离散数学（2）
第二次作业讲解

2024 秋季学期

1. 为了给出有序偶的另一定义，选取两个不同的集合A和B（例如取$A=\emptyset$，$B=\{\emptyset\}$），并定义$< a, b> =\{\{ a, A\}, \{ b, B\}\}$。证明这个定义的合理性（即证明能保证有序偶的唯一性）。

知识点：有序偶、有序偶的唯一性

定义15：（有序偶） 任给两个对象 x 和 y，将它们按规定的顺序构成的序列，称之为有序偶，记为$< x, y >$。
其中，x 称为有序偶的第一元，y 称为第二元。

- 有序偶的唯一性：对任意 u, v, x, y

$$<u, v> = <x, y> \text{当且仅当} \quad u = x \text{ 和 } v = y$$

1. 为了给出有序偶的另一定义，选取两个不同的集合A和B（例如取$A=\emptyset$，$B=\{\emptyset\}$），并定义$<a, b> =\{\{a, A\}, \{b, B\}\}$。证明这个定义的合理性（即证明能保证有序偶的唯一性）。

解析：证明有序偶的集合定义能保证有序偶的唯一性

- 即需证明：对任意 a, b, c, d

$$<a, b> = \{\{a, A\}, \{b, B\}\} = <c, d> =\{\{c, A\}, \{c, B\}\}$$

当且仅当 $a=c$ 且$b=d$

1. 为了给出有序偶的另一定义，选取两个不同的集合A和B（例如取$A=\emptyset$，$B=\{\emptyset\}$），并定义$<a, b> =\{\{a, A\}, \{b, B\}\}$。证明这个定义的合理性（即证明能保证有序偶的唯一性）。

证明：对任意的a, b, c, d，需证：$<a, b> = <c, d>$ 当且仅当 $a = c$且$b = d$。

$(\Leftarrow)$ 若$a = c$且$b = d$，显然有$<a, b> = <b, c>$。

$(\Rightarrow)$ 若$<a, b> = <c, d>$，则有

$$\{ \{a, A\}, \{b, B\} \} = \{ \{c, A\}, \{d, B\} \} \qquad (1)式$$

由于A, B是两个不同的集合，因此 $\{a, A\}\neq\{b, B\}$且$\{c, A\}\neq\{d, B\}$，即(1)式等号两边均为二元集。

则由(1)式，可分以下两种情况：

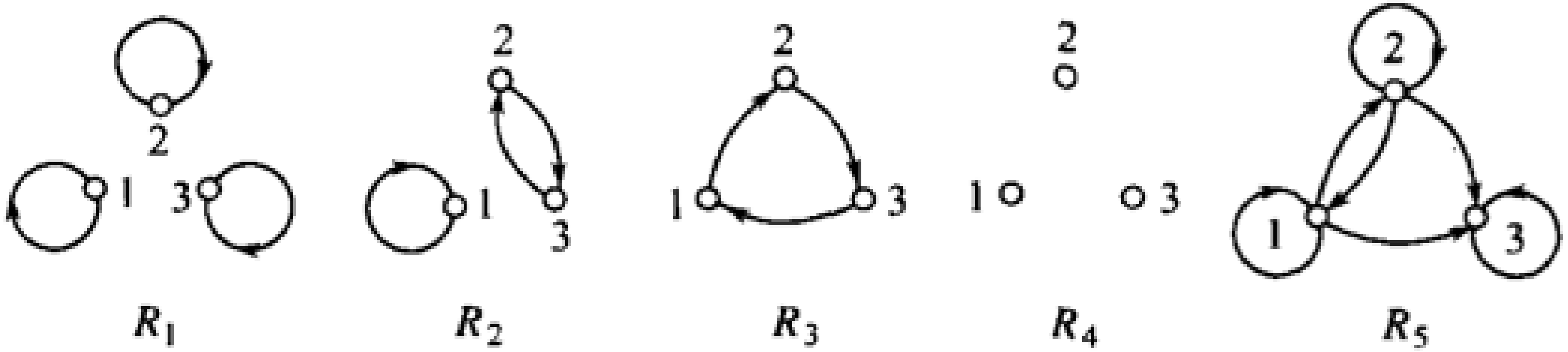
(1) 若$\{a, A\} = \{c, A\}$，则必有$a = c$，且由(1)式得$\{b, B\}=\{d, B\}$，得$b=d$。

