第4章欧拉图和哈密顿图

欧拉图和哈密顿图

目的：经典的穿程问题。熟悉欧拉定理的运用、判欧拉图和Hamilton图的方法；

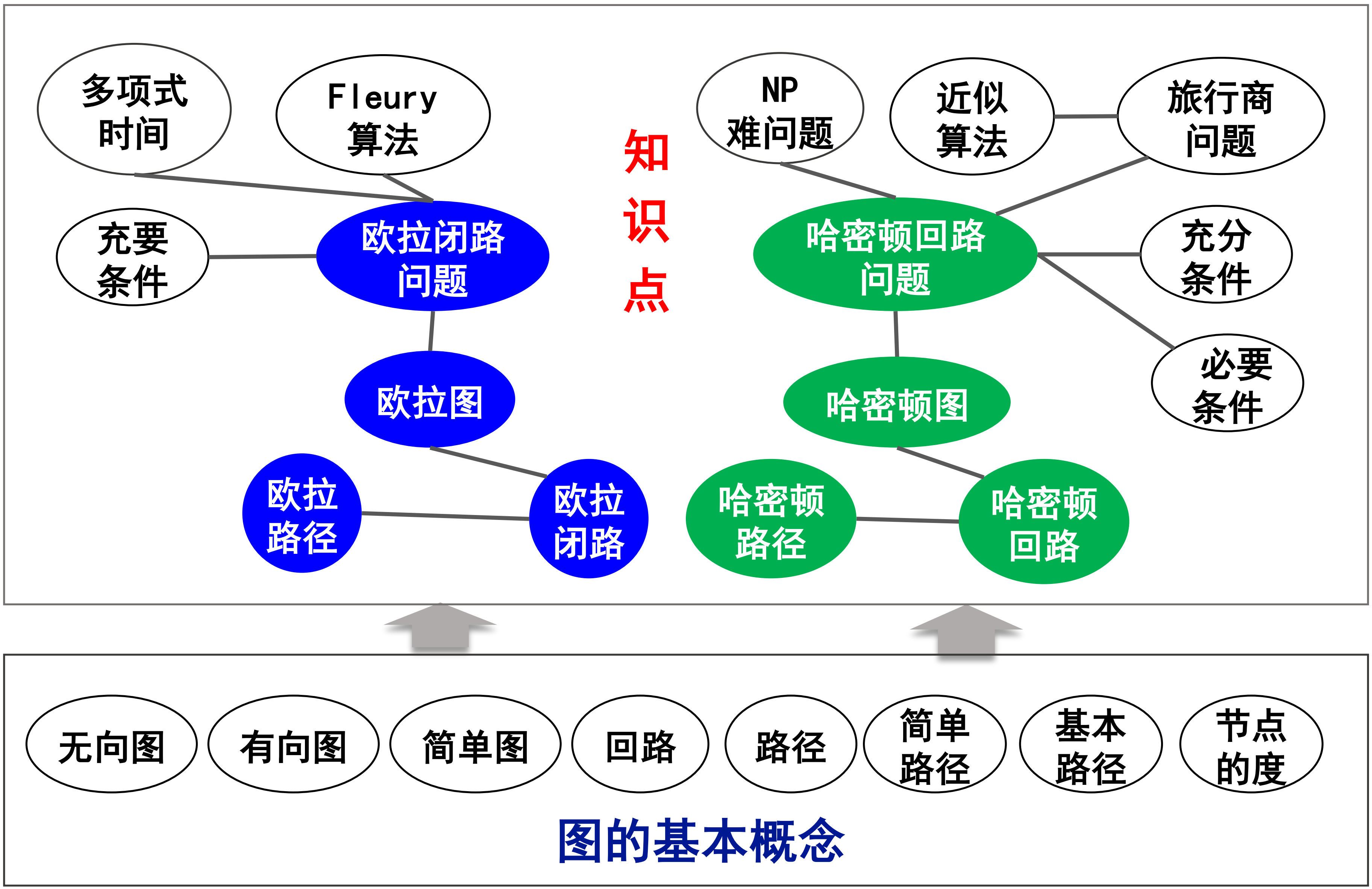
重点：判欧拉图、Hamilton图的算法；欧拉定理的运用；

问题：

1.什么是欧拉图、Hamilton图?

2.判定条件是什么?

欧拉图和哈密顿图

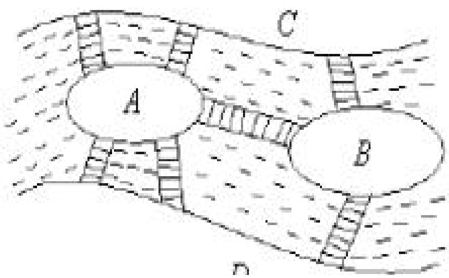

多项式
时间
Fleury
算法
知
识
点
NP
难问题
近似
算法
旅行商
问题
充要
条件
欧拉闭路
问题
哈密顿回路
问题
充分
条件
必要
条件
欧拉图
哈密顿图
欧拉
路径
欧拉
闭路
哈密顿
路径
哈密顿
回路
无向图
有向图
简单图
回路
路径
简单
路径
基本
路径
节点
的度
图的基本概念

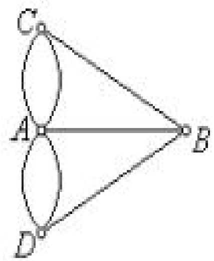
欧拉图和哈密顿图

		欧拉闭路问题	对比 哈密顿回路问题
概念	路径	穿过每条边且仅一次的路径	穿过每个点且仅一次的路径
	闭路/回路	穿过每条边且仅一次的回路	穿过每个点且仅一次的回路
	图	具有欧拉闭路的图	具有哈密顿回路的图
判断	充分必要条件	所有顶点的度是偶数	充分条件：任意两点度之和 $\geq \mathbf{n}$
		边集可划分成若干个闭合链	必要条件：任意节点子集V_1，$p(G\text{-}V_1) \leq \lvert V_1 \rvert$
应用	计算复杂性	多项式时间	**NP-难**，未发现多项式时间算法
	算法	Fleury算法	加权问题（旅行商问题）、近似算法

图论发展史的两个经典问题

- 哥尼斯堡桥问题，1736年



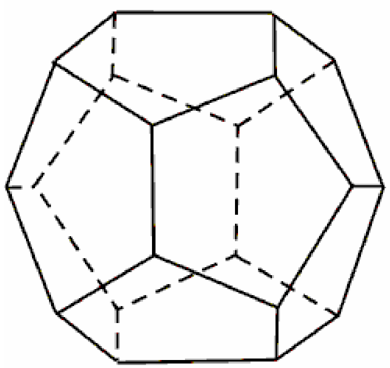


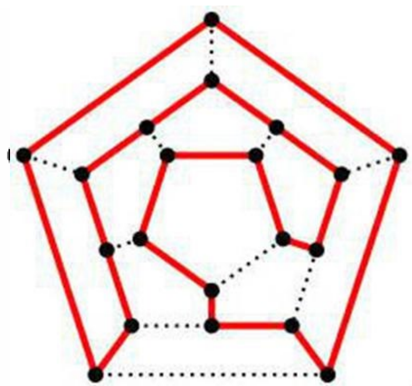
欧拉闭路问题

Leonard Euler
(1707-1783)

是否能从任何一处陆地出发，通过每座桥恰巧一次，最终回到出发地点？

- 周游世界问题，1857年



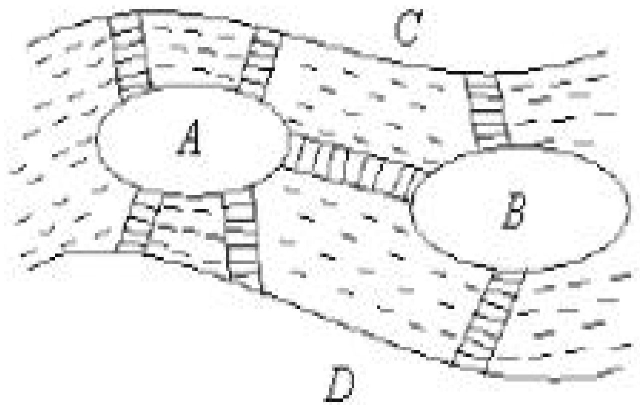


哈密顿回路问题

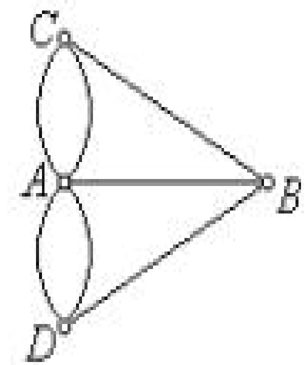
Willam Rowan Hamilton
(1805~1865)

是否能从任意一个城市(即顶点)出发，经过每个城市恰好一次?

哥尼斯堡桥问题 (Königsberg bridges problem)



(1)

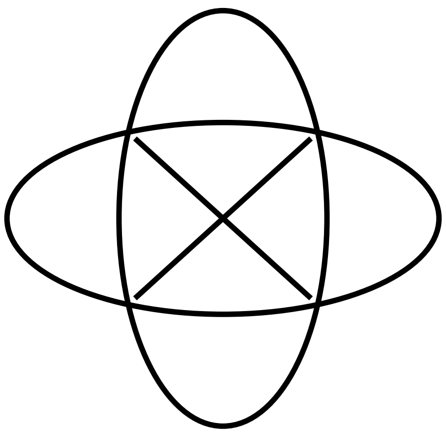


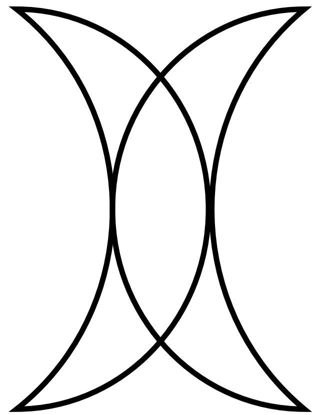
(2)

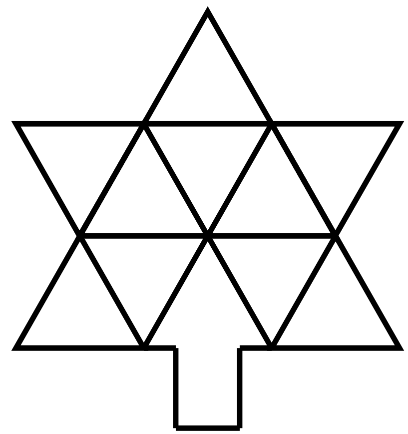
从四块陆地的任何一块出发，怎样通过每座桥恰巧一次，最终回到出发地点？（即找包含所有边的简单闭路径）

