离 散 数 学 2

《图 论》

北航计算机学院

主要内容

1. 图论的基本概念
2. 子图和图的运算
3. 路径、回路和连通图
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 图的矩阵表示
6. 树、有向树和有序树

第五章 图的矩阵表示

图的矩阵表示

目的：图的各种矩阵表示及性质、图的各种表示之间的关联性质；

重点：图的各种矩阵表示、各种表示之间的关联性质；

难点：图的各种表示之间的关联性质。

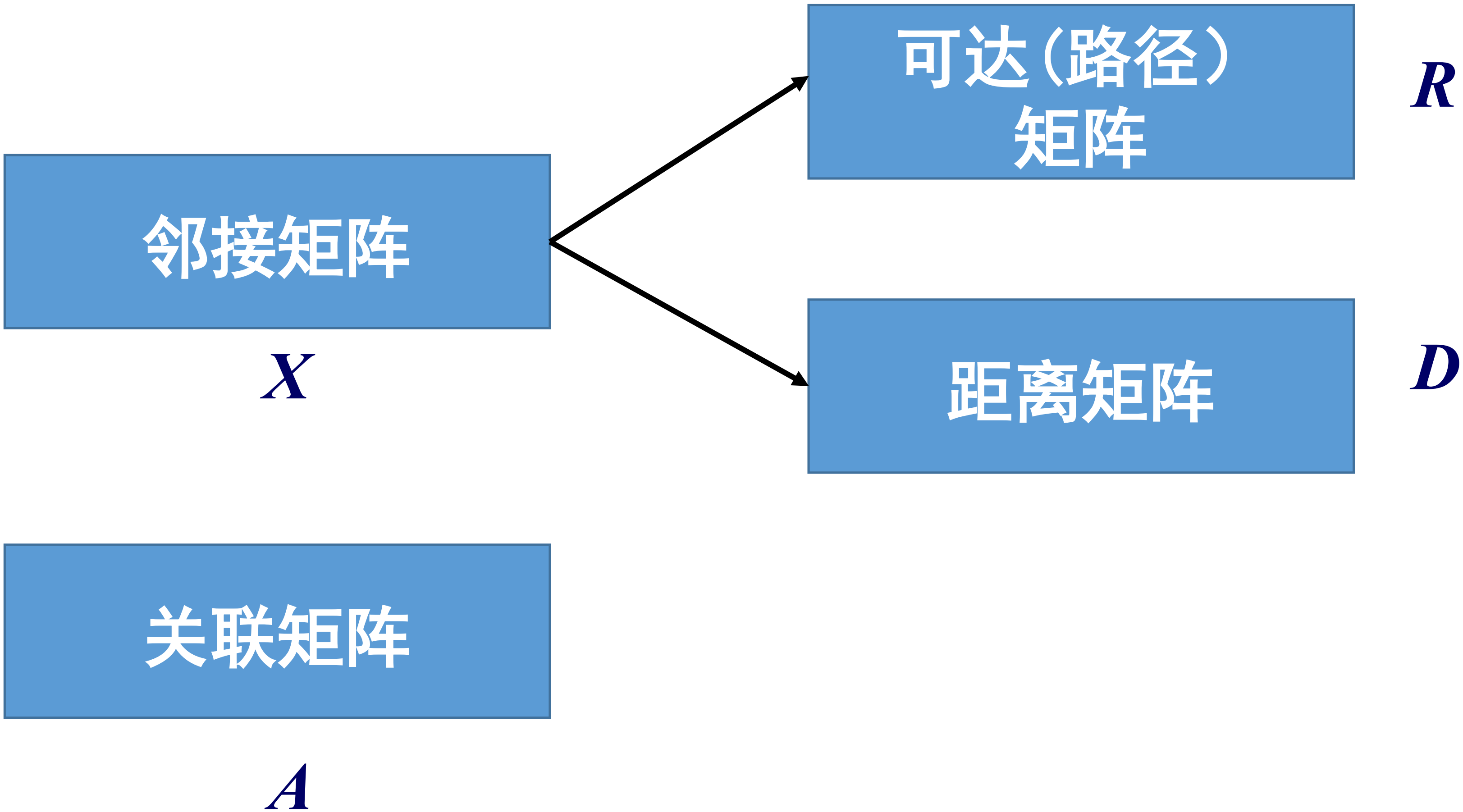
- 图的表示法：
  - 抽象数学系统：适于对图进行理论分析，但不直观
  - 图解表示法： 直观，但不适用于进行严格的论证
  - 矩阵表示法： 便于用计算机存储和处理

可以利用矩阵代数的运算便于求图的路径、回路以及其它性质

为了用矩阵表示图，首先需要对图的**结点和边**分别**编号**，即为它们规定某种顺序。

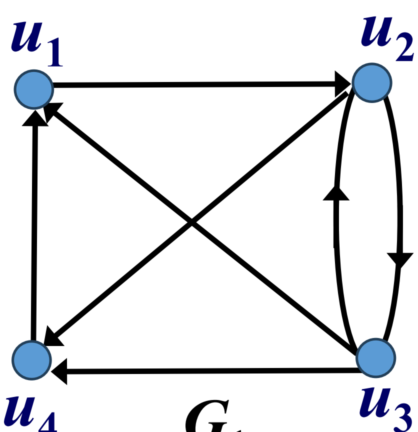
约定：事先已为图的结点和边规定好了某种顺序。

主要知识点



（1）邻接矩阵

定义5.1 设 n 阶图 G 的结点集为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，定义 G 的邻接矩阵 $X(G)$ 为 $n \times n$ 矩阵 (x_{ij})，其中，x_{ij} 为分别以 v_i 和 v_j 为起点和终点的边的数目。



G_1

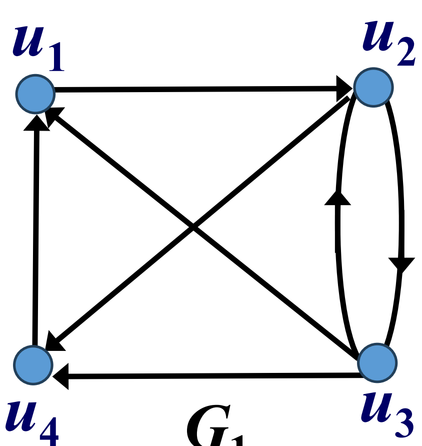
$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_3 & u_2 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 图 G 的邻接矩阵依赖于 G 的结点的顺序排序

