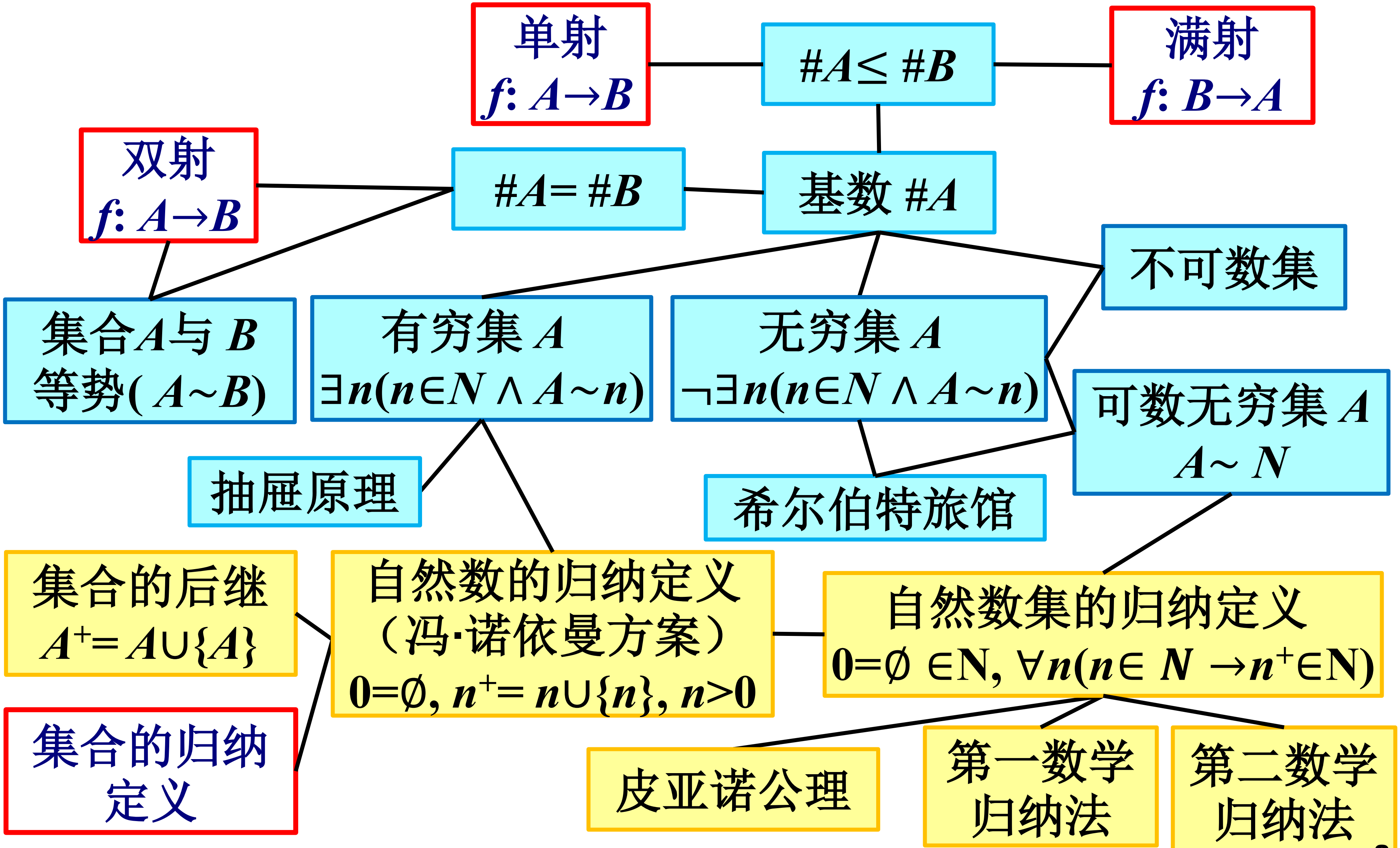
第四章自然数和基数

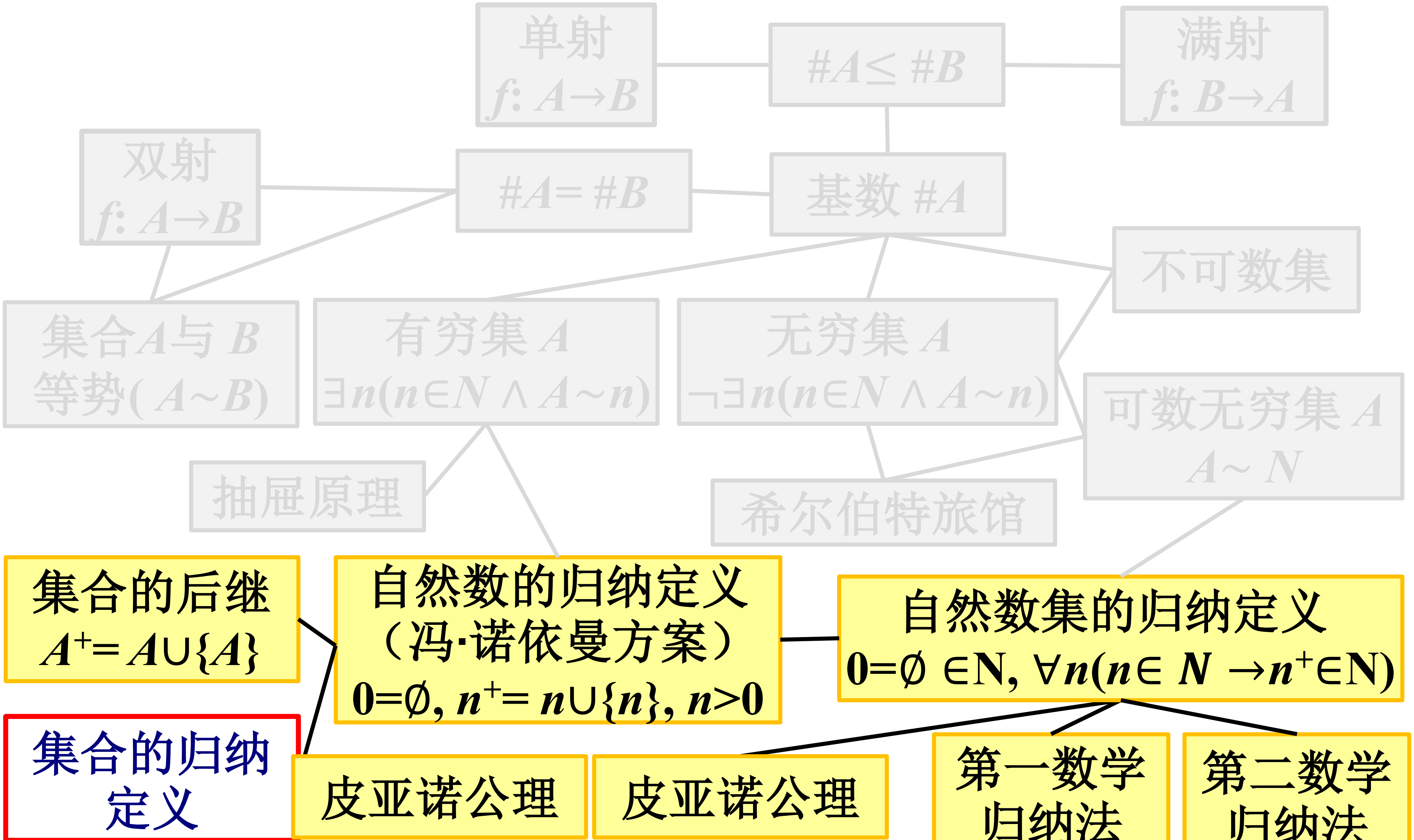
4.1 自然数及数学归纳法

4.2 基数

知识点关联


单射
f: A→B
#A≤ #B
满射
f: B→A
双射
f: A→B
#A= #B
基数 #A
不可数集
集合A与 B
等势(A~B)
有穷集 A
∃n(n∈N ∧ A~n)
无穷集 A
¬∃n(n∈N ∧ A~n)
可数无穷集 A
A~ N
抽屉原理
希尔伯特旅馆
集合的后继
A⁺= A∪{A}
自然数的归纳定义
（冯·诺依曼方案）
0=∅, n⁺= n∪{n}, n>0
自然数集的归纳定义
0=∅ ∈N, ∀n(n∈ N →n⁺∈N)
集合的归纳
定义
皮亚诺公理
第一数学
归纳法
第二数学
归纳法

4.1 自然数和数学归纳法



自然数的引进方法

- 公理化方法
  - 把“自然数”当做不能定义的原始概念，并提供一张说明“自然数”这一原始概念的公理表
  - 最著名的自然数公理：皮亚诺公理
  - 自然数的各种性质，包括运算、大小次序及有关的基本定律，都可以从皮亚诺公理的推导出来
- 构造性方法
  - 借助集合论，把“自然数”一个一个地构造出来，
  - 证明构造出来的“自然数”满足皮亚诺公理，因此具有普通 自然数的一切性质

4.1.1 集合的后继

定义1(后继) 若A为集合，则称$A \cup \{A\}$为A的后继，并记为 A^+.

- 每个集合都有**唯一的**一个后继.

定理1： 设 A 为任意集合， 则

(1) $\varnothing^+ = \{\varnothing\}$；

(2) $\{\varnothing\}^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

(3) $A \in A^+$;

(4) $A \subseteq A^+$;

(5) $A^+ \neq \varnothing$.

- 当$A \subseteq B$时，不一定有$A^+ \subseteq B^+$.

例：$A = \emptyset$，$B=\{1\}$，$A \subseteq B$.

$A^+ = \{\emptyset\}$，$B^+ = \{1\} \cup \{\{1\}\} = \{1, \{1\}\}$,

$A^+ \nsubseteq B^+$

$A = \{1\}$，$B=\{1, 2\}$，$A \subseteq B$.

$A^+ = \{1\} \cup \{\{1\}\} = \{1, \{1\}\}$,

$B^+ = \{1, 2\} \cup \{\{1, 2\}\} = \{1, 2, \{1,2\}\}$,

$A^+ \nsubseteq B^+$

$A = \{1\}$，$B=\{1, \{1\}\}$，$A \subseteq B$.

$A^+ = \{1, \{1\}\} = B$，$B^+ = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$,

$A^+ \subseteq B^+$.

4.1.2 自然数集合的归纳定义

■ **构造自然数：冯·诺依曼（Von Neumann）方案**

$$\mathbf{0} = \varnothing$$

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &= \mathbf{0}^+ \\ &= \mathbf{0} \cup \{\mathbf{0}\} \\ &= \varnothing \cup \{\varnothing\} \\ &= \{\varnothing\} = \{\mathbf{0}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{2} &= \mathbf{1}^+ \\ &= \mathbf{1} \cup \{\mathbf{1}\} \\ &= \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} \\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{3} &= \mathbf{2}^+ \\ &= \mathbf{2} \cup \{\mathbf{2}\} \\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$n+1 = n^+ = \cdots = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, n\}$$

$$\cdots$$

自然数集合的归纳定义

定义2: 自然数集合 N 可用归纳定义法定义如下：

(1) $0 \in \mathrm{N}$， 这里 $0 = \varnothing$;

(2) 若 $n \in \mathrm{N}$，则 $n^+ \in \mathrm{N}$；

$n^+ = n \cup \{n\}$

(3) 若 $S \subseteq \mathrm{N}$, 且满足

(a) $0 \in S$

(b) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$（极小化）

则 $S = \mathrm{N}$.

- 对每个自然数 $n \in \mathrm{N}$，皆有 $n \in n^+$ 及 $n \subseteq n^+$.

  ——自然数的两个重要性质，用于定义 N 上的大小次序关系

自然数集合上的小于/大于关系

- 对每个自然数 $n \in \mathbf{N}$，皆有 $n \in n^+$ 及 $n \subseteq n^+$.

定义3：若 $m, n \in \mathbf{N}$ 使 $m \in n$, 则称 m小于n (或 n大于m), 记为 $m < n$ (或 $n > m$).

冯·诺依曼（Von Neumann）自然数构造方案：

$$0 = \varnothing$$
$$1 = 0^+ = \{ \varnothing \} = \{ 0 \}$$
$$2 = 1^+ = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} = \{ 0, 1 \}$$
$$3 = 2^+ = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}, \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} \} = \{ 0, 1, 2 \}$$
$$\cdots$$
$$n+1 = n^+ = \cdots = \{ 0, 1, \cdots, n \}$$
$$\cdots$$

- “小于” 关系 $<$是自然数集 N上的反自反、反对称、传递的二元关系

自然数的加法、乘法

定义4 (归纳定义N上的加法运算“＋”与乘法运算“·”)

对任意的 $n, m \in \mathrm{N}$，令

(1) $m + 0 = m$，$m \cdot 0 = 0$;

(2) $m + n^+ = (m + n)^+$，$m \cdot n^+ = m \cdot n + m$.

- 得到自然数系统 <N, +, · >

问题：<N, +, · > 是否满足皮亚诺公理？

  - 需要以下结论：若 $n \in \mathrm{N}$，则 $\bigcup n^+ = n$ （定理2）

定理 2：若 $n \in \mathbf{N}$，则 $\bigcup n^+ = n$.

冯·诺依曼（Von Neumann）自然数构造方案：

$0 = \varnothing$

$1 = 0^+ = \{\varnothing\} = \{0\}$

$2 = 1^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$

$3 = 2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

…

$n+1 = n^+ = \cdots = \{0, 1, \cdots, n\}$

…

例：$\bigcup 0^+ = \bigcup\{\varnothing\} = \varnothing = 0$

$\bigcup 1^+ = \bigcup\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = 1$

$\bigcup 2^+ = \bigcup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 2$

定理 2：若 $n \in \mathbf{N}$，则 $\bigcup n^+ = n$.

定义集合 $S = \{ n \mid n \in \mathbf{N}$ 且 $\bigcup n^+ = n \} \subseteq \mathbf{N}$

只需证明： $S = \mathbf{N}$.

归纳证明：

定义2: 自然数集合 N 可用归纳定义法定义如下：

(1) $0 \in \mathbf{N}$， 这里 $0 = \varnothing$;

(2) 若 $n \in \mathbf{N}$，则 $n^+ \in \mathbf{N}$;

(3) 若 $S \subseteq \mathbf{N}$, 且满足

(a) $0 \in S$

(b) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = \mathbf{N}$.

定理 2：若 $n\in \mathrm{N}$，则 $\bigcup n^{+} = n$.

(3) 若 $S\subseteq N$, 且满足

(a) $0\in S$

(b) 如 果 $n\in S$, 则 $n^{+}\in S$

则 $S=\mathrm{N}$

证明：令 $S=\{\, n \mid n\in \mathrm{N}$ 且 $\bigcup n^{+}=n \,\}$，只需证明 $S=\mathrm{N}$.

（1）显然 $S\subseteq \mathrm{N}$.

（2）只需验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b)：

(a) 因为 $0\in \mathrm{N}$ 且 $\bigcup 0^{+}=\bigcup \varnothing^{+}=\bigcup\{\varnothing\}=\varnothing=0$，所以 $0\in S$.