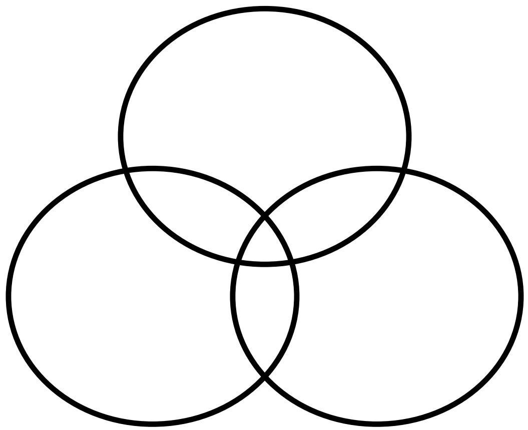
Euler 1736　　瑞士数学家　　证明不可能

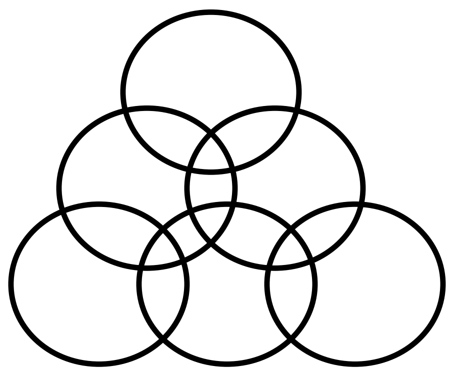
一笔画









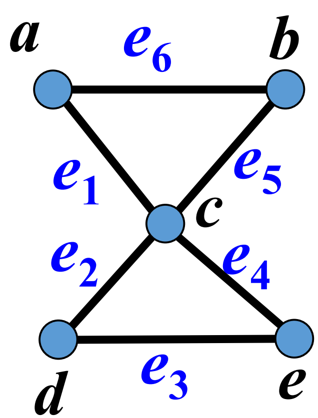


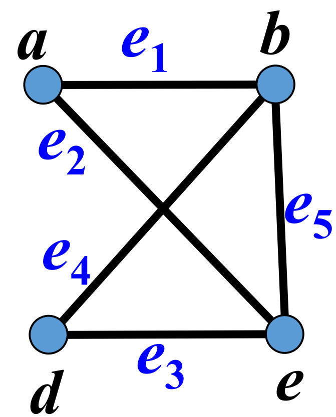
4.1 欧拉路径、欧拉闭路

定义4.1

(1) 图G中包含其所有边的简单开路径称为 G 的欧拉路径。

(2)图G中包含其所有边的简单闭路径称为 G 的欧拉闭路 (Euler Tour/Circuit）。





欧拉闭路: $ae_1ce_2de_3ee_4ce_5be_6\ a$　　欧拉路径: $be_1ae_2ee_3de_4be_5e$

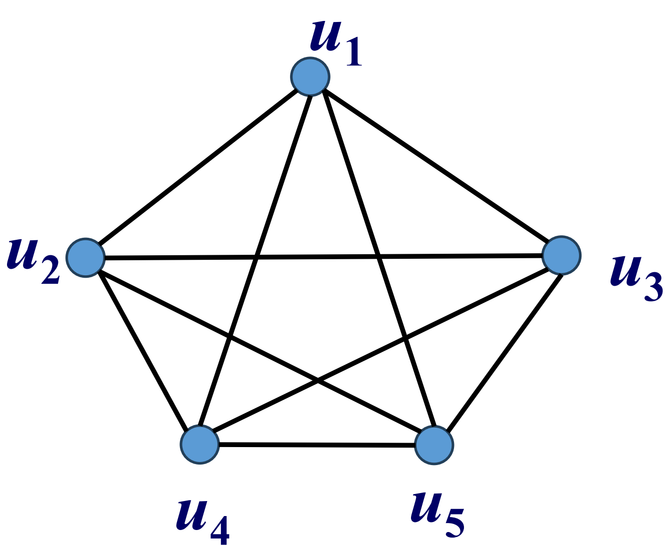
欧拉图、欧拉有向图

定义4. 2

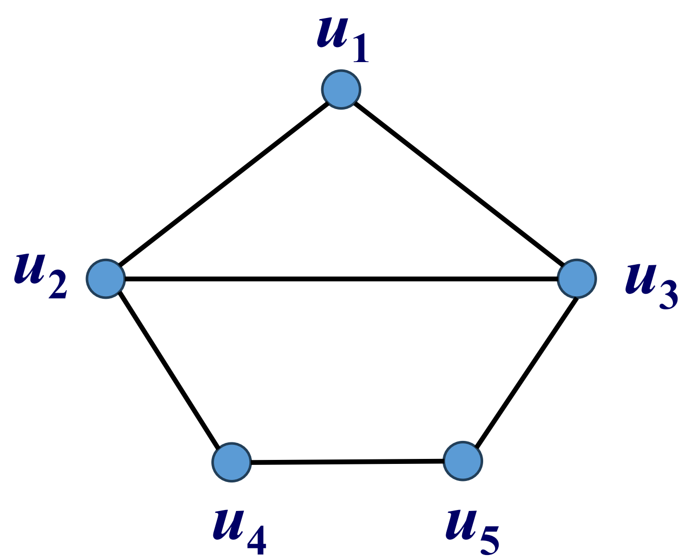
(1) 每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图。

(2)每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图。

其他说法：具有欧拉闭路的无向图称为欧拉图。



欧拉图



非欧拉图

欧拉定理

定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

每个结点都是偶结点

包含所有边的简单闭路径

- 若 G 不连通，设 G 有m个连通分支 $G_1, G_2, \ldots, G_m$
  - ✓ 每个分支 G_i 都连通
  - ✓ G是欧拉图 $\Leftrightarrow$ G只有偶结点$\Leftrightarrow$ 每个G_i只有偶结点
- 定理4.1 等价于：若无向图 G 不连通，

  G是欧拉图 $\Leftrightarrow$ G的每个分支都有欧拉闭路

其他说法：具有欧拉闭路的无向图称为欧拉图。

假设无向图为连通图

定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（充分性）

设G 是连通无向图，且有欧拉闭路 C,

所以 G的每个顶点 u 都至少在C上出现一次。

当C通过 u进去和出来一次，就使u的度数增加 2。

又因为C上的边不重复，所以如果C再次通过u，则必有另外两条边使u的次数增加2。

可见，G中每一顶点的度数必定是偶数。

定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（必要性）假设 G 是欧拉图，则每个结点都是偶结点。对G的边的数目 n 用第二归纳法:

(1) 若 $n = 0$， 则 G为平凡图，必要性成立。

(2) 令 $n\in I_+$， 设任意边数少于 n 的连通欧拉图均有欧拉闭路。若G有n条边，

由于G是欧拉图，因此，G的任意结点的度为偶数。

又由于 G 是连通的，因此， G的任意结点的度均大于 1.

定理3.9 图 G 不是非循环图当且仅当 G 有子图 G'，使得对于G' 的任意结点 v，皆有 $d_{G'}(v) > 1$。

定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（必要性）假设 G 是欧拉图，则每个结点都是偶结点。对G的边的数目 n 用第二归纳法:

(1) 若 $n=0$，则 G为平凡图，必要性成立。

(2) 令 $n \in I_+$，设任意边数少于 n 的连通欧拉图均有欧拉闭路。若G有n条边，

由于G是欧拉图，因此，G的任意结点的度为偶数。

又由于 G 是连通的，因此， G的任意结点的度均大于 1.

由定理 3.9知，G 不是非循环图，即 G 有回路 。

假设G 有长度为 m的回路 C。

定理3.6 设 v 是图 G 的任意结点，G 是回路（或有向回路），当且仅当

(1) G 的阶与边数相等，且

(2) 在 G 中存在一条 v 到 v 的闭路径，使得除了 v 在该闭路径中出现两次外，其余结点和每条边都在该闭路中恰出现一次。

定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（必要性）假设 G 是欧拉图，则每个结点都是偶结点。对G的边的数目 n 用第二归纳法:

(1) 若 $n = 0$， 则 G为平凡图，必要性成立。

(2) 令 $n \in I_{+}$，设任意边数少于 n 的连通欧拉图均有欧拉闭路。若G有n条边，

由于G是欧拉图，因此，G的任意结点的度为偶数。

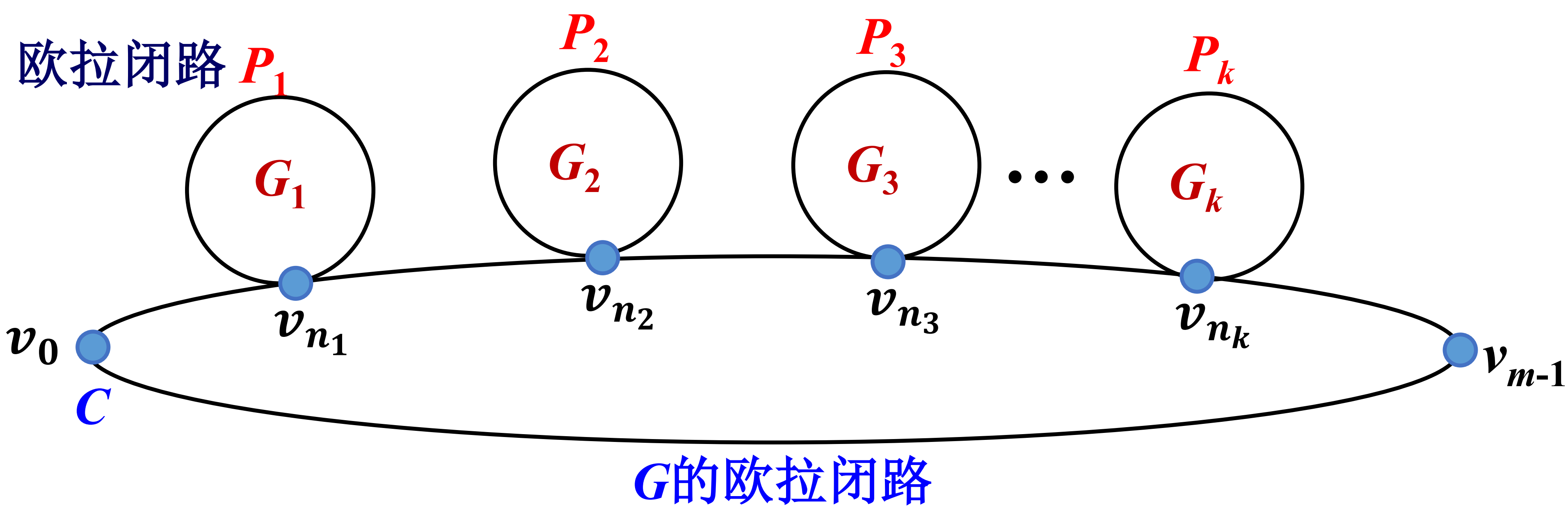
又由于 G 是连通的，因此， G的任意结点的度均大于 1.