(2) 若$\{a, A\} =\{d, B\}$，由(1)式得 $\{b, B\} = \{c, A\}$。

因为$A\neq B$，所以 $a = B, A = d, b = A$且$c = B$。

得 $a = c$且$b = d$。

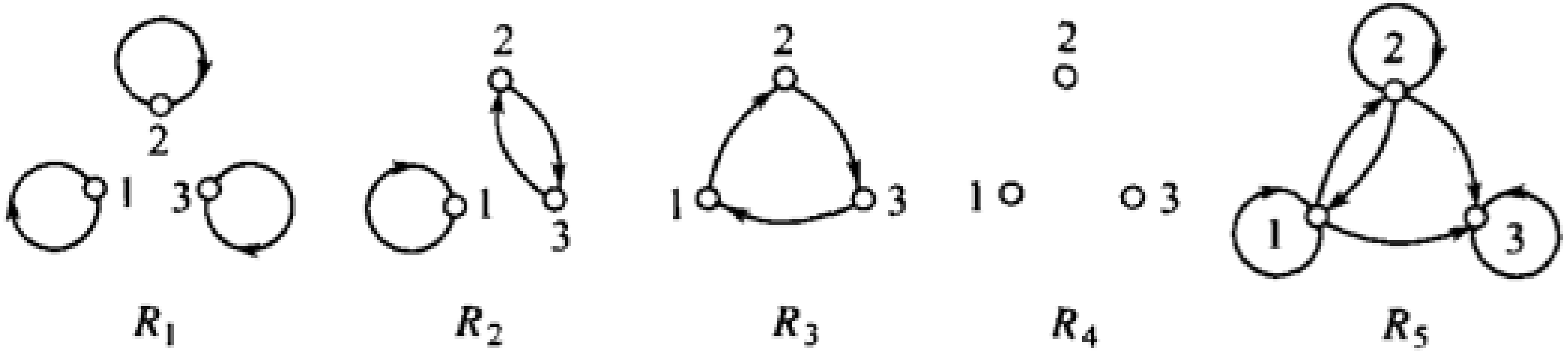
2. 对下图给出的集合$A=\{1, 2, 3\}$上的以下二元关系的关系图，写出相应的关系矩阵，并指出各个关系所具有的性质。



知识点：关系图、关系矩阵、关系的五个性质

- 设 $X=\{x_1, \cdots\cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$， R 是 X 到 Y 的二元关系.
  - R 的关系图G_R：以 $X\cup Y$ 中的每个元素为一个顶点，对每个$\langle x, y\rangle \in R$，皆画一条从 x 到 y 的有向边
  - R 的关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times n}$， 其中$r_{ij}=\begin{cases}1, \text{若 } x_i\, R\, y_j \\ 0, \text{若 } x_i\, \bar{R}\, y_j\end{cases}$

2. 对下图给出的集合$A=\{1, 2, 3\}$上的以下二元关系的关系图，写出相应的关系矩阵，并指出各个关系所具有的性质。

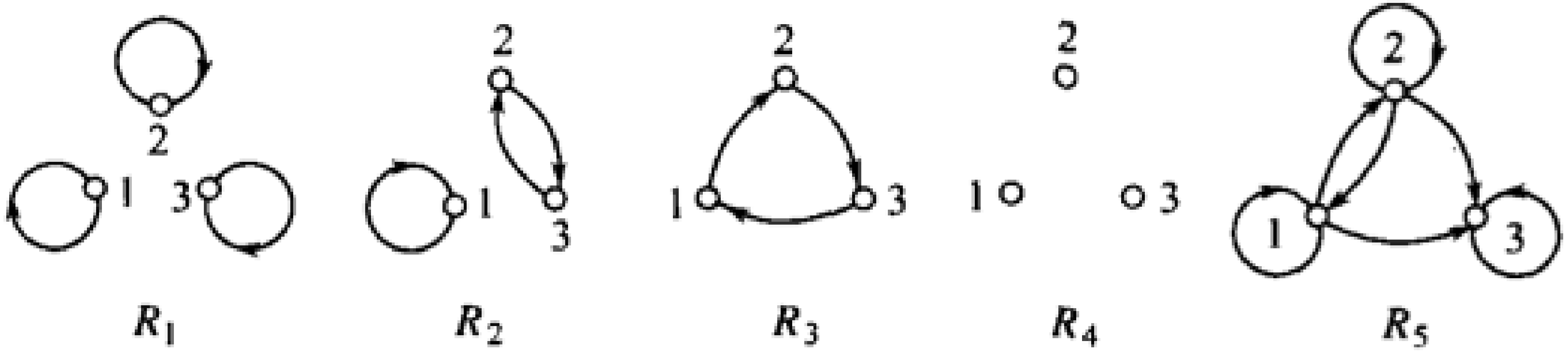


知识点：关系图、关系矩阵、关系的五个性质

- 设 R 是集合 X 上的二元关系
  - R是自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$
  - R是 反自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$
  - R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$
  - R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge \langle x, y\rangle\in R \wedge \langle y, x\rangle\in R \rightarrow x = y)$

    $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge \langle x, y\rangle\in R \wedge x \neq y \rightarrow \langle y, x\rangle \notin R)$
  - R是传递的 $\Leftrightarrow \forall xyz\,(x\in X\wedge y\in X \wedge z\in X \wedge \langle x, y\rangle\in R\wedge \langle y, z\rangle\in R \rightarrow \langle x, z\rangle\in R)$