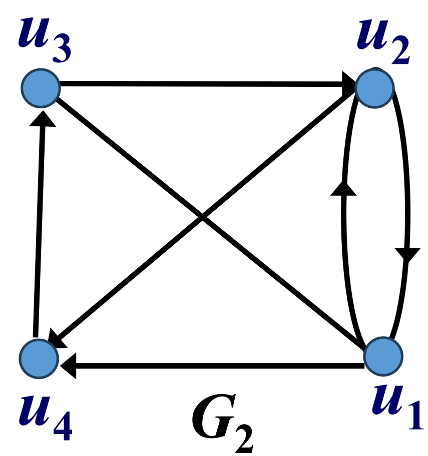
（1）邻接矩阵

定义5.1 设 n 阶图 G 的结点集为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，定义 G 的**邻接矩阵 $X(G)$** 为 $n\times n$ 矩阵 (x_{ij})，其中，x_{ij} 为分别以 v_i 和 v_j 为起点和终点的**边的数目**。



G_1

$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ u_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



G_2

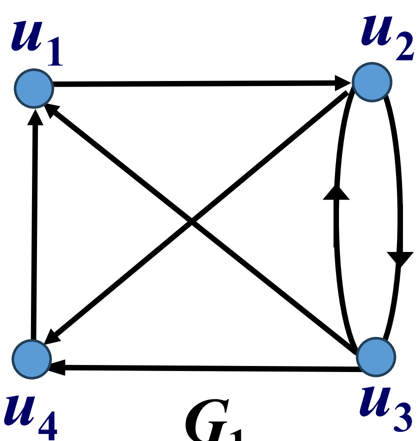
$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

G_1与G_2同构

- 问题：两个同构的图的邻接矩阵有什么关系？

（1）邻接矩阵

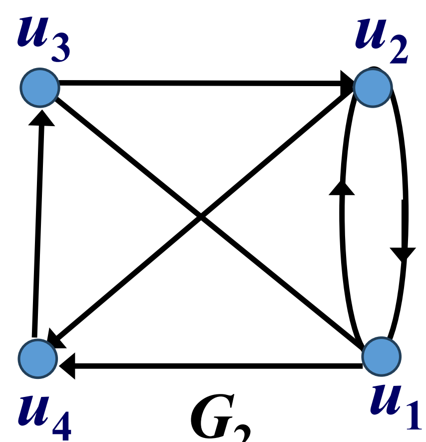
- 如果G_2和G_2是两个同构的图，则首先交换$X(G_1)$的一些行，然后交换相应的列，就可由$X(G_1)$得到$X(G_2)$；



G_1

$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ u_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ u_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$X(G_1)$



G_2

$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ u_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$X(G_2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换第1,3行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{交换第1,3列}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（1）邻接矩阵

- 如果G_2和G_2是两个同构的图，则首先交换$X(G_1)$的一些行，然后交换相应的列，就可由$X(G_1)$得到$X(G_2)$；
- 邻接矩阵对于同构的图不加区别。

因此，不关心矩阵中结点和边的顺序是合理的。

并选取图G的任何一个邻接矩阵作为它的邻接矩阵。

n阶图 G 和 $X(G)$ 之间的联系

1.无向图G的邻接矩阵 $X(G)$ 是 对称的

2.图 G 没有平行边 $\Leftrightarrow$ $X(G)$的元素都是 0和1

3.图G有自圈 $\Leftrightarrow$ $X(G)$的对角线有 非零元素

4.图G是简单图 $\Leftrightarrow$ $X(G)$的元素都是 0和1，并且对角线元素都为 0

5.图G是零图 $\Leftrightarrow$ $X(G)$是零 矩阵 (即所有元素都是 0 的矩阵)。

n阶图 G 和 $X(G)$ 之间的联系

6.若图G是无向图，$d_G(v_i) = x_{ii} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ （i=1, 2, …, n)。

7.若图G是有向图， $d_G^+(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$， $d_G^-(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}$

$$d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{n}(x_{ij} + x_{ji})$$

8.无向图（有向图）G 有 k 个分支 (弱分支) G_1，G_2，…，G_k ⇔ 顺序排列 G_1，G_2，…，G_k 的结点可使

$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & & & \\ & X(G_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & X(G_k) \end{bmatrix}$$

邻接矩阵的幂

- 对于矩阵 X，$m\in\mathrm{N}$，令 $x_{ij}^{(m)}$ 表示 X^m 的第 i 行第 j 列元素。
- 在 $X(G)$ 中，若 $x_{ij}=r$，则说明：

  从 v_i 至 v_j 存在 r 条长度为 1 的路径。
- 该结果可推广到 X 的任意正整数次幂 X^m，其中：

$$X^0 = I_n , \qquad X^{m+1} = X^m X$$

定理 5.1 设 $m\in\mathrm{I}_+$，n 阶图G的 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，若 X 是G的邻接矩阵且$1\le i,j\le n$，则 $x_{ij}^{(m)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数。

定理 5.1 设 $m \in \mathrm{I}_+$，n 阶图G的 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，若 X 是G的邻接矩阵且$1 \le i, j \le n$，则 $x_{ij}^{(m)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数。

证明：对 m 用第一归纳法：

(1) 当 $m = 1$ 时，定理显然成立。

(2) 假设当 $m = k$ ($k \ge 1$) 时，定理成立。

当 $m = k + 1$时， $X^{k+1} = X^k X$。由归纳假设，若$1 \le l \le n$，则

$x_{il}^{(k)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_l 长度为 k 的路径数，

x_{lj} 等于从 v_l 至 v_j 长度为 1 的路径数，

$$X^k = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline x_{i1}^{(k)} & x_{i2}^{(k)} & \cdots & x_{in}^{(k)} \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \qquad X = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & x_{1j} & \\ \hline & & x_{2j} & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & x_{nj} & \\ \hline \end{array}$$

$$X^{k+1} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & x_{ij}^{(k+1)} & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

v_i 到 v_j 的长度为 $k+1$ 的路径数：

$$x_{ij}^{(k+1)} = x_{i1}^{(k)} \cdot x_{1j} + x_{i2}^{(k)} \cdot x_{2j} + \cdots + x_{ij}^{(k)} \cdot x_{ij} + \ldots + x_{in}^{(k)} \cdot x_{nj}$$

v_i 到 v_j 的长度为 $k+1$ 的路径可能为:

v_i 到 v_l 的长度为 k 的路径 + v_l 到 v_j 的边（l=1, 2, …, n）

定理 5.1 设 $m \in I_+$，n 阶图G的 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，若 X 是G的邻接矩阵且$1 \le i, j \le n$，则 $x_{ij}^{(m)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数。