由定理 3.9知，G 不是非循环图，即 G 有回路 。

假设G 有长度为 m的回路 C。由定理 3.6知，在C中存在闭路径 $v_0e_1v_1\ldots v_{m-1}e_mv_0$，其中$v_0,v_1,\ldots,v_{m-1}$互不相同。

定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

证明(续)：假设G 有长度为 m的回路 C。由定理 3.6知，在C中存在闭路径 $v_0e_1v_1\ldots v_{m\text{-}1}e_mv_0$，其中$v_0,v_1,\ldots,v_{m\text{-}1}$互不相同。令 $G'=G-\{e_1, e_2,\ldots, e_m\}$，设 G' 有k个分支$G_1,\ldots, G_k$。由于G是连通的，G' 的每个分支与 C 都有公共结点。



定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

证明(续)：假设G 有长度为 m的回路 C。由定理 3.6知，在C中存在闭路径 $v_0e_1v_1\ldots v_{m\text{-}1}e_mv_0$，其中$v_0,v_1,\ldots,v_{m\text{-}1}$互不相同。

令 $G'=G-\{e_1, e_2,\ldots, e_m\}$，设 G' 有k个分支$G_1,\ldots, G_k$。

由于G是连通的，G' 的每个分支与 C 都有公共结点。

设$G_i\,(1\le i \le k)$与 C 的一个公共结点为 v_{n_k}。

不妨设 $0 \le n_1<n_2<\ldots<n_k\le m\text{-}1$。

显然 G_i 为边数小于n的连通欧拉图。

由归纳假设，G_i有一条从v_{n_i}至v_{n_i}的欧拉闭路径 P_i

因此, $v_0e_1v_1\ldots e_{n_1}P_1\ e_{n_1+1}\ v_{n_1+1}\ \ldots\ e_{n_k}\ P_k\ e_{n_k+1}\ \ldots v_{m\text{-}1}e_mv_0$是$G$的一条欧拉闭路。

定理4.2 设 $G=<V,E,\Psi>$ 为 连通无向图， v_1， $v_2\in V$ 且 $v_1\neq v_2$。则G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径当且仅当 G 恰有两个奇结点 v_1 和 v_2 。

证明：任取 $e\notin E$，并令 $\Psi'=\{<e,\{v_1,v_2\}>\}$，则

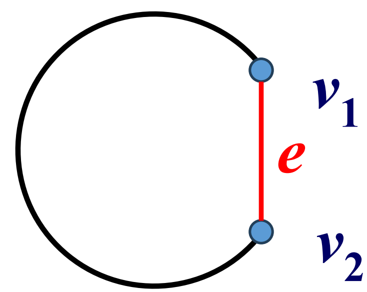
G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径

$\Leftrightarrow$ $G'=G+\{e\}_{\Psi'}$ 有一条欧拉闭路

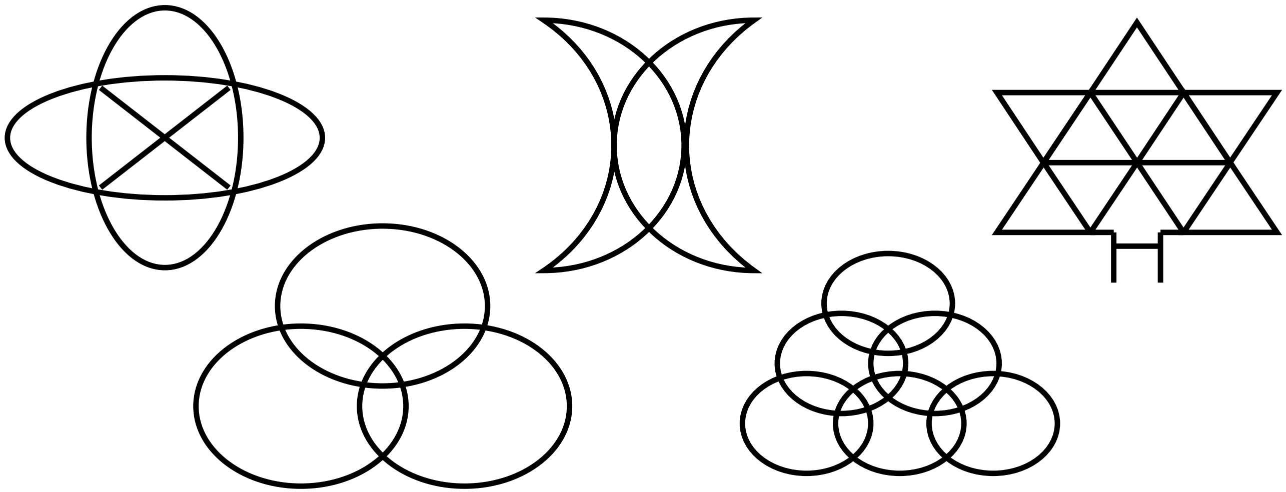
$\Leftrightarrow$ G'是欧拉图

$\Leftrightarrow$ G'中每个结点都是偶结点

$\Leftrightarrow$ G 中恰有两个奇结点 v_1 和 v_2

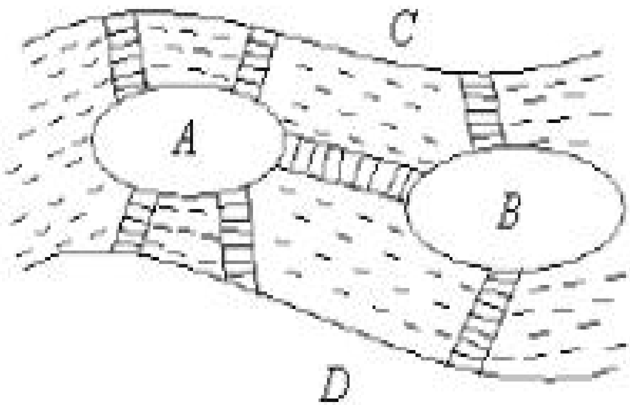


一笔画



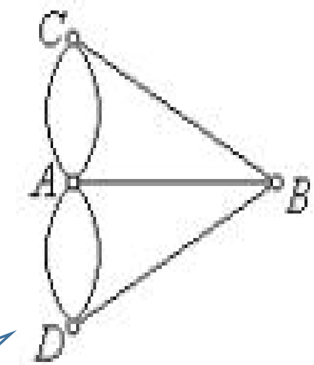
- 设 *G* 是连通无向图，
  - ✓ *G*有欧拉闭路当且仅当 *G* 的每个结点都是偶结点（定理4.1）
  - ✓ *G*有欧拉路径当且仅当 *G* 的恰有两个奇结点（定理4.2）
- 一张连通图能由一笔画出来的充要条件是：
  - ✓ 每个交点处的线条数都是偶数；或 **(欧拉闭路)**
  - ✓ 恰有两个交点处的线条数是奇数。 **(欧拉路径)**

哥尼斯堡桥问题 (Königsberg bridges problem)



(1)

既无欧拉闭路，
又无欧拉路径



(2)

从四块陆地的任何一块出发，怎样通过每座桥恰巧一次，最终回到出发地点？（即找包含所有边的简单闭路径）

Euler 1736　　*瑞士数学家*　　*证明不可能*

定理4.3 设 G 为弱连通的有向图。G 是欧拉有向图当且仅当 G有欧拉闭路。

包含所有边的简单闭路径

每个结点的出度和入度都相等

证明过程与定理4.1类似。

定理4.4 设G为弱连通有向图。v_1和v_2为G的两个不同结点。G有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径 当且仅当

$$d_G^+(v_1) = d_G^-(v_1) + 1, \quad d_G^+(v_2) = d_G^-(v_2) - 1$$

且对 G 的其它结点 v，均有 $d_G^+(v) = d_G^-(v)$

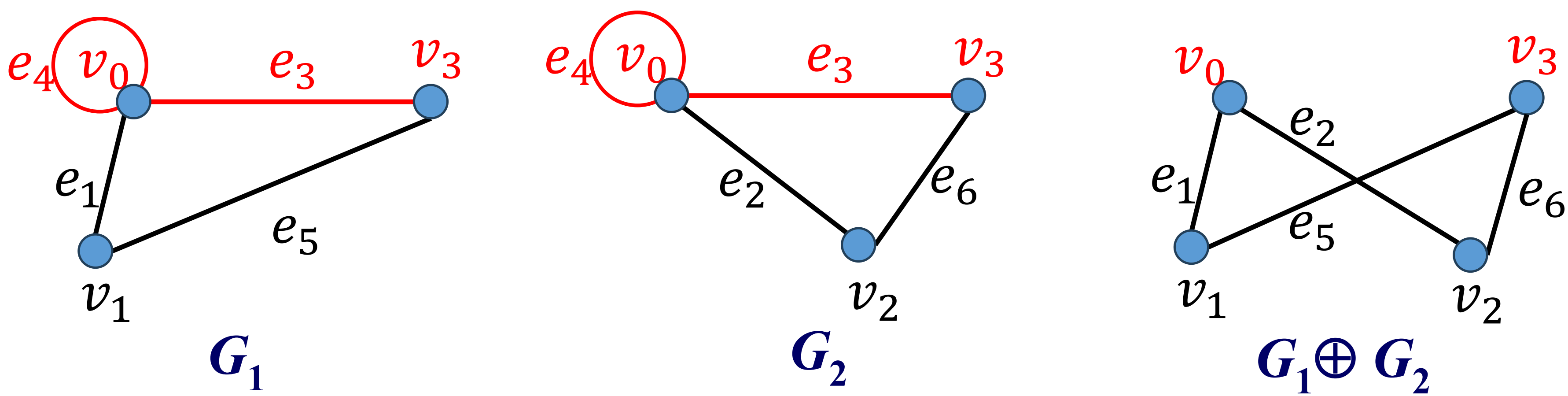
证明过程与定理4.2类似。

定理4.5 如果 G_1 和 G_2 是可运算欧拉图，则 $G_1 \oplus G_2$ 是欧拉图。

- 设图 $G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$ 和 $G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$ 可运算，

G_1 和 G_2 的环和 $G_1 \oplus G_2$：

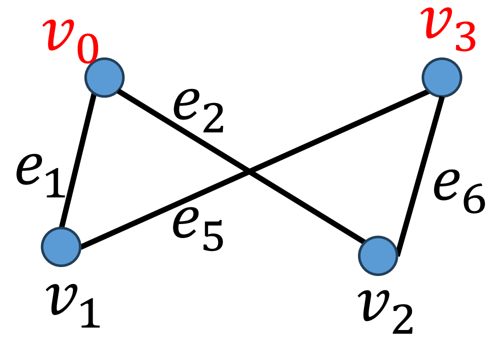
以 $V_1 \cup V_2$ 为结点集合，以 $E_1 \oplus E_2$ 为边集合的 $G_1 \cup G_2$ 的子图



定理4.5 如果 G_1 和 G_2 是可运算欧拉图，则 $G_1 \oplus G_2$ 是欧拉图。

证明： 设 $G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$ 和 $G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$，

$G_1 \oplus G_2 = <V, E, \Psi>$。



$G_1 \oplus G_2$

由于 G_1 和 G_2 是欧拉图，因此均只有偶结点。

只需证明 $G_1 \oplus G_2$ 只有偶结点。

设 v 是 $G_1 \oplus G_2$ 的任意结点，则有以下三种可能：

(1) $v \in V_1$ 但 $v \notin V_2$；

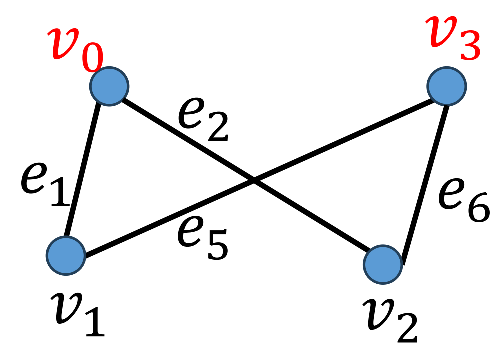
(2) $v \in V_2$ 但 $v \notin V_1$；

(3) $v \in V_1$ 且 $v \in V_2$；

定理4.5 如果 G_1 和 G_2是可运算欧拉图，则$G_1 \oplus G_2$是欧拉图。

证明： 设$G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$和$G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$，

$$G_1 \oplus G_2 = <V, E, \Psi>。$$



$G_1 \oplus G_2$

由于G_1 和 G_2是欧拉图，因此均只有偶结点。

只需证明$G_1 \oplus G_2$ 只有偶结点。

设v是$G_1 \oplus G_2$ 的任意结点，则有以下三种可能：

(1) $v \in V_1$ 但 $v \notin V_2$；

此时与 v 相连的边只在G_1 中而不在 G_2中，因此在 $G_1 \oplus G_2$ 中。

所以，v 仍是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。

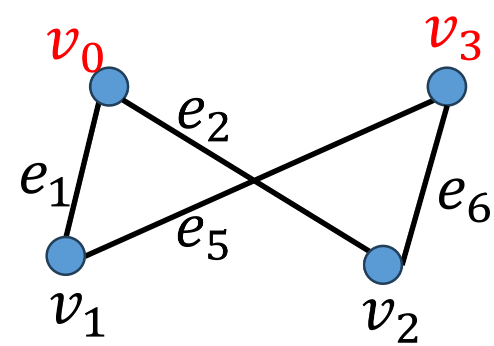
(2) $v \in V_2$ 但 $v \notin V_1$；

同理可证， v 仍是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。

定理4.5 如果 G_1 和 G_2 是可运算欧拉图，则 $G_1 \oplus G_2$ 是欧拉图。

证明（续）： 设 $G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$ 和 $G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$，