2. 对下图给出的集合$A=\{1, 2, 3\}$上的以下二元关系的关系图，写出相应的关系矩阵，并指出各个关系所具有的性质。

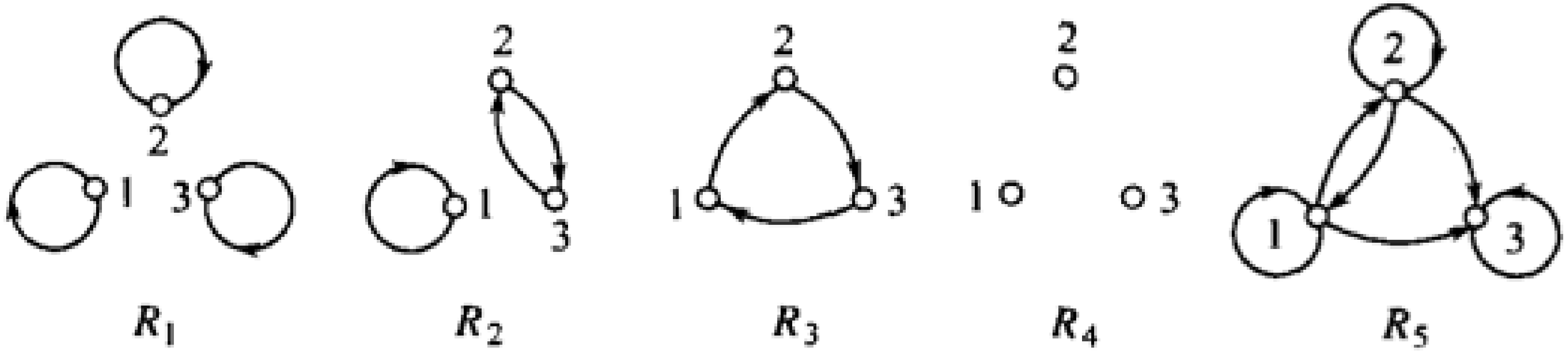


知识点：关系图、关系矩阵、关系的五个性质

- 设 R 是集合 X 上的二元关系
  - R不是自反的 $\Leftrightarrow \exists x\,(x\in X \wedge \langle x, x\rangle \notin R)$
  - R不是 反自反的 $\Leftrightarrow \exists x\,(x\in X \wedge \langle x, x\rangle \in R)$
  - R不是对称的 $\Leftrightarrow \exists\, xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \notin R)$
  - R不是反对称的 $\Leftrightarrow \exists\, xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge \langle x, y\rangle\in R \wedge \langle y, x\rangle\in R \wedge x \neq y)$

    $\Leftrightarrow \exists\, xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge\langle x, y\rangle\in R \wedge x\neq y \wedge \langle y, x\rangle \in R)$
  - R不是传递的 $\Leftrightarrow \exists\, xyz\,(x\in X\wedge y\in X \wedge z\in X \wedge \langle x, y\rangle\in R\wedge \langle y, z\rangle\in R \wedge \langle x, z\rangle \notin R)$

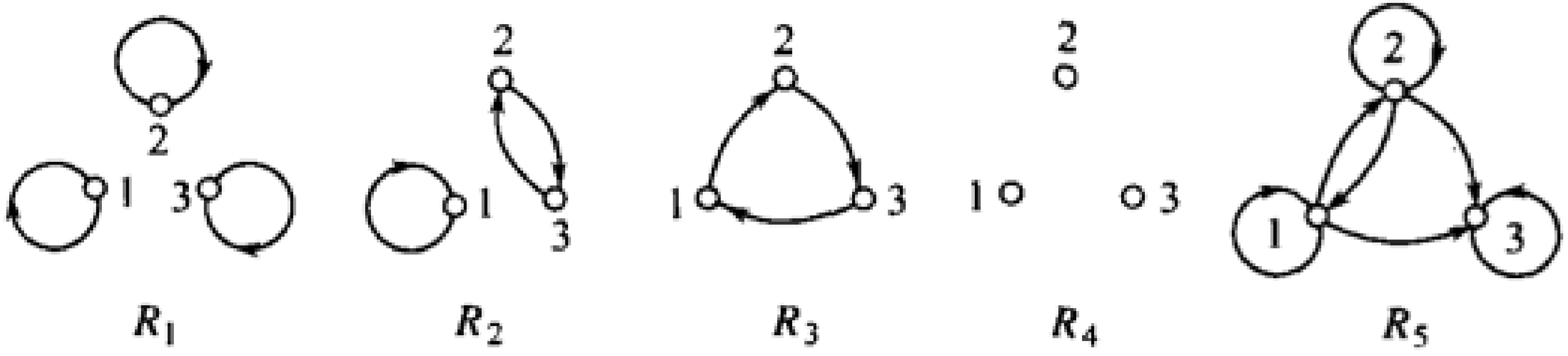
2. 对下图给出的集合$A=\{1, 2, 3\}$上的以下二元关系的关系图，写出相应的关系矩阵，并指出各个关系所具有的性质。