证明：对 m 用第一归纳法：

(1) 当 $m=1$ 时，定理显然成立。

(2) 假设当 $m = k$ ($k \ge 1$) 时，定理成立。

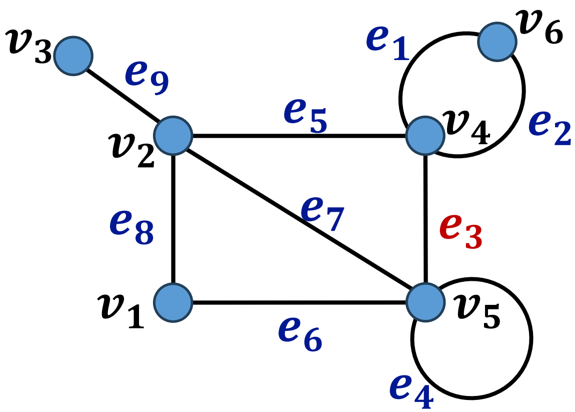
当 $m = k+1$时， $X^{k+1} = X^k X$。由归纳假设，若$1 \le l \le n$，则

$x_{il}^{(k)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_l 长度为 k 的路径数，

x_{lj} 等于从 v_l 至 v_j 长度为 1 的路径数，

因此， $x_{il}^{(k)} x_{lj}$ 等于从 v_i 至 v_j 长度为 $k+1$ 且倒数第二个结点为v_l 的路径数。

所以 $x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} x_{il}^{(k)} x_{lj}$，即为 G 中从 v_i 至 v_j 长度为 $k+1$ 的路径数。



$X=$

0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	2
1	1	0	1	1	0
0	0	0	2	0	0

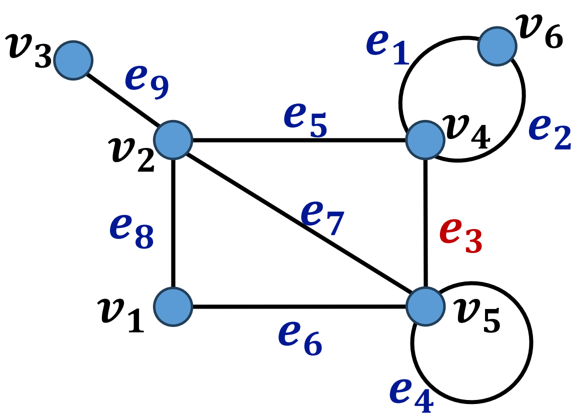
$X^2=$

2	1	1	2	2	0
1	4	0	1	3	2
1	0	1	1	1	0
2	1	1	6	2	0
2	3	1	2	4	2
0	2	0	0	2	4

$X^3=$

3	7	1	3	7	4
7	5	4	11	9	2
1	4	0	1	3	2
3	11	1	3	11	12
7	9	3	11	11	4
4	2	2	12	4	0

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条:



$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

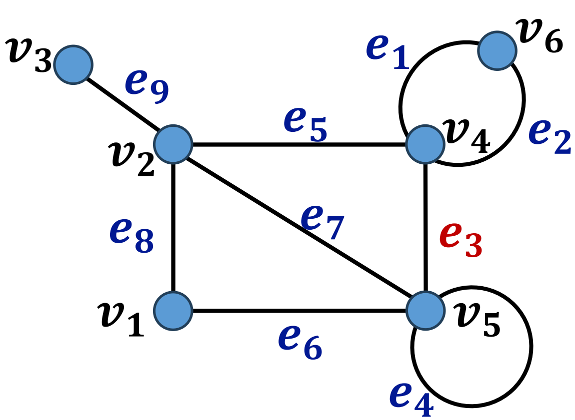
$$X^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X^3=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 11 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 1 & 3 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 3 & 11 & 11 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 12 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条：

$v_1e_8v_2e_8v_1$

$v_1e_6v_5e_6v_1$



$$X=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0&1&0\\\hline 1&0&1&1&1&0\\\hline 0&1&0&0&0&0\\\hline 0&1&0&0&1&2\\\hline 1&1&0&1&1&0\\\hline 0&0&0&2&0&0\\\hline\end{array}$$

$$X^2=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 2&1&1&2&2&0\\\hline 1&4&0&1&3&2\\\hline 1&0&1&1&1&0\\\hline 2&1&1&6&2&0\\\hline 2&3&1&2&4&2\\\hline 0&2&0&0&2&4\\\hline\end{array}$$

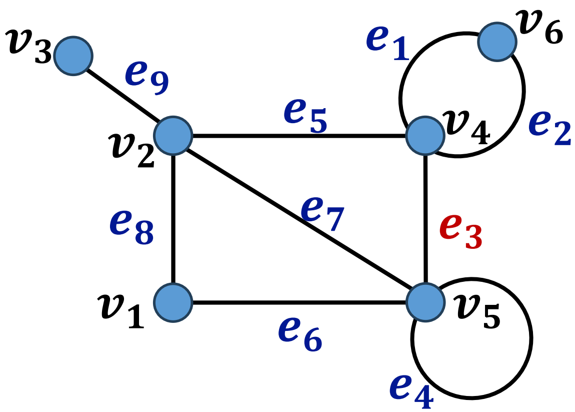
$$X^3=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 3&7&1&3&7&4\\\hline 7&5&4&11&9&2\\\hline 1&4&0&1&3&2\\\hline 3&11&1&3&11&12\\\hline 7&9&3&11&11&4\\\hline 4&2&2&12&4&0\\\hline\end{array}$$