$G_1 \oplus G_2 = <V, E, \Psi>$。



设 v 是 $G_1 \oplus G_2$ 的任意结点，则有以下三种可能：

(3) $v \in V_1$ 且 $v \in V_2$;

设 G_1 和 G_2 有 k 条公共边与 j 个公共自圈与 v 关联，$G_1 \oplus G_2$

则 $d_{G_1 \oplus G_2}(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v) - 2(k+2j)$，

故 v 仍是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。

综上， $G_1 \oplus G_2$ 只有偶结点，因此为欧拉图。

Fleury算法

- 输入：无向图G
- 输出：从v到w的欧拉路径 / 欧拉闭路.
- 算法:
  1. 从任意一点开始，沿着没有走过的边向前走
  2. 在每个顶点，优先选择剩下的非割边，除非只有唯一一条边
  3. 直到得到欧拉回路或宣布失败

删掉该边后，图仍连通

Fleury算法(递归形式)

■算法:

(1) if d(v)>1 then e:=v关联的任意非割边

(2)   else e:=v关联的唯一边

(3) u:=e的另一个端点.

(4) 递归地求G-e的从u到w的欧拉通路

(5) 把e接续在递归地求出的通路上

Fleury算法(迭代形式)

■算法:

(1) $P_0:=v$;

(2) 设$P_i=v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍,设$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$,

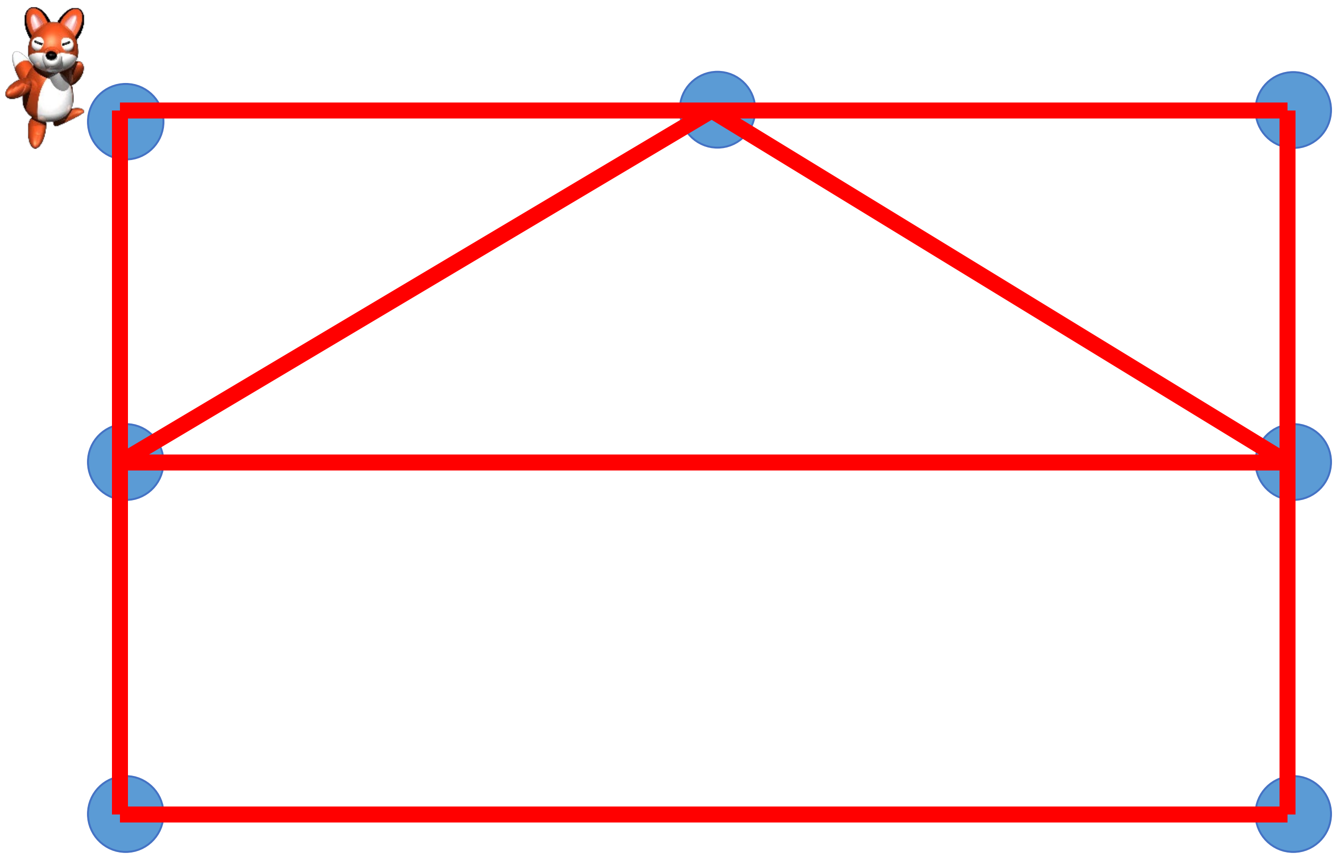
$e_{i+1}:= G_i$中满足如下2条件的边:

(a) e_{i+1}与v_i关联

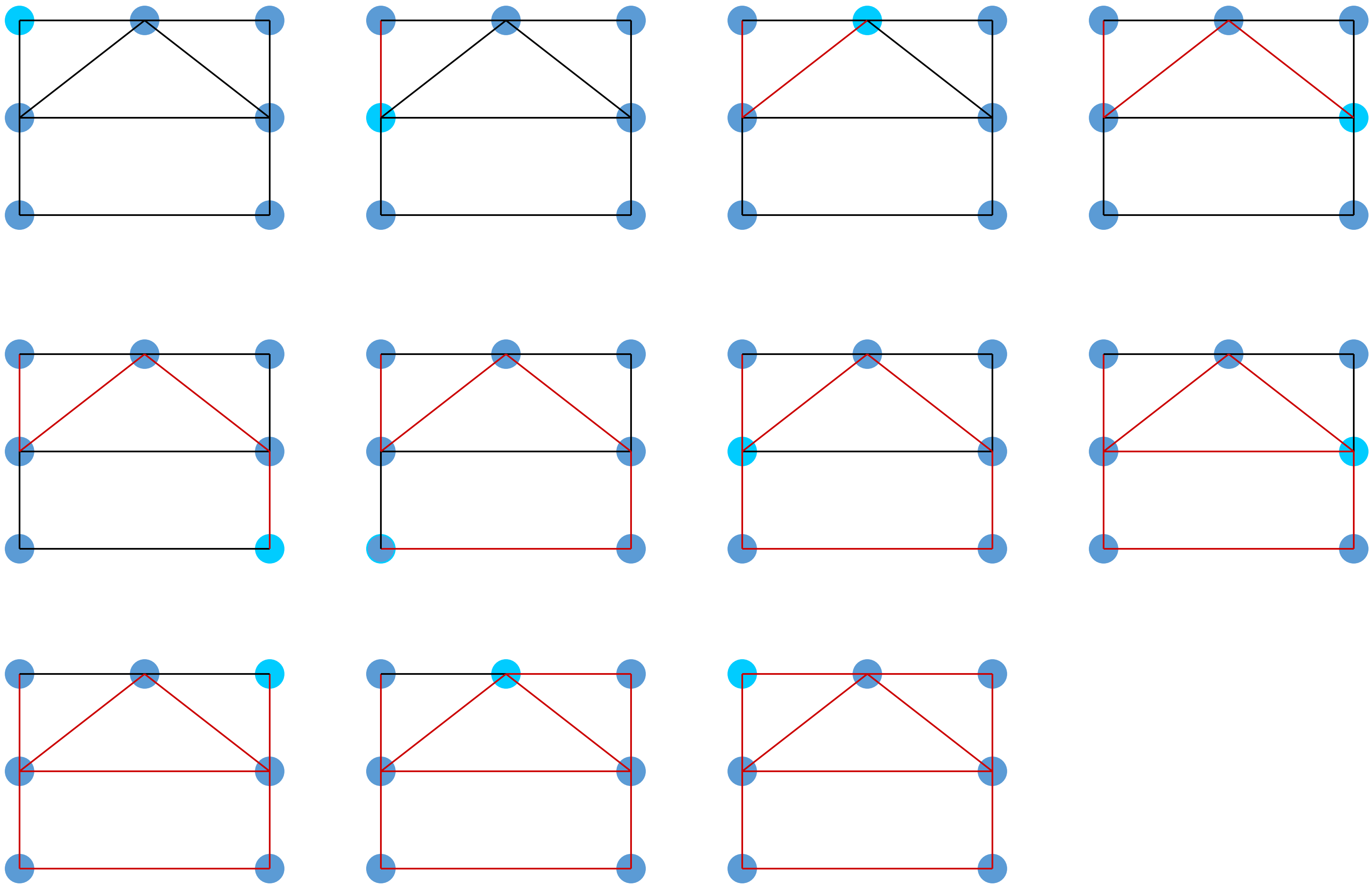
(b) 除非别无选择,否则e_{i+1}不是G_i中的割边

(3) 若$G_i\neq N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

Fleury算法(举例)



Fleury算法(举例)



Fleury算法(正确性证明)

- 设G是无向欧拉图，则Fleury算法终止时得到的简单路径P_m是欧拉闭路

证明: (1) P_m是回路：显然.

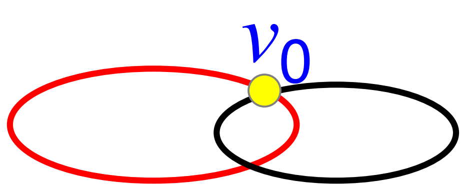
(2) P_m经过G中所有边：（反证）

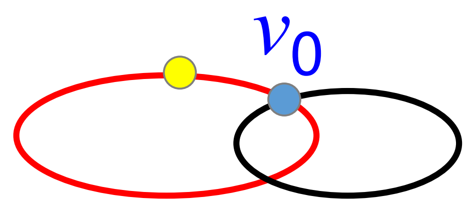
否则, $G-P_m$的连通分支还是欧拉回路, 并且与P_m相交.

(a)若v_0是交点，则算法不应结束;

(b)若v_0不是交点，则算法在最后离开交点回到v_0时走了桥;

这都是矛盾!

