使得对每个 $i \in \mathrm{N}$，皆有 $a_{i+1} < a_i$. 即不存在 A 中元素的无穷递降序列.

例：$< \mathrm{N}, \leq >$ 是良序结构.

$< \mathrm{I}, \leq >$ 不是良序结构.

定理16 设$<A, \leq>$为全序结构，则$<A, \leq>$是良序结构的充要条件是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

使得对每个 $i \in \mathrm{N}$，皆有 $a_{i+1} < a_i$. 即不存在 A 中元素的无穷递降序列.

证：(必要性) 反证法.

假设存在 A 中元素的无穷递降序列 $a_0, a_1, a_2, \ldots,$

令 S 为包含该无穷序列的所有元素的集合，

则 S为 A 的非空子集.

显然，S 无最小元，与A是良序矛盾.

定理16 设$<A, \leq>$为全序结构，则$<A, \leq>$是良序结构的充要条件是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ \ldots,$$

使得对每个 $i \in \mathbf{N}$，皆有 $a_{i+1} < a_i$. 即不存在 A 中元素的无穷递降序列.

证:(充分性) 反证法. 假设$<A, \leq>$不是良序结构，则存在一个非空子集 S 无最小元.

任取 $a_0 \in S$, 因为 a_0 不是 S 的最小元，且$\leq$为A 上的全序关系，因此必存在 $a_1 \in S$, 使得$a_1 < a_0$.

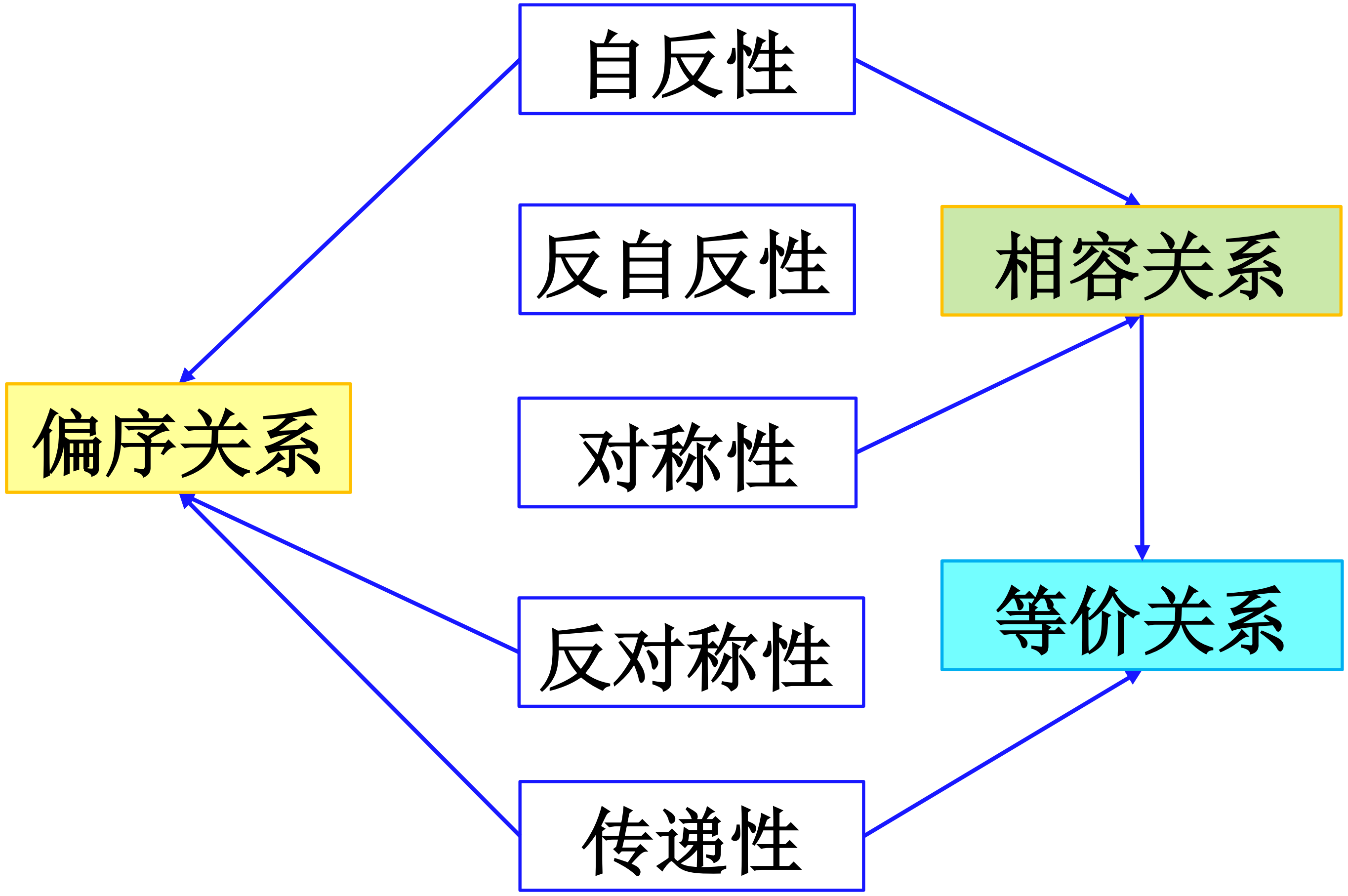
同理，对任意的$n \in \mathbf{N}$, 如果有$a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$, 满足 $a_n < a_{n-1} < \ldots < a_1 < a_0$, 因为$a_n$不是最小元且$\leq$是全序关系，因此必存在$a_{n+1} \in S$, 使得$a_{n+1} < a_n$.