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条：

$v_1e_8v_2e_8v_1$

$v_1e_6v_5e_6v_1$

问题：列出所有v_1到v_1的长度为 3 的路径



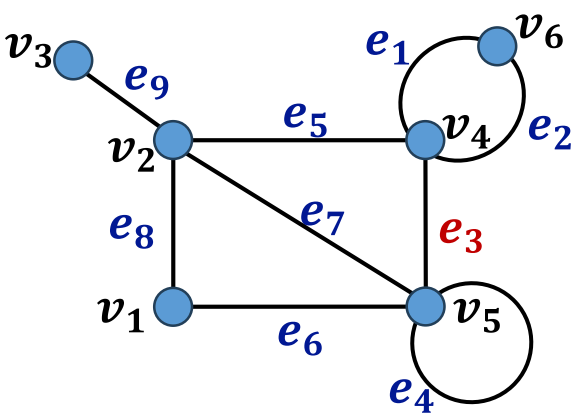
$$X=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&2\\1&1&0&1&1&0\\0&0&0&2&0&0\end{bmatrix}$$

$$X^2=\begin{bmatrix}2&1&1&2&2&0\\1&4&0&1&3&2\\1&0&1&1&1&0\\2&1&1&6&2&0\\2&3&1&2&4&2\\0&2&0&0&2&4\end{bmatrix}$$

$$X^3=\begin{bmatrix}3&7&1&3&7&4\\7&5&4&11&9&2\\1&4&0&1&3&2\\3&11&1&3&11&12\\7&9&3&11&11&4\\4&2&2&12&4&0\end{bmatrix}$$

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条： $v_1e_8v_2e_8v_1$
$v_1e_6v_5e_6v_1$

问题：列出所有v_1到v_1的长度为 3 的路径



$X=$

0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	2
1	1	0	1	1	0
0	0	0	2	0	0

$X^2=$

2	1	1	2	2	0
1	4	0	1	3	2
1	0	1	1	1	0
2	1	1	6	2	0
2	3	1	2	4	2
0	2	0	0	2	4

$X^3=$

3	7	1	3	7	4
7	5	4	11	9	2
1	4	0	1	3	2
3	11	1	3	11	12
7	9	3	11	11	4
4	2	2	12	4	0

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条：

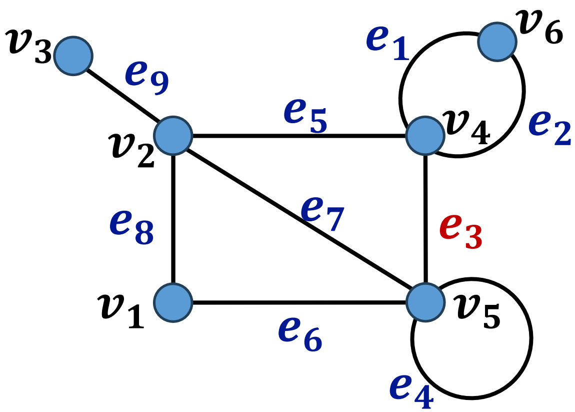
$v_1e_8v_2e_8v_1$

$v_1e_6v_5e_6v_1$

问题：列出所有v_1到v_1的长度为 3 的路径

v_1到v_2的长度为 2 的路径为 1 条：

v_2 到v_1的长度为 1 的路径为 1 条：



$$X=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&2\\1&1&0&1&1&0\\0&0&0&2&0&0\end{bmatrix}$$

$$X^2=\begin{bmatrix}2&1&1&2&2&0\\1&4&0&1&3&2\\1&0&1&1&1&0\\2&1&1&6&2&0\\2&3&1&2&4&2\\0&2&0&0&2&4\end{bmatrix}$$

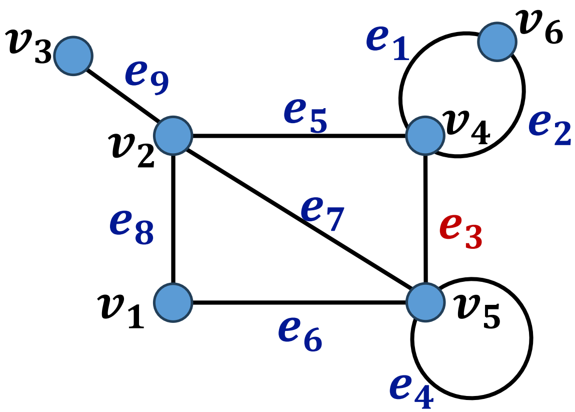
$$X^3=\begin{bmatrix}3&7&1&3&7&4\\7&5&4&11&9&2\\1&4&0&1&3&2\\3&11&1&3&11&12\\7&9&3&11&11&4\\4&2&2&12&4&0\end{bmatrix}$$

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条： $v_1e_8v_2e_8v_1$ $v_1e_6v_5e_6v_1$

问题：列出所有v_1到v_1的长度为 3 的路径

v_1到v_2的长度为 2 的路径为 1 条： $v_1e_6v_5e_7v_2$

v_2 到v_1的长度为 1 的路径为 1 条：$v_2e_8v_1$



$$X=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&2\\1&1&0&1&1&0\\0&0&0&2&0&0\end{bmatrix}$$

$$X^2=\begin{bmatrix}2&1&1&2&2&0\\1&4&0&1&3&2\\1&0&1&1&1&0\\2&1&1&6&2&0\\2&3&1&2&4&2\\0&2&0&0&2&4\end{bmatrix}$$

$$X^3=\begin{bmatrix}3&7&1&3&7&4\\7&5&4&11&9&2\\1&4&0&1&3&2\\3&11&1&3&11&12\\7&9&3&11&11&4\\4&2&2&12&4&0\end{bmatrix}$$

