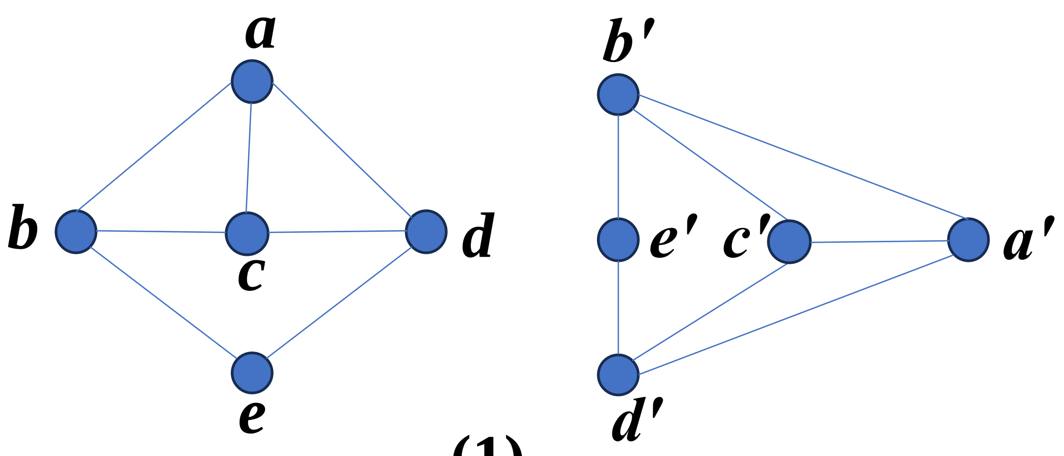
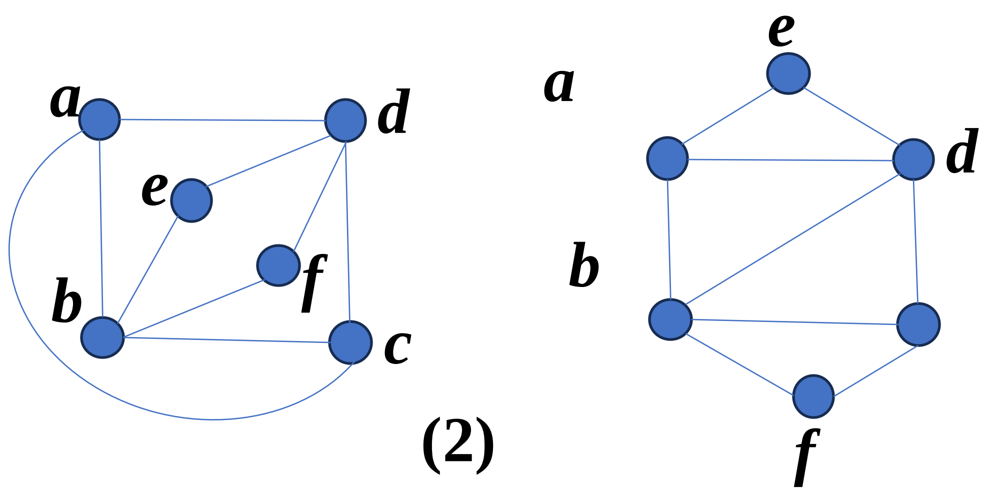
离散数学（2）
第八次作业讲解

2024 秋季学期

1. 判断下面每对图是否同构，如果同构，给出对应双射；如果不同构，请给出理由。



(1)



(2)