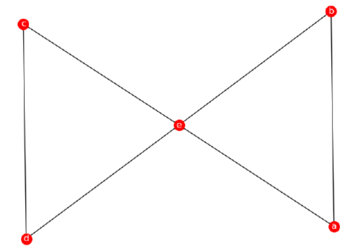




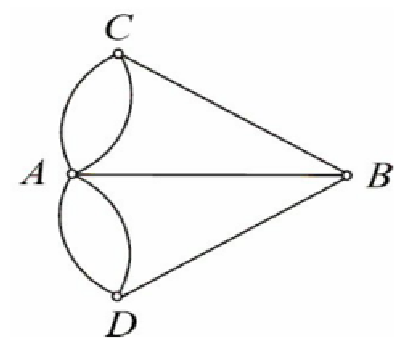
A. 概念辨识

回顾：4.1 欧拉回路问题

		欧拉闭路问题
概念	**路径**	**穿过每条边且仅一次的路径**
	闭路	**穿过每条边且仅一次的闭路**
	图	**具有欧拉闭路的图**
判断	**充分必要条件**	**所有顶点的度是偶数**
		边集可划分成若干个闭合链
应用	**计算复杂性**	**多项式时间**
	算法	**Fleury算法**



欧拉图



欧拉证明了没有欧拉回路

A. 概念辨识

4.2 哈密顿回路问题

		欧拉闭路问题
概念	路径	穿过每条边且仅一次的路径
	闭路	穿过每条边且仅一次的闭路
	图	具有欧拉闭路的图
判断	充分必要条件	所有顶点的度是偶数
		边集可划分成若干个闭合链
应用	计算复杂性	多项式时间
	算法	Fleury算法

边 ⇒ 点

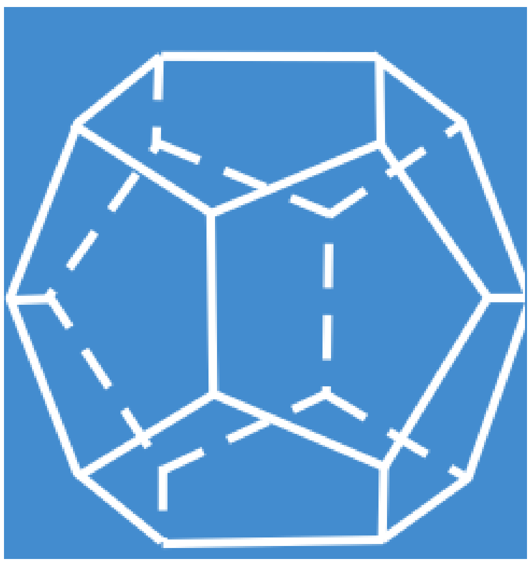
无充分必要条件

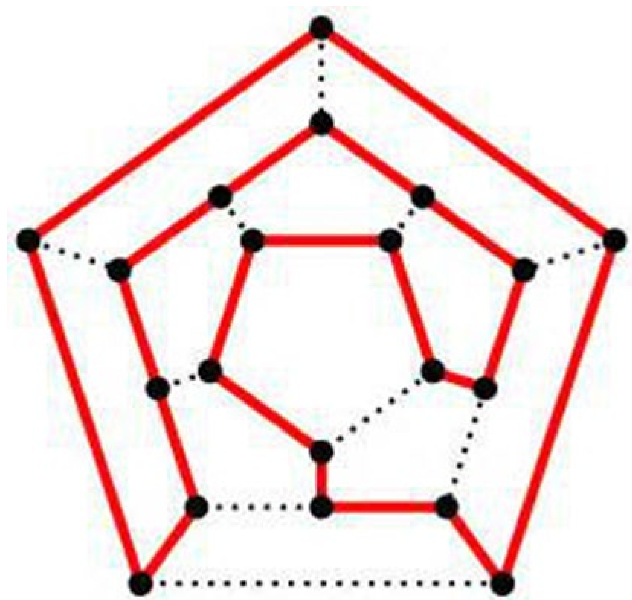
***NP-**完全问题，目前未发现多项式时间算法*

周游世界游戏

William Rowan Hamilton, 1857年发明

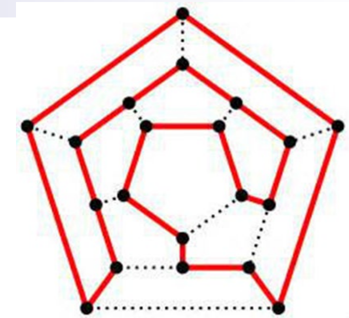
Icosian Game (环游世界游戏)