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条： $v_1e_8v_2e_8v_1$

$v_1e_6v_5e_6v_1$

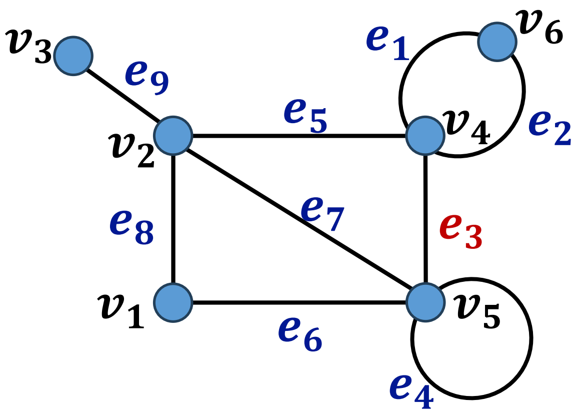
问题：列出所有v_1到v_1的长度为 3 的路径

v_1到v_2的长度为 2 的路径为 1 条： $v_1e_6v_5e_7v_2$

v_2 到v_1的长度为 1 的路径为 1 条：$v_2e_8v_1$

v_1 到v_5的长度为 2 的路径为 2 条：

v_5到v_1 的长度为 1 的路径为 1 条：



$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X^3=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 11 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 1 & 3 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 3 & 11 & 11 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 12 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条：$v_1e_8v_2e_8v_1$

$v_1e_6v_5e_6v_1$

问题：列出所有v_1到v_1的长度为 3 的路径

v_1到v_2的长度为 2 的路径为 1 条：$v_1e_6v_5e_7v_2$

v_2 到v_1的长度为 1 的路径为 1 条：$v_2e_8v_1$

v_1 到v_5的长度为 2 的路径为 2 条：$v_1e_8v_2e_7v_5$，$v_1e_6v_5e_4v_5$

v_5到v_1 的长度为 1 的路径为 1 条：$v_5e_6v_1$

v_1到v_1的长度为 3 的路径为3条：$v_1e_6v_5e_7v_2e_8v_1$，$v_1e_8v_2e_7v_5e_6v_1$，

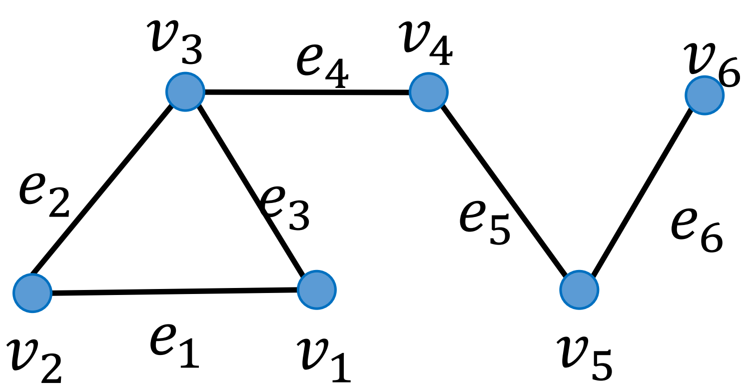
$v_1e_6v_5e_4v_5e_6v_1$

(2) 路径矩阵（可达性矩阵）

定义5. 2 设 n 阶图 G 的全部结点为 $v_1, v_2,\ \ldots, v_n$，定义图 G的 路径矩阵为 $n\times n$ 矩阵 $P=(p_{ij})$，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & 从v_i可达v_j\\ 0 & 从v_i不可达v_j\end{cases}$$

路径矩阵也称为可达性矩阵。



G

$P(G)=$

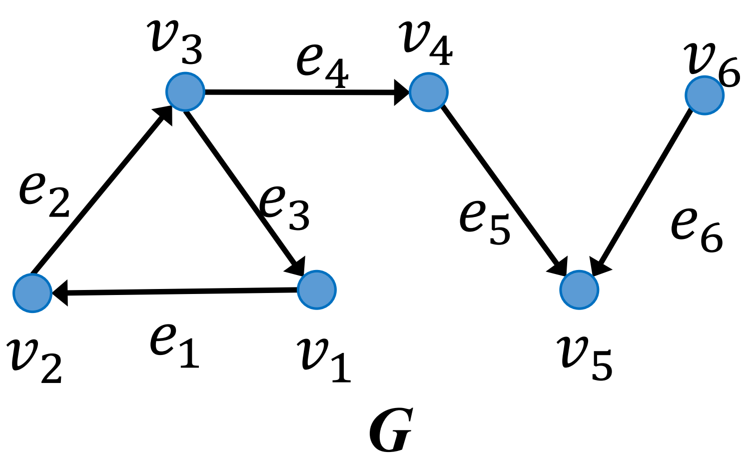
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(2) 路径矩阵（可达性矩阵）

定义5.2 设 n 阶图 G 的全部结点为 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，定义图 G的 路径矩阵为 $n \times n$ 矩阵 $P = (p_{ij})$，其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{从}v_i\text{可达}v_j \\ 0 & \text{从}v_i\text{不可达}v_j \end{cases}$$

路径矩阵也称为可达性矩阵。



$P(G)=$

1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1

由邻接矩阵求路径矩阵

对于n 阶图 G，路径矩阵为 $n \times n$ 矩阵 $P = (p_{ij})$，

$p_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ 从 v_i 可达 v_j

$\Leftrightarrow$ 存在从 v_i 到 v_j 的路径

$\Leftrightarrow$ 存在从 v_i 到 v_j 的基本路径（定理3.3）

$\Leftrightarrow$ 存在从 v_i 到 v_j 长度小于 n 的路径（定理3.2）

去掉自圈和平行边不会改变结点间的可达性。

不妨只考虑<u>简单图</u>，其邻接矩阵的元素都是0和1.

- 设G为n 阶简单图，结点集为$\{ v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - 如何判断 v_i到v_j可达?
- v_i可达v_j $\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1,\ldots,n\text{-}1\}$, 有$v_i$到$v_j$的长度为 k 的路径
  - v_i到 v_j存在长度为 0 的路径 $\Leftrightarrow$ $i=j$
  - v_i到 v_j存在长度为 1 的路径 $\Leftrightarrow$ v_i与 v_j 邻接$\Leftrightarrow$ $x_{ij}=1$
  - v_i到 v_j存在长度为 2 的路径$\Leftrightarrow$ $p_{ij}^{(2)}=1$

$$X=\begin{bmatrix} & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} & & x_{1j} & \\ & & x_{2j} & \\ & & \cdots & \\ & & x_{nj} & \end{bmatrix} \quad X^{(2)}=\begin{bmatrix} & & & \\ & & p_{ij}^{(2)} & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^{(2)} = x_{i1} \wedge x_{1j} \vee x_{i2} \wedge x_{2j} \vee \cdots \vee x_{in} \wedge x_{nj}$$