知识点：图的同构

■ 设图 $G=<V, E, \Psi>$ 和 $G'=<V', E', \Psi'>$，如果存在

双射 $f:V\rightarrow V'$ 和 双射 $g:E\rightarrow E'$，

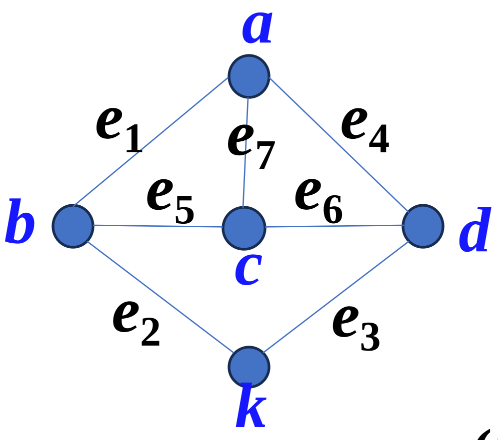
使得对于任意 $e\in E$ 及 $v_1, v_2\in V$ 都有：

$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, 若\ \Psi(e)=\{v_1, v_2\} \\ <f(v_1), f(v_2)>, 若\ \Psi(e)=<v_1, v_2> \end{cases}$$

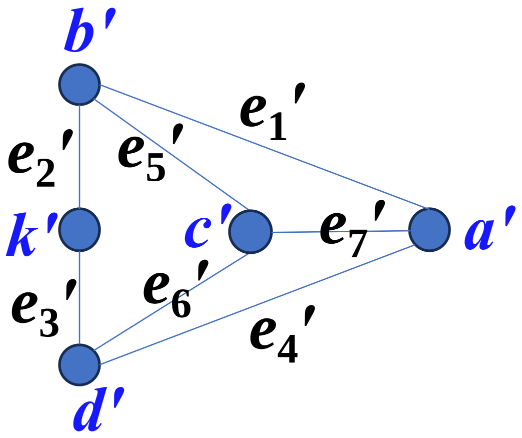
则称 G 与 G' 同构，记做 $G\cong G'$，并称 f 和 g 为 G 与 G' 之间的同构映射，简称同构。

- 两个同构的图必有相同的结点个数、边数、结点度数，且双射 f 保持结点之间的邻接关系，双射 g 保持边之间的邻接关系。

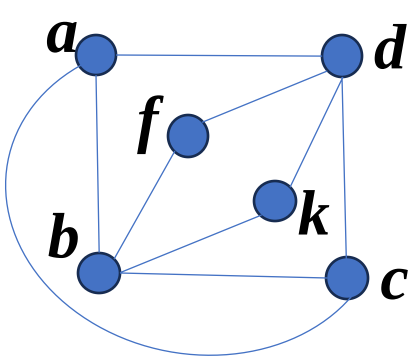
1. 判断下面每对图是否同构，如果同构，给出对应双射；如果不同构，请给出理由。



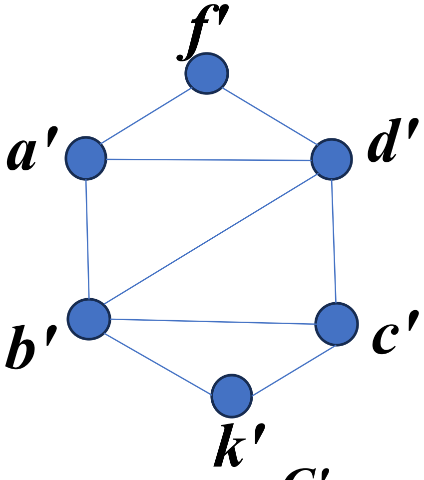
G



(1) G′



G



(2) G′

解： (1) 设两个图分别为 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$, $G'=\langle V', E', \Psi'\rangle$。