由归纳法可得，存在一个无穷递降序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$，矛盾。

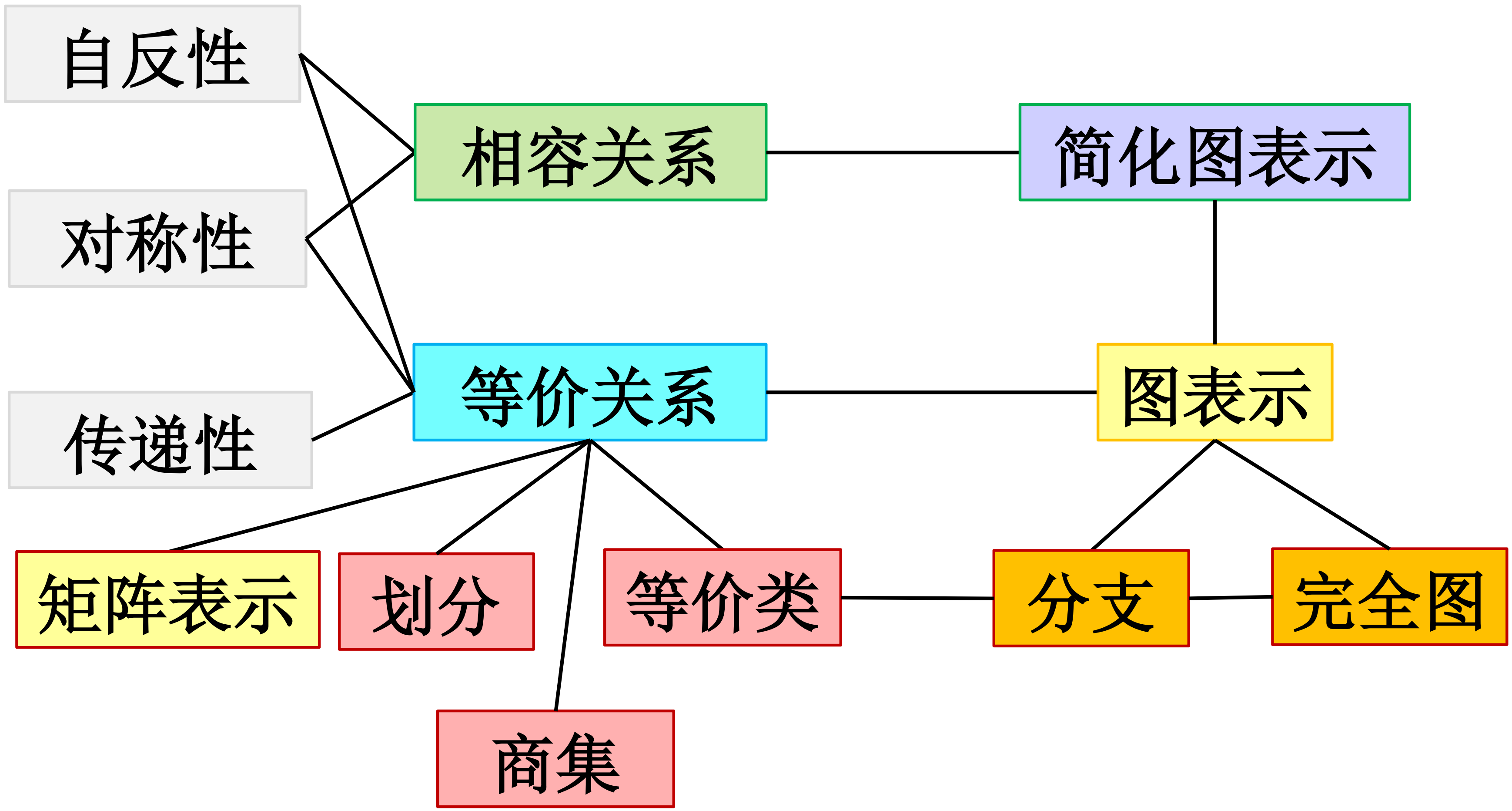
小结

- 偏序关系、严格偏序、全序
- 偏序关系的简化图表示：哈斯图
- 偏序集合中的特殊元素
  - 极大（小）元、最大（小）元、上界、下界、最小上界、最大下界
- 良序

2.4 等价关系与划分



2.4 等价关系与划分



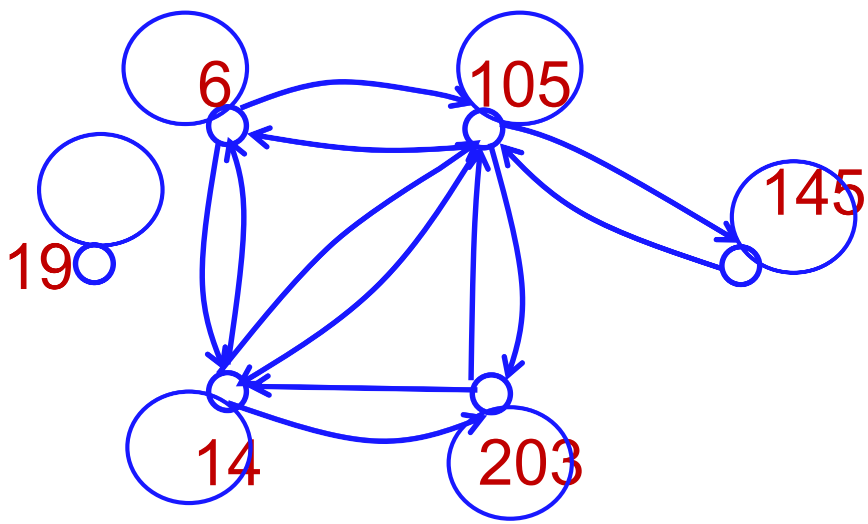
（1）相容关系

定义 (相容关系) 如果集合A上的关系 R 是自反和对称的，则称 R 为 A 上的相容关系．若 xRy, 则称 x 和 y 相容； 否则称 x 和 y 不相容．

例. 设A={6, 14, 19, 105, 145, 203}，并取

$$R=\{ \langle x, y\rangle \mid x, y \in A \text{且} (x, y)>1 \},$$

其中(x, y) 表示 x 和 y最大公因子. R是A上的相容关系.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 对称矩阵
- 主对角上元素全部为1

相容关系的简化关系矩阵与简化关系图

设 R 为非空有限集 $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 上的相容关系.

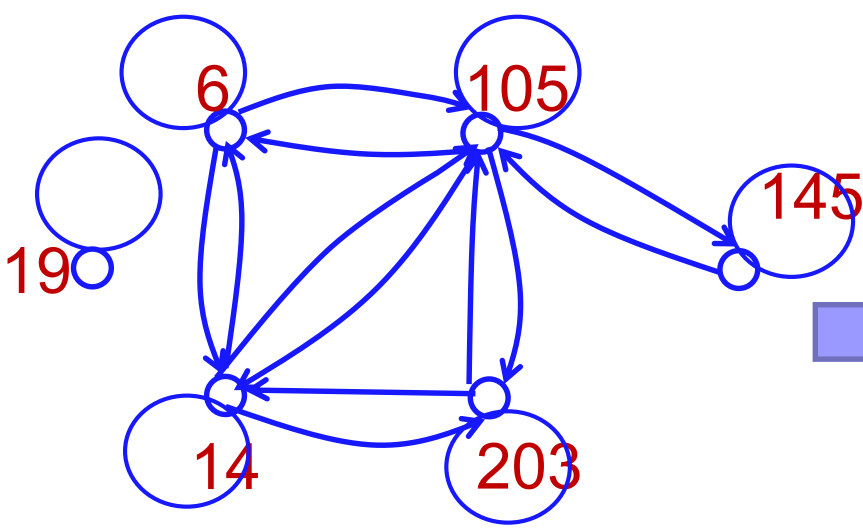
- 关系矩阵 M_R:
  - 主对角线上全为1
  - 对称矩阵
- 简化关系矩阵
  - 只需知道 M_R 对角线以下的元素