知识点：关系图、关系矩阵、二元关系的五个性质

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
M_R	对角线元素全1	对角线元素全0	对称矩阵	$r_{ij}\cdot r_{ji}=0(i\neq j)$	若有k使$r_{ik}\cdot r_{kj}=1$，则$r_{ij}=1$
G_R	所有结点都有自环	所有结点都无自环	不同结点间的有向边只能成对出现	结点间无成对出现的有向边	若x到y有一条路径，则必有从x到y的一条边

2. 对下图给出的集合$A=\{1, 2, 3\}$上的以下二元关系的关系图，写出相应的关系矩阵，并指出各个关系所具有的性质。



解：$M_{R_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$M_{R_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$M_{R_3}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，

$M_{R_4}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$M_{R_5}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

R_1满足自反性、对称性、反对称性、传递性；R_2满足对称性；

R_3满足反自反性、反对称性；R_4满足反自反性、对称性、反对称性、传递性；

R_5满足自反性、传递性。

3. 令关系$S = \{<x, y> \mid x, y\in \mathrm{R},\ 4|x|\le 1$且$|y|\ge 1\}$ 是实数集 R上的二元关系。指出S满足的性质，并说明理由。

知识点：二元关系的五个性质

- 设 R 是集合 X 上的二元关系
  - R是自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow <x, x> \in R)$
  - R是 反自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow <x, x> \notin R)$
  - R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge <x, y> \in R \rightarrow <y, x> \in R)$
  - R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge <x, y>\in R \wedge <y, x>\in R \rightarrow x = y)$

    $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X \wedge y\in X \wedge <x, y>\in R \wedge x \ne y \rightarrow <y, x> \notin R)$
  - R是传递的 $\Leftrightarrow \forall xyz\,(x\in X\wedge y\in X \wedge z\in X \wedge <x, y>\in R\wedge <y, z>\in R \rightarrow <x, z>\in R)$

3. 令关系$S = \{\langle x, y\rangle \mid x, y\in \mathbf{R},\ 4|x|\le 1$且$|y|\ge 1\}$ 是实数集 R上的二元关系。指出S满足的性质，并说明理由。

解: (1) 对任意的$x\in \mathbf{R}$, 若$4|x| \le 1$，则 $|x|\le 1/4$。

显然， $|x|\le 1/4$与$|x|\ge 1$ 不会同时成立，因此 $\langle x, x\rangle\notin S$。

故 S 是反自反的。

(2) 对任意$\langle x, y\rangle\in S$, 有$4|x| \le 1$且$|y|\ge 1$。

此时，一定不会有$|x|\ge 1$或 $4|y| \le 1$，因此，必有$\langle y, x\rangle\notin S$。

故 S 是反对称的。

(3) 假设存在$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle\in S$，则有$4|x| \le 1$，$|y|\ge 1$，$4|y| \le 1$且$|z|\ge 1$。

显然，不可能有$|y|\ge 1$，且$4|y| \le 1$同时成立。

故不存在$\langle x, y\rangle$与$\langle y, z\rangle$同时属于S。

因此， S满足传递性。

4. 列举出从 X 到 Y 的关系 S 的各元素。

(1) $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 2, 4\}$, $S = \{<x, y> | x + y \in X \cap Y\}$;

(2) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $S = \{ < x, y> | x = y^2, x \in X, y \in Y\}$

知识点：集合的抽象表示、关系的定义

- 集合表示之抽象法
  - 给出一个与 x 有关的谓词（命题）$P(x)$，使得 $x \in A$ 当且仅当 $P(x)$为真
  - 称A为"使$P(x)$为真的x的集合"，记为 $A = \{x \mid P(x)\}$
- 关系的定义：设$n \in \mathrm{I}_+$, 且$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个任意的集合，

  $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$,
  - 称 R 为$A_1, A_2, \ldots, A_n$间的 n元关系；
  - 若 $n = 2$，则称 R为从 A_1到 A_2的二元关系；

4. 列举出从 X 到 Y 的关系 S 的各元素。

(1) $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 2, 4\}$, $S = \{<x, y> \mid x + y \in X \cap Y\}$;

(2) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $S = \{ <x, y> \mid x = y^2, x \in X, y \in Y\}$

解： (1) $X \cap Y = \{0, 2\}$，

$S = \{ <0, 0>, <0, 2,>, <2, 0>\}$.

(2) $S = \{<1, 1>, <4, 2>\}$.

5. 证明或用反例推翻下列命题

(1) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(2) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

知识点：笛卡尔乘积、笛卡尔乘积为空集的充分必要条件、集合运算

定义17 (笛卡尔乘积) 集合 A 和 B 的笛卡儿乘积 $A\times B$ 定义为：

$$A\times B = \{<x, y> \mid x\in A \wedge y\in B\}$$

定理15 设A，B为任意两个集合，则

$$A\times B=\varnothing \text{ 当且仅当 } A=\varnothing \text{ 或 } B=\varnothing。$$

- 设 A 和 B 是任意两个集合
  - $A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}=A\cap\sim B$，其中 $\sim B=U-B$
  - $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

5. 证明或用反例推翻下列命题

(1) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(2) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