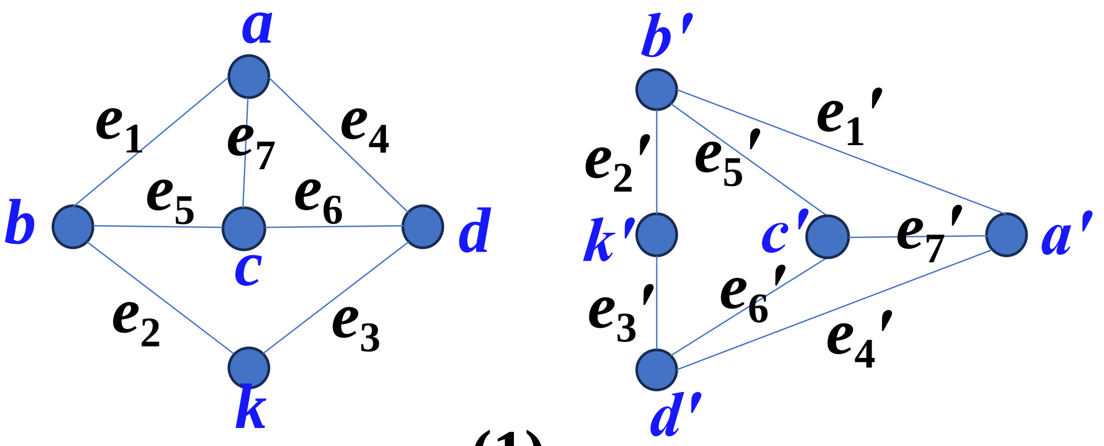
如下构造两个函数 $f: V\to V'$ 与 $g: E\to E'$，使得

$$f(a)=a',\quad f(b)=b',\quad f(c)=c',\quad f(d)=d',\quad f(k)=k',$$

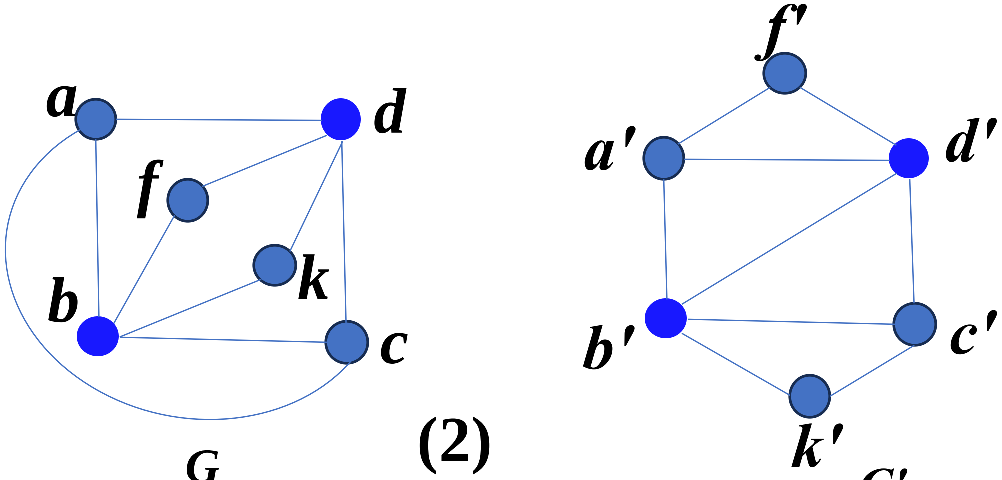
$$g(e_i)=e_i',\ i=1, 2, \ldots, 7$$

显然，f 和g构成图G到G'的同构映射。

1. 判断下面每对图是否同构，如果同构，给出对应双射；如果不同构，请给出理由。



G (1) G'



G (2) G'