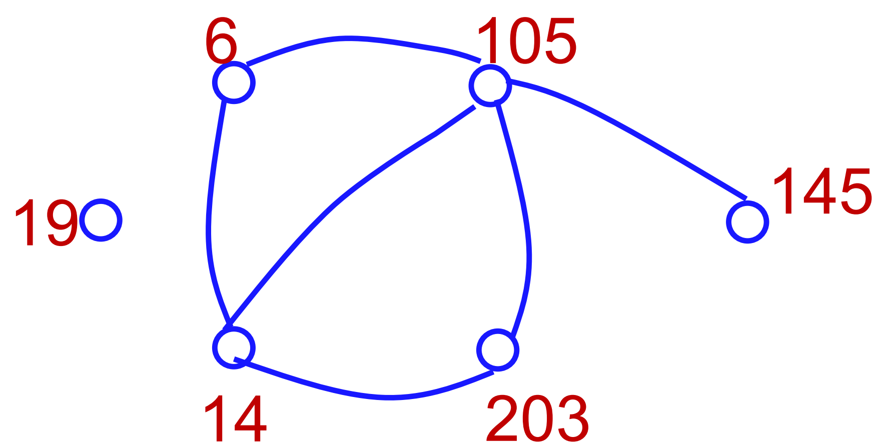
$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

关系矩阵 M_R

相容关系的简化关系矩阵与简化关系图

- 关系图G_R:
  - 每个结点有自环
  - 任意两个不同结点间不会仅有单向边
- 简化关系图
  - 去掉自环，并把每对反向边改为一条无向边





（2）等价关系

定义22 (等价关系) 如果集合A上的关系R是自反、对称、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系.

- 假设 R是等价关系，对任意 $x, y \in A$, 如果 xRy, 则称 x 与 y 等价，记为 $x \approx_R y$, 常简记为 $x \approx y$.

例. 以下关系都是等价关系：

(1) 实数集 R上的普通的相等关系；

(2) 集合A的幂集$\mathcal{P}(A)$ 上的集合相等关系；

(3) 平面上的直线的集合上的直线间的平行关系；

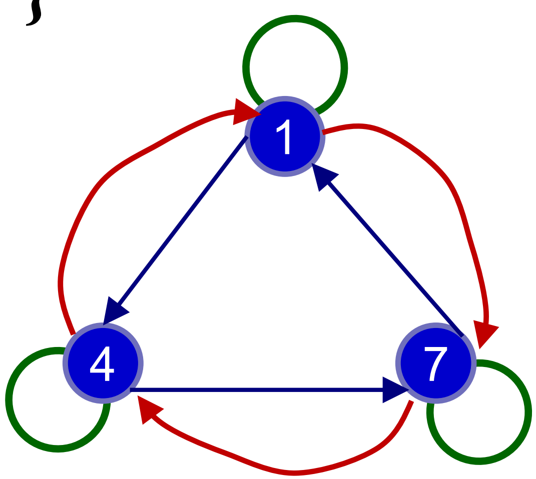
(4) 中国城市居民中，人们同住在一个城市内的关系.

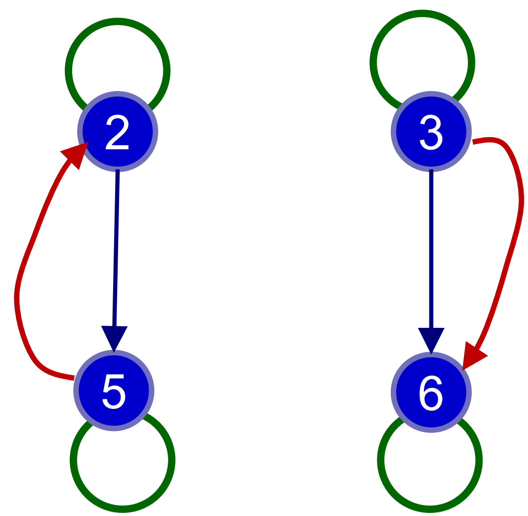
例. 设 R 是集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 上的关系，且 $R = \{<x, y>|\ x\in A \wedge y\in A \wedge 3|(x-y)\}$ (模3同余关系)

证明 R 是一个等价关系，并画出其关系图.

证明（略）.

R={ <1, 1>, <2, 2>,<3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <7, 7>,
<1, 4>, <4, 1>, <2, 5>, <5, 2>, <3, 6>, <6, 3>, <4, 7>,
<7, 4>}





更一般的结论：

例：设集合 X 是整数集合 I 的任意子集，证明：

X上的 模m 同余关系 是 等价关系.

定理17. 如果 R 为集合A上的二元关系，则R为A上的等价关系的充要条件为 $r(R) = s(R) = t(R) = R$.

- R为A上的等价关系当且仅当 R 的自反、对称和传递闭包都是R自身.

定理18. 如果 R 为集合 A上的二元关系，则 $tsr(R)$, $trs(R)$ 和 $rts(R)$ 都是A上的等价关系.

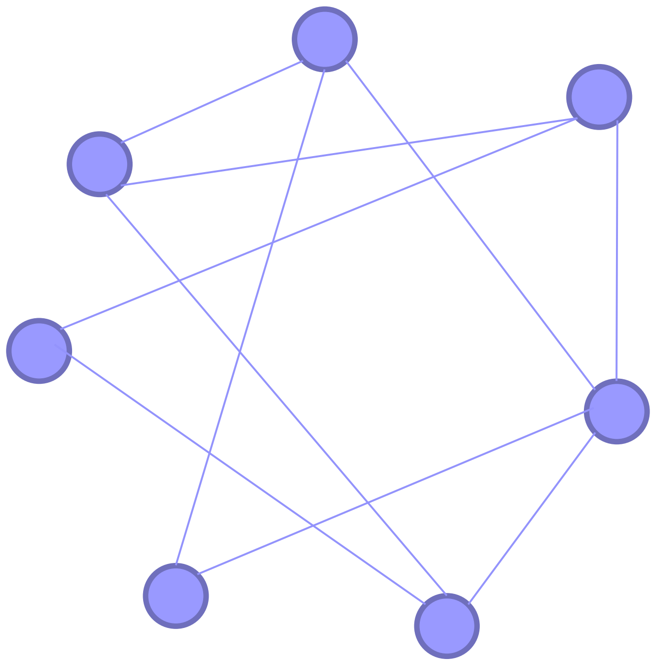
证明. 由以下定理即可证明：

定理 11：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则
(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；
(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；
(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的