分析：(1) 对任意 $\langle x, y\rangle$,

$\langle x, y\rangle\in(A-B)\times(C-D) \Rightarrow x\in A-B \wedge y\in C-D \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \wedge y\in C \wedge y\notin D$

$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \wedge x\notin B\wedge y\notin D \Rightarrow \langle x, y\rangle\in A\times C \wedge \langle x, y\rangle\notin B\times D$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in(A\times C)-(B\times D)$

因此，得 $(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$。

而反方向推导不成立：　由 $\langle x, y\rangle\notin B\times D$ 无法推导出一定有 $x\notin B \wedge y\notin D$,

因为 $\langle x, y\rangle\notin B\times D$ 还包括以下两种情况：$x\notin B \wedge y\in D$, $x\in B \wedge y\notin D$

a) $x\notin B \wedge y\in D \wedge x\in A \wedge y\in C$,

反例：$A=\{1, 2\}, B=\{3, 4\}, C=\{5, 6\}, D=\{5, 8\}$,

5. 证明或用反例推翻下列命题

(1) $(A-B)\times(C-D) = (A\times C) - (B\times D)$

(2) $(A\oplus B)\times(C \oplus D) = (A\times C) \oplus (B\times D)$

分析： (1) 对任意 $<x, y>$,

$<x, y>\in(A-B)\times(C-D) \Rightarrow x\in A-B \wedge y\in C-D \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \wedge y\in C \wedge y\notin D$

$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \wedge x \notin B\wedge y\notin D \Rightarrow <x, y>\in A\times C \wedge <x, y>\notin B\times D$

$\Rightarrow <x, y>\in(A\times C)-(B\times D)$

因此，得 $(A-B)\times(C-D) \subseteq(A\times C) - (B\times D)$。

而反方向推导不成立： 由 $<x, y>\notin B\times D$ 无法推导出一定有 $x \notin B \wedge y\notin D$,

因为 $<x, y>\notin B\times D$ 还包括以下两种情况： $x \notin B \wedge y\in D$, $x\in B \wedge y\notin D$

b) $x\in B \wedge y\notin D \wedge x\in A \wedge y\in C$,

反例：$A=\{1, 2\}, B =\{2, 4\}, C=\{5, 6\}, D=\{7, 8\}$,

5. 证明或用反例推翻下列命题

(1) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(2) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

解析： (1) 另外一种反例形式：

反例：令 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C=D=\{3\}$，此时 $C-D=\emptyset$。

得 $(A-B)\times(C-D)=\emptyset$， $(A\times C)-(B\times D)=\{\langle 1,3\rangle\}$。

即，当$A-B$ 与$C-D$ 中仅一个为空集时，(1) 就可能不成立

5. 证明或用反例推翻下列命题

(1) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

(2) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

解析： (2) 可类似(1) 进行分析，这里仅给出两个反例：

反例1：$A=C=\{1, 2\}$，$B=\{1\}$，$D=\{2\}$，则

$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=\{<2, 1>\}$，而$(A\times C)\oplus(B\times D)=\{<1, 1>, <2, 1>, <2, 2>\}$。

反例2：$A=\{1, 2\}$，$B=\{2, 3\}$，$C=\{5, 6\}=D$，则

$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=\emptyset$，而$(A\times C)\oplus(B\times D)=\{<1, 5>, <1, 6>\}$。

6.设R_1和R_2都是从{1, 2, 3, 4}到 {2, 3, 4}的二元关系，并且R_1= {<1, 3>, <2, 4>, <3, 3>}，R_2= {<1, 3>, <2, 4>, <4, 2>}。求 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, dom R_1, dom R_2, ran R_1, ran R_2, dom($R_1 \cup R_2$), ran($R_1 \cap R_2$)。

知识点：二元关系的定义域、值域和集合运算

- 设 $R \subseteq A \times B$,（定义3）
  - R 的定义域 **dom (R)**：R中所有有序偶<x, y> 的第一元的集合，
    即 **dom(R)** $= \{ x \in A \mid \exists y (y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R) \}$,
  - R 的值域 **ran (R)**：R中所有有序偶<x, y> 的第二元的集合，
    即 **ran(R)** $= \{ y \in B \mid \exists x (x \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R) \}$。

6.设R_1和R_2都是从{1, 2, 3, 4}到 {2, 3, 4}的二元关系，并且R_1= {<1, 3>, <2, 4>, <3, 3>}，R_2= {<1, 3>, <2, 4>, <4, 2>}。求 $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, dom R_1, dom R_2, ran R_1, ran R_2, dom($R_1\cup R_2$), ran($R_1\cap R_2$)。

知识点：二元关系的定义域、值域和集合运算

- 设 R 和S 是从集合A到B的关系, 则$R\cap S$, $R\cup S$ 仍是A到B的关系, 并且对于任意 $x\in A$, $y\in B$: （定义11）
  - $x\,(R\cap S)\,y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\cap S \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,S\,y$
  - $x\,(R\cup S)\,y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\cup S \Leftrightarrow x\,R\,y \vee x\,S\,y$