解： (2) 设两个图分别为 $G=<V, E, \Psi>$, $G'=<V', E', \Psi'>$。

图G中与图G' 分别只有两个度为4的点。

图G中，两个度为 4的结点 b与 d 不邻接，即不存在以b和d 为起点和终点的边，

但在图G'中两个度为 4 的结点 b' 与 d' 邻接。

因此，G与G'不可能为同构。

2. 画出K_4的所有不同构的子图，指出哪些是生成子图，哪些是导出子图，并找出互为补图的生成子图。

知识点：生成子图、导出子图、补图、同构

- 设 $G=<V, E, \Psi>$, $G'=<V', E', \Psi'>$为图，
  - 如果 $V'=V$， $E'\subseteq E$， $\Psi'\subseteq\Psi$，则称G'是G的生成子图(Spanning Subgraph)
- 设图 $G=<V, E, \Psi>$, $V'\subseteq V$ 且 $V'\neq\varnothing$,
  - 由V'导出的子图 $G[V']$：以 V' 为结点集合，以所有起点和终点均在V' 中的边的全体为边集合的 G 的子图
- 设图 $G=<V, E, \Psi>$， $E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$， $V'=\{v \mid v\in V$ 且存在 $e\in E'$ 使 v 与 e 关联$\}$
  - 由 E'导出的子图 $G[E']$：以 V' 为结点集合，以 E' 为边集合的 G 的子图
- 设 n 阶无向图$G=<V, E, \Psi>$是 n 阶完全无向图 K_n 的生成子图，则G 的补图$\overline{G}=K_n-E$
  - 若 $E'\subseteq E$， $G-E'=<V$， $E-E'$， $\Psi|_{(E-E')}>$