(b) 若 $n\in S$，则 $n\in \mathrm{N}$ 且 $\bigcup n^{+}=n$．下面证明 $n^{+}\in S$，

显然，$n^{+}\in \mathrm{N}$，且 $= (\bigcup n^{+}) \cup (\bigcup\{n^{+}\})$

$\bigcup((n^{+})^{+}) = \bigcup(n^{+}\cup\{n^{+}\})$（因为 $n\subseteq n^{+}$）

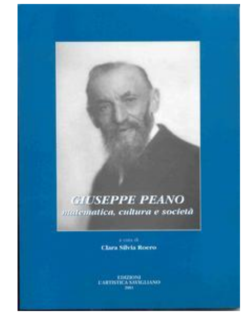
$= n \cup n^{+}$

所以有 $n^{+}\in S$.

由自然数集合 N 的归纳定义法得 $S=\mathrm{N}$，定理成立

皮亚诺（Peano）公理

朱塞佩·皮亚诺 Giuseppe Peano （1858年8月27日 - 1932年4月20日） 是意大利数学家、逻辑学家、语言学家。生于斯宾尼塔，卒于都灵。他大多数生涯在意大利的都灵大学(Università degli Studi di Torino)教授数学。他是数学逻辑和集合理论的先驱，毕生致力于建立数学基础和发展形式逻辑语言，符号逻辑的奠基人，提出了著名的自然数公理化系统。



在数学基础方面他曾从不加定义的“集合”、“自然数”、“继数”与“属于”等概念出发，于1889年发表算术原理新方法提出自然数的五条公理，建立了自然数的理论。其中，第5条“归纳法公理”就是数学归纳法的原理。

一生编写了200多本书及相关资料，其主要著作有：《算术原理：用一种新方法的说明》（1889年）、同别人合著的《数学公式汇编》（Formulaire demathematiques），或译为《数学的陈述》（全5册，1894年一1908年）《微分学与积分学原理》（Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale）《无穷小分析教程》（Lezioni di analisi infinitesimale）（2卷）《几何演算学》（Calcolo geometrico）包含了他关于数理逻辑的最早研究。

皮亚诺（Peano）公理

定理3：按定义2与定义4构造出来的自然数系统 $<N,+,\cdot>$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P_1：$0\in N$；

P_2：若 $n\in N$，则有唯一的后继 $n^+\in N$；

P_3：若 $n\in N$，则 $n^+\neq 0$；

P_4：若 $n, m\in N$ 且 $n^+=m^+$，则 $n=m$；

P_5：若 $S\subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0\in S$

ii) 如果 $n\in S$，则 $n^+\in S$

则 $S=N$.

皮亚诺公理体系的核心包括五个基本公理，即零元素存在性（P_1）、无限性公理(P_2)、继承公理(P_3)、等值公理(P_4)、归纳公理(P_5)，形成了一个严格而一致的逻辑框架，从而确保了算术的内部一致性和可证明性。

皮亚诺（Peano）公理

定理3：按定义2与定义4构造出来的自然数系统 $<\mathrm{N}, +, \cdot>$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P_1：$0 \in \mathrm{N}$；

P_2：若 $n \in \mathrm{N}$，则有唯一的后继 $n^+ \in \mathrm{N}$；

P_3：若 $n \in \mathrm{N}$，则 $n^+ \neq 0$；

P_4：若 $n, m \in \mathrm{N}$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$；

P_5：若 $S \subseteq \mathrm{N}$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = \mathrm{N}$.

证明：P_1, P_2和P_5即为自然数集N归纳定义的 (1), (2), (3). P_3 可以从定理1 的结论(5) 直接推导出来 (对任意集合A, $A^+ \neq \varnothing$).

皮亚诺（Peano）公理

定理3：按定义2与定义4构造出来的自然数系统 $<N, +, \cdot>$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P_1： $0 \in N$ ；

P_2： 若 $n \in N$ ， 则有唯一的后继 $n^+ \in N$ ；

P_3： 若 $n \in N$ ， 则 $n^+ \neq 0$;

P_4： 若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$， 则 $n = m$;

P_5： 若 $S \subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$.

证明: P_4： 若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$,

则由 定理 2 可得： $n = \bigcup n^+ = \bigcup m^+ = m$.

皮亚诺（Peano）公理

定理3：按定义2与定义4构造出来的自然数系统 $\langle N, +, \cdot \rangle$ 满足以下的皮亚诺(Peano)公理：

P_1：$0 \in N$；

0 是自然数

每一个自然数 n 都有一个确定的后继数 n^+

P_2：若 $n \in N$，则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P_3：若 $n \in N$，则 $n^+ \neq 0$；

没有以 0 为后继的自然数

P_4：若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$；

任意两个不同的自然数，其后继也不一样

P_5：若 $S \subseteq N$ 满足

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$.

自然数集合是满足 P_1、P_2 条件的极小集合

4.1.3 自然数的性质

- 作为集合的自然数具有的性质
  - 传递性：若 $n_1 \in n_2$ 且 $n_2 \in n_3$，则 $n_1 \in n_3$.
  - 三歧性：对于任何两个自然数 n_1，n_2，下列三式恰有一个成立：$n_1 \in n_2$，$n_1 = n_2$，或 $n_2 \in n_1$.
  - 良基性：不存在一个自然数的无限递降序列

    $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i, n_{i+1}, \ldots$ 使得 $n_{i+1} \in n_i$.

  由自然数的定义可知，对于每一个自然数，只有有限个比它小的自然数，并且

  $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots\ldots$

  $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \ldots\ldots$

4.1.3 自然数的性质

- 作为集合的自然数具有的性质（续）

(1) 若$n\in N$，则 $n\notin n$

(2) 若$n, m\in N$, 且$n \in m$, 则$n^+\in m$或者$n^+ = m$

(3) 若$n, m\in N$，则$n\subset m$ 当且仅当 $n\in m$.

(4) 若$n, m\in N$，则$n\in m$ 当且仅当 $n^+\in m^+$

(5) 若$n\in N$，则不可能有$m\in N$ 使$n<m<n^+$

例. 试证：若$n\in \mathrm{N}$，则 $n\notin n$.

(3) 若$S\subseteq \mathrm{N}$, 且满足

(a) $0\in S$

(b) 如果 $n\in S$, 则 $n^+\in S$

则 $S=\mathrm{N}$.

证明: 构造集合 $S=\{n\in \mathrm{N} \mid n\notin n\}$.

只需证明 $S=\mathrm{N}$.

显然$S\subseteq \mathrm{N}$. 下面验证S满足自然数归纳定义中(3)的(a)与(b).

(a) 因为$0=\varnothing\notin\varnothing$，所以$0\in S$.

(b) 假设 $n\in S$，则 $n\notin n$. 下面证明 $n^+\in S$，只需证明$n^+\notin n^+$.

假设 $n^+\in n^+$，则 $\{n^+\}\subseteq n^+$.

故 $(n^+)^+=n^+\cup\{n^+\}\subseteq n^+$.

又由 $n^+\subseteq(n^+)^+$，得 $n^+=(n^+)^+$.

而$n^+\in(n^+)^+$，与三歧性矛盾.

因此假设不成立，即$n^+\notin n^+$，得$n^+\in S$.

因此 $S=\mathrm{N}$, 结论成立.

4.1.4 数学归纳法

定理3：按定义2与定义4构造出来的自然数系统 $\langle N, +, \cdot \rangle$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P_1： $0 \in N$；

P_2： 若 $n \in N$，则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P_3： 若 $n \in N$，则 $n^+ \neq 0$；

P_4： 若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$；

P_5： 若 $S \subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$.

- 称Peano公理的P_5为归纳原理，是数学归纳法的基础

第一数学归纳法

对任意$n \in \mathrm{N}$, 令$\mathrm{N}_n=\{0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1\}$, $\overline{N}_n=\mathrm{N}-\mathrm{N}_n=\{n, n+1, n+2, \ldots\}$

定理4 (第一数学归纳法)：设$n_0 \in \mathrm{N}$. 若对每个

$n \in \overline{\mathrm{N}}_{n_0}$,

命题 $P(n)$ 满足：

$n \geq n_0$

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n \in \overline{N}_{n_0}$，若$P(n)$为真，则$P(n^+)$也为真.

则对所有 $n \in \overline{N}_{n_0}$，$P(n)$皆为真.

数学归纳法是论域为自然数集合的推理规则：

- $n_0=0$：$P(0) \wedge (\forall n)\,(P(n) \rightarrow P(n+1)) \Rightarrow (\forall n)\,P(n)$
- $n_0=k>0$：$P(k) \wedge (\forall n)(n \geq k \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)) \Rightarrow$ $(\forall x)(x \geq k \rightarrow P(x))$

定理4 (第一数学归纳法)：设$n_0 \in \mathbf{N}$. 若对每个

$n \in \overline{\mathbf{N}}_{n_0}$,

命题 $P(n)$ 满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n \in \overline{N}_{n_0}$，若$P(n)$为真，则$P(n^+)$也为真.

则对所有 $n \in \overline{N}_{n_0}$，$P(n)$皆为真.

用第一数学归纳法进行证明的步骤：

(i) 直接验证当$n=n_0$时，命题成立；

(ii) 对任意的自然数$k \geq n_0$时，假定当$n=k$时命题为真，

证明当$n=k+1$时命题也真.

定理4 (第一数学归纳法)：设$n_0 \in \mathrm{N}$. 若对每个

$n \in \overline{\mathrm{N}}_{n_0}$,

命题 $P(n)$ 满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n \in \overline{\mathrm{N}}_{n_0}$，若$P(n)$为真，则$P(n^+)$也为真.

则对所有 $n \in \overline{\mathrm{N}}_{n_0}$，$P(n)$皆为真.

证明：令 $S=\{ n \mid n \in \mathrm{N}$且$P(n_0+n)$为真$\}$，只需证明$S=\mathrm{N}$.

显然有$S \subseteq \mathrm{N}$，下面验证S满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b).

(a) $0 \in S$: 因为$P(n_0)$为真，即$P(n_0+0)$为真.

定理4 (第一数学归纳法)：设$n_0\in\mathrm{N}$. 若对每个

$n\in\bar{\mathrm{N}}_{n_0}$,

命题 $P(n)$ 满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n\in\bar{N}_{n_0}$，若$P(n)$为真，则$P(n^+)$也为真.

则对所有 $n\in\bar{N}$ … $P(n)$皆为真

证明（续）： $S=\{\, n \mid n\in \mathrm{N}$且$P(n_0+n)$为真$\}$

(b) 若$n\in S$，则$n\in\mathrm{N}$, $P(n_0+n)$为真. 下面证明$n^+\in S$，即证明$P(n_0+n^+)$为真.

因为 $n_0+n^+=(n_0+n)^+\in\mathrm{N}$（加法运算），且$n_0+n\in\bar{N}_{n_0}$，由题设(2)知 $P((n_0+n)^+)$ 为真，即$P(n_0+n^+)$为真，得$n^+\in S$.

例：证明$n<2^n$，$n\in \mathrm{N}$

证明： 设 $P(n)$：$n<2^n$

（1）对于$n=0$, $P(0)$：$0<2^0=1$，因此$P(0)$为真.

（2）对于任意的$m\in \mathrm{N}$,假定$P(m)$是真,即$P(m)$：$m<2^m$.

（3）$m+1 < 2^m+1 \le 2^m+ 2^m = 2\times 2^m= 2^{m+1}$,即$m+1 < 2^{m+1}$.

说明$P(m+1)$为真.

因此$P(m) \Rightarrow P(m+1)$,由数学归纳法,对于所有的$n\in \mathrm{N}$,

$P(n)$为真.

例: 证明对于任何$n \geq 4$，$2^n < n!$.

证明：设$P(n)$：$2^n < n!$

(1) $P(4)$: $2^4 < 4!$, $2^4 = 16$，$4! = 24$. $P(4)$成立 .

(2) 设对于任何$m > 4$, $P(m)$为真,即$2^m < m!$.

(3) $2 \times 2^m < 2 \times m!$,

$2^{m+1} < 2 \times m! < (m+1) \times m! = (m+1)!$,

即$2^{m+1} < (m+1)!$

上式说明$P(m+1)$为真.

因此,对于所有的$n \in \mathrm{N}$, $n \geq 4$, $P(n)$为真.

错误的归纳证明

例. 证明若n为自然数，则$n+1=n$.

证明：对任意的$k\in N$, 假设当$n=k$时命题为真，即$k+1=k$. 从而得到$(k+1)+1=k+1$，即当$n=k+1$时命题也为真. 因此由第一归纳法得知，若n为自然数，则$n+1=n$.

$n=0$时不成立

例. 证明世界上所有的人都同岁.

证明: (1) 当$n=1$时，因为只有一个人, 他和他自己同岁, 命题为真.

归纳方法在 $n=2$时不成立

(2) 假定对任意的自然数$k>1$, 当$n=k$时命题为真，即任意k个人都同岁. 任取 $k+1$个人，假定为$a_1, a_2,\ldots, a_{k+1}$.

根据假定，$a_1, a_2, \ldots, a_k$同岁，$a_2, a_3,\ldots, a_{k+1}$也同岁.

所以$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$都与$a_2$同岁，表明$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$必同岁.

因此，$n=k+1$时命题也为真.

第二数学归纳法

- 一种更强形式的数学归纳法

定理5 (第二数学归纳法)：设$n_0 \in \mathrm{N}$. 若对每个 $n \in \overline{\mathrm{N}}_{n_0}$, $P(n)$满足：

($\overline{\mathrm{N}}_{n0}=\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$)

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k\in\mathrm{N}$, 且$n_0 \le k < n$时$P(k)$为真，则$P(n)$也为真.

则对所有 $n \in \overline{\mathrm{N}}_{n_0}$，$P(n)$皆为真.

第一数学归纳法：对任何$n \ge n_0$，若$P(n)$为真，则$P(n^+)$也为真

第二归纳法的证明步骤：

(i)直接验证当$n=n_0$时，命题为真；

(ii)对任意的自然数$n> n_0$时，假定对任意的自然数 k，当$n_0 \le k<n$时命题皆真，证明当$k =n$时命题也真.

定理5 (第二数学归纳法)：设$n_0 \in \mathrm{N}$. 若对每个 $n \in \bar{\mathrm{N}}_{n_0}$，$P(n)$满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k \in \mathrm{N}$, 且$n_0 \le k < n$时$P(k)$为真，则$P(n)$也为真.

则对所有 $n \in \bar{\mathrm{N}}_{n_0}$，$P(n)$皆为真.

证明: 对每个$n \in \bar{N}_{n_0}$, 用$Q(n)$表示以下命题:

如果$k \in \mathrm{N}$, 且$n_0 \le k \le n$, 则$P(k)$皆真.

下面验证$Q(n)$满足第一归纳法的条件.

(i) 因为$Q(n_0)$就是$P(n_0)$，所以由(1)知，$Q(n_0)$为真；

(ii) 对于任意$n \in \bar{\mathrm{N}}_{n_0}$, 假定$Q(n)$为真，即$k \in \mathrm{N}$且$n_0 \le k \le n$时$P(k)$皆真. 下面证明$Q(n^+)$为真.