- 设G为n 阶简单图，结点集为$\{ v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - 如何判断 v_i到v_j可达?
- v_i可达v_j $\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1,\ldots,n-1\}$, 有$v_i$到$v_j$的长度为 k 的路径
  - v_i到 v_j存在长度为 0 的路径 $\Leftrightarrow$ $i = j$
  - v_i到 v_j存在长度为 1 的路径 $\Leftrightarrow$ v_i与 v_j 邻接$\Leftrightarrow$ $x_{ij} =1$
  - v_i到 v_j存在长度为 2 的路径$\Leftrightarrow$ $p_{ij}^2 =1$
  - v_i到 v_j存在长度为 3 的路径 $\Leftrightarrow$ $p_{ij}^3 =1$

$X^{(2)} =$

$p_{i1}^{(2)}$	$p_{i2}^{(2)}$	$\ldots$	$p_{in}^{(2)}$

$X=$

		x_{1j}	
		x_{2j}	
		$\ldots$	
		x_{nj}	

$X^{(3)} =$

		$p_{ij}^{(3)}$	

$$p_{ij}^{(3)} = p_{i1}^{(2)} \wedge x_{1j} \vee p_{i2}^{(2)} \wedge x_{2j} \vee \cdots \vee p_{in}^{(2)} \wedge x_{nj}$$

- 设G为n 阶简单图，结点集为$\{ v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - 如何判断 v_i到v_j可达?
- v_i可达v_j $\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, 有$v_i$到$v_j$的长度为 k 的路径
  - v_i到 v_j存在长度为 0 的路径 $\Leftrightarrow$ $i = j$
  - v_i到 v_j存在长度为 1 的路径 $\Leftrightarrow$ v_i与 v_j 邻接$\Leftrightarrow$ $x_{ij} = 1$
  - v_i到 v_j存在长度为 2 的路径$\Leftrightarrow$ $p_{ij}^{(2)} = 1$
  - v_i到 v_j存在长度为 3 的路径 $\Leftrightarrow$ $p_{ij}^{(3)} = 1$
  - v_i到 v_j存在长度为 k 的路径 $\Leftrightarrow$ $p_{ij}^{(k)} = 1$

$$p_{ij}^{(k)} = p_{i1}^{(k-1)} \wedge x_{1j} \vee p_{i2}^{(k-1)} \wedge x_{2j} \vee \cdots \vee p_{in}^{(k-1)} \wedge x_{nj}$$
$$= \vee_{l=1}^{n} p_{il}^{(k-1)} \wedge x_{lj}$$

v_i可达v_j $\Leftrightarrow (i=j) \vee x_{ij} = 1 \vee p_{ij}^{(2)} = 1 \vee p_{ij}^{(3)} = 1 \vee \ldots \vee p_{ij}^{(n-1)} = 1$

由邻接矩阵求路径矩阵

- 定义矩阵运算$\otimes$

设$A=(a_{ij})$是$m\times p$矩阵， $B=(b_{ij})$ 为$p\times n$矩阵，且均为0-1矩阵，定义$A\otimes B=C=\{c_{ij}\}$，其中 $c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{p}(a_{ik}\wedge b_{kj})$

- 定义矩阵运算 $\oplus$

设$A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$均为$n\times m$ 矩阵，且是0-1矩阵。

定义 $A\oplus B=C=(c_{ij})$，其中$c_{ij}=a_{ij}\vee b_{ij}$

引入符号：$\sum_{i=0}^{0}A^{(i)}=A^{(0)}$， $\sum_{i=0}^{k+1}A^{(i)}=A^{(k+1)}\oplus\sum_{i=0}^{k}A^{(i)}$

(k=0, 1, 2, ….)

由邻接矩阵求路径矩阵

定理 5.2 设 X 和 P 分别是 n 阶简单图 G 的邻接矩阵和路径矩阵，记 $X^{(0)}=I_n$（I_n 是 n 阶单位矩阵)。

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}\otimes X\ (k=0,1,2,\ldots,n),$$

则 $P=\sum_{k=0}^{n-1}X^{(k)}$。

（$X^{(1)}=X$，$X^{(k)}=(p_{ij}^{(k)})$）

- $p_{ij}^{(k+1)}=\bigvee_{l=1}^{n}(p_{il}^{(k)}\wedge x_{lj})$
- $p_{ij}=1\Leftrightarrow(i=j)\vee x_{ij}=1\vee p_{ij}^{(2)}=1\vee p_{ij}^{(3)}=1\vee\ldots\vee p_{ij}^{(n-1)}=1$

（3）距离矩阵

定义5.3 设 n 阶图 G 的全部结点为 v_1，v_2，…，v_n，称 $n\times n$ 矩阵 $D=(d_{ij})$为 G 的 **距离矩阵**，其中：

d_{ij}为从 v_i至 v_j的距离。

- 由图的邻接矩阵可以求得它的距离矩阵。

定理 5.3 设 $D=(d_{ij})$ 和$X=(x_{ij})$ 分别是 n 阶图 G 的距离矩阵和邻接矩阵，

没有从v_i到 v_j的长度为m的路径

$$d_{ij}=\begin{cases}\infty, (\forall m)(m\in N \wedge m<n \rightarrow x_{ij}^{(m)}=0)\\ min\left\{k \middle| 0\le k<n \wedge x_{ij}^{(k)}>0\right\},\end{cases}$$

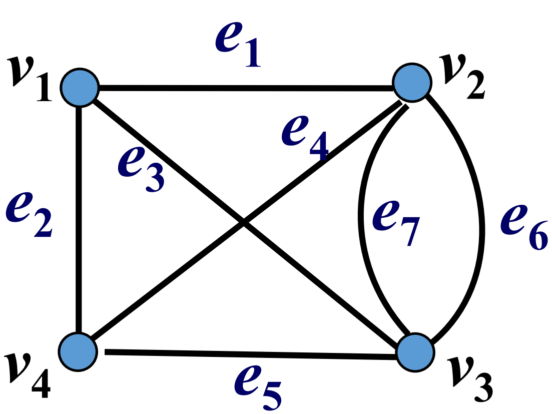
存在v_i到 v_j的长度为k 的路径

- 图的路径矩阵和距离矩阵不能给出图的全部信息；
- 图的邻接矩阵可以给出图的全部信息；
- 无自圈图的关联矩阵可以给出无自圈图的全部信息。

（4）关联矩阵

定义 5.4 设无自圈的无向图 G 的结点集和边集分别为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 和$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，定义 G 的关联矩阵 $A(G)$ 为 $n \times m$ 矩阵(a_{ij})，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j \text{ 与 } v_i \text{ 关联} \\ 0, & e_j \text{ 与 } v_i \text{ 不关联} \end{cases}$$