2. 画出K_4的所有不同构的子图，指出哪些是生成子图，哪些是导出子图，并找出互为补图的生成子图。

知识点：生成子图、导出子图、补图、同构

- 设图 $G=<V, E, \Psi>$ 和 $G'=<V', E', \Psi'>$，如果存在

双射 $f:V\to V'$ 和 双射 $g:E\to E'$，

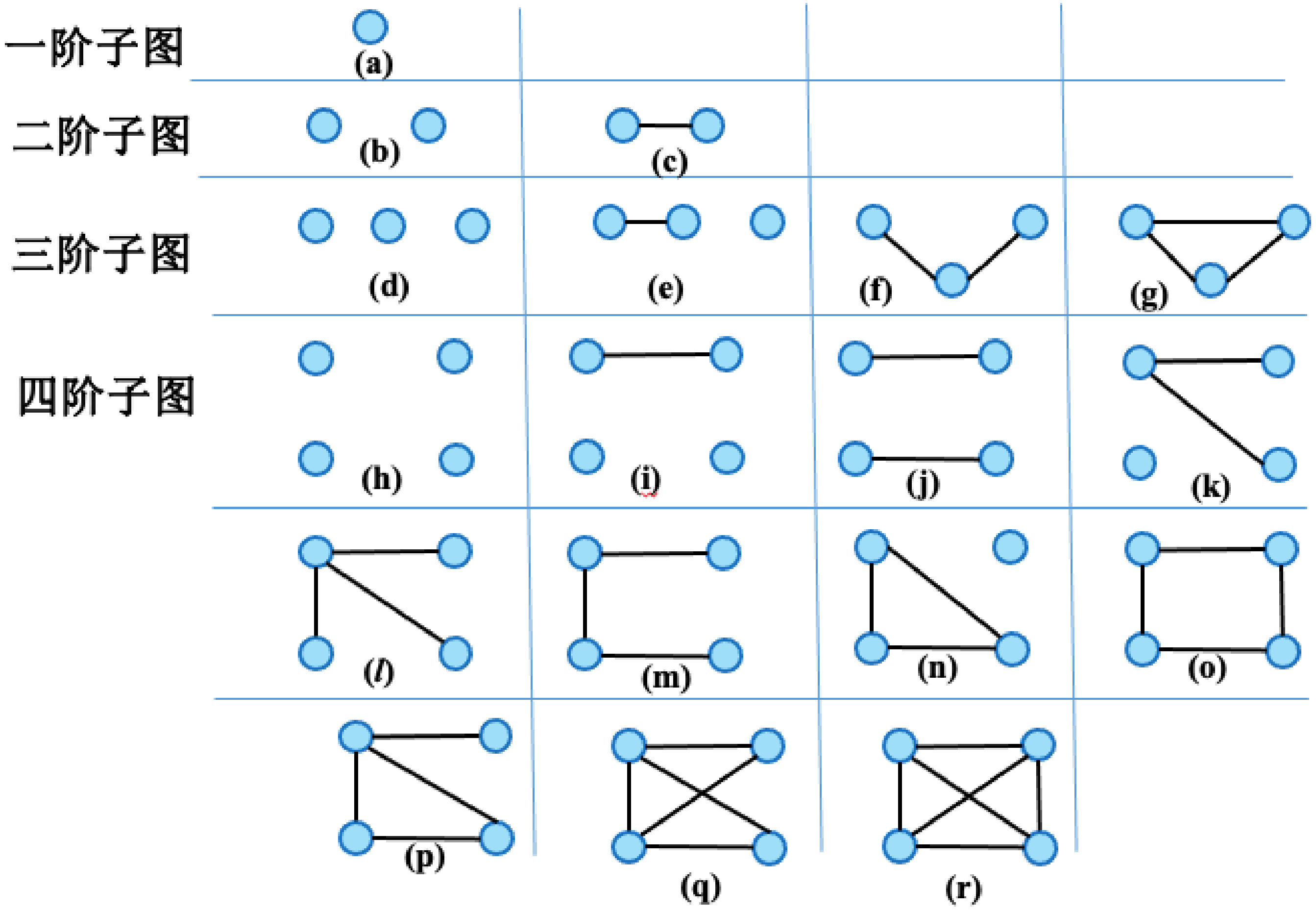
使得对于任意 $e\in E$ 及 $v_1, v_2\in V$ 都有：

$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, 若\ \Psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ <f(v_1), f(v_2)>, 若\ \Psi(e) = <v_1, v_2> \end{cases}$$

则称 G 与G' 同构，记做 $G\cong G'$，并称 f 和 g 为 G 与 G'之间的同构映射，简称同构。

2. 画出K_4的所有不同构的子图，指出哪些是生成子图，哪些是导出子图，并找出互为补图的生成子图。

解：如下图所示K_4的所有不同构的子图。

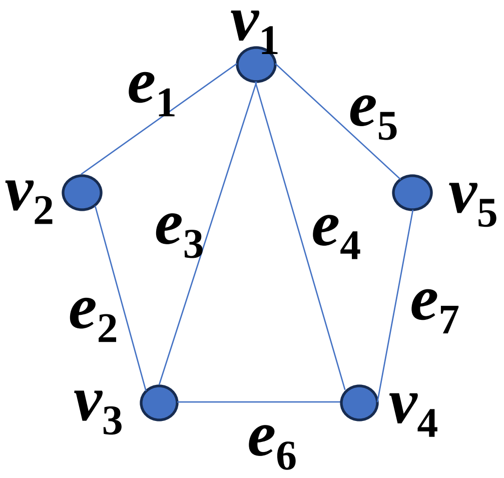


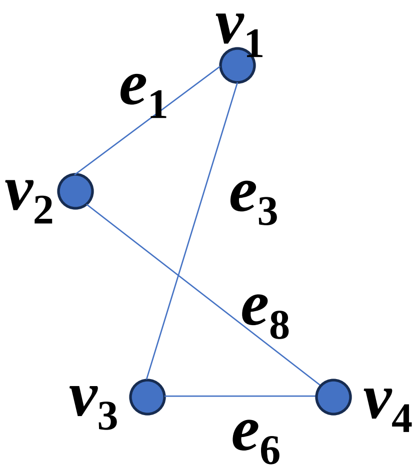
- 所有四阶子图都是生成子图
- (a), (c), (g), (r) 为结点导出子图
- (c), (f), (g), (j), (*l*), (m),(o), (p), (q), (r)为边导出子图
- 互为补图的生成子图：

  (h)与(r)、 (i)和(q)、(j)和(o)

  (k)和(p)、(m)和(m)、(*l*)和(n)