正十二面体，二十个顶点，三十条棱

周游世界游戏



问：找一条从某城市出发，经过每个城市恰好一次，并且最后回到出发点的路线。

等价于：在图中找出一条包含所有结点的闭路，并且，除始点和终点重合外，这条闭路所含结点是互不相同的。

根据定理7.3.6，这条闭路的所有结点和边组成了一个回路。

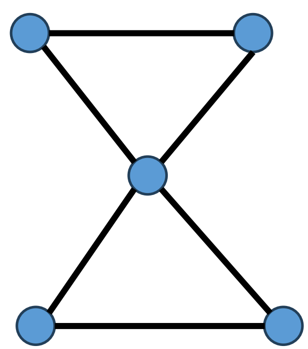
哈密顿回路

定义4.3

(1)如果回路 (有向回路) C 是图 G 的生成子图，则称 C 为 G 的哈密顿回路（哈密顿有向回路）。

(2)图G中包含它的所有结点的基本路径称为G的哈密顿路径。

(3)有哈密顿回路（哈密顿有向回路）的图称为哈密顿图（哈密顿有向图）。



非哈密顿图

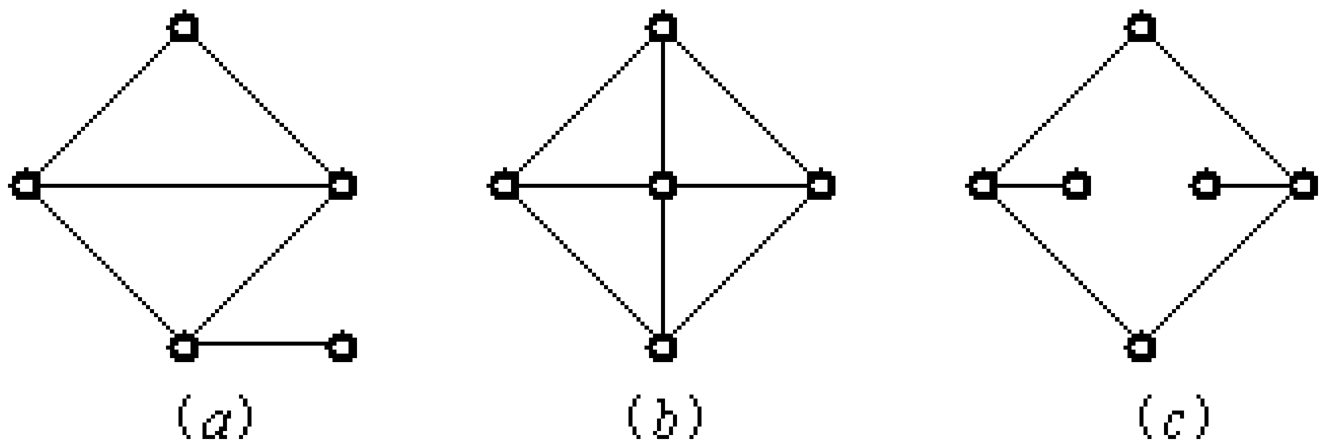


图10-21

（a）有哈密顿路径但无哈密顿回路

（b）既有哈密顿路径又有哈密顿回路

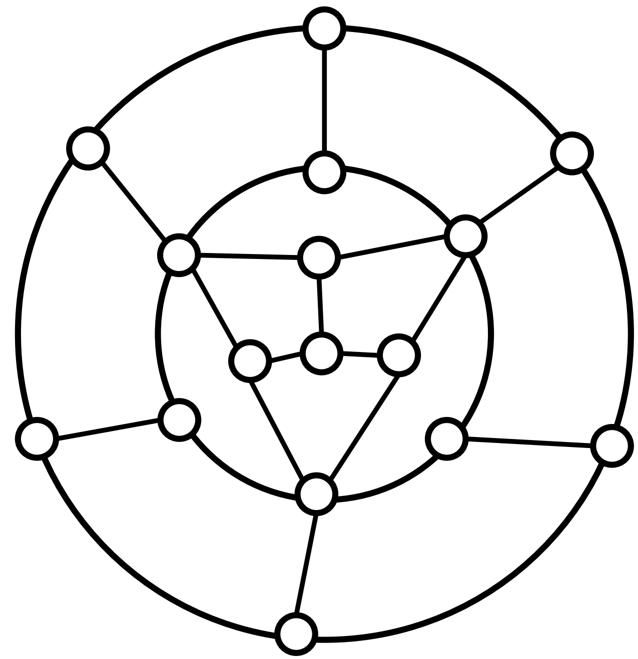
（c）既无哈密顿路径也无哈密顿回路

问题：一个图是Hamilton图的充要条件？

哈密顿回路（路径）的必要条件

例：判断下图是否有哈密顿回路和哈密顿路径？

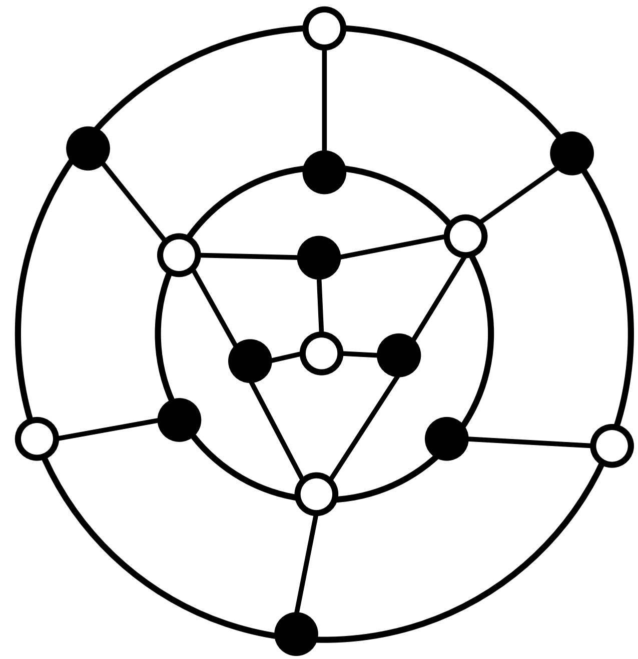
用黑白两种颜色 给图中的点着色，
使相邻点的颜色不同



哈密顿回路（路径）的必要条件

例：判断下图是否有哈密顿回路和哈密顿路径？

用黑白两种颜色 给图中的点着色，使相邻点的颜色不同



(1) 若有哈密顿回路 C：

任取 C 中一白色结点v，C 中必存在v到v的闭路径 P，

且P所经过的结点颜色必定是：

白，黑，白，黑，…，白，黑，白

故P中白色结点与黑色结点个数一定相等。

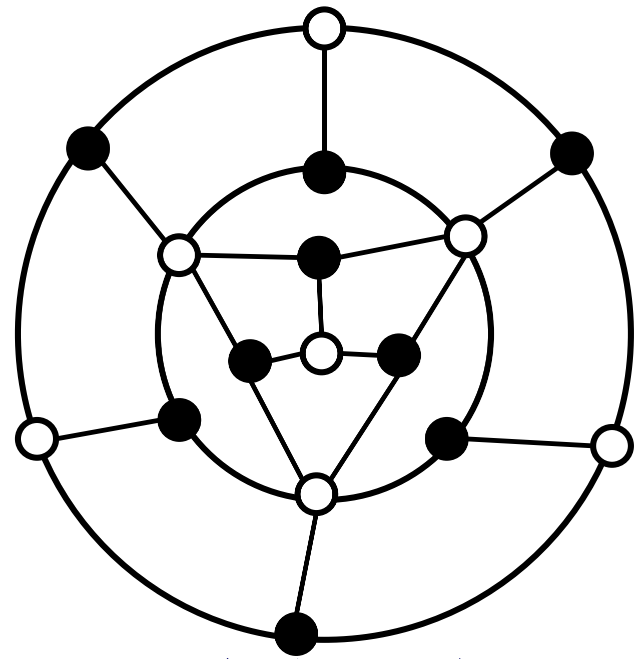
黑色点：9个
白色点：7个
因此，无哈密顿回路

哈密顿回路（路径）的必要条件

例：判断下图是否有哈密顿回路和哈密顿路径？

用黑白两种颜色 给图中的点着色，
使相邻点的颜色不同

标点法



(1) 若有哈密顿路径 *C*：

对图中任意一条基本路径 *P*，

假设 *P* 从白色结点出发，

则*P*所经过的结点颜色必定是：

白，黑，白，黑，…，白，黑…

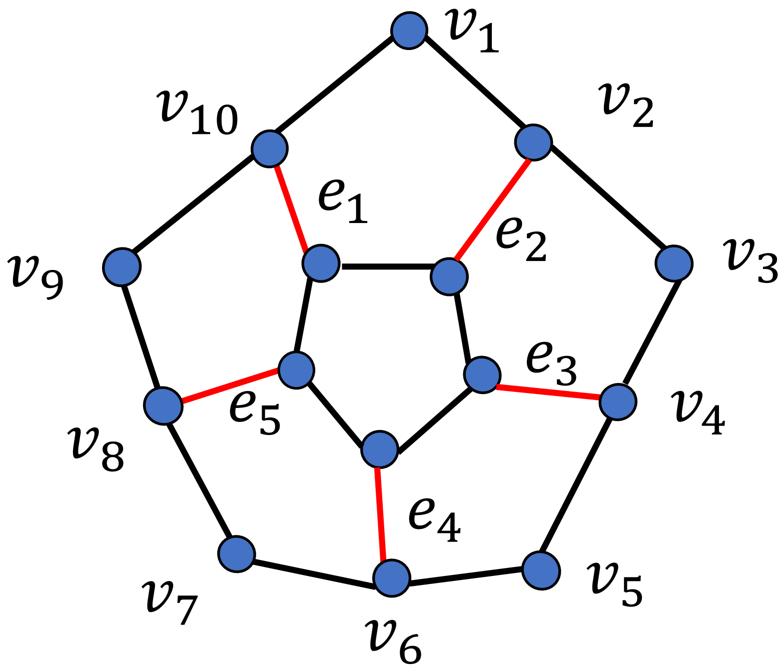
最后一个结点可能是白色也可能是黑色。

故*P*中白色结点与黑色结点个数相等或相差1

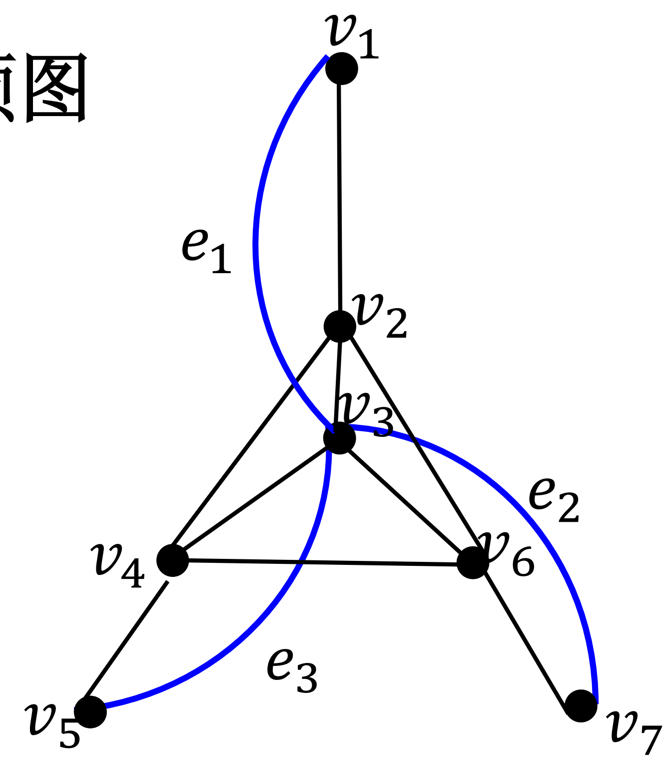
黑色点：9个
白色点：7个
因此，无哈密顿路径

哈密顿回路（路径）的必要条件

例：判断下面两图G_1, G_2是否哈密顿图



G_1

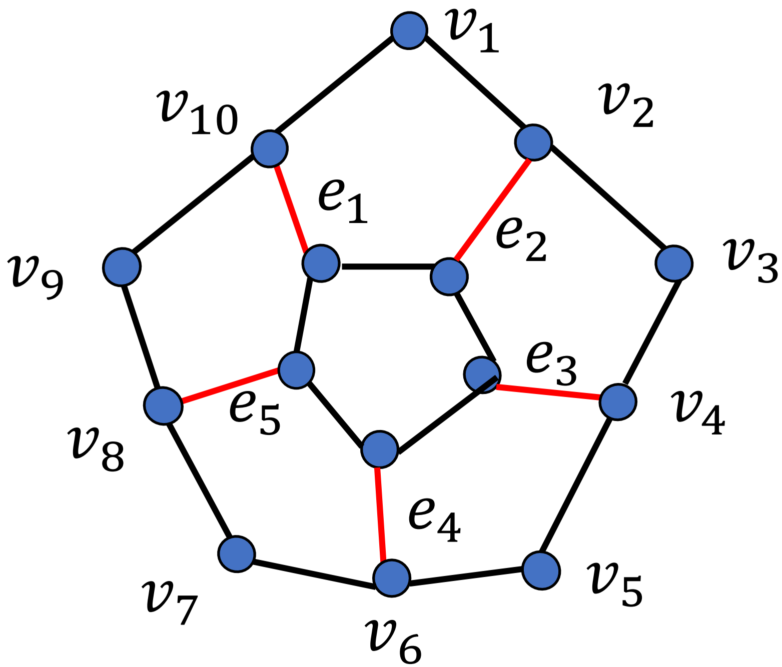


G_2

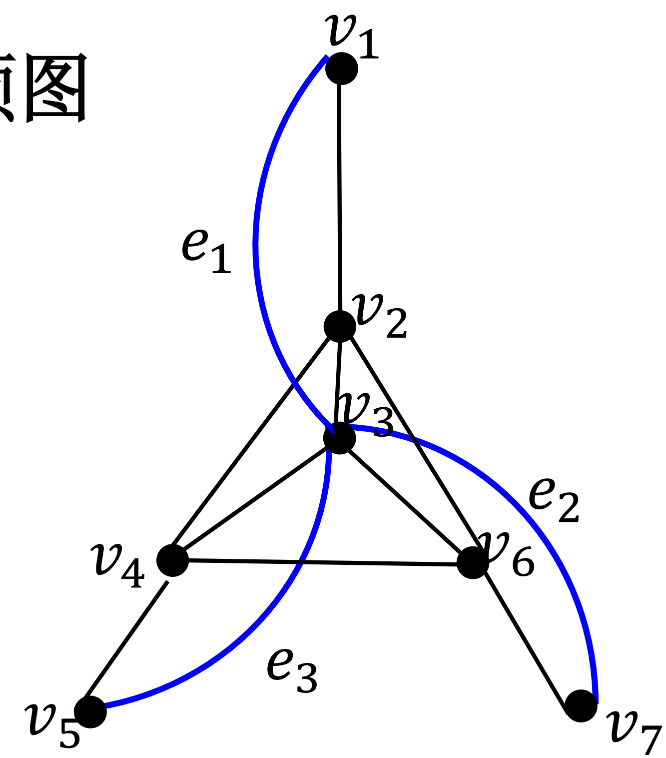
思想：考虑哈密顿回路 C， 图中每个结点都恰有两条和它关联的边在C上。因此，可以通过对每个结点去掉“多余的边”得到C。

哈密顿回路（路径）的必要条件

例：判断下面两图G_1, G_2是否哈密顿图



G_1

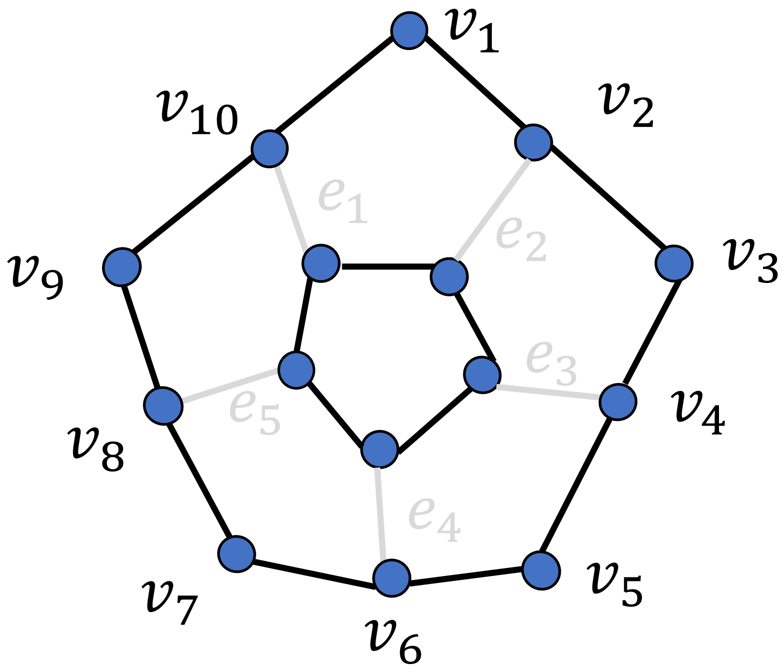


G_2

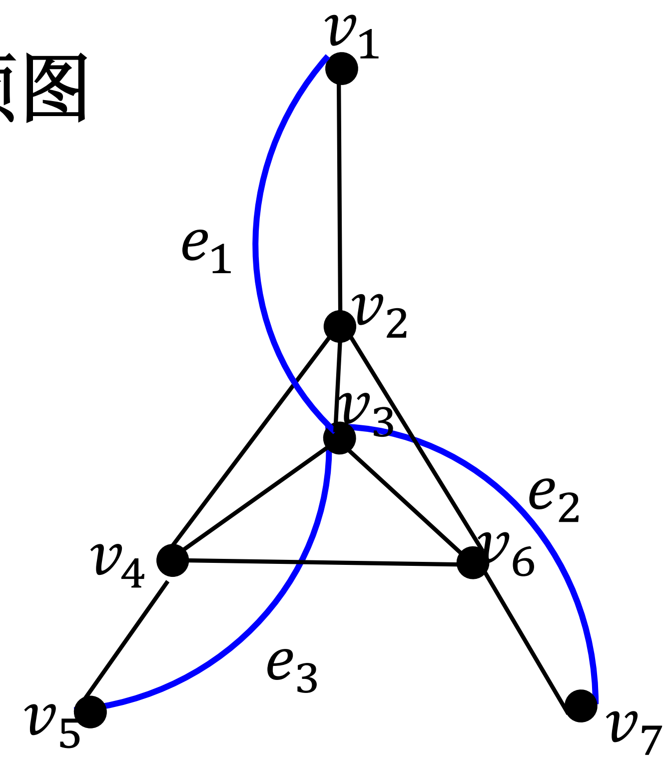
G_1：v_2 关联 3条边，只能去掉e_2；同理去掉e_1, e_3, e_4, e_5