定理5 (第二数学归纳法)：设$n_0\in\mathbf{N}$. 若对每个 $n\in\overline{\mathbf{N}}_{n_0}$, $P(n)$满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k\in\mathbf{N}$, 且$n_0\le k<n$时$P(k)$为真，则$P(n)$也为真.

则对所有 $n\in\overline{\mathbf{N}}_{n_0}$，$P(n)$皆为真.

$Q(n)$：如果$k\in\mathbf{N}$, 且$n_0\le k\le n$, 则$P(k)$皆真

证明（续）: 因为没有$m\in\mathbf{N}$能使$n<m<n^+$, 因此由归纳假设，当$n_0\le k<n^+$时，$P(k)$也皆真.

从而由题设(2)知$P(n^+)$为真, 即$Q(n^+)$为真.

根据第一归纳法，由(i), (ii)知，对任意的$n\in\overline{N}_{n_0}$，$Q(n)$皆为真.

从而由$Q(n)$的定义知，对任意的$n\in\overline{N}_{n_0}$，$P(n)$皆为

例. 证明: 任意的整数$n \geq 2$都能写成质数的乘积 .

证明： 使用第二数学归纳法，对n进行归纳证明.

(1) $n=2$时， 因为2是质数，2本身就是质数的乘积；

(2) 假设对每个自然数 k, 当 $2 \leq k < n$时，k都能写成质数的乘积, 下面证明n也能写成质数的乘积.

分两种情况:

(a) 若n是质数, 显然它就是一个质数的乘积.

(b) 若n不是质数, 则n可写成$n=a \times b$, 其中， a, b均为整数且$2 \leq a, b < n$.

由归纳假设知， a和b都可写成质数的乘积， 所以n也能写成质数的乘积.

根据第二数学归纳法结论成立.

例. 设有两个口袋，分别装有m个球和n个球，且 $m>n$.今有二人进行取球比赛，其比赛规则如下：

(1) 二人轮流从口袋里取球，每次只准一个人取；

(2) 每人每次只能从一个口袋里取且至少得取出一个球，多取不限；

(3) 最后取完口袋里的球者为获胜者.

试证明：先取者总能获胜.

证明：关于n进行第二数学归纳法证明.

(1) 当$n=0$时，仅一个口袋里有球，先取者全部取出即胜，此时命题为真.

(2) 对任意的自然数$n>0$，假定对任意的自然数$k<n$，命题为真.

证明（续）：

(3) 当$k=n$时，

因为$m>n$，所以，先取者可以从装有m个球的口袋里取出 $m-n$个球，此时两个口袋都只有n个球.

后选者需要从一个口袋里取出至少一个球.

所以先取者再取时，一个口袋里有n个球，另一个口袋里不足n个球.

根据归纳假设，先取者总能获胜，即当$k=n$时，命题为真.

二重归纳原理

设 $i_0, j_0 \in \mathrm{N}$．假定对任意自然数 $i \geq i_0$ 及 $j \geq j_0$ 皆有命题 $P(i, j)$ 满足：

(1) $P(i_0, j_0)$为真；

(2) 对任意自然数 $k \geq i_0$ 及 $l \geq j_0$,

若$P(k, l)$ 为真，则$P(k+1, l)$ 和 $P(k, l+1)$皆真.

则对任意自然数 $i \geq i_0$ 及 $j \geq j_0$, $P(i, j)$ 皆真.

证明:（第一归纳法）

对于每个$i \ge i_0$, 令$Q(i)$表示命题：对于任意$j \ge j_0$, $P(i, j)$皆为真.

下面验证：$Q(i)$满足第一归纳法的条件.

(i) $Q(i_0)$为真（为此对 j 施用第一归纳法）：

(a) $P(i_0, j_0)$为真;

(b) 若$P(i_0, j)$为真, 则$P(i_0, j+1)$为真；由归纳法可知，$Q(i_0)$为真.

(ii)若$Q(i)$为真($i \ge i_0$)，即对于任意$i \ge i_0$，$j \ge j_0$，$P(i, j)$为真.

则对于任意$j \ge j_0$，$P(i+1, j)$为真，即$Q(i+1)$为真.

由(i)和(ii)可知，对于任意$i \ge i_0$，$Q(i)$皆真.

所以，对于任意$i \ge i_0$，$j \ge j_0$，$P(i, j)$为真.

思考题

1. 设 n, m 都是正整数，用二重数学归纳法证明方程

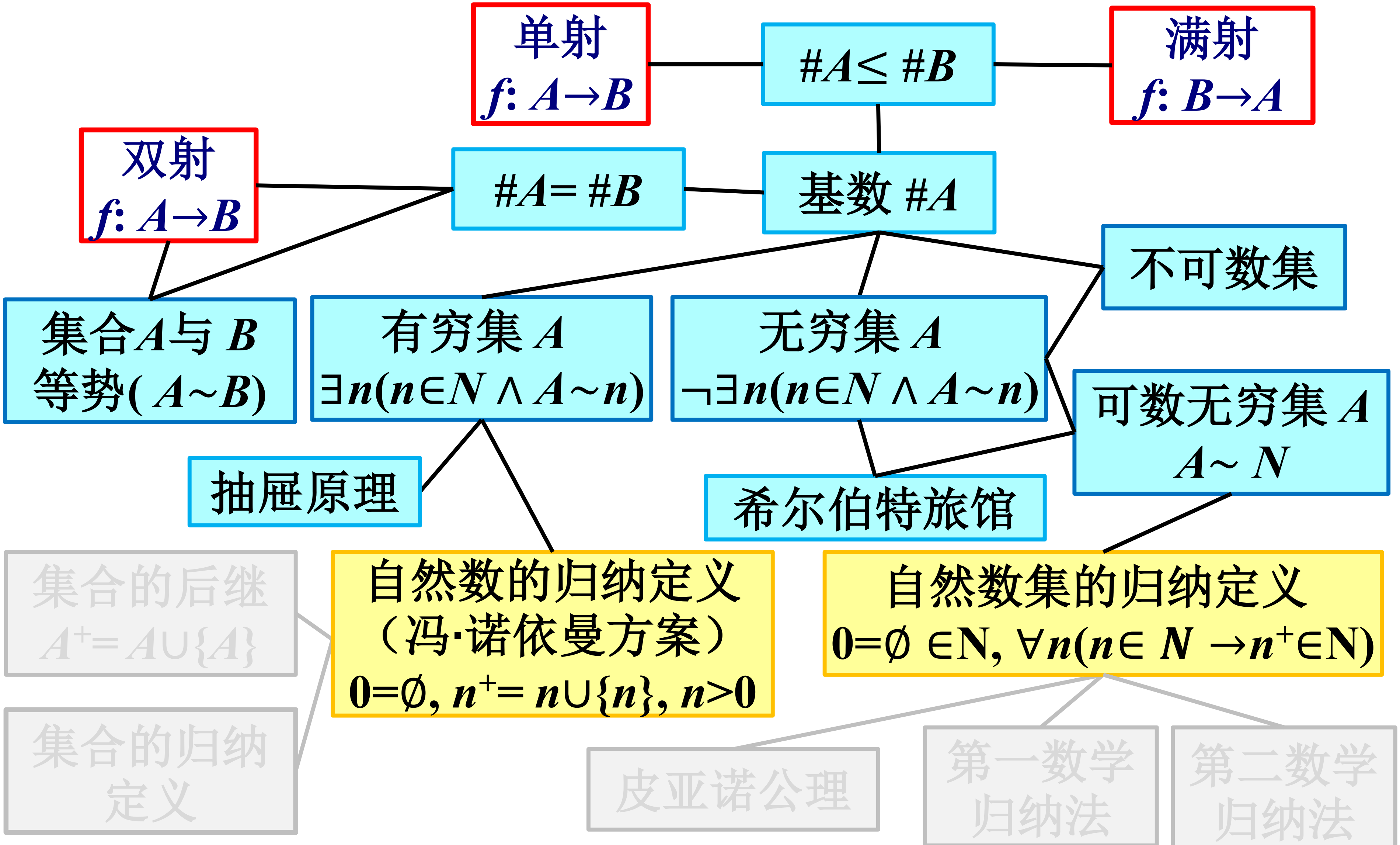
$$x_1+x_2+\ldots x_m=n$$

的非负整数解的个数为 C_{n+m-1}^{n}.

小结

1. 集合的后继
2. 自然数集合的归纳定义
3. 自然数的性质
4. 第一、二数学归纳法

4.2 基数



单射
f: A→B
#A≤ #B
满射
f: B→A
双射
f: A→B
#A= #B
基数 #A
不可数集
集合A与 B
等势(A~B)
有穷集 A
∃n(n∈N ∧ A~n)
无穷集 A
¬∃n(n∈N ∧ A~n)
可数无穷集 A
A~ N
抽屉原理
希尔伯特旅馆
集合的后继
A⁺= A∪{A}
集合的归纳
定义
自然数的归纳定义
（冯·诺依曼方案）
0=∅, n⁺= n∪{n}, n>0
自然数集的归纳定义
0=∅ ∈N, ∀n(n∈ N →n⁺∈N)
皮亚诺公理
第一数学
归纳法
第二数学
归纳法

- 对任意两个有穷集合A和B，如何知道A和B中哪个含有更多的元素？

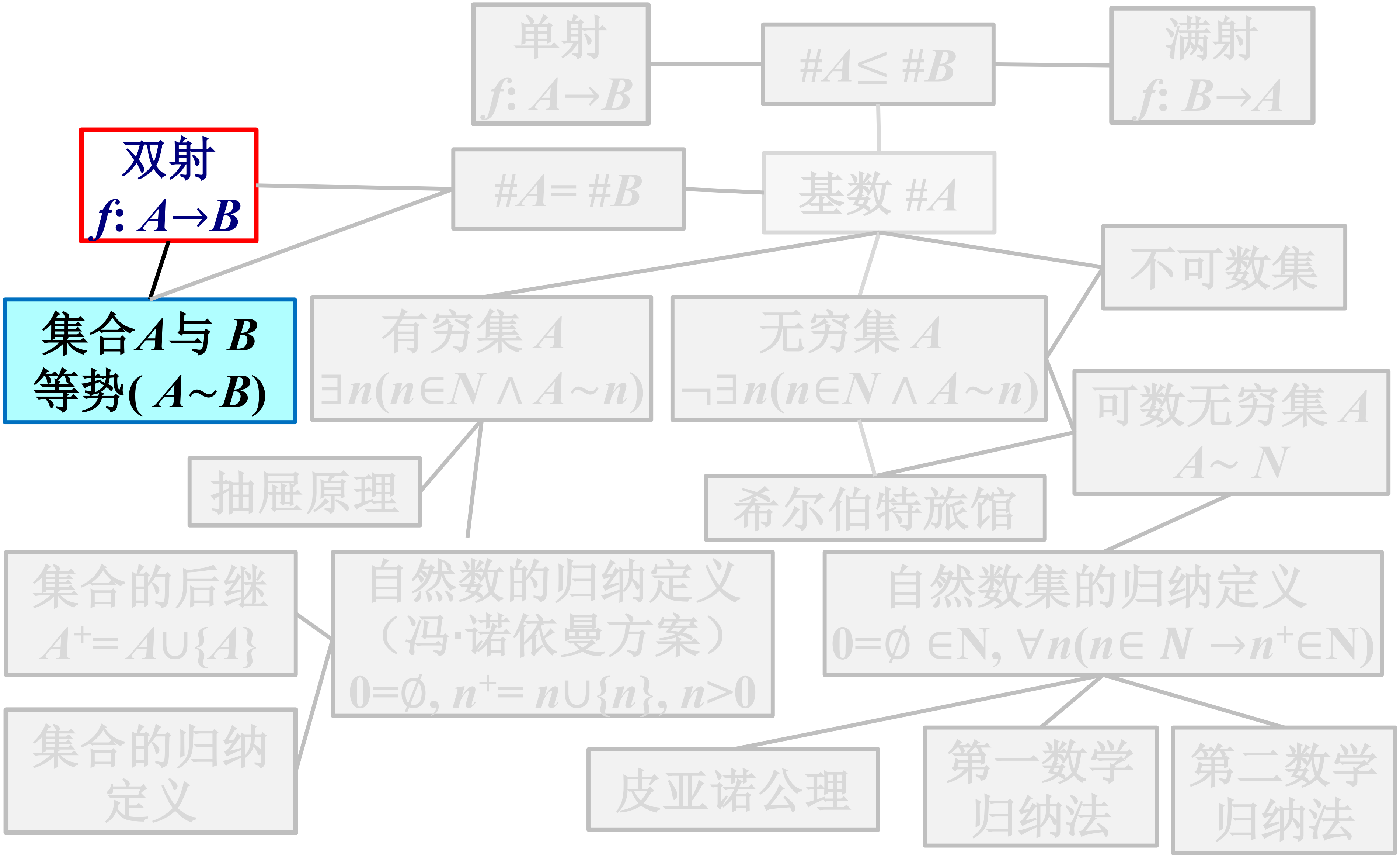
1. 计数法：先数出它们的元素个数，再加以比较.
2. 一一对应法：每次各取一，看哪个集合最先取完.

- 对无穷集，计数法失效
- 而一一对应法可应用于无穷集

问题：如何定义一个集合中元素个数？

- 有穷集：与某个自然数之间建立一个双射
- 可数无穷集：与自然数集之间建立一个双射

4.2.1 等势



单射
f: A→B
#A≤ #B
满射
f: B→A
双射
f: A→B
#A= #B
基数 #A
集合A与 B
等势(A~B)
有穷集 A
∃n(n∈N ∧ A~n)
无穷集 A
¬∃n(n∈N ∧ A~n)
不可数集
可数无穷集 A
A~ N
抽屉原理
希尔伯特旅馆
集合的后继
A⁺= A∪{A}
自然数的归纳定义
（冯·诺依曼方案）
0=∅, n⁺= n∪{n}, n>0
自然数集的归纳定义
0=∅ ∈N, ∀n(n∈ N →n⁺∈N)
集合的归纳
定义
皮亚诺公理
第一数学
归纳法
第二数学
归纳法

4.2.1 等势

定义5: 设A 和 B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 和 B 对等，或称 A 和 B 等势，记为 $A \sim B$.

例: 1. 设集合E = {0, 2, 4, …}，即E是非负偶数集.

令 f : N → E 为： $f(n) = 2n$, 其中 $n \in$ N,

显然， f 为双射, 故 $N \sim$ E.

2. 设集合O = {1, 3, 5, 7, …}，即O是非负奇数集.

令 g : N → O 为： $g(n) = 2n+1$, 其中 $n \in$ N,

显然， g 为双射, 故 N～O.