（3）等价关系的图表示

- 无向图的几个概念：

✓ 子图：如果图G_1的每个结点和每条边都分别为图G_2的结点和边，称G_1为G_2的子图；

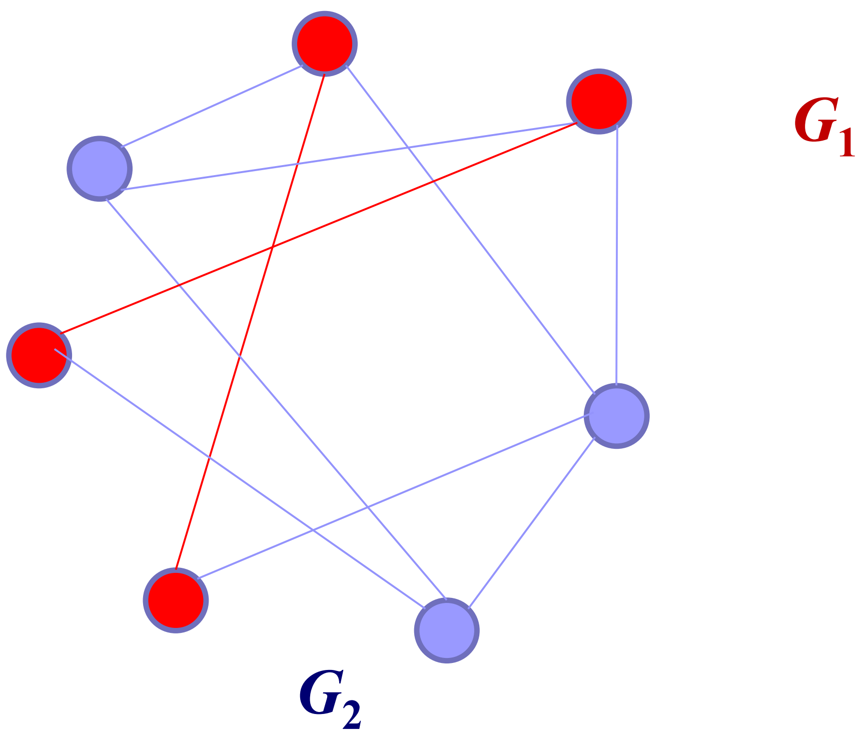


G_2

（3）等价关系的图表示

- 无向图的几个概念：

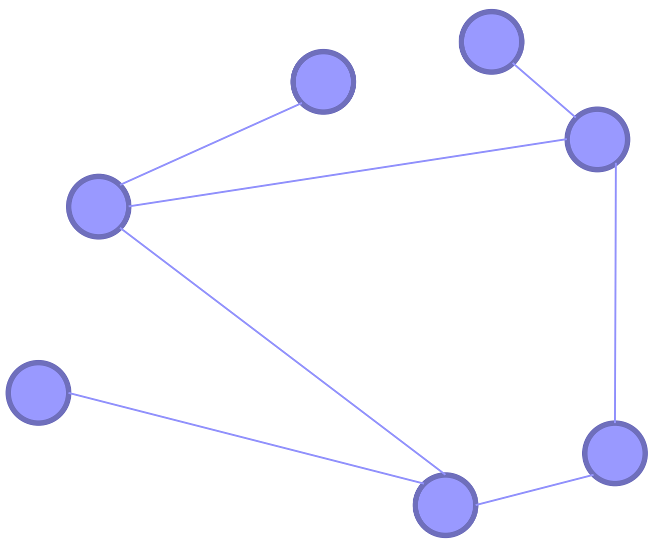
✓ 子图：如果图G_1的每个结点和每条边都分别为图G_2的结点和边，称G_1为G_2的子图；



（3）等价关系的图表示

- 无向图的几个概念：
- ✓ 连通图：若对图G的任意两个不同的结点 a 和 b, 皆有G的有限个结点，如 $a=u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n=b$, 使得对每个$i\in\{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$, 皆有一条连接 u_i 与 u_{i+1} 的边，就称G为连通的.