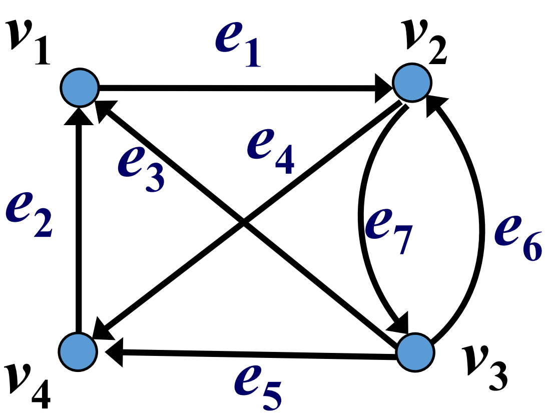


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（4）关联矩阵

定义5.5 设无自圈的有向图 G 的结点集和边集分别为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 和 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，定义 G 的关联矩阵 $A(G)$ 为 $n \times m$ 矩阵 (a_{ij})，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{是 } e_j \text{ 的起点} \\ -1, & v_i \text{是 } e_j \text{ 的终点} \\ 0, & e_j \text{ 与 } v_i \text{不关联} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

无自圈有m条边的n阶图G和$A(G)$之间的联系

1. G 是零图 $\Leftrightarrow$ $A(G)$ 是空矩阵 (即没有任何元素的矩阵)
2. 无向图 G 的关联矩阵 $A(G)$ 的每列元素之和为 2
3. 有向图 G 的关联矩阵 $A(G)$ 的每列元素之和为 0
4. e_i和 e_j是 G 的平行边 $\Leftrightarrow$ $A(G)$的第 i 列与第 j 列 相同
5. 若G是无向图，则 $d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$($i = 1$，2，…，n)

无自圈有m条边的n阶图G和$A(G)$之间的联系

6. 若G是有向图， ($i = 1, 2, \ldots, n$):

   $d_G^+(v_i)$为 $A(G)$ 的第 i 行中值为 **1** 的元素个数，

   $d_G^-(v_i)$ 为 $A(G)$ 的第 i 行中值为 **−1** 的元素个数，

   $d_G(v_i)$ 为 $A(G)$ 的第 i 行中 **非零** 元素个数

7. v_i是孤立点 $\Leftrightarrow$ $A(G)$ 的第 i 行全为 **0**

8. 无向图 (有向图) G 有k个分支 (弱分支) G_1， G_2， …， G_k

   $\Leftrightarrow$ 顺序排列 G 的结点和边的顺序，可使

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & & & \\ & A(G_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & A(G_k) \end{bmatrix}$$