等势的性质

对于任何集合 A, B, C，均有:

(1) $A \sim A$; 恒等函数是双射

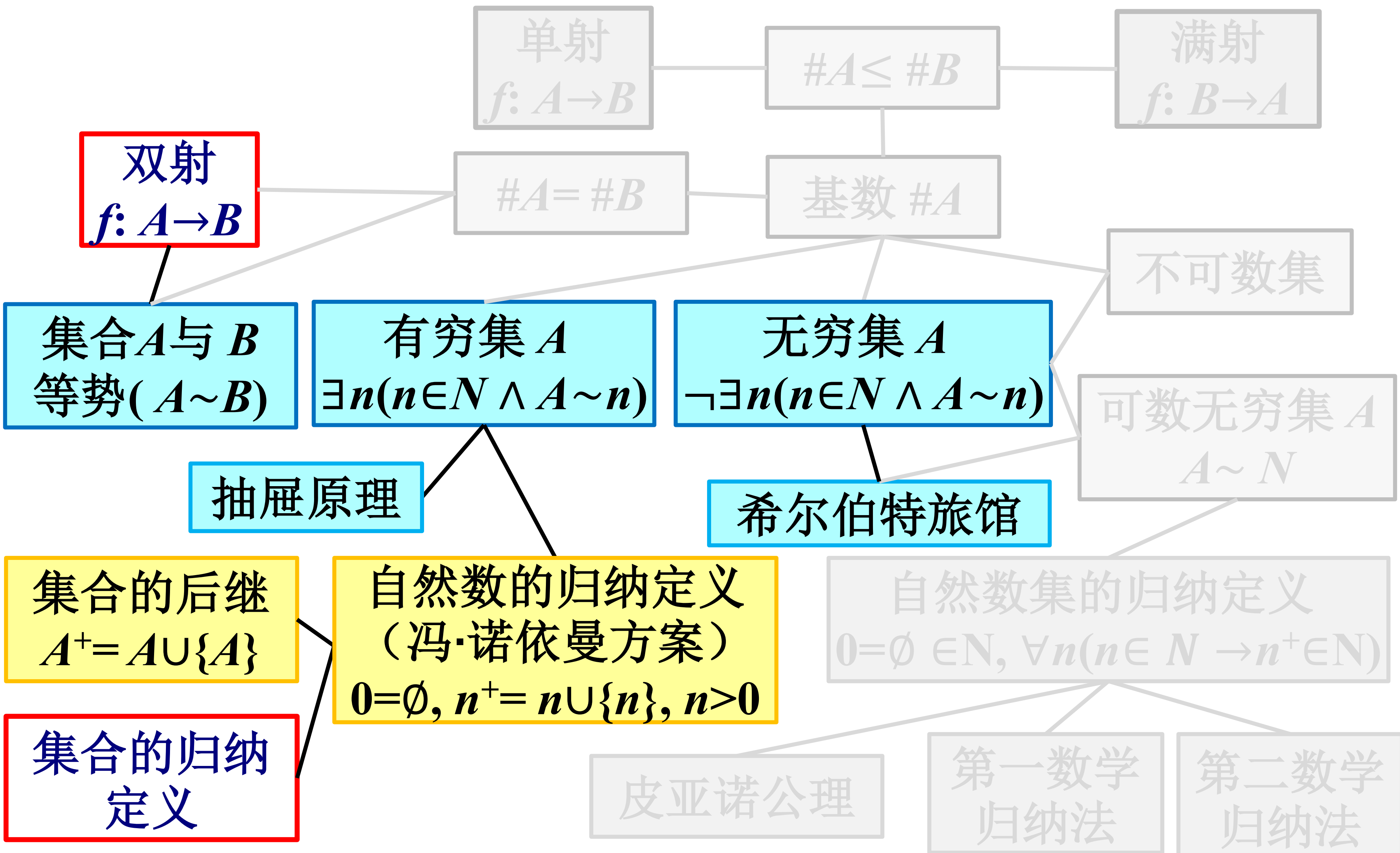
(2) 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$; 双射的逆仍是双射

(3) 若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$. 双射的复合仍是双射

即，等势关系具有自反性，对称性和传递性，

因此等势是集合族上的等价关系.

4.2.2 有穷集与无穷集


单射
f: A→B
#A≤ #B
满射
f: B→A
双射
f: A→B
#A= #B
基数 #A
不可数集
集合A与 B
等势(A~B)
有穷集 A
∃n(n∈N ∧ A~n)
无穷集 A
¬∃n(n∈N ∧ A~n)
可数无穷集 A
A~ N
抽屉原理
希尔伯特旅馆
集合的后继
A⁺= A∪{A}
自然数的归纳定义
（冯·诺依曼方案）
0=∅, n⁺= n∪{n}, n>0
自然数集的归纳定义
0=∅ ∈N, ∀n(n∈ N →n⁺∈N)
集合的归纳
定义
皮亚诺公理
第一数学
归纳法
第二数学
归纳法

（1）有穷集与无穷集的定义

定义6：设A是集合．如果存在 $n\in\mathbf{N}$，使$A\sim n$，则称A为有穷集，否则称A为无穷集.

例：有穷集 $A=\{a_0, a_1,\ldots, a_{n-1}\}$， $n\in\mathbf{N}$

$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$（冯·诺依曼的自然数构造方案）

f：$A\to n$，满足$f(a_i) = i$, i =0, 1, …, n

无穷集： N，E，O，I

（2）有穷集

- 如果有穷集*A*和*B*之间存在双射，则*A*和*B*包含的元素个数必相等

定理6：任何有穷集合都不能与它的真子集等势.

- 以上定理也叫抽屉原理(鸽巢原理)，可通俗表述为：

“如果把 $n+1$ 本书放进 n 个抽屉里，至少在一个抽屉里有两本或两本以上的书.”

任意函数f: $\{1, 2, \ldots, n+1\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$必不是双射

（2）有穷集

定理7：任意有穷集 A 唯一地与一个自然数等势．

证明：已知任意有穷集A都与一个自然数等势，

假设存在两个自然数m和n，使得$A\sim m$ 且 $A\sim n$，则$m\sim n$.

根据自然数的三岐性，下列三式恰有一个成立：

$$m = n，\ m \in n，\ \text{或者}\ n \in m,$$

即$m=n$, $m\subset n$或者 $n\subset m$.

若$n, m\in \mathrm{N}$，则$n\subset m$当且仅当$n\in m$．

因为 $m\sim n$，则存在m到n的双射。

由于当 $m\subset n$或$n \subset m$时，不存在n到m的双射（定理6），

因此只能是$m = n$．定理得证。

（2）有穷集

定理7：任意有穷集 A 唯一地与一个自然数等势．

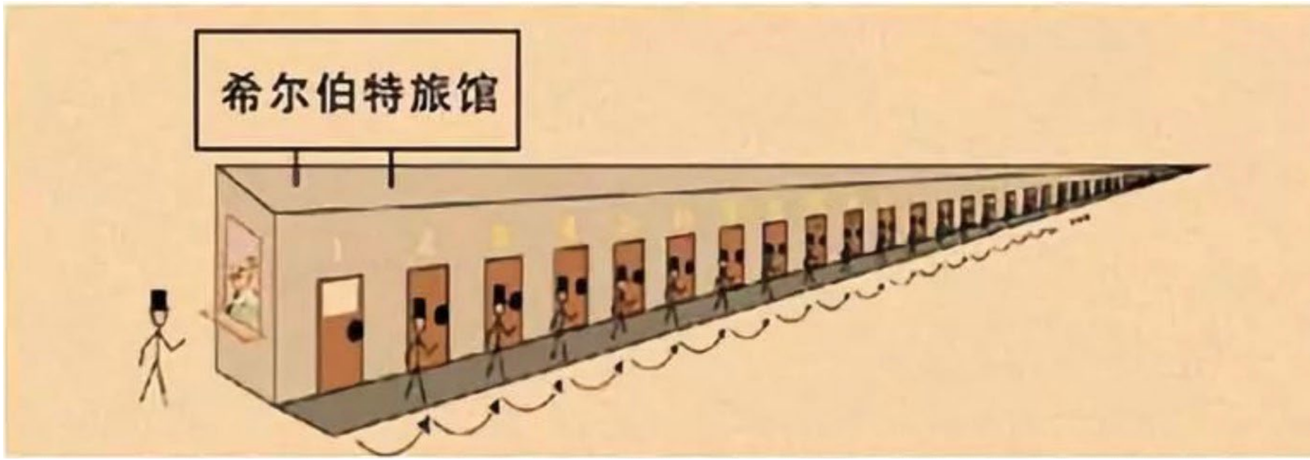
定义7（有穷集的基数）：对于任意有穷集 A，存在唯一的自然数 n，使得 $A \sim n$，称 n 为 A 的基数，记为 $\#A$．

定理6：任何有穷集合都不能与它的真子集对等.

- 以上均基于抽屉原理

问题：抽屉原理对于无穷集是否成立？无穷集是否能与它的真子集等势？　不成立；能

（2）无穷集

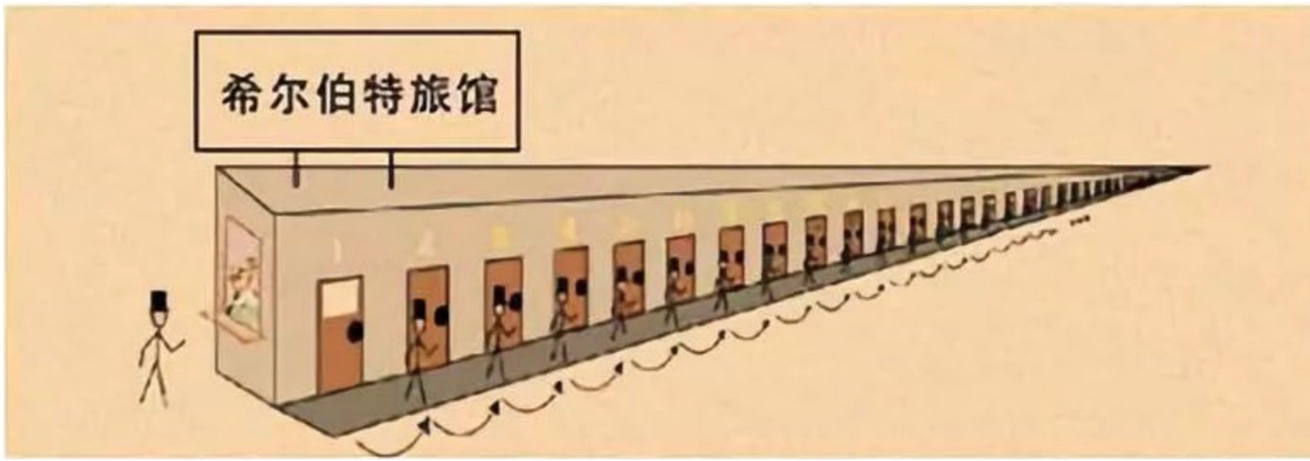


1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

$N \sim I_+$

（2）无穷集



1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**…**

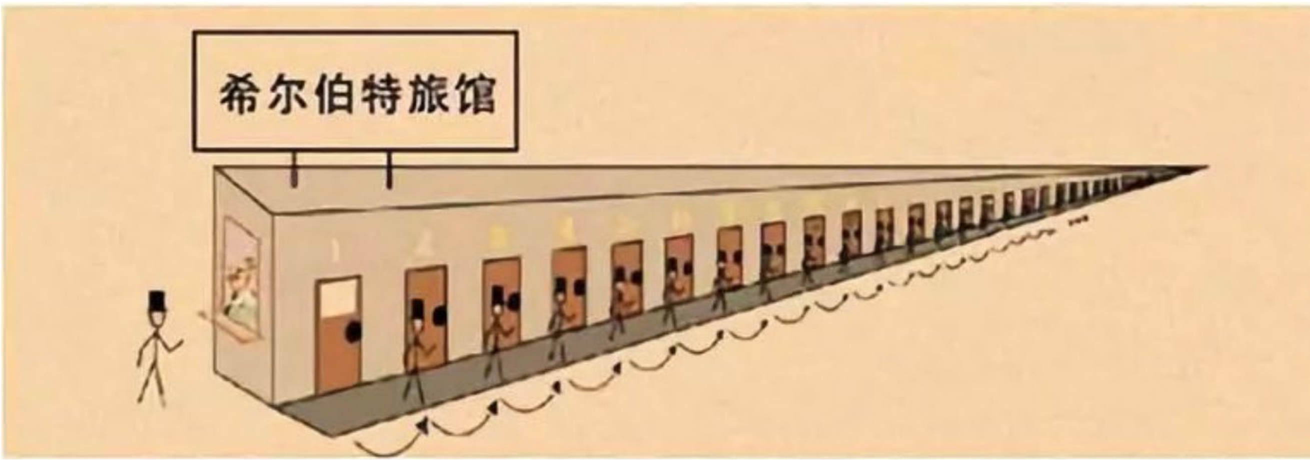
1	**2**	**…**	***k***	***k*+1**	***k*+2**	***k*+3**	***k*+4**	***k*+5**	**…**

***k*个** 

$$\mathbf{N}\cup\{-1, -2, \ldots, -k\}\sim \mathbf{N}$$

$$\mathbf{I}_+\cup\{-1, -2, \ldots, -k\}\sim \mathbf{I}_+$$

（2）无穷集



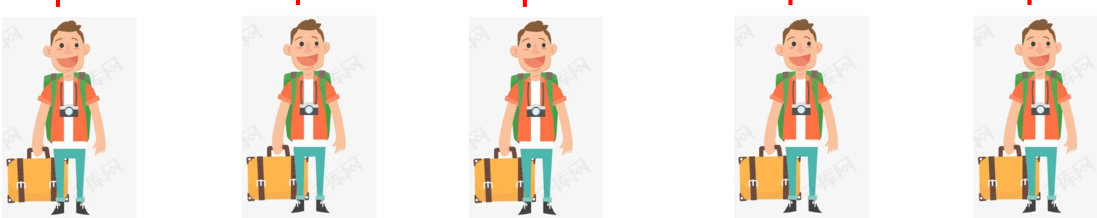
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

原有客人：从n号房间搬到$2n$号房间

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

第n号新客人住进第$2n$-1号房间

无限个



…

I~N

（2）无穷集

两层旅馆

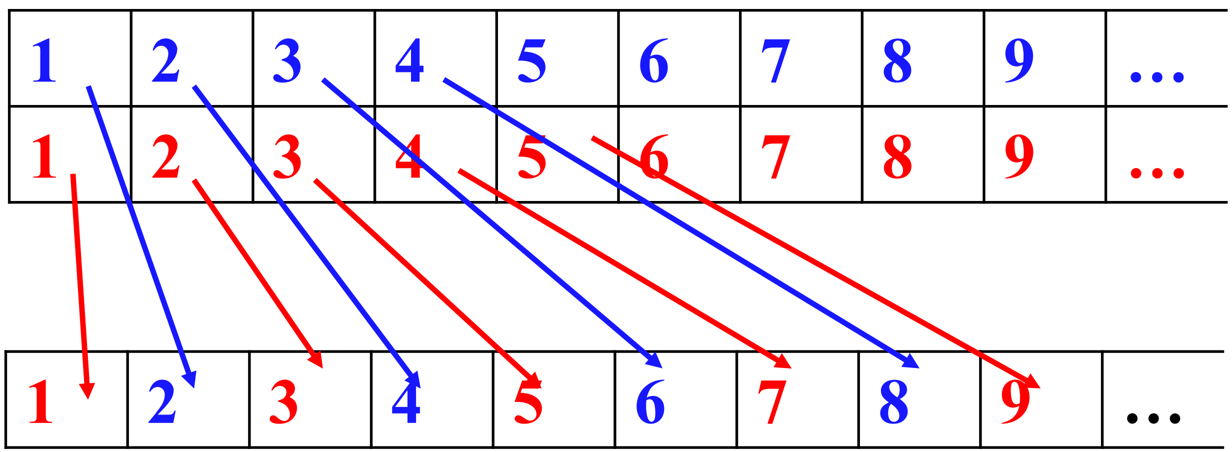
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