任意两点间有一条路径

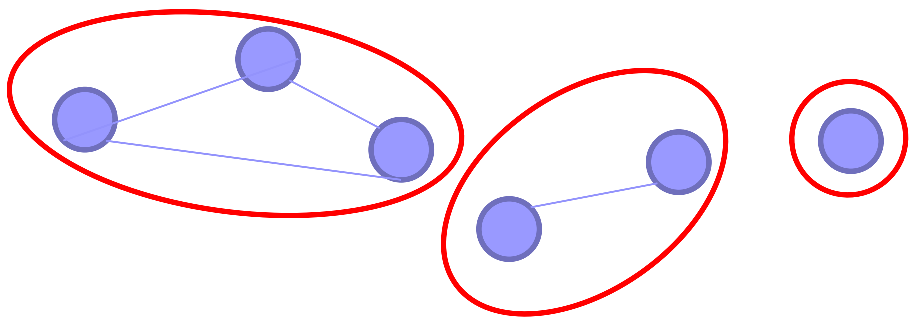


（3）等价关系的图表示

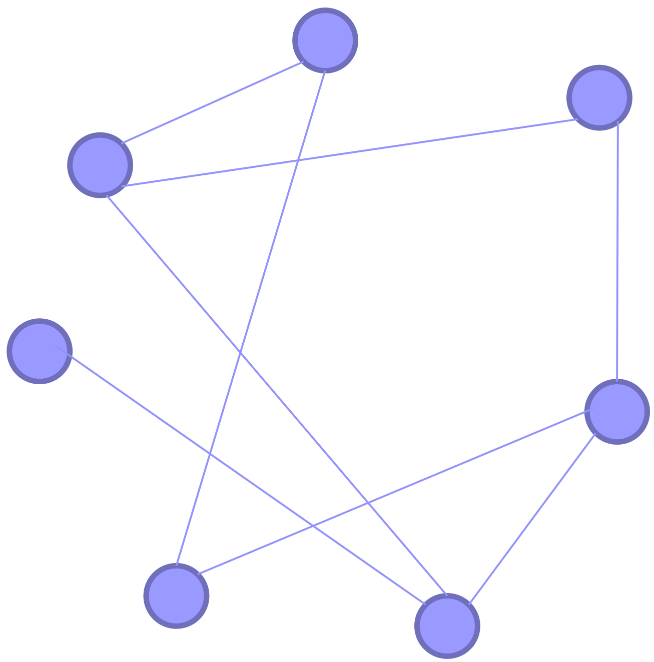
- 无向图的几个概念：

✓ 分支：图G的最大连通子图称为G的分支

- 无法再扩展为图G的更大的连通子图

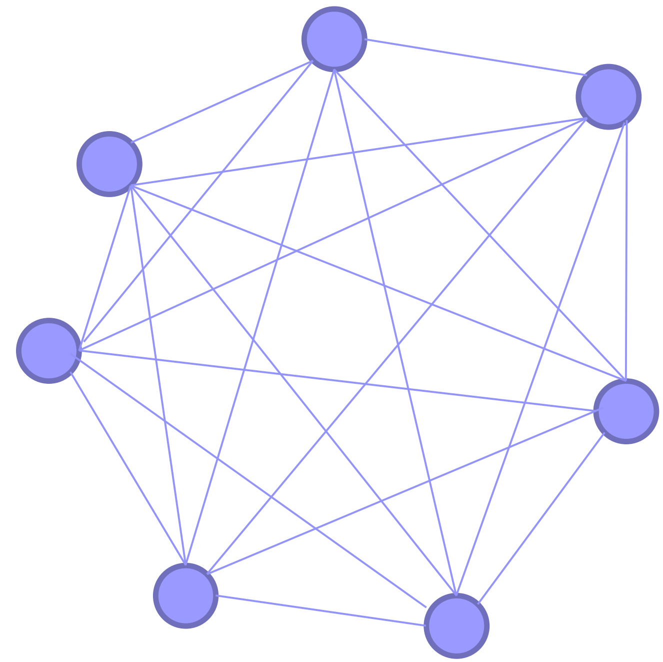


✓ 完全图：若图G的任意两个不同的结点，都有一条连接它们的边，就称G为完全图。



连通图

任意两个不同的结点，都有一条连接它们的路径



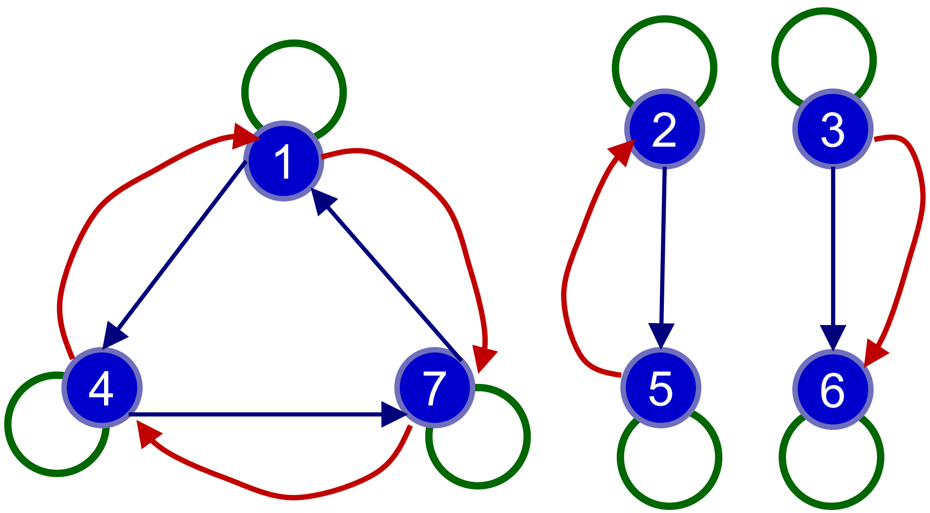
完全图

任意两个不同的结点，都有一条连接它们的边

定理19 若R为非空有限集A上的二元关系，则R为A上的等价关系的充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图.

传递性

自反性、对称性

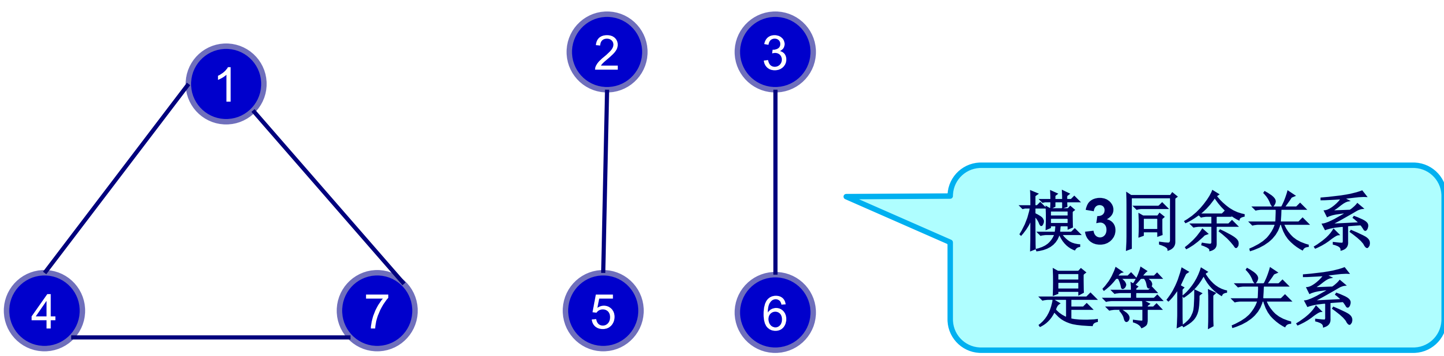


模3同余关系的关系图

定理19 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系的充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图.

传递性

自反性、对称性



模3同余关系的简化关系图

定理19 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系的充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图.

传递性

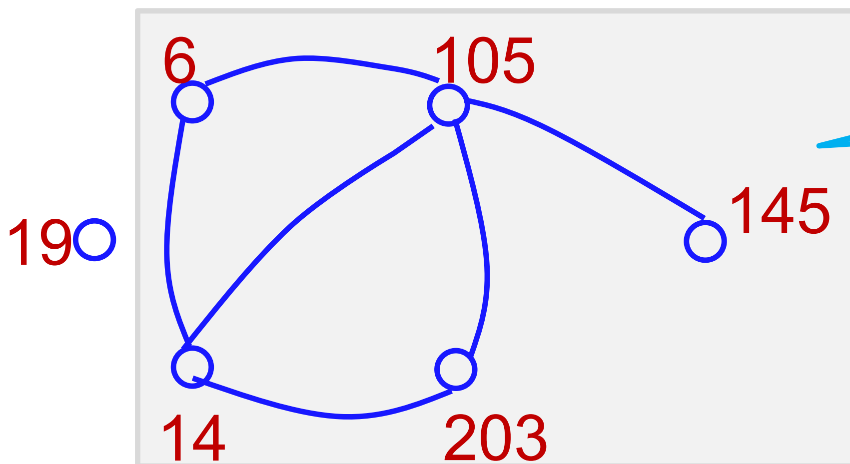
自反性、对称性

例. 设A={6, 14, 19, 105, 145, 203}，并取

$$R=\{ <x, y> \mid x, y \in A \text{且} (x, y)>1 \},$$

R 不是等价关系

其中(x, y) 表示 x 和 y最大公因子. R是A上的相容关系.



简化关系图

不是完全图

定理19 若R为非空有限集A上的二元关系，则R为A上的等价关系的充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图.

证明: (必要性) 设R为A上的等价关系，则R是自反的和对称的，因此R有简化关系图，设为G_R.

设G_1是G_R的一个分支。

则对G_1中任意两个结点a, b，存在有限个不同的结点$a=u_0, u_1,\ldots, u_{n-1}, u_n=b$，使得对每个$i, 1\le i\le n$-1，有一条连接$u_i, u_{i+1}$的边，即$<u_i, u_{i+1}>\in R$.

由于R是传递的，可得$<a, b>\in R$, 即G_1中存在一条连接a和b的边，故每个分支都是完全图.

定理19 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系的充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图.

证明: (充分性) 设R有简化关系图，则R是自反的和对称的，且每个分支都是完全图，下面证明R是传递的.

对任意$<x, y>, <y, z> \in R$, R的简化关系图G_R中有连接 x与y以及连接y与z的边，因此x, y, z位于同一个分支中. 又因为每个分支都是完全图，所以存在连接x和z的边，即$<x, z> \in R$.