6.设R_1和R_2都是从{1, 2, 3, 4}到 {2, 3, 4}的二元关系，并且R_1= {<1, 3>, <2, 4>, <3, 3>}，R_2= {<1, 3>, <2, 4>, <4, 2>}。求 $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, dom R_1, dom R_2, ran R_1, ran R_2, dom($R_1 \cup R_2$), ran($R_1 \cap R_2$)。

解： $R_1 \cup R_2$ = {< 1, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <4, 2>},

$R_1 \cap R_2$ = {<1, 3>, <2, 4>}

dom R_1 = {1, 2, 3}, dom R_2 = {1, 2, 4},

ran R_1 = {3, 4}, ran R_2 = {2, 3, 4 },

dom($R_1 \cup R_2$) = {1, 2, 3, 4}, ran($R_1 \cap R_2$)={ 3, 4 }

7. 设R和S都是非空集X上的反对称（传递）关系，判断$R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R\oplus S$是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

知识点：二元关系的运算、五个性质

定义11 设R和S是从集合A到B的关系, 取全集为$A\times B$, 则$R\cap S$, $R\cup S$, $R-S$, $\sim R$, $R\oplus S$仍是A到B的关系，并且对于任意$x\in A$, $y\in B$:

- $x\,(R\cap S)\,y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\cap S \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$
- $x\,(R\cup S)\,y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\cup S \Leftrightarrow xRy \vee xSy$
- $x\,(R-S)\,y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R-S \Leftrightarrow xRy \wedge x\overline{S}y$
- $x\,(\sim R)\,y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in \sim R \Leftrightarrow x\overline{R}y$
- $x\,(R\oplus S)\,y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\oplus S \Leftrightarrow x\,(R-S)\,y \vee x\,(S-R)\,y$

7. 设R和S 都是非空集 X 上的反对称（传递）关系，判断 $R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R\oplus S$ 是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

知识点：二元关系的运算、反对称性与传递性

- 设 R 是集合 X 上的二元关系
  - R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X\wedge y\in X\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$

    $\Leftrightarrow \forall xy\,(x\in X\wedge y\in X\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge x\neq y\rightarrow \langle y,x\rangle\notin R)$
  - R是传递的 $\Leftrightarrow \forall xyz\,(x\in X\wedge y\in X\wedge z\in X\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,z\rangle\in R$

    $\rightarrow \langle x,z\rangle\in R)$

7. 设R和S 都是非空集 X 上的反对称（传递）关系，判断 $R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R\oplus S$ 是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

解：(1) 假设R和S都是非空集 X 上的反对称关系。

a) $R\cap S$。对任意$<x, y>, <y, x> \in R\cap S$，则有

$$<x, y>, <y, x> \in R \text{ 且} <x, y>, <y, x> \in S.$$

由于 R和S都是反对称关系，因此，必有 $x=y$。

故 $R\cap S$ 是反对称关系。

b) $R\cup S$。反例：令 $X=\{1, 2\}$, $R=\{<1, 2>\}$, $S=\{<2, 1>\}$，

则$R\cup S=\{<1, 2>, <2, 1>\}$。

显然，有R与S是反对称的，而$R\cup S$ 是对称的，不是反对称的。

7. 设R和S 都是非空集 X 上的反对称（传递）关系，判断 $R \cap S$，$R \cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R \oplus S$ 是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

解： (1) 假设R和S都是非空集 X 上的反对称关系。

c) $R-S$。对任意$<x, y>, <y, x> \in R-S$，则有

$$<x, y>, <y, x> \in R \text{ 且} <x, y>, <y, x> \notin S.$$

由于R是反对称的，因此 $x = y$。

故 $R-S$是反对称关系。

d) $\sim R$。反例：令 $X=\{1, 2, 3\}$, $R=\{<1, 2>, <1, 3>\}$,

则 $\sim R=\{<1, 1>$，$<2, 1>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>\}$，

显然， 有R是反对称的，而$\sim R$ 中有$<2, 3>$与$<3, 2>$，因此不是反对称的。

7. 设R和S 都是非空集 X 上的反对称（传递）关系，判断 $R \cap S$，$R \cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R \oplus S$ 是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

解： (1) 假设R和S都是非空集 X 上的反对称关系。

e) $R \oplus S$。

反例：令 $X=\{1, 2\}$, $R=\{<1, 2>\}$, $S=\{<2, 1>\}$,

则 $R \oplus S = \{<1, 2>, <2, 1>\}$,

显然， 有R与S是反对称的，而$R \oplus S$是对称的，不是反对称的。

7. 设R和S 都是非空集 X 上的反对称（传递）关系，判断， $R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R\oplus S$ 是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