一层旅馆

（2）无穷集

两层旅馆



一层旅馆

（2）无穷集

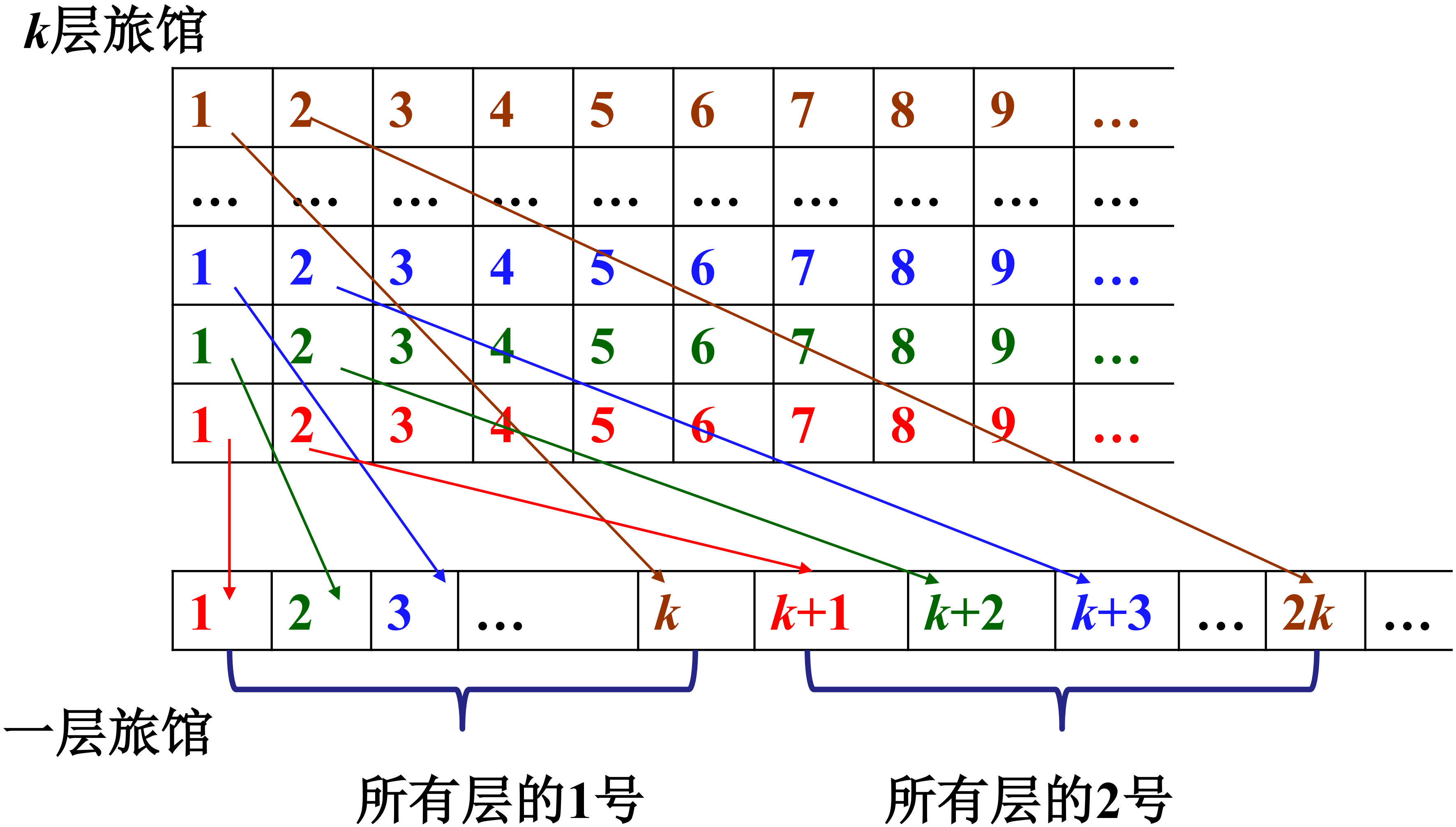
*k*层旅馆

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

一层旅馆

1	2	3	4	5	6	7	…	k	k+1	…

（2）无穷集



有限个与 N 等势的不同集合的并集仍与N等势

（2）无穷集

无限层旅馆

…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

一层旅馆

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…

（2）无穷集

无限层旅馆

…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

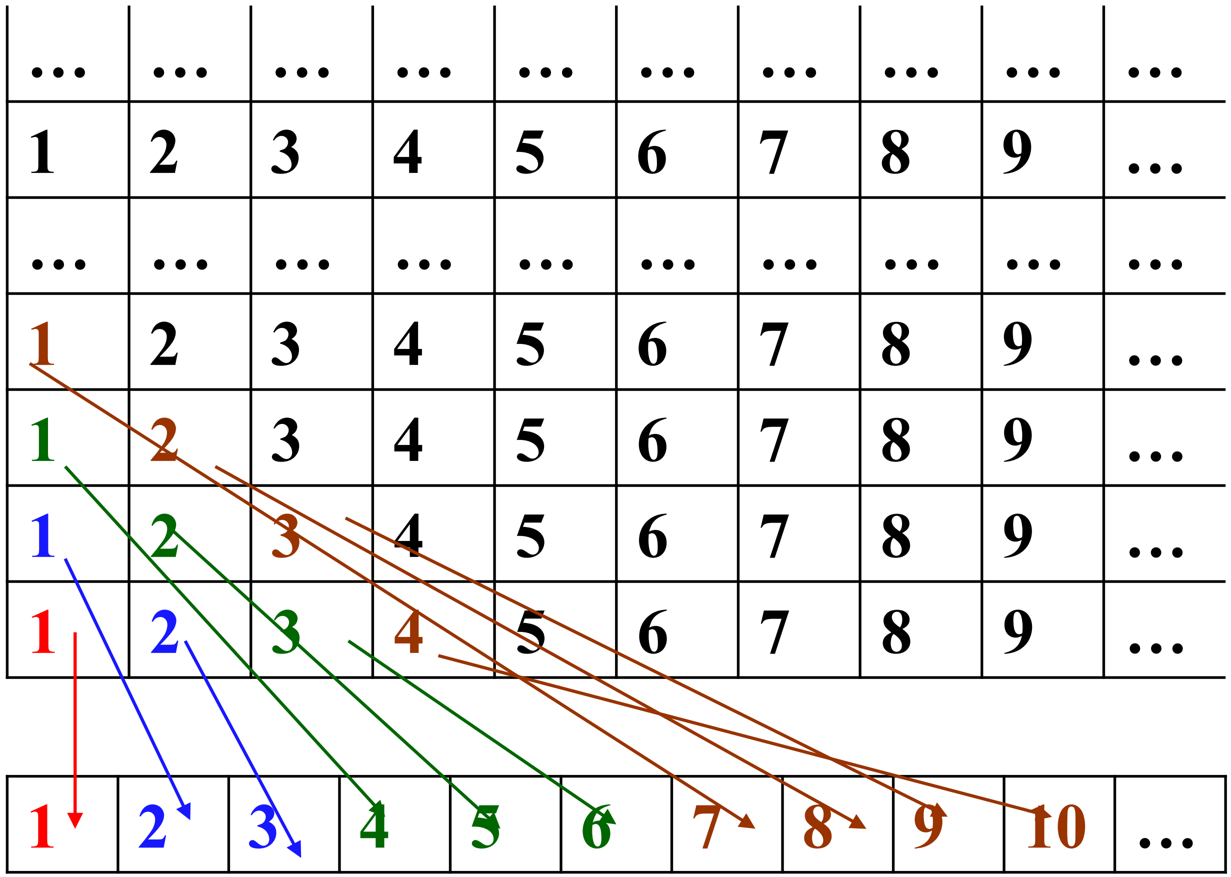
一层旅馆

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…

（2）无穷集

$N \times N \sim N$

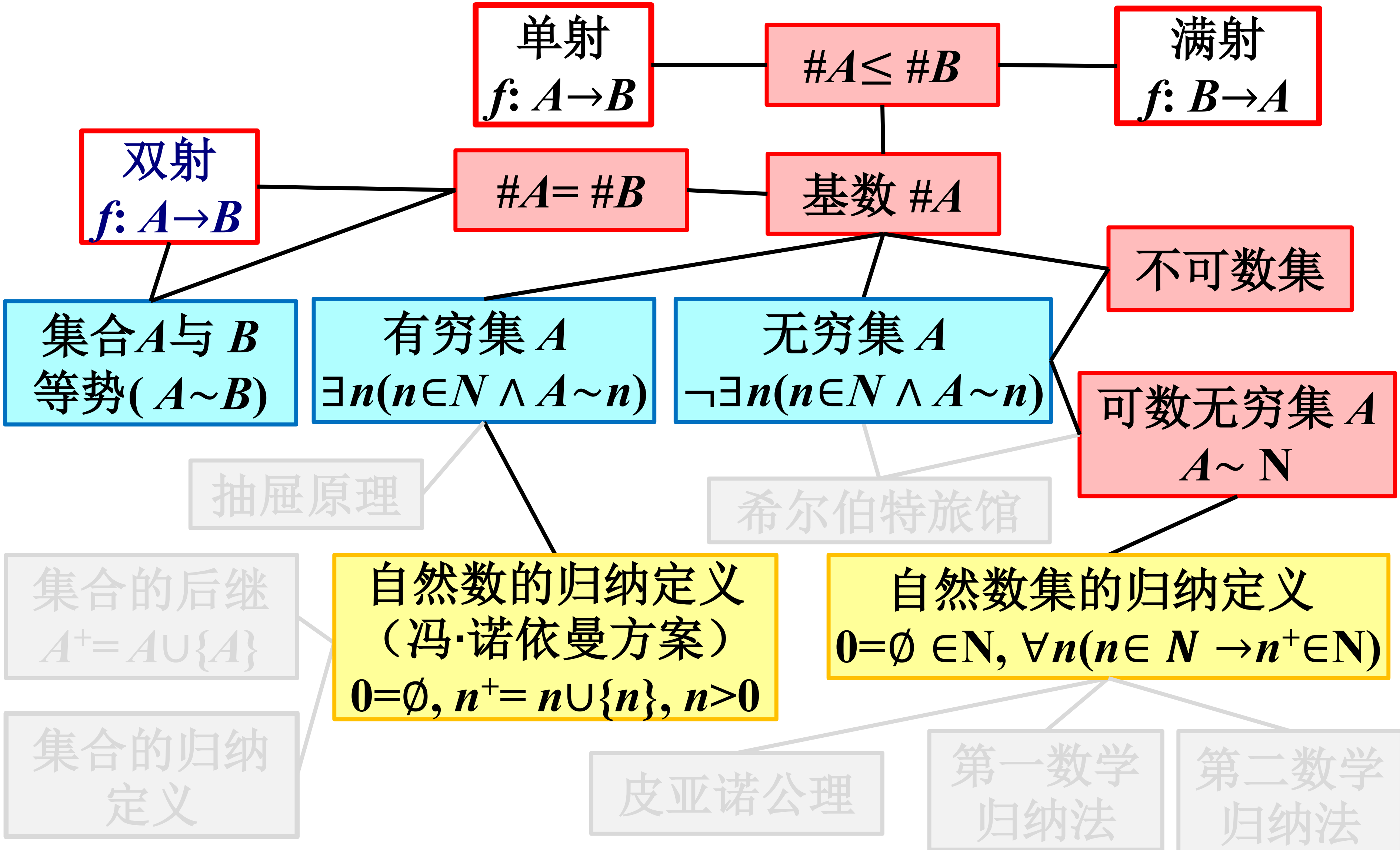
无限层旅馆



一层旅馆

可数无穷个与 N 等势的不同集合的并集仍与N等势

4.2.3 集合的基数


单射
f: A→B
#A≤ #B
满射
f: B→A
双射
f: A→B
#A= #B
基数 #A
不可数集
集合A与 B
等势(A~B)
有穷集 A
∃n(n∈N ∧ A~n)
无穷集 A
¬∃n(n∈N ∧ A~n)
可数无穷集 A
A~ N
抽屉原理
希尔伯特旅馆
集合的后继
A⁺= A∪{A}
自然数的归纳定义
（冯·诺依曼方案）
0=∅, n⁺= n∪{n}, n>0
自然数集的归纳定义
0=∅ ∈N, ∀n(n∈ N →n⁺∈N)
集合的归纳
定义
皮亚诺公理
第一数学
归纳法
第二数学
归纳法

4.2.3 集合的基数

- 拓广集合中含有的元素个数这一概念，引进集合的**基数**的概念，表示为

$$\#(A),\ \mathbf{card}\ (A)\ 或 |A|$$

- 已证：每个有穷集都与唯一的自然数 对等.
  - 设 $n\in\mathrm{N}$，若 $A\sim n$，则令 $\#(A) = n$.

- 对于无穷集的基数，规定特殊的记号，例如令

$$\#(\mathrm{N}) = \aleph_0$$

$\aleph$ 是希伯来语的第一个字母，读作阿列夫.

（1）基数相等和大小顺序

定义8： 设 A 和 B 为两个集合.

1) 如果 $A \sim B$，就称 A 和 B 的基数相等，记为 $\#(A) = \#(B)$.

2) 如果存在从 A 到 B 的单射，
   就称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为 $\#(A) \leq \#(B)$，
   或称 B 的基数大于等于 A 的基数，记为 $\#(B) \geq \#(A)$.

3) 如果 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(A) \neq \#(B)$，
   就称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $\#(A) < \#(B)$，
   或称 B 的基数大于 A 的基数，记为 $\#(B) > \#(A)$.

（2）基数相等和大小顺序

- 任何两个基数都可以比较大小

定理8：设 A 和 B 为任意两个集合，则

$$\#(A) \le \#(B)，\text{或}\ \#(B) \le \#(A)，$$

二者之中至少有一个成立.

用选择公理证明

- 等价于：对于任意两个集合A和 B，要么存在A到 B 的单射，要么存在 B 到 A的单射.

（2）基数相等和大小顺序

定理9：设 A, B和 C为任意集合，则

(1) $\#(A) = \#(A)$ 自反

(2) 若 $\#(A) = \#(B)$, 则 $\#(B) = \#(A)$ 对称

(3) 若 $\#(A) = \#(B)$且 $\#(B) = \#(C)$, 则 $\#(A) = \#(C)$ 传递

- 基数的相等关系 “＝” 是等价关系

（2）基数相等和大小顺序

定理10：设 A，B 和 C 为三集合，则有

(1) $\#(A) \le \#(A)$; 自反

(2) 若 $\#(A) \le \#(B)$ 且 $\#(B) \le \#(A)$，则 $\#(A) = \#(B)$; 反对称

(3) 若 $\#(A) \le \#(B)$ 且 $\#(B) \le \#(C)$，则 $\#(A) \le \#(C)$. 传递

其中，(2) 为著名的 伯恩斯坦（E. Bernstein） 定理.