因此R是传递的，故 R为A上的等价关系.

（4）等价关系的矩阵表示

定理20 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系之充要条件为

(1) M_R的对角线上的元素全为1； 自反

(2) M_R是对称矩阵；且 对称

(3) M_R可以经过有限次把行与行及相应的列与列对调，化为主对角型分块矩阵，且对角线上每个子块都是全1方阵. 传递

	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{15}

交换第2, 4行

	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{15}

交换第2, 4列

	1	4	3	2	5
1	a_{11}	a_{14}	a_{13}	a_{12}	a_{15}
4	a_{41}	a_{44}	a_{43}	a_{42}	a_{45}
3	a_{31}	a_{34}	a_{33}	a_{32}	a_{35}
2	a_{21}	a_{24}	a_{23}	a_{22}	a_{25}
5	a_{51}	a_{54}	a_{53}	a_{52}	a_{15}

- 交换两行和相应的两列，**关系R没有发生变化**
- 主对角型分块矩阵的<u>每个全为1的子块对应一个分支</u>（最大连通子图）

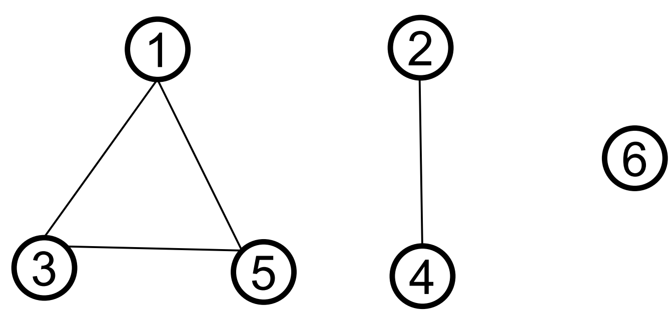
例. 若$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的二元关系R为：

$R=\{ \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 6, 6\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle, \}.$

$$M_R=\begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\text{交换第2,5列}]{\text{交换第2,5行}} \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

*R*是*A*上的等价关系

*R*的简化关系图：



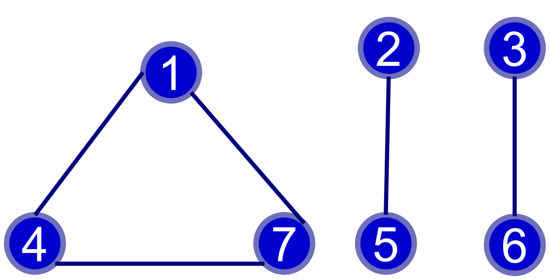
（5）等价类与商集

定义 23(等价类、商集) 设 R 是集合A上的等价关系.

(1) 对于每个 $x\in A$，A中与 x 有关系R的元素的集合称为 x 关于 R的等价类，简称为 x 的等价类，记作 $[x]_R$，

即：$[x]_R=\{y \mid y\in A \land x R y\}$；

(2) 称集合$\{[x]_R \mid x\in A\}$为A关于R的商集，并记为A/R，并称 $n(A/R)$为R的秩.



模3同余简化关系图

$[1]_R=[4]_R=[7]_R=\{1, 4, 7\}$

$[2]_R=[5]_R=\{2, 5\}$

$[3]_R=[6]_R=\{3, 6\}$

$A/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$，

$n(A/R)=3$

定理21 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$， $x \in [x]_R$ ， 即 $[x]_R$ 是A的非空子集.

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $x\,R\,y$.

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x\,\bar{R}\,y$， 则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.

(4) $\cup_{x \in A}[x]_R = A$.

证明：

(1) 因为 R自反，

所以，任取 $x \in A$ 均有 $x\,R\,x$， 即 $x \in [x]_R$ ，

因此，$[x]_R \neq \varnothing$.

定理 21 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x\in A$，$x\in[x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集.

(2) $[x]_R=[y]_R$ 当且仅当 $x\,R\,y$.

(3) 若 $x, y\in A$ 且 $x\,\bar{R}\,y$，则 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$.

(4) $\cup_{x\in A}[x]_R=A$.

证明： (2) (必要性) 假设 $[x]_R=[y]_R$，

因为 $y\in[y]_R$，所以 $y\in[x]_R$ 。

由 $[x]_R$ 的定义得 $x\,R\,y$.

(充分性) 设 $x\,R\,y$，任取 $z\in[y]_R$，则有 $y\,R\,z$。

由于R是传递的，所以有 xRz，因此 $z\in[x]_R$，故 $[y]_R\subseteq[x]_R$.

由于R是对称的，所以有 yRx，同样可证，$[x]_R\subseteq[y]_R$.

因此，$[x]_R=[y]_R$.

定理 21 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$，$x \in [x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集.

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $x R y$.

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x \bar{R} y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$.

(4) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$.

(3) （反证法）

假设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$，则 $\exists z$ 使 $z \in [x]_R$ 且 $z \in [y]_R$，即

$$xRz, \quad yRz.$$

因为 R是对称的，故 zRy.

又因为 R是传递的，由 xRz 与 zRy 得 xRy，

这与 $x\bar{R}y$ 矛盾.

因此 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$.

定理 21 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x\in A$，$x\in[x]_R$，即 $[x]_R$ 是 A 的非空子集.

(2) $[x]_R=[y]_R$ 当且仅当 xRy .

(3) 若 $x, y\in A$ 且 $x\bar{R}y$，则 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$.

(4) $\bigcup_{x\in A}[x]_R=A$.

(4) 任取 $x\in A$，则 $[x]_R\subseteq A$.

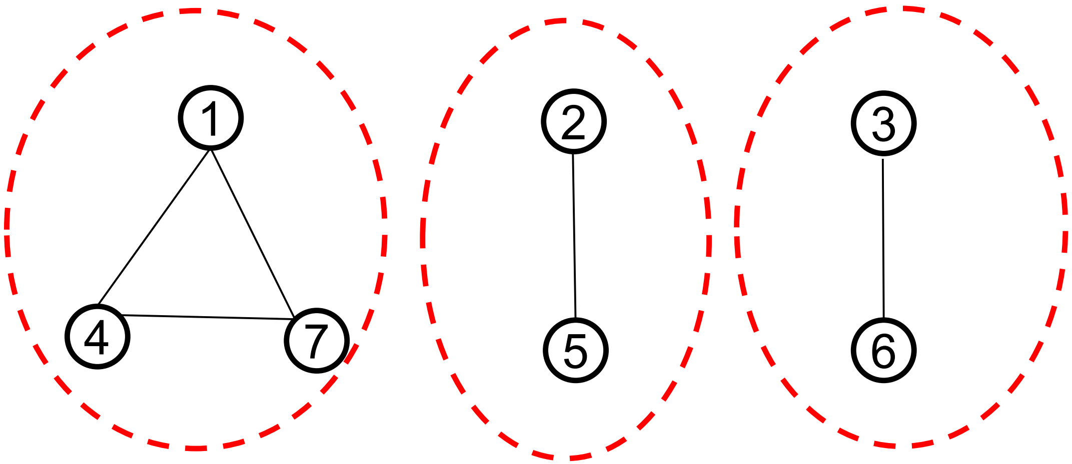
得 $\bigcup_{x\in A}[x]_R\subseteq A$.