哈密顿回路（路径）的必要条件

例：判断下面两图G_1, G_2是否哈密顿图



G_1

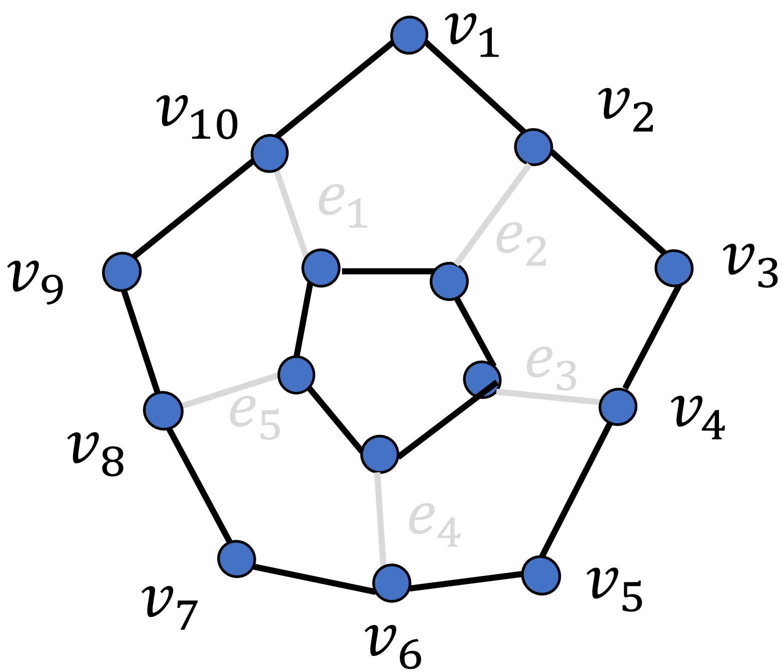


G_2

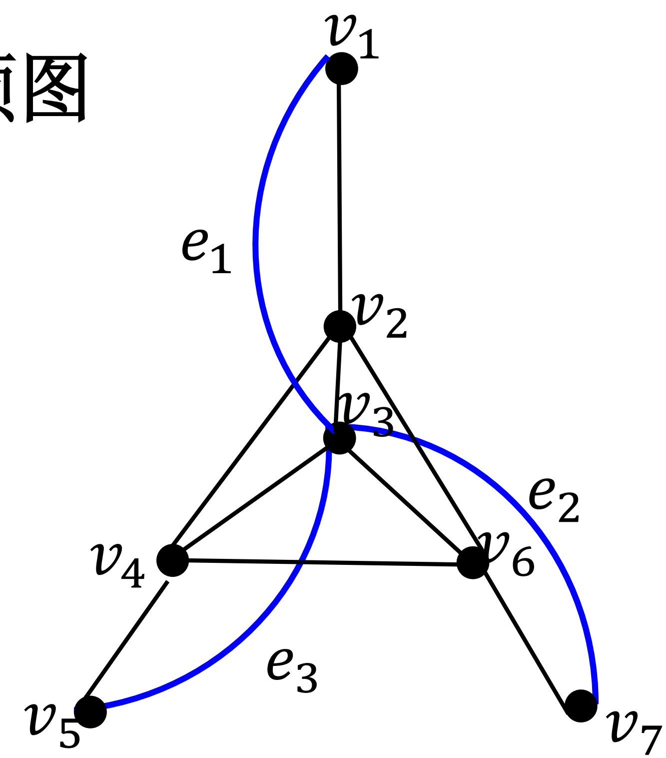
G_1：v_2 关联 3条边，只能去掉e_2；同理去掉e_1, e_3, e_4, e_5，
此时，生成子图不连通，不可能有回路。
因此，G_1不是哈密顿图

哈密顿回路（路径）的必要条件

例：判断下面两图G_1, G_2是否哈密顿图



G_1



G_2

G_1：v_2 关联 3条边，只能去掉e_2；同理去掉e_1, e_3, e_4, e_5，
此时，生成子图不连通，不可能有回路。
因此，G1不是哈密顿图

定义4.1 (1) 图G中包含其所有边的简单开路径称为 G 的欧拉路径。
(2)图G中包含其所有边的简单闭路径称为 G 的欧拉闭路。

定义4.2
(1) 每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图。
(2)每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图。

定理4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图当且仅当G有欧拉闭路。

定义4.3
(1)如果回路 (有向回路) C 是图 G 的生成子图，则称 C 为 G 的哈密顿回路（哈密顿有向回路）。
(2)图G中包含它的所有结点的基本路径称为G的哈密顿路径。
(3)有哈密顿回路（哈密顿有向回路）的图称为哈密顿图（哈密顿有向图）。

哈密顿回路（路径）的必要条件

定理: 设$G=<V, E,\Psi>$是哈密顿图，则对V的任意非空真子集 V_1 有 $W(G-V_1)\leq|V_1|$，其中$W(G-V_1)$为G-V_1的分支的个数。

- 逆否定理:

设$G=<V, E,\Psi>$，若存在V的一个非空真子集 V_1 有

$$W(G-V_1) > |V_1|$$

则 G 不是哈密顿图

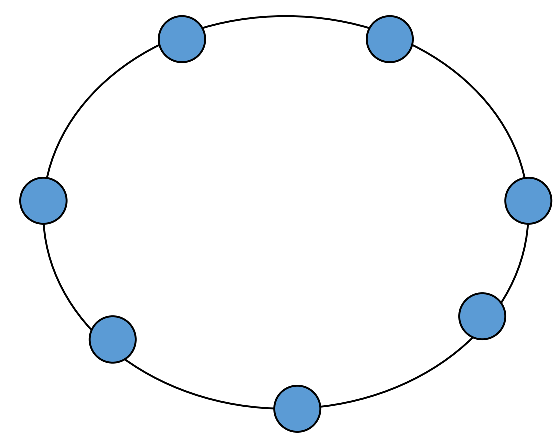
哈密顿回路（路径）的必要条件

定理: 设G=<V, E,Ψ>是哈密顿图，则对V的任意非空真子集 V_1 有 $W(G-V_1)\le|V_1|$，其中$W(G-V_1)$为G-V_1的分支的个数。

证明：设G=<V, E, Ψ>是哈密顿图，且C是G的哈密顿回路，

则$C-V_1$是$G-V_1$的生成子图，

所以$W(G-V_1) \le W(C-V_1)$。



哈密顿回路（路径）的必要条件

定理: 设G=<V, E,Ψ>是哈密顿图，则对V的任意非空真子集 V_1 有 $W(G-V_1) \le |V_1|$，其中$W(G-V_1)$为G-V_1的分支的个数。

证明：设G=<V, E, Ψ>是哈密顿图，且C是G的哈密顿回路，

则$C-V_1$是$G-V_1$的生成子图，

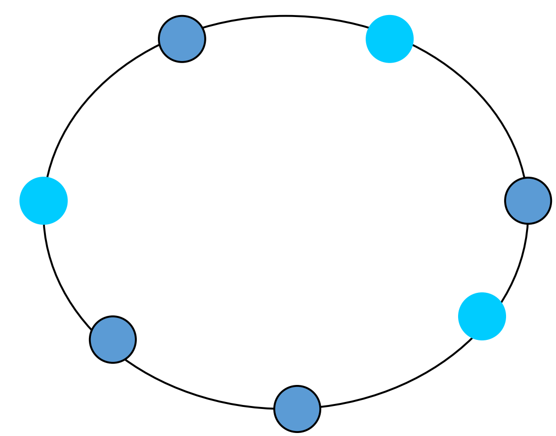
所以$W(G-V_1) \le W(C-V_1)$。

易知：当V_1中的结点互不邻接时，

$C-V_1$的分支数达到最大值$|V_1|$，

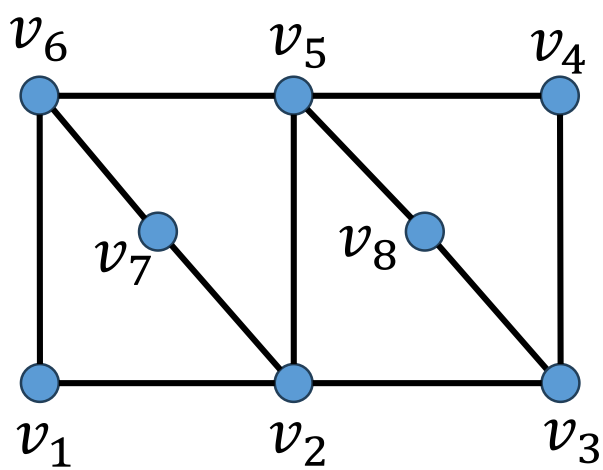
所以有$W(C-V_1) \le |V_1|$。

故$W(G-V_1) \le |V_1|$。



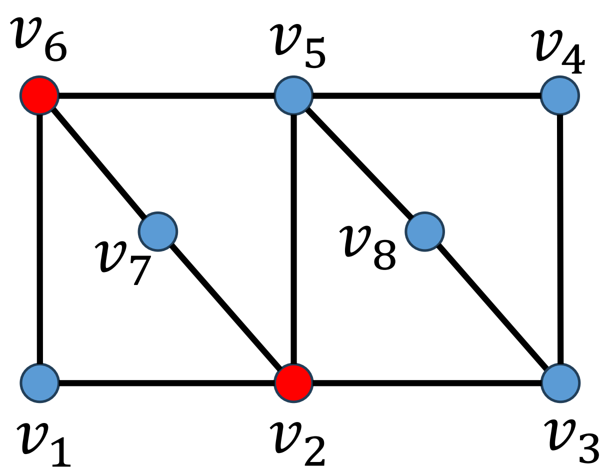
定理: 设$G=<V, E, \Psi>$是哈密顿图，则对V的任意非空真子集 V_1 有 $W(G-V_1)\leq|V_1|$，其中$W(G-V_1)$为G-V_1的分支的个数。

例：说明图G不是哈密顿图。



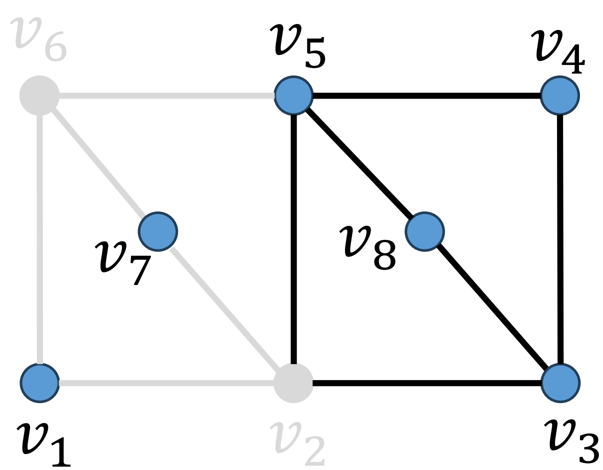
定理: 设$G=\langle V, E,\Psi\rangle$是哈密顿图，则对$V$的任意非空真子集 V_1 有 $W(G-V_1)\le|V_1|$，其中$W(G-V_1)$为G-V_1的分支的个数。