- 基数的小于等于关系“$\le$”是偏序
- 由定理8，基数的小于等于关系“$\le$”是全序
- (2) 等价于：如果存在两个单射 $f: A \to B$ 与 $g: B \to A$，则一定存在双射 $h: A \to B$

定理11: 若A, B为二集合，则 $\#(B) \le \#(A)$ 当且仅当存在从 A 到 B 的满射.

从 B 到 A 的单射

证明: ($\Leftarrow$) 设 $f: A \to B$为满射，

则 f有右逆 $g: B \to A$，使得 $f \circ g = I_B$.

又因为 I_B 是单射，所以 g 是单射，故

$$\#(B) \le \#(A) .$$

($\Longrightarrow$) 若 $\#(B) \le \#(A)$，

则有单射$g: B \to A$，故g有左逆$f: A \to B$，使得$f \circ g = I_B$.

又因为 I_B 是 满射， 所以 f 是满射.

- 结论：A 到 B 有满射 当且仅当 B 到 A 有单射

问题：若A, B为集合，如何证明$\#(A) = \#(B)$?

（3）可数集合与不可数集合

定义9（可数无穷集合）：任何与自然数集合 N 等势的集合称为可数无穷集合.

- 可数无穷集合的基数，用$\aleph_0$表示，读作阿列夫零.

定义10（可数、不可数集合 ）：如果一个集合是有穷集合或是可数无穷集合，就称它为可数集合； 如果一个集合是无穷的，而且不是可数的，就称它为不可数集合。

无穷集的等价条件

定理12： 以下三个条件等价：

(1) A 为无穷集合；

(2) A 有可数无穷子集；

(3) A 有与它等势的真子集.

- 等价于
  - 任何无穷集合必有可数无穷子集
  - 如果一个集合有可数无穷子集，则它一定有与它等势的真子集
  - 如果一个集合有与它等势的真子集，则它一定为无穷集合

无穷集的等价条件

定理12： 以下三个条件等价：

(1) A 为无穷集合；

(2) A 有可数无穷子集；

(3) A 有与它等势的真子集.

证明: (1) ⇒(2) 设 A 是无穷集合, 如下顺序地从 A 的子集中取元素, 构造一个 无限序列 $< a_0 , a_1 , a_2, \ldots >$:

从 A 中 选 a_0； 从 $A-\{ a_0 \}$ 中选 a_1; 从 $A-\{ a_0, a_1 \}$ 中选 a_2， ……, 从 $A-\{ a_0 , a_1 , \cdots , a_{n-1} \}$ 中选 a_n ,…

显然，对任意 $n\in$N, 若 $\{ a_0 , a_1 , \cdots , a_n \} \subseteq A$, 则必有 $a_{n+1}\in A$ 且$a_{n+1} \notin \{ a_0 , a_1 , \cdots , a_n \}$， 否则与$A$是无穷集合矛盾.

得 $B= \{a_i | i \in \mathrm{N}\}$为$A$的可数子集.

定理12： 以下三个条件等价：

(1) A 为无穷集合；

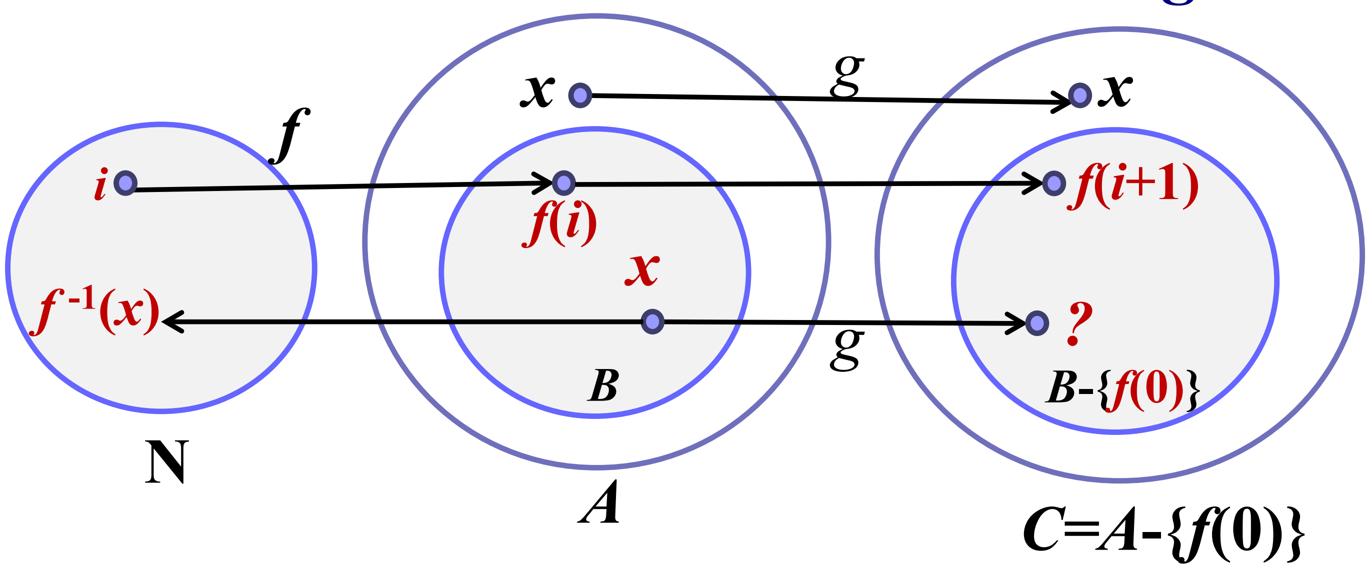
(2) A 有可数无穷子集；

(3) A 有与它等势的真子集.

证明: (2)⟹(3) 设 B 是 A 的可数无穷子集.

因此B与N等势，故有双射 f: N $\to B$，则 $B=\{f(i) \mid i \in \mathbf{N}\}$.

下面构造 A 的真子集 C 及 A 到 C 的双射 g。



定理12： 以下三个条件等价：

(1) A 为无穷集合；

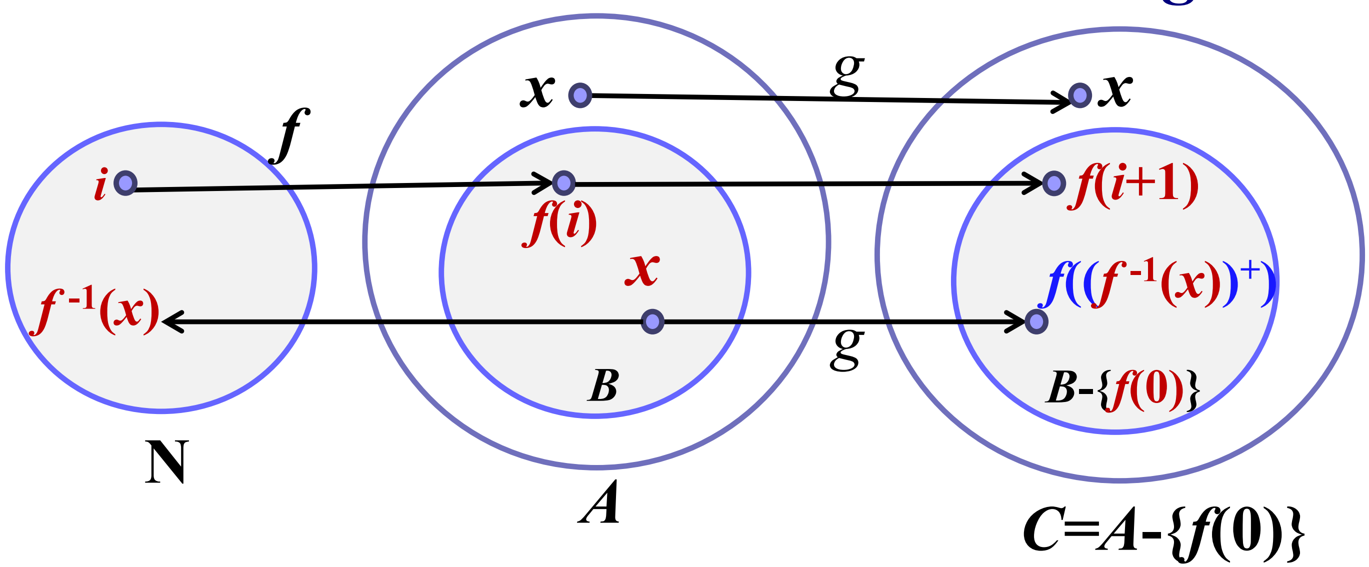
(2) A 有可数无穷子集；

(3) A 有与它等势的真子集.

证明: (2)⟹(3) 设 B 是 A 的可数无穷子集.

因此B与N等势，故有双射 f: N $\to B$, 则 $B=\{f(i) \mid i \in \mathrm{N}\}$.

下面构造 A 的真子集 C 及 A 到 C 的双射 g。



定理12： 以下三个条件等价：

(1) A 为无穷集合；

(2) A 有可数无穷子集；

(3) A 有与它等势的真子集.

证明: (2)⟹(3) 设 B 是 A 的可数无穷子集.

因此B与N等势，故有双射 f: N $\to B$，则 $B=\{f(i)\mid i\in \mathrm{N}\}$.

下面构造 A 的真子集 C 及 A 到 C 的双射 g。

令$C=A-\{f(0)\}$，则 C是A的真子集.

如下定义从 A 到 C 的双射 g: $A\to C$:

对于$x\in B$, $g(x)=f((f^{-1}(x))^{+})$;

对于$x\in A-B$, $g(x)=x$.

显然，g是双射，因此A与A的真子集C 等势.

定理12： 以下三个条件等价：

(1) A 为无穷集合；

(2) A 有可数无穷子集；

(3) A 有与它等势的真子集.

证明: (3)$\Rightarrow$(1)

（反证法）

假设 A 为有穷集合，

则 A 没有与它等势的真子集，与(3)矛盾.

故假设不成立，即 A 为无穷集合。

定理13：可数无穷集合的无穷子集必是可数无穷的.

- 等价于：
  - 可数无穷集合是“最小”的无穷集合
  - #N是无穷集合的基数的最小值

定理13：可数无穷集合的无穷子集必是可数无穷的.

证明：设 A 是可数无穷集合， S 是 A 的无穷子集，

由于$A \sim \mathrm{N}$, 故有双射 f: $\mathrm{N} \to A$.

则A中的元素可以排列为:

$$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

把不在 S 中的元素从这序列中去掉。

由于 S 是无穷集合，即余下的元素是无限的，

可表示为 $f(i_0), f(i_1), f(i_2), \ldots$

定义函数 g: $\mathrm{N} \to S$, 使得 $g(n) = f(i_n)$，则 g 是双射函数，因此 S 是可数无穷的.

小结

- 无穷集

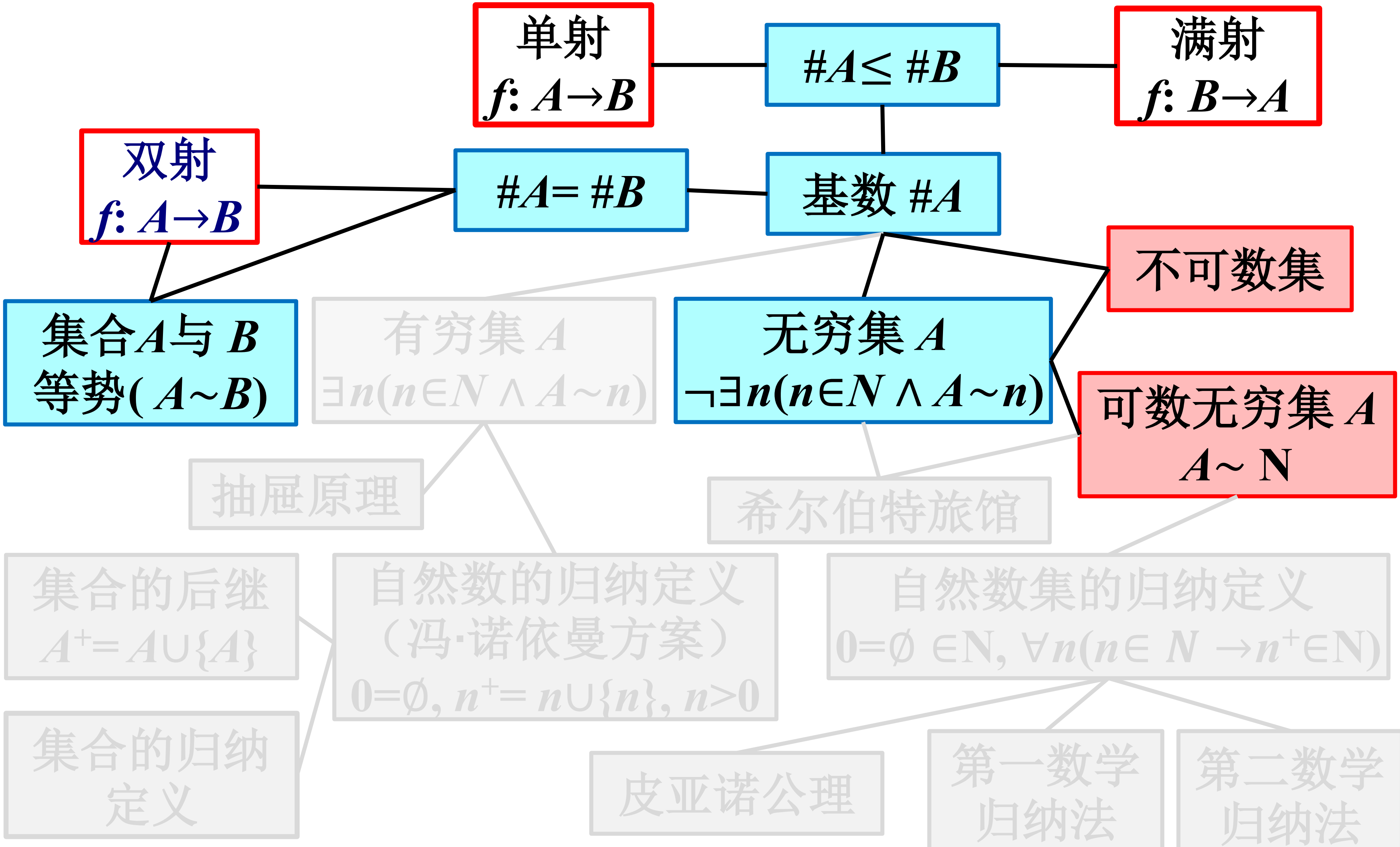
定理11： 以下三个条件等价：
(1) A 为无穷集；
(2) A 有可数子集；
(3) A 有与它等势的真子集.

定理12：可数无穷集合的无穷子集必是可数无穷的.

- 对比有穷集：

定理6：任何有穷集合都不能与它的真子集对等.