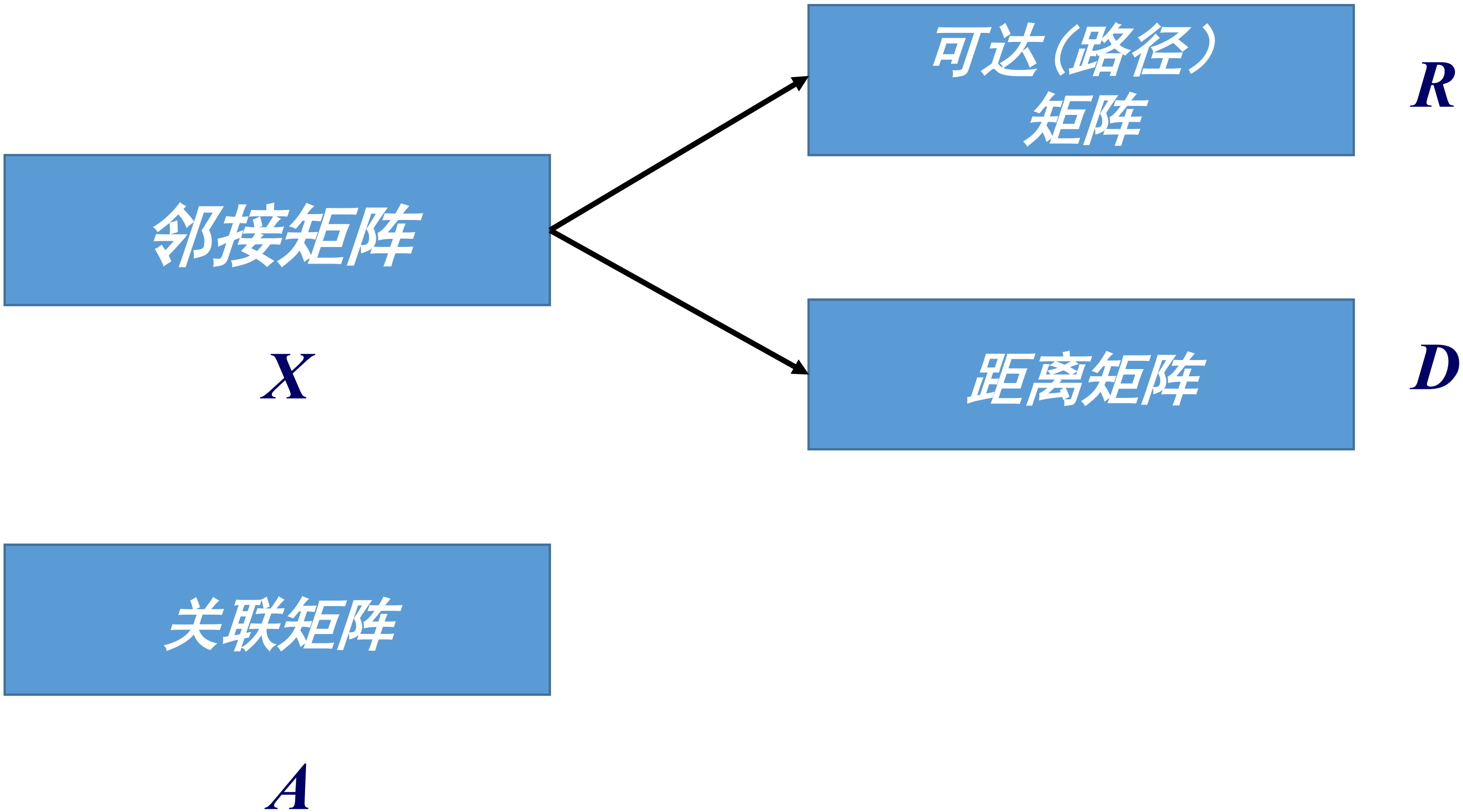
例：

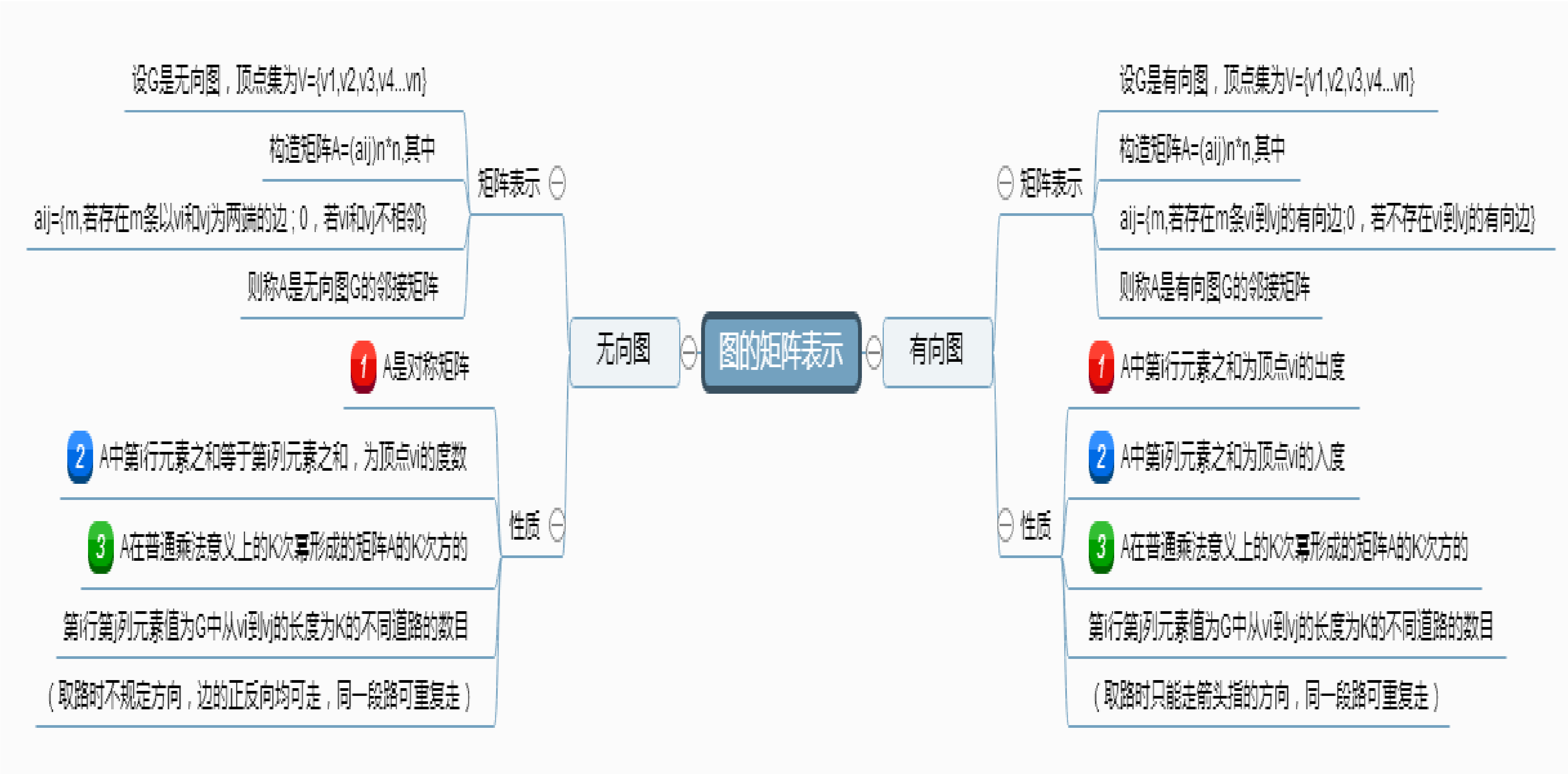
1.如何由邻接矩阵判断图的连通性？

2.如何由邻接矩阵判断图是不是非循环？

3.如何由邻接矩阵判断有向图是否有有向回路？

主要知识点




图的矩阵表示
无向图
矩阵表示
设G是无向图，顶点集为V={v1,v2,v3,v4...vn}
构造矩阵A=(aij)n*n,其中
aij={m,若存在m条以vi和vj为两端的边；0，若vi和vj不相邻}
则称A是无向图G的邻接矩阵
性质
1 A是对称矩阵
2 A中第i行元素之和等于第i列元素之和，为顶点vi的度数
3 A在普通乘法意义上的K次幂形成的矩阵A的K次方的
第i行第j列元素值为G中从vi到vj的长度为K的不同道路的数目
（取路时不规定方向，边的正反向均可走，同一段路可重复走）
有向图
矩阵表示
设G是有向图，顶点集为V={v1,v2,v3,v4...vn}
构造矩阵A=(aij)n*n,其中
aij={m,若存在m条vi到vj的有向边;0，若不存在vi到vj的有向边}
则称A是有向图G的邻接矩阵
性质
1 A中第i行元素之和为顶点vi的出度
2 A中第j列元素之和为顶点vi的入度
3 A在普通乘法意义上的K次幂形成的矩阵A的K次方的
第i行第j列元素值为G中从vi到vj的长度为K的不同道路的数目
（取路时只能走箭头指的方向，同一段路可重复走）