任取 $z\in A$，有 $z\in[z]_R$，$[z]_R\subseteq\bigcup_{x\in A}[x]_R$，

得 $z\in\bigcup_{x\in A}[x]_R$.

因此，$A\subseteq\bigcup_{x\in A}[x]_R$，所以 $\bigcup_{x\in A}[x]_R=A$.

（6）等价关系与划分



模3同余关系的简化关系图

定义24 (划分) 设A为任意集合且 $\Pi\subseteq\mathcal{P}(A)$．如果$\Pi$满足：

(1) 若$S\in\Pi$，则$S\neq\phi$;

(2) $\cup\Pi=A$;

(3) 若$S_1, S_2\in\Pi$, 且$S_1\cap S_2\neq\phi$，则$S_1=S_2$.

则称Π为A的一个划分．

例：设 $A=\{a, b, c\}$，给定下列 A 的子集的集合：

$\{\{a\}, \{b, c\}\}$ √

$\{\{a, b, c\}\}$ √

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ √

$\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ X

$\{\{a\}, \{c\}\}$ X

$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ X

问：这些集合中 哪些是 A 上的划分？

等价关系与划分的联系

- 一个等价关系确定一个划分

定理22. 若R为集合A上的等价关系，则商集

$$A/R=\{[x]_R \mid x \in A\}$$

为A的一个划分.

- 一个划分确定一个等价关系

定理 23. 设Π为集合 A 的一个划分．若令

$$R_\Pi = \{ <x, y> \mid 存在\ S \in \Pi, 使\ x, y \in S \},$$

则 R_Π为 A 上的等价关系，且$A/R_\Pi = \Pi$.

定理22. 若R为集合A上的等价关系，则商集

$$A/R=\{[x]_R \mid x\in A\}$$

为A的一个划分.

需要证明：

1. 对任意 $x\in A$， $[x]_R \neq \emptyset$

2. 对任意 $[x]_R$, $[y]_R$, 若$[x]_R\neq [y]_R$，则$[x]_R\cap[y]_R = \varnothing$

3. $\cup_{x\in A}[x]_R = A$

由定理21可证.

定理 23. 设Π为集合 A 的一个划分．若令

$$R_\Pi = \{ <x, y> \mid 存在 S \in \Pi, 使 x, y \in S \},$$

则 R_Π为 A 上的等价关系，且$A/R_\Pi = \Pi$.

- 设 $\Pi=\{ S_1, \ldots, S_n \}$为集合$A$的一个划分，则 Π 确定的等价关系R_Π为:

$$R_\Pi = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \ldots \cup (S_n \times S_n)$$

定理 23. 设Π为集合 A 的一个划分. 若令

$$R_\Pi = \{ <x, y> \mid 存在\ S \in \Pi, 使\ x, y \in S \},$$

则 R_Π为 A 上的等价关系，且$A/R_\Pi = \Pi$.

证明. (1) 首先证明 R_Π具有自反性、对称性、传递性.

任取 $x \in A$，由划分定义知，一定存在 $S \in \Pi$使得 $x \in S$,

因此，$x R_\Pi x$，即R_Π具有自反性。

任取 $x, y \in A$，若 $x R_\Pi y$, 则存在 $S \in \Pi$使得$x, y \in S$,

因此，$y R_\Pi x$，即R_Π具有对称性。

任取 $x, y, z \in A$，若$x R_\Pi y$且$y R_\Pi z$，于是存在 $S, T \in \Pi$，使得 $x, y \in S$ 且 $y, z \in T$.

由于Π是划分，则由 S 与 T 有公共元 y 可知：$S \cap T \neq \varnothing$,

故必有 $S = T$，因此 $z \in S$，所以$x R_\Pi z$.

综上所述，R_Π是 A 上的等价关系.

定理 23. 设Π为集合 A 的一个划分．若令

$$R_\Pi = \{ <x, y> \mid \text{存在 } S \in \Pi, \text{使 } x, y \in S \},$$

则 R_Π为 A 上的等价关系，且$A/R_\Pi = \Pi$.

(2) 下面证明： $A/R_\Pi = \Pi$.

(a) 首先证明$\Pi \subseteq A/R_\Pi$.

任取 $S \in \Pi$ 及 $x \in S$， 下面证明$S = [x]_{R\Pi}$.

若$y \in S$, 则由R_Π的定义知 $x R_\Pi y$,

得$y \in [x]_{R\Pi}$， 因此 $S \subseteq [x]_{R\Pi}$.

若$y \in [x]_{R\Pi}$, 则 $xR_\Pi y$.

由R_Π的定义知, 必有$S' \in \Pi$, 使得$x, y \in S'$.

因为 $x \in S$且$x \in S'$， 所以$S \cap S' \neq \varnothing$.

由于Π为划分, 得$S=S'$,

从而 $y \in S$， 得$[x]_{R\Pi} \subseteq S$， 从而$S = [x]_{R\Pi} \in A/R_\Pi$.

所以有 $\Pi \subseteq A/R_\Pi$.

(b) 类似可证 $A/R_\Pi \subseteq \Pi$． 因此 $A/R_\Pi = \Pi$.

例：U_A, I_A 分别是 A 上的全域关系和恒等关系，则

$$A/U_A = \{ A \}$$

$$A/I_A = \{ \{x\} \mid x \in A \}$$

例：$A = \{a, b, c, d, e\}$，划分 $C = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d,e\} \}$，求划分 C 确定的 A 上的等价关系 R.

解：$R = I_A \cup \{ <a, b>, <b, a>, <d, e>, <e, d> \}$

例：设C_1和C_2都是集合A的划分．试判断下列集类是不是A的划分，为什么？

(1) $C_1 \cup C_2$;

(2) $C_1 - C_2$.

解: (1) 不是.