4.2.4 可数无穷集合与不可数集合



4.2.4 可数无穷集合与不可数集合

问题：任给集合 A 与 B，如何证明 $\#A=\#B$？

- $\#A=\#B \Leftrightarrow$ 存在A 到 B 的双射（定义8）

  $\Leftrightarrow \#A\leq \#B$ 且 $\#B\leq \#A$ （定理10）

- $\#A\leq \#B \Leftrightarrow$ 存在A 到 B 的单射（定义8）

  $\Leftrightarrow$ 存在B 到 A 的满射（定理 11）

- $\#A=\#B \Leftrightarrow$ 存在A 到 B 的双射

  $\Leftrightarrow$存在A 到 B 的单射和 B 到 A 的单射

  $\Leftrightarrow$存在B 到 A 的满射和 B 到 A 的单射

  $\Leftrightarrow$ 存在A 到 B 的单射和 A 到 B 的满射

  $\Leftrightarrow$ 存在B 到 A 的满射和 A 到 B 的满射

（1）可数无穷集合

- 自然数集 N （定义9）
- 非负奇数集 O （已证）
- 非负偶数集 E （已证）

真包含于 N

- 整数集 I
- 有理数集 Q

真包含 N

- N×N
- N 的全体有穷子集组成的集合

例. 证明：整数集 I是可数无穷集（即I～N）

N:	0	1	2	3	4	5	6	7	…
I:	0	1	2	3	4	5	6	7	…
		-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	…

证明一:构造从 I 到N的双射f:

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -2n-1, & n < 0 \end{cases}$$

证明二: 构造从N到I的双射g:

$$g(n) = \begin{cases} n/2, & n\text{是偶数} \\ -(n+1)/2, & n\text{是奇数} \end{cases}$$

例: 证明 N×N是可数无穷集.

	0	1	2	3	4	5	…
0	0	1	3	6	10	15	
1	2	4	7	11	16		
2	5	8	12	17			
3	9	13	18				
4	14	19					
5	20						
…							

证明:

(1) 构造一个矩阵$(a_{ij})_{N\times N}$, 其中，序偶 $<i, j>$为矩阵中元素 a_{ij} 的位置坐标.

(2) 如图所示，把N中元素按对角线依次放入矩阵.

例: 证明 N×N是可数集.

可数无穷多个可数无穷集的并集，仍然是可数无穷集

	0	1	2	3	4	5	…
0	0	1	3	6	10	15	
1	2	4	7	11	16		
2	5	8	12	17			
3	9	13	18				
4	14	19					
5	20						
…							

证明:

(1) 构造一个矩阵$(a_{ij})_{N\times N}$, 其中，序偶 $<i, j>$为矩阵中元素 a_{ij} 的位置坐标.

(2) 如图所示，把N中元素按对角线依次放入矩阵.

(3) a_{ij} 所在的斜线共有$i+j+1$个元素

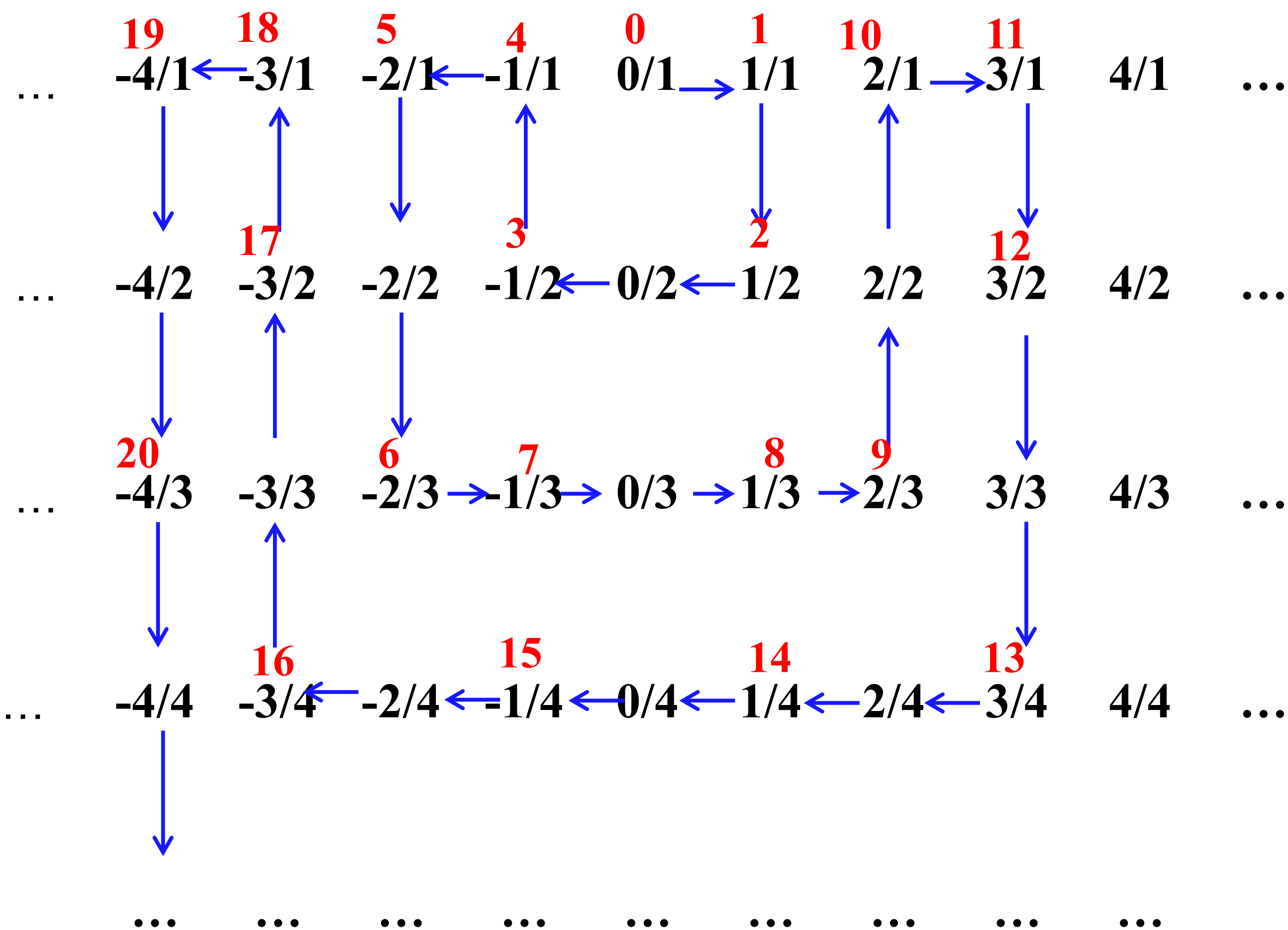
(4) a_{ij}的值是a_{ij}所在的斜线左方的所有行上的元素的个数再加上i，即 $a_{ij} = 1+2+\ldots+(i+j)+i = (1+i+j)(i+j)/2 + i$

(5) 如下定义函数 f: N×N → N, 满足

$$f(i, j) = (1+i+j)(i+j)/2 + i\ , \quad i, j \in N.$$

可证，f 是 双射(补充). 因此N×N是可数集.

例：有理数集合 Q是可数无穷集.



例：有理数集合 Q是可数无穷集.

- 有理数集合是稠密集
  - 任意两个有理数 $r_1<r_2$ 之间存在无限多个有理数 r 使得$r_1<r<r_2$
- 自然数集合不是稠密的
  - 任意两个自然数 $n_1<n_2$ 之间只有有限个自然数数 n 使得 $n_1<n<n_2$

例. 证明：N的全体有穷子集组成的集合是可数无穷集,

证明：记N的全体有穷子集组成的集合为 S.

定义函数 $f: S \to$ N为：对N的任意的有穷子集

$S_1=\{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k\}, k \geq 0$，$f(S_1)= 2^{n_0} + 2^{n_1}+\ldots 2^{n_k}$.

下面证明 f 是双射.

(1) 首先证明 f 是满射.

对任意的自然数$n \in$N, n总可以写成如下形式：

$n = 2^{i_0} + 2^{i_1}+\ldots 2^{i_k}$, 其中$i_0, i_1,\ldots, i_k$都是自然数，且

$i_0>i_1>\ldots>i_k \geq 0$.

此时，有$f(\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}) =n$，因此，$f$ 是满射.

例. 证明：N的全体有穷子集组成的集合是可数无穷集,

证明（续）：(2) 下面证明 f 是单射.

对N的任意两个不同有穷子集 $S_1=\{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ 与 $S_2=\{m_0, m_1, \ldots, m_j\}$，有

$$f(S_1)= 2^{n_0} + 2^{n_1}+\ldots +2^{n_k},$$

$$f(S_2)= 2^{m_0} + 2^{m_1}+\ldots+ 2^{m_j}$$

不妨假设 $n_0 > n_1 >\ldots > n_k$ 且 $m_0 > m_1 > \ldots > m_j$.

令 i 是满足 $n_{k-i}\neq m_{j-i}$ 且 $n_{k-i+1}=m_{j-i+1},\ldots, n_k=m_j$ 的最大自然数，则 $f(S_1)-f(S_2) = 2^{n_0}+\ldots+ 2^{n_{k-i}} - 2^{m_0} -\ldots-2^{m_{j-i}}$

例. 证明：N的全体有穷子集组成的集合是可数无穷集,

证明（续）：(2) 下面证明 f 是单射.

$$f(S_1)\text{-}f(S_2) = 2^{n_0}+\ldots+ 2^{n_{k-i}} - 2^{m_0} - \ldots - 2^{m_{j-i}}$$

不妨设 $n_{k-i} > m_{j-i}$, 则

$$f(S_1)\text{-}f(S_2) = 2^{m_{j-i}}(2^{n_0-m_{j-i}}+\ldots+ 2^{n_{k-i}-m_{j-i}} - 2^{m_0-m_{j-i}} - \ldots - 2^{m_{j-i+1}-m_{j-i}} - 1)$$

由于 $n_l > m_{j-i}$, l=0,1,…, k-i，且 $m_p > m_{j-i}$, p=0,…, j-i+1,

因此， $2^{n_0-m_{j-i}}+\ldots+ 2^{n_{k-i}-m_{j-i}} - 2^{m_0-m_{j-i}} - \ldots - 2^{m_{j-i+1}-m_{j-i}}$必为偶数，得 $2^{n_0-m_{j-i}}+\ldots+ 2^{n_{k-i}-m_{j-i}} - 2^{m_0-m_{j-i}} - \ldots - 2^{m_{j-i+1}-m_{j-i}} - 1 \neq 0$.

即， $f(S_1)\text{-}f(S_2) \neq 0$. 因此 f 为单射。

综上可得 f 为双射，结论得证。

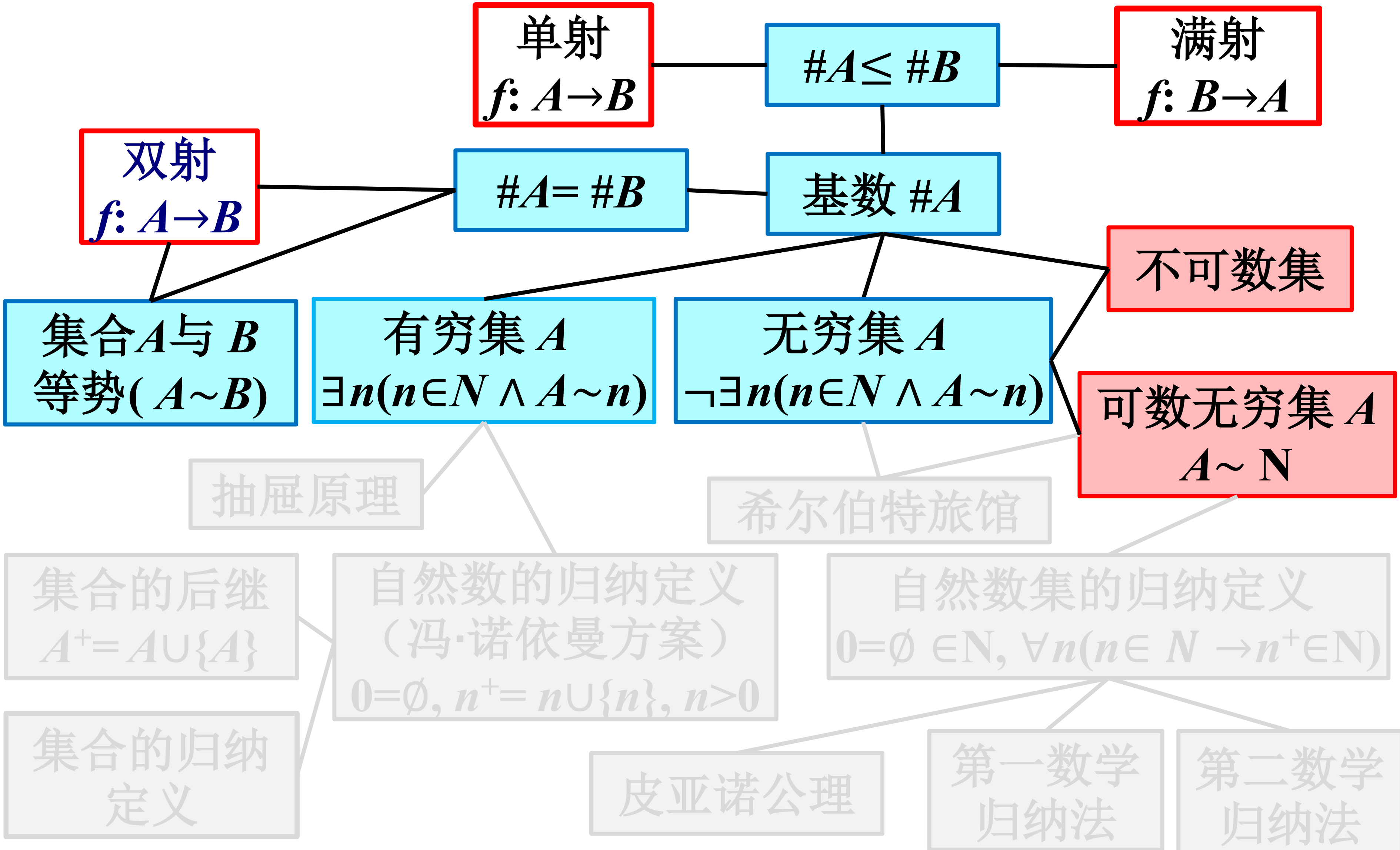
小结

- 以下集合均为可数无穷集合
  - 自然数集 N （定义9）
  - 非负奇数集 O
  - 非负偶数集 E

    真包含于 N
  - 整数集 I
  - 有理数集 Q

    真包含 N
  - N×N
  - N 的全体有穷子集组成的集合

4.2.4 可数无穷集合与不可数集合



（2）不可数集合

- 不可数集合：无穷集合且不是可数的（定义10）

问题：是否存在不可数集合？如何判断一个无穷集合是不可数集合？

- 不与自然数集合N等势的无穷集是不可数集合
  - 实数集 R 是不可数集合（对角线法）
  - $\mathcal{P}$(N)是不可数集合（ #A < #$\mathcal{P}$(A)（定理14））
  - # R= #$\mathcal{P}$(N)

问题：是否存在不可数集合 A，使得 #R< # A ？

#R< #$\mathcal{P}$(R)< #$\mathcal{P}$($\mathcal{P}$(R)) < … （ #A < #$\mathcal{P}$(A)（定理14））

$\#A \le \#\mathcal{P}(A)$且$\#A \ne \#\mathcal{P}(A)$

定理14：对每个集合 A，皆有 $\#A < \#\mathcal{P}(A)$.