3. 画出以下两个图的交、并、环和。

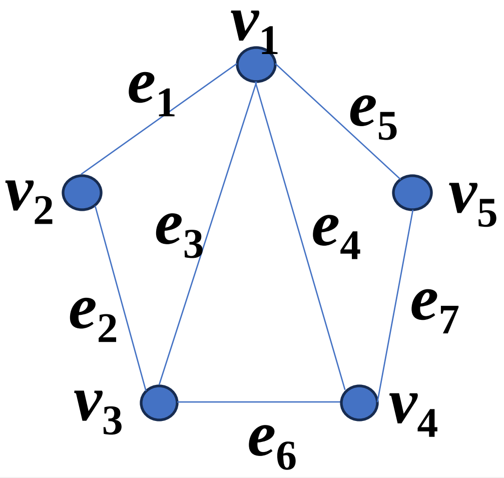


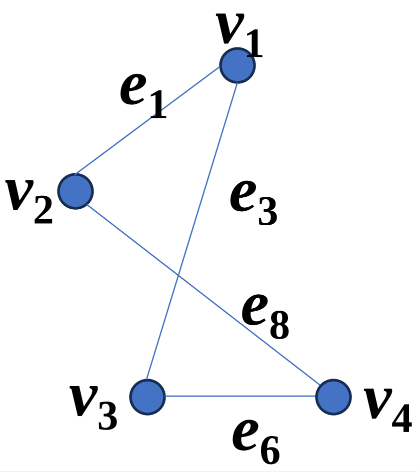


知识点：图的可运算

- 设 $G=<V, E, \Psi>$与$G'=<V', E', \Psi'>$同为无向图或有向图，如果对于任意$e\in E\cap E'$，均有 $\Psi(e) = \Psi'(e)$，则称G 和 G'是可运算的