解： (2) 假设R和S都是非空集 X 上的传递关系。

a) $R\cap S$。对任意$<x, y>, <y, z> \in R\cap S$，则有

$$<x, y>, <y, z> \in R \text{ 且} <x, y>, <y, z> \in S.$$

由于 R和S都是传递关系，因此，必有 $<x, z> \in R$ 且$<x, z> \in S$ 。

得 $<x, z> \in R\cap S$。

故 $R\cap S$ 是传递关系。

b) $R\cup S$。反例：令 $X=\{1, 2\}, R=\{<1, 2>\}, S=\{<2, 1>\}$，

则$R\cup S=\{<1, 2>, <2, 1>\}$ 。

显然，R与S是传递的，而$R\cup S$不满足传递性。

7. 设R和S都是非空集X上的反对称（传递）关系，判断，$R \cap S$，$R \cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R \oplus S$是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

解： (2) 假设R和S都是非空集X上的传递关系。

c) $R-S$。反例：令 $X=\{1, 2, 3\}$, $R=\{<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>\}$，$S=\{<1, 3>\}$,

则 $R-S=\{<1, 2>, <2, 3>\}$。

显然 R 与S 是传递的，而$R-S$ 不是传递的。

d) $\sim R$。反例：令 $X=\{1, 2\}$, $R=\{<1, 1>, <2, 2>\}$

则 $\sim R=\{<1, 2>, <2, 1>\}$。

显然，R是传递的，而$\sim R$ 不是传递关系。

7. 设R和S 都是非空集 X 上的反对称（传递）关系，判断，$R \cap S$，$R \cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R \oplus S$ 是否也为反对称（传递）的，并给出证明与反例。

解：(2) 假设R和S都是非空集 X 上的传递关系。

e) $R \oplus S$。反例：令 $X=\{1, 2\}$, $R=\{<1, 2>, <2, 2>\}$, $S=\{<2, 1>, <2, 2>\}$.

则 $R \oplus S=\{<1, 2>, <2, 1>\}$。

显然 R 与S 是传递的，而$R \oplus S$ 不是传递的。

8. 设R为非空有限集 A上的二元关系。如果R是反对称的，则$R\cap R^{-1}$的关系矩阵中最多有多少个元素为1？

知识点：关系的反对称性的充分必要条件、关系的矩阵表示

- 设 R 为 A 上的二元关系，R 为反对称的当且仅当$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

  证明：($\Rightarrow$) 对任意$<x, y> \in R\cap R^{-1}$，有$<x, y> \in R$ 且 $<x, y> \in R^{-1}$。

  由$<x, y> \in R^{-1}$，得$<y, x> \in R$ 。

  又由于R是反对称的，得 $x = y$。

  因此，$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

($\Leftarrow$) 对任意$<x, y> \in R$, $<y, x> \in R$，

  则有 $<x, y> \in R^{-1}$，得$<x, y> \in R\cap R^{-1}$。

  由于$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，得 $x = y$。

  故 R是反对称的。

8. 设R为非空有限集 A上的二元关系。如果R是反对称的，则 $R\cap R^{-1}$的关系矩阵中最多有多少个元素为1？

知识点：关系的反对称性的充分必要条件、关系的矩阵表示

- 设 $X=\{x_1, \cdots\cdots, x_m\}$，$Y=\{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$， R 是 X 到 Y 的二元关系

R 的关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times n}$， 其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, 若\ x_i R y_j \\ 0, 若\ x_i \bar{R} y_j\end{cases}$$

- I_A 的关系矩阵中只有主对角线上元素为1，其他元素全部为0。

8. 设R为非空有限集 A上的二元关系。如果R是反对称的，则$R\cap R^{-1}$的关系矩阵中最多有多少个元素为1?

解：设A中元素个数为n。

若 R 是反对称的，则 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$（证明见前）。

因此，$R\cap R^{-1}$的关系矩阵中最多有n个元素为 1。

9.设 R_1和 R_2 都是集合 A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(3) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

并分别给出使$s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$ 与 $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例。

知识点：关系的自反闭包、对称闭包、传递闭包

设 R是集合 A 上的关系.

关系R的自反闭包 $r(R)$（对称闭包$s(R)$、传递闭包$t(R)$）为关系 R'，满足

(1) R' 是自反的(对称的、传递的)；

(2) $R \subseteq R'$ ；

(3) 对于A上的任何自反（对称、传递）关系R''，如果 $R \subseteq R''$，则 $R' \subseteq R''$.

9.设 R_1和 R_2 都是集合 A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(3) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

并分别给出使$s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$ 与 $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例。

知识点：关系的自反闭包、对称闭包、传递闭包

定理 8： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$；

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$；

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

定理 9： 设 R 是集合A上的关系， A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

9.设 R_1和 R_2 都是集合 A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(3) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

并分别给出使$s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$ 与 $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例。

解： (1) $r(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup I_A$

$$= (R_1 \cup I_A) \cap (R_2 \cup I_A)$$

$$= r(R_1) \cap r(R_2)$$

9.设 R_1和 R_2 都是集合 A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(3) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

并分别给出使$s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$ 与 $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例。

解： (2) $s(R_1 \cap R_2)$

$$= (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1}$$

$$= (R_1 \cap R_2) \cup (R_1^{-1} \cap R_2^{-1})$$

$$= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cap (R_1 \cup R_2^{-1}) \cap (R_2 \cup R_1^{-1}) \cap (R_2 \cup R_2^{-1})$$

$$\subseteq (R_1 \cup R_1^{-1}) \cap (R_2 \cup R_2^{-1})$$

$$= s(R_1) \cap s(R_2)$$

9.设 R_1和 R_2 都是集合 A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(3) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

并分别给出使$s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$ 与 $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例。

解： (2) $s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$不成立的反例：

令 $A=\{1, 2\}, R_1=\{<1, 2>\}, R_2=\{<2, 1>\}$,

则 $R_1 \cap R_2=\emptyset$, 因此为对称的，得 $s(R_1 \cap R_2) =\emptyset$.