证: 若$A=\emptyset$， $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset\}$，显然有 $\#A < \#\mathcal{P}(A)$。

下面假设$A\ne\emptyset$。

(1) 首先证明 $\#A \le \#\mathcal{P}(A)$.

定义 $g:A \to \mathcal{P}(A)$, 满足:

对任意的 $a\in A$, $g(a)=\{a\}$.

显然 g 是单射，所以 $\#A \le \#\mathcal{P}(A)$.

$\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$且$\#A \neq \#\mathcal{P}(A)$

定理14：对每个集合 A，皆有 $\#A < \#\mathcal{P}(A)$.

证: (2) 下面证明$\#A \neq \#\mathcal{P}(A)$

（反证法）假设$\#A=\#\mathcal{P}(A)$，则有双射 $f: A \to \mathcal{P}(A)$.

令 $B = \{ a \mid a \in A$ 且 $a \notin f(a) \}$, 则 $B \in \mathcal{P}(A)$.

由于f为双射，即为满射，因此必存在$a_1 \in A$ 使 $f(a_1)=B$.

(a) 若$B=\emptyset$，则有$a_1 \notin B$，而$f(a_1)=B$，

由 B 的定义知$a_1 \in B$, 与$B=\emptyset$矛盾。

(b) 若$B \neq \emptyset$，

- 若 $a_1 \in B$，按照 B 的定义，$a_1 \notin f(a_1)$，即 $a_1 \notin B$；
- 若 $a_1 \notin B$，即 $a_1 \notin f(a_1)$．而按 B 的定义，$a_1 \in B$.

得，$a_1 \in B$ 当且仅当 $a_1 \notin B$，矛盾.

按假设不成立，即必有$\#A \neq \#\mathcal{P}(A)$，定理得证

定理14：对每个集合 A，皆有 $\#A < \#\mathcal{P}(A)$.

- $\#\mathrm{N} < \#\mathcal{P}(\mathrm{N})$
- $\#\mathrm{R} < \#\mathcal{P}(\mathrm{R})$

不可数集合举例

- $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1]$
- R
- $\mathcal{P}(N)$
- $R \times R$

记号:

对任意$a, b \in \mathbf{R}$, 令

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\text{且}a < x < b\}$$

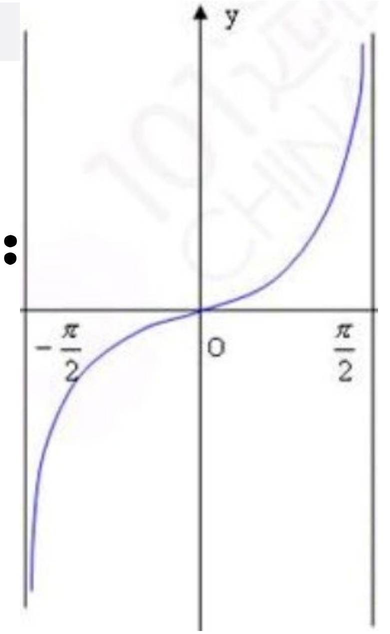
$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R}\text{且}a < x \le b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\text{且}a \le x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R}\text{且}a \le x \le b\}$$

例: 证明 (0, 1) 与实数集合 R 等势.

证: 可以建立 (0, 1) 到 R 的双射函数 f 如下:



$$f(x) = \mathrm{tg}\,(\,(\,x - 1/2\,)\,\pi\,)\,,$$

若x∈(0, 1), 则$(\,x - 1/2\,)\,\pi \in (-\pi/2,\ \pi/2)$,

显然 f 是双射，因此(0, 1) ～ R .

例：如果 $a, b\in$ R，$a < b$，则 (a, b) ～ R .

证：定义 f：$(a, b) \to$ R 如下：

$\forall x\in(a, b)$，令 $f(x) = \mathrm{tg}\,\left(\dfrac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\cdot\pi\right)$,

若 $x\in(a, b)$ 时，则 $\dfrac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\cdot\pi \in (-\pi/2,\ \pi/2)$

可证 f 是双射（补充），所以 $(a，b)$ ～ R .

例: 证明 (0, 1) 与[0,1]等势.

证: 如下定义f: $(0, 1) \to [0, 1]$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=\frac{1}{2} \\ 1, & x=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{i-2}, & x=\frac{1}{i}, \quad i\in \mathrm{N}, i\geq 4 \\ x, & 其他 \end{cases}$$

可证：f是内射，也是满射（补充）.

例: 证明

(1) (0, 1) 与(0,1]等势;

(2) (0,1) 与[0, 1)等势.

例. 证明：实数集合 R 是不可数的 .

证明 ：首先证明 (0, 1)是不可数的，由于R和(0,1)是等势的，从而证明了R是不可数的.

假设(0, 1)是可数的, 则(0,1)与自然数集 N 对等.

于是能够把 (0, 1)中的元素排列成无限序列

$s_0 , s_1 , s_2 , \ldots s_n , \ldots,$ 其中，$s_i \in (0, 1), i \in \mathrm{N}$.

而且每个s_i可表示成十进制小数

$$s_i = 0.y_1y_2y_3\cdots \text{ 其中 } y_i \in \{0 , 1 , 2 , \cdots , 9\} .$$

将(0, 1)的元素$s_1 , s_2 , s_3 , \cdots s_n , \cdots$表示成:

$$s_0 = 0.\, a_{00}\, a_{01}\, a_{02} \cdots$$

$$s_1 = 0.\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12} \cdots$$

$$\ldots$$

$$s_n = 0.\, a_{n0}\, a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \ldots$$

$$\ldots$$

证(续): 构造一个实数 $r = 0.b_0b_1b_2 \cdots b_n \cdots$, 其中:

$$b_i = \begin{cases} 1, a_{ii} \neq 1 \\ 2, a_{ii} = 1 \end{cases}, \quad i \in \mathrm{N}$$

可得:

对角线法

在小数点后第1个位置 上，r 与 s_0 不同 ,

在小数点后第2个位置 2上，r 与 s_1不同 , …,

在小数点后第n+1个位置上，r与s_n上不同，$n \in \mathrm{N}$.

所以 r 不同于 $s_0, s_1, s_2, \cdots s_n, \cdots$

这表明 $r \notin (0,1)$，矛盾 .

因此 (0, 1) 是不可数的 .

又因为实数集合 R 和集合 (0, 1) 是等势的 , 从而 R 也是不可数的 .

例：证明 $\#(\mathbf{R}) = \#\mathcal{P}(\mathbf{N})$

证明：由于R与[0,1]等势，因此只需证明$\mathcal{P}(\mathbf{N})$与[0,1]等势，从而可得 $\#(\mathbf{R}) = \#\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

(1) 首先证明$\#([0,1]) \le \#\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

定义 $f: \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to [0, 1]$为：

(a) $f(\emptyset)=0, f(\mathbf{N})=1$,

(b) $f(A)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi_A(i)}{2^{i+1}}$，其中$A\in\mathcal{P}(\mathbf{N})$, 且$A\neq \emptyset$, $A\neq \mathbf{N}$.

此时$0<f(A)<1$.

下面证明f是满射．对任意$r\in (0, 1)$,

假设r的二进制表示为$0.a_0a_1\ldots a_n\ldots$, 其中$a_i\in\{0, 1\}$, $i\in\mathbf{N}$.

则r的值为 $r = a_0\cdot (1/2)+ a_1 \cdot (1/2^2)+ \ldots + a_n \cdot (1/2^{n+1})+\ldots$

如下定义集合A_r：$a_i=1$ 当且仅当 $i\in A_r$．显然有

$f(A_r)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi_A(i)}{2^{i+1}}$．因此$f$是满射，得$\#([0,1]) \le \#\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

例：证明 #(R) = #$\mathcal{P}$(N)

证（续）： (2) 下面证明#$\mathcal{P}$(N) ≤ #([0,1]).

定义g: $\mathcal{P}$(N) → [0,1]为：

(a) $g(\emptyset)=0$, $g(\mathrm{N})=1$,

(b) $g(A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)}{3^{i+1}}$, $A\in\mathcal{P}(\mathrm{N})$ 且$A\neq\emptyset$, $A\neq \mathrm{N}$.

下面证明g是单射．对任意集合A, $B\in\mathcal{P}(\mathrm{N})$，且$A\neq B$.

(a)显然若A, B中至少有一个为空集或N, 必有$g(A)\neq g(B)$.

(b)当A, B 均不为空集或N时，由于$A\neq B$，得$A\oplus B\neq\emptyset$.

对任意$i\in A\oplus B$,

$$\chi_{A\oplus B}(i)=1 \Leftrightarrow \chi_A(i)=1, \chi_B(i)=0 \text{ 或 } \chi_A(i)=0,\ \chi_B(i)=1.$$

计算 $g(A)\text{-}g(B)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)-\chi_B(i)}{3^{i+1}}$.

例：证明 $\#(\mathbb{R}) = \#(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

证（续）： (2) 下面证明 $\#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \le \#([0,1])$.

计算 $g(A)\text{-}g(B)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)-\chi_B(i)}{3^{i+1}}$.

假设 i_0 是 $A\oplus B$ 的最小元素．若 $i_0 \in A$, 则 $i_0 \notin B$, 有

$$g(A) - g(B) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)-\chi_B(i)}{3^{i+1}} = \frac{1}{3^{i_0+1}} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\chi_A(i_0+j-1)-\chi_B(i_0+j-1)}{3^{i_0+j}}$$

$$\ge \frac{1}{3^{i_0+1}} - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{3^{i_0+j}} = \frac{1}{3^{i_0+1}} - \frac{1}{3^{i_0}}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^{i_0+1}}\left(1- \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{3^j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3^{i_0+1}} > 0.$$ 即 $g(A) \ne g(B)$.

同理可证当 $i_0 \in B$ 时，$g(B)\text{-}g(A)>0$，即 $g(A) \ne g(B)$.

因此，g 是单射，得 $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \le \#([0,1])$.

综上可得，$\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#([0,1])= \#(\mathbb{R})$.

- $\#(\mathrm{N}) = \aleph_0 < \#(\mathcal{P}(\mathrm{N}))$
- $\#(\mathrm{N}) < \#(\mathcal{P}(\mathrm{N}))$
- 记 $\#(\mathcal{P}(\mathrm{N})) = \aleph$

著名的连续统假设 认为：不存在k，使得$\aleph_0 < k < \aleph$ 。这 假设迄今为止还未被证实或否定，仍是数学家们探讨的问题。

例. 证明：$\#(\mathrm{R}\times\mathrm{R}) = \#\mathrm{R}$

证明:因为[0, 1)与R等势，所以$\#(\mathrm{R}\times\mathrm{R}) = \#[0,1)^2$等势.

又因为 [0,1)与R等势，因此只需证明$[0,1)^2$与[0,1)等势.

下面构造两个单射 f:$[0, 1)^2 \to [0,1)$， g: $[0,1) \to [0,1)^2$。

对任意的 $x\in[0,1)$, 可把它表示为十进制小数,

即 $x=x_1x_2x_3\ldots$, 其中$x_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$, 如果我们不用从某位后全是“9”的十进制小数表示，则这种表示法是唯一的.

(1) 定义函数 f:$[0,1)^2 \to [0,1)$：任取$x, y\in[0,1)$, 令$x=0.x_1x_2x_3\ldots$, $y=0.y_1y_2y_3\ldots$, 则令$f(x, y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$

显然, f是单射，故$\#([0,1)^2) \leq \#([0, 1))$.

(2) 定义函数g: $[0,1) \to [0,1)^2$：任取$x\in[0,1)$, $g(x) = <x, x>$.

显然，g是单射，因此，$\#[0,1) \leq \#[0,1)^2$.

综上所述得 $\#([0,1))^2 = \#([0,1))$，从而$\#(\mathrm{R}\times\mathrm{R}) = \#\mathrm{R}$.

例. 证明: 全体从N到N的严格单调递增函数组成的集合，其基数大于 $\aleph_0$

证明：设 F 是全体从N到N的严格单调递增函数组成的集合。

首先证明 $\#(F)\geq\aleph_0$ ，然后证明$\#(F)\neq\aleph_0$.

(1) 如下定义 f: $\mathrm{N}\to F$:

对任意的$n\in\mathrm{N}$, $f(n)$是N到N的函数，记 $f(n)$为 f_n,

满足对任意的$m\in\mathrm{N}$, $f_n(m)=(n+1)\cdot m$.

对任意的$m, k\in\mathrm{N}$且$m>k$, 则有$f_n(m)-f_n(k)=(n+1)(m-k)>0$,

因此 f_n是从N到N的严格单调递增函数.

显然，当$n\neq n'$时，$f_n\neq f_{n'}$，即 f 是单射.

因此，$\#(F)\geq\aleph_0$.

证明(续): (2) （反证法）假设$\#(F)=\aleph_0$, 则存在双射g: N→ F.

对任意 $n\in$N, 记$g(n)=g_n$, 即g_n是从N到N的严格单调递增函数.

则$F=\{g_n|n\in N\}$.

递归构造 g': N → N

(a) $g'(0)=g_0(0)+1$;

(b) $g'(n)=\max\{g'(n\text{-}1), g_n(n)\}+1$, $n\geq 1$.

显然，g'是N到N的严格单调递增函数.

下面证明$g'\notin$F.

$g_0(0)$	$g_0(1)$	$g_0(2)$	$g_0(3)$	$g_0(4)$
$g_1(0)$	$g_1(1)$	$g_1(2)$	$g_1(3)$	$g_1(4)$
$g_2(0)$	$g_2(1)$	$g_2(2)$	$g_2(3)$	$g_2(4)$
$g_3(0)$	$g_3(1)$	$g_3(2)$	$g_3(3)$	$g_3(4)$
$g_4(0)$	$g_4(1)$	$g_4(2)$	$g_4(3)$	$g_4(4)$

可证对任意$n\in$N,$g'(n)\neq g_n(n)$, 故g'与F中的任意一个函数都不相等.

(i) 当$n=0$时， $g'(0)=g_0(0)+1\neq g_0(0)$;

(ii) 当$k>0$时，假设$n=k$时$g'(k)\neq g_k(k)$, 当$n=k+1$时，

$g'(k+1)=\max\{g'(k), g_{k+1}(k+1)\}+1$.

当$g'(k)\geq g_{k+1}(k+1)$时, $g'(k+1)=g'(k)+1>g_{k+1}(k+1)$;

当$g'(k)<g_{k+1}(k+1)$时, $g'(k+1)=g_{k+1}(k+1)+1>g_{k+1}(k+1)$.

由归纳证明知，对任意的 $n\in$N, $g'(n)\neq g_n(n)$， 因此，g'与F中的任意一个函数都不相等，即$g'\notin$F，与F是包含所有从N到N的严格递增函数的集合矛盾．因此，假设不成立，即$\#(F)\neq\aleph_0$, 得$\#(F)>\aleph_0$

总结:

- 自然数集合的归纳定义、数学归纳法
- 基数
  - ✓ 等势（对等）
  - ✓ 有穷集、无穷集
  - ✓ 可数无穷集、不可数集

集合论内容结束