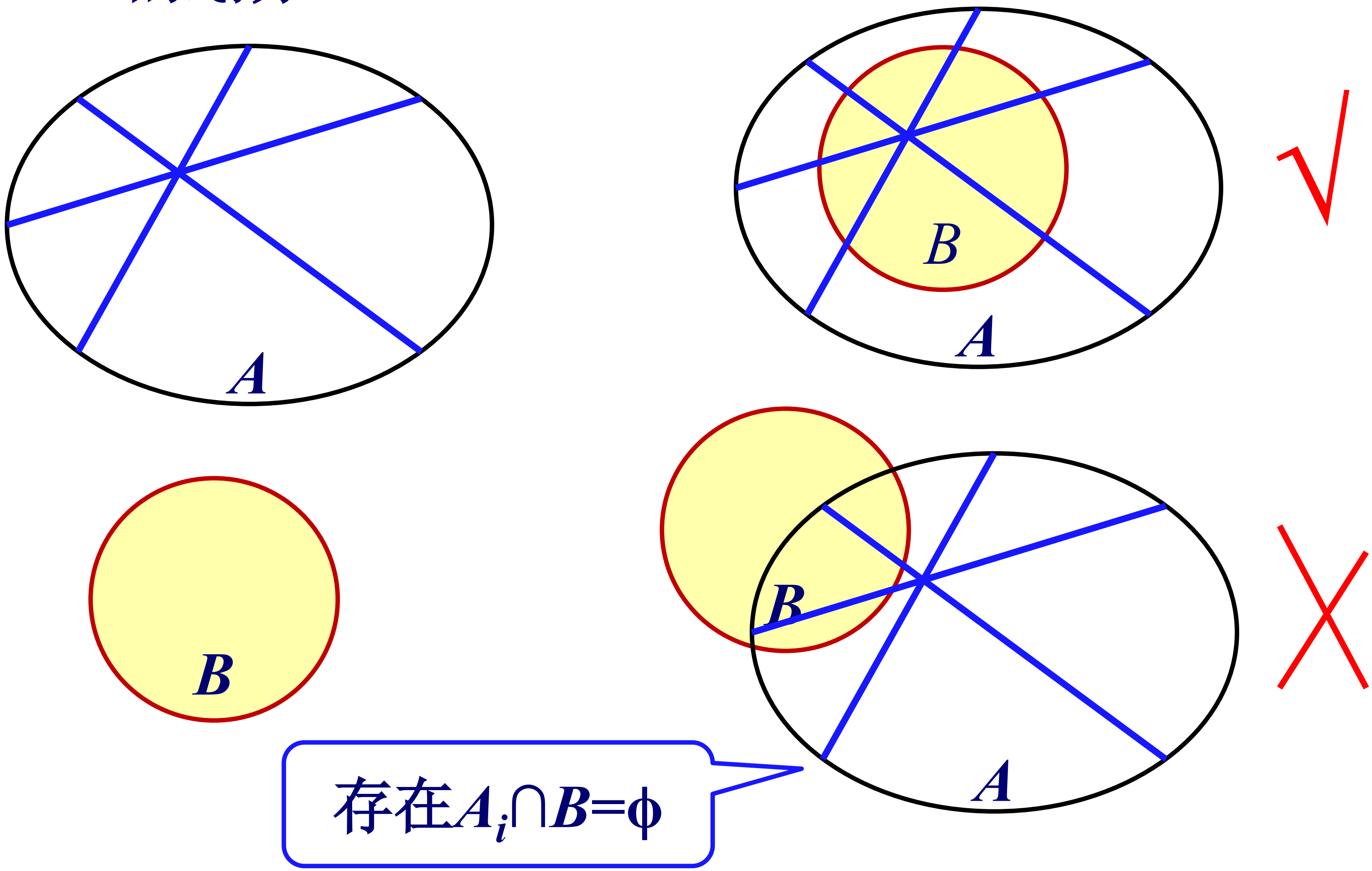
反例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $C_1=\{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}$，$C_2=\{ \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$，$C_1 \cup C_2= \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.

因为$\{3, 4\} \cap \{1, 3\} \neq \phi$, 因此 $C_1 \cup C_2$不是A的划分.

(3) 不是.

反例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $C_1=\{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}$，$C_2=\{ \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $C_1\text{-}C_2=\{ \{3, 4\}\}$ 不是A的划分.

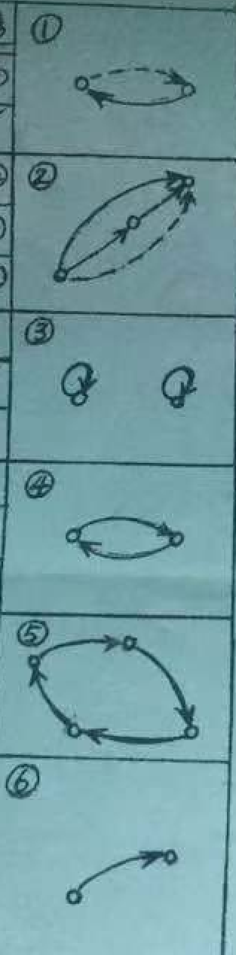
例：设A和B都是非空集，$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$为$A$的划分．试证明$\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B\}$并不总是集合$A \cap B$的划分．

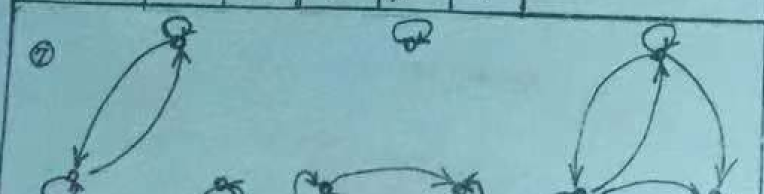


第六章　关系

- 关系的定义
- 全域关系、恒等关系
- 关系的表示: 关系图, 关系矩阵
- 关系的性质: 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递
- 关系运算： 集合运算，$R\circ S$, R^{-1}, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 序关系：偏序（半序）, 严格偏序（拟序）, 全序, 良序
- 等价关系与划分

关系表I	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	×①	×①
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 - R_2$	×	✓	✓	✓	×②
$R_1 \oplus R_2$	×	✓	✓	×①	×①
$\sim R$	×	×	✓	×	×③
I_A	✓	×	✓	✓	✓
I_ϕ	✓	✓	✓	✓	✓
ϕ	×	✓	✓	✓	✓
$A \times A$	✓	×	✓	×	✓
R°	✓	×	✓	✓	✓
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
R^2	✓	×④	✓	×⑤	✓
$R_1 \circ R_2$	✓	×④	×⑦	×⑤	×⑦
$s(R)$	✓	✓	✓	×	×⑥
$t(R)$	✓	×④	✓	×⑤	✓
$r(R)$	✓	×	✓	✓	✓
R^+	✓	×	✓	×	✓
R^*	✓	×	✓	×	✓





关系表II	相容	等价	拟序	半序	全序	良序
$R_1 \cup R_2$	✓	×②	×	×	×	×
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 - R_2$	×	×	×	×	×	×
$R_1 \oplus R_2$	×	×	×	×	×	×
$\sim R$	×	×	×	×	×	×
I_A	✓	✓	×	✓	×	×
I_ϕ	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ϕ	×	×	✓	×	×	×
$A \times A$	✓	✓	×	×	×	×
R°	✓	✓	×	✓	×	×
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓	×
R^2	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \circ R_2$	×②	×②	×③	×①	×①	×①
$s(R)$	✓	✓	×	×	×	×
$t(R)$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$r(R)$	✓	✓	×	✓	✓	✓
R^+	✓	✓	✓	✓	✓	✓
R^*	✓	✓	×	✓	✓	✓