3. 画出以下两个图的交、并、环和。

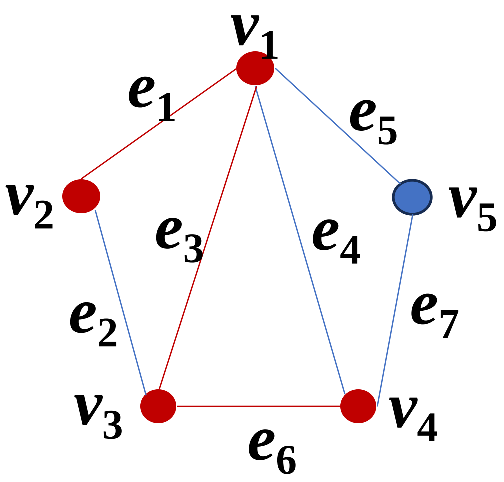


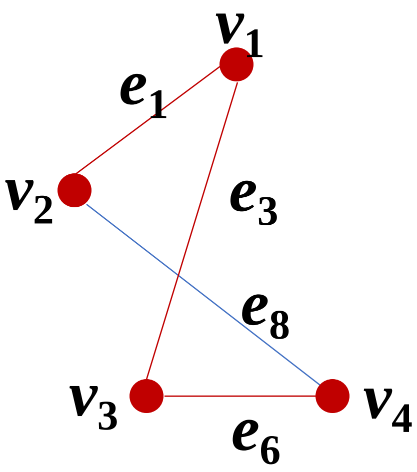


知识点：图的运算——交、并、环和

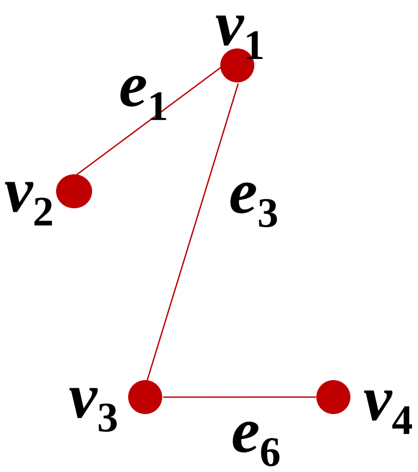
- 设 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$和 $G'=\langle V', E', \Psi'\rangle$是可运算的
  - G_1和G_2 的交$G_1\cap G_2=\langle V_1\cap V_2$，$E_1\cap E_2$，$\Psi_1\cap\Psi_2\rangle$：以$V_1\cap V_2$ 为结点集合，以$E_1\cap E_2$为边集合的G_1和G_2的公共子图
  - G_1和G_2 的并$G_1\cup G_2=\langle V_1\cup V_2$，$E_1\cup E_2$，$\Psi_1\cup\Psi_2\rangle$ ：以$V_1\cup V_2$ 为结点集合，以$E_1\cup E_2$为边集合的G_1和G_2的公共母图
  - G_1和G_2 的环和$G_1\oplus G_2=\langle V_1\cup V_2$，$E_1\oplus E_2$，$\Psi_1\cup\Psi_2|_{E1\oplus E2}\rangle$ ：以$V_1\cup V_2$ 为结点集合，以 $E_1\oplus E_2$ 为边集合的$G_1\cup G_2$ 的子图