然而，$s(R_1)= \{<1, 2>,<2,1>\}, s(R_2)=\{<2, 1>, <1, 2>\}$, 得

$s(R_1) \cap s(R_2)=\{<1, 2>, <2, 1>\}$ 。

9.设 R_1和 R_2 都是集合 A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(3) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

并分别给出使$s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$ 与 $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例。

解：(3) 已知 $t(R_1 \cap R_2) = \cup_{n=1}^{\infty}(R_1 \cap R_2)^n$, $t(R_1) = \cup_{n=1}^{\infty} R_1{}^n$且$t(R_2) = \cup_{n=1}^{\infty} R_2{}^n$.

对任意$<x, y> \in t(R_1 \cap R_2)$，存在正整数 m，使得$<x, y> \in (R_1 \cap R_2)^m$.

则一定存在$x_1, \ldots, x_{m-1} \in A$，使得 $<x, x_1>, <x_1, x_2>, \ldots, <x_{m-2}, x_{m-1}>, <x_{m-1}, y> \in R_1 \cap R_2$.

得 $<x, x_1>, <x_1, x_2>, \ldots, <x_{m-2}, x_{m-1}>, <x_{m-1}, y> \in R_1$ 且

$<x, x_1>, <x_1, x_2>, \ldots, <x_{m-2}, x_{m-1}>, <x_{m-1}, y> \in R_2$。

从而有$<x, y> \in R_1{}^m$，且$<x, y> \in R_2{}^m$，得$<x, y> \in t(R_1)$且$<x, y> \in t(R_2)$。

从而有 $<x, y> \in t(R_1) \cap t(R_2)$。

综上可得， $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$ 。

9.设 R_1和 R_2 都是集合 A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(3) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

并分别给出使$s(R_1) \cap s(R_2) \subseteq s(R_1 \cap R_2)$ 与 $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例。

解：(3) $t(R_1) \cap t(R_2) \subseteq t(R_1 \cap R_2)$ 不成立的反例：

令 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R_1=\{<1, 2>, <2, 3>\}$, $R_2=\{<1, 4><4, 3>\}$.

显然有， $t(R_1 \cap R_2)=\emptyset$ ， $t(R_1) \cap t(R_2) =\{<1, 3>\}$。

10. 设R 为集合A上的一个二元关系。如果R是反自反和传递的，则R 一定是反对称的。

知识点：关系的反自反性、反对称性和传递性

- 设 R 是集合 X 上的二元关系
  - R是 反自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in X \to \langle x, x\rangle \notin R)$
  - R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall xy\,(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \to x = y)$
    $\Leftrightarrow \forall xy\,(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge x \neq y \to \langle y, x\rangle \notin R)$
  - R是传递的 $\Leftrightarrow \forall xyz\,(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$
    $\to \langle x, z\rangle \in R)$
- 解析：使用反证法进行证明：

R 不是反对称的$\Leftrightarrow \exists\, xy\,(x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R)$

10. 设R为集合A上的一个二元关系。如果R是反自反和传递的，则R一定是反对称的。

证明：（反证法）假设R不是反对称的，

则一定存在$x, y \in A$且$x \neq y$，使得$<x, y>, <y, x> \in R$。

由于R是传递的，因此有$<x, x> \in R$，

与R是反自反的矛盾。

故假设不成立，即R一定是反对称的。

11. 如果集合A上的二元关系 R 是自反的，又是传递的，则$R^2=R$。

知识点：关系的自反性、传递性的充分必要条件

- 设 R 是集合 X 上的二元关系
  - R是 反自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$
  - R是传递的 $\Leftrightarrow \forall xyz\,(x\in X\wedge y\in X \wedge z\in X \wedge \langle x, y\rangle\in R\wedge \langle y, z\rangle\in R \rightarrow \langle x, z\rangle\in R)$
  - R 为传递的 当且仅当 $R\circ R\subseteq R$（证明见课件中例题）.

11. 如果集合A上的二元关系 R 是自反的，又是传递的，则$R^2=R$。

证明：首先，由于R是传递的，因此有 $R^2 \subseteq R$ （证明见课件）。

假设 $R \not\subseteq R^2$ ，则存在$<x, y> \in R$，且$<x, y> \notin R^2$。

由于R是自反的，必有$<y, y> \in R$，

得 $<x, y> \in R^2$，矛盾。

故假设不成立，即$R \subseteq R^2$。

综上可得 $R^2=R$。