3. 画出以下两个图的交、并、环和。

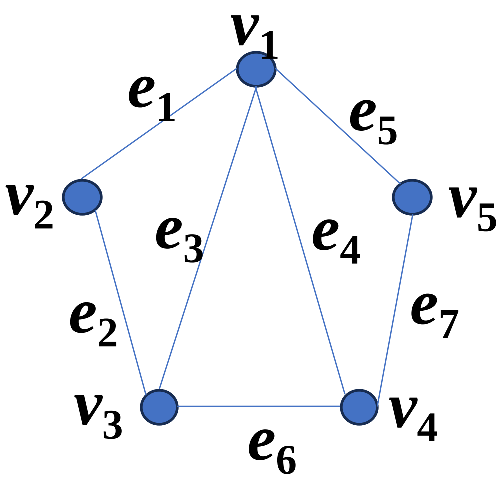


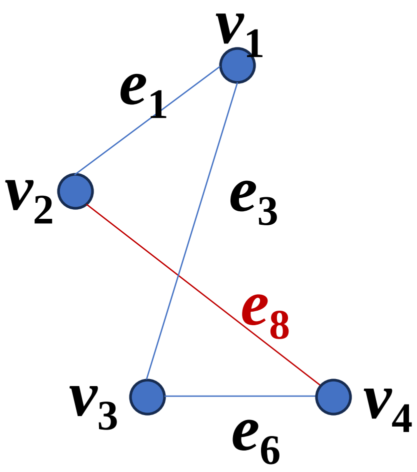


解：两个图的交为：

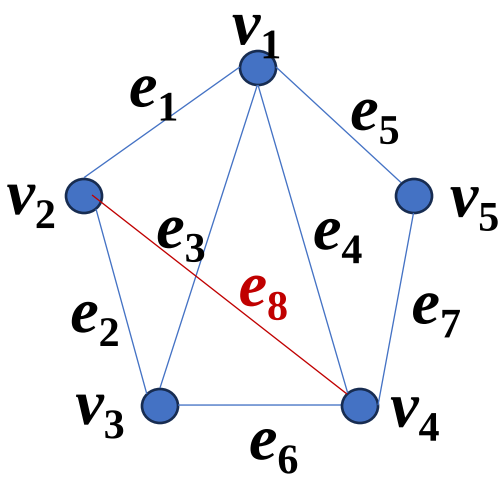


3. 画出以下两个图的交、并、环和。

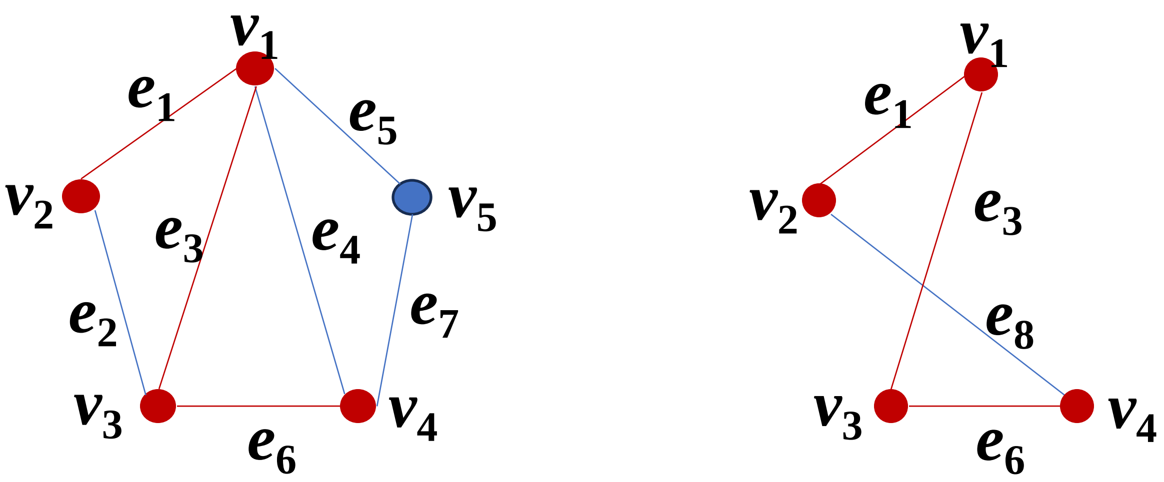




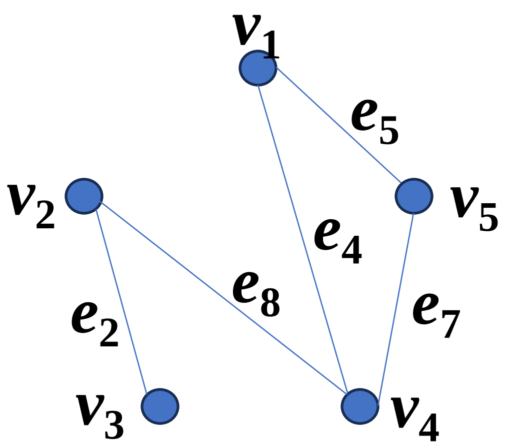
解：两个图的并为：



3. 画出以下两个图的交、并、环和。



解：两个图的环和为：



4. 证明3度正则图必有偶数个结点。

知识点：节点的度、 *d*度正则图

- 设 *v* 是图 *G* 的结点，
  - 如果 *G* 是无向图，*v* 的度 $d_G(v)$ 为*G*中与 *v* 关联的边的数目
  - 如果 *G* 是有向图，*v* 的出度$d_G^+(v)$为*G*中以 *v* 为起点的边的数目

    v 的入度$d_G^-(v)$为*G*中以 *v* 为终点的边的数目

    v 的度 $d_G(v)$ 为*v* 的出度与入度之和
- 握手定理：设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$有*m*条边，
  - 如果 *G* 是无向图，则 $\Sigma_{v\in V}\, d_G(v) = 2m$
  - 如果 *G* 是有向图，则 $\Sigma_{v\in V}\, d_G^+(v) = \Sigma_{v\in V}\, d_G^-(v) = m$ 且 $\Sigma_{v\in V}\, d_G(v) = 2m$
- *d* 度正则图：所有结点的度均为自然数 *d* 的无向图

4. 证明3度正则图必有偶数个结点。

证明：设$G = <V, E, \Psi>$是 n 阶3度正则图，则一定有

$$\Sigma_{v\in V}\ d_G(v) = 3n.$$

又由握手定理知，$\Sigma_{v\in V}\ d_G(v) = 2|E|$，得$2|E|= 3n$为偶数。

因此，n必为偶数，即3度正则图必有偶数个结点。

5. 画出3个结点的所有可能的简单无向图，但不能出现同构的图。

解： 3个结点的互不不同构的简单无向图一共有 4 个：