例：说明图G不是哈密顿图。



定理: 设$G=<V, E, \Psi>$是哈密顿图，则对V的任意非空真子集 V_1有 $W(G-V_1)\le|V_1|$，其中$W(G-V_1)$为$G-V_1$的分支的个数。

例：说明图G不是哈密顿图。



解：取$V_1=\{v_2, v_6\}$，则$G-V_1$有3个连通分图，得

$$W(G-V_1) > |V_1|。$$

因此，图G 不是哈密顿图。

哈密顿图的一些充分条件

■基本判断

- 哈密尔顿图一定不存在悬挂边，至多存在哈密尔顿道路
- 哈密尔顿图中不存在孤立顶点
- $n\geq 2$时，K_n是哈密尔顿图，K_n表示n阶完全图

■直观理解：只要图G中有足够多边，那面图就是哈密尔顿图

- 假设G是一个n（$n\geq 2$）阶简单图，如果G中任意一对顶点u和v，都满足$d_G(u)+d_G(v)\geq n-1$,则G中存在哈密尔顿道路
- 假设G是一个n（$n\geq 3$）阶简单图，如果G中任意一对顶点u和v，都满足$d_G(u)+d_G(v)\geq n$ 则G中存在哈密尔顿回路（欧尔定理）
- 假设G是一个n（$n\geq 3$）阶简单图，如果G中任意顶点的次数都至少是$n/2$，则G是哈密尔顿图（狄拉克定理）
- 假设G是一个(n,m)简单图，若$m\geq(n^2-3n+6)/2$,则G是哈密尔顿图

定理（欧尔定理）设G是具有n个顶点的简单无向图。若G中任意两个不相邻结点u，v度数之和大于或等于$n-1$，则G中存在一条哈密顿路径。

证明思路：

(1) 证明连通性

(2) 路径扩充：从一条基本路径出发，逐步构造出包含更多顶点的基本路径，直至构造出包含所有顶点的哈密顿路径

定理（欧尔定理）设G是具有n个顶点的简单无向图。若G中任意两个不相邻结点u，v度数之和大于或等于$n-1$，则G中存在一条哈密顿路径。

证明：令 $G=< V, E, \Psi >$。

(1) 首先证明 G 是连通的（反证法）

假设G不连通，则至少存在两个分支。

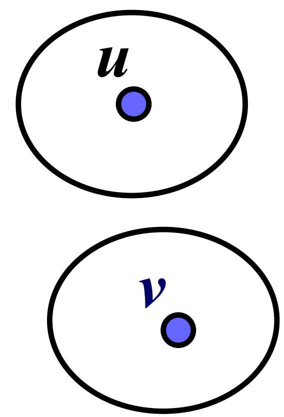
令$G_1=< V_1, E_1, \Psi_1>$，$G_2 =< V_2, E_2, \Psi_2>$ 是 G 的两个分支。

任取$u\in V_1$，$v \in V_2$，则有

$$d_G(u)\le|V_1|-1，d_G(v)\le|V_2|-1$$

则 $d_G(u)+ d_G(v) \le|V_1|-1+ |V_2|-1 \le n-2$，

与题设矛盾。故假设不成立，即 G 是连通的。



证明(续)：（2）下面证明G中存在一条哈密顿路径。

由于G是连通的，则G中一定存在一条长度为m-1的基本路径

$$P: u_1\ e_1\ u_2 e_2 \ldots e_{m-1} u_m$$。

若n=2，则P为G的哈密顿路径。

下面考虑n>2的情况。

若m=n，此时P也为G的哈密顿路径；假设m<n.

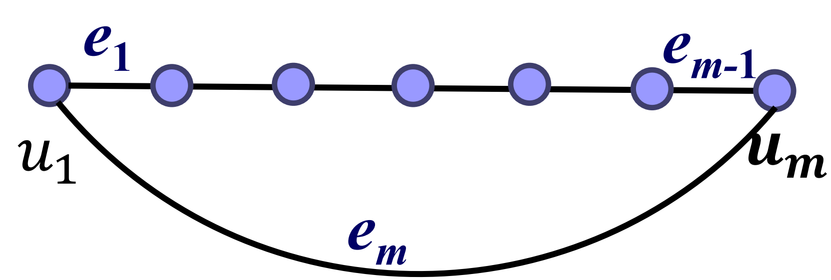
(a) 若u_1或u_m与基本路径P以外的结点相连，

则P可扩充为长度为m的基本路径。

(b) 若u_1和u_m只与P上的结点相连，

则可证明一定存在包含结点$u_1, u_2, \ldots, u_m$的回路，从而可以构造出长度为m的基本路径。

- 若u_1, u_m邻接，



证明(续)： (2）下面证明G中存在一条哈密顿路径。

由于G是连通的，则G 中一定存在一条长度为m-1的基本路径

$$P: u_1\ e_1\ u_2 e_2 \ldots e_{m-1} u_m。$$

若n=2，则P 为 G 的哈密顿路径。

下面考虑n>2的情况。

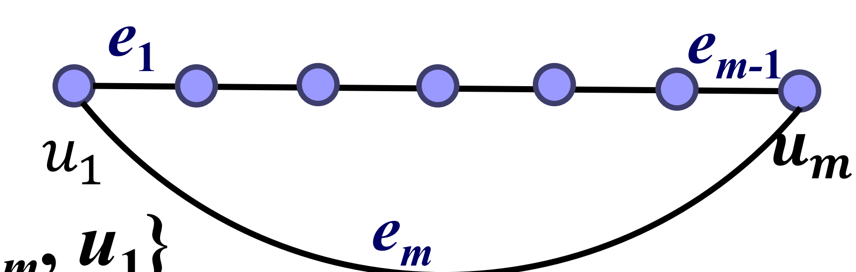
若m=n，此时 P 也为 G 的哈密顿路径；假设m<n.

(a) 若u_1或u_m与基本路径 P 以外的结点相连,

则 P 可扩充为长度为m的基本路径。

(b) 若 u_1和u_m只与P 上的结点相连,

则可证明一定存在包含结点$u_1, u_2, \ldots, u_m$ 的回路，从而可以构造出长度为m的基本路径。



- 若 u_1, u_m邻接，则存在回路

$u_1 e_1 u_2 e_2 \ldots e_{m-1} u_m e_m u_1$, 其中$\Psi(e_m)=\{u_m, u_1\}$

证明(续)：（2）下面证明G中存在一条哈密顿路径。

- 若 u_1, u_m不邻接，设u_1与P上的k个结点$u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$邻接$(1 \le k \le m\text{-}2)$。

则一定存在一个结点 u_{i_j}，使得u_m与 P上u_{i_j}的前一个结点（即u_{i_j-1}）邻接。

否则，u_m最多与$m-k-1$个结点邻接，即$d_G(u_m) \le m-k-1$。

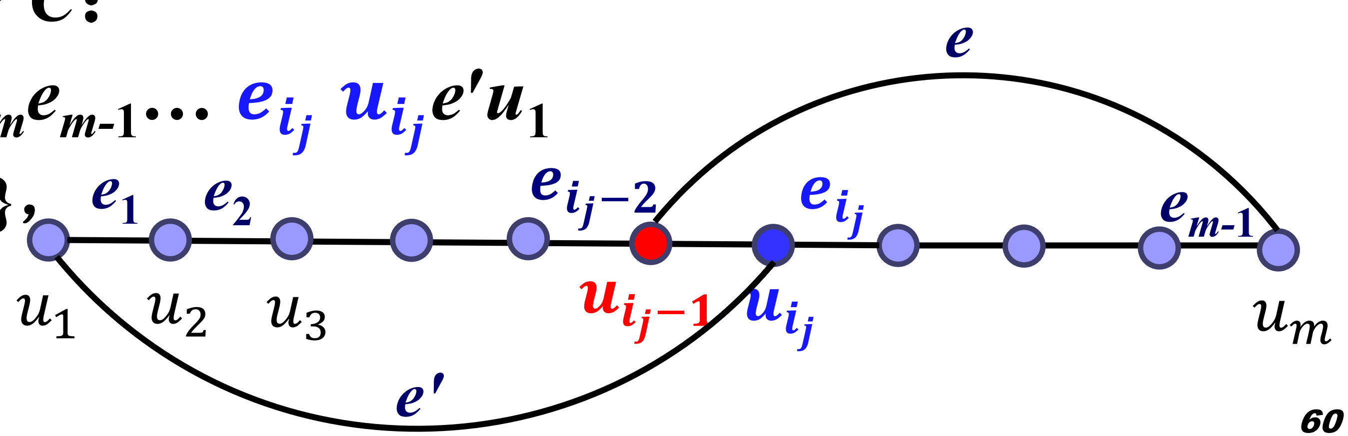
而 $d_G(u_1)=k$,

$d_G(u_1)+d_G(u_m) \le k+m-k-1=m-1<n-1$，与题设矛盾。

因此，得到一个回路 C：

$u_1 e_1 \dots e_{i_j-2}\, u_{i_j-1} e\, u_m e_{m\text{-}1} \dots e_{i_j}\, u_{i_j} e' u_1$

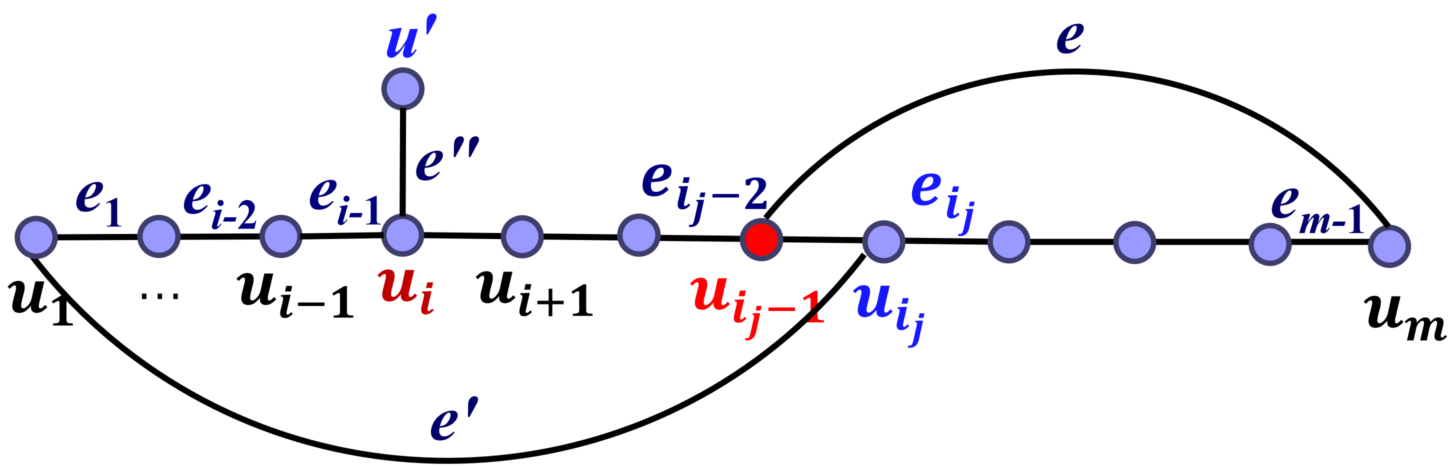
其中，$\Psi(e)=\{u_{i_j-1}, u_m\}$，$\Psi(e)=\{u_1, u_{i_j}\}$。



证明(续)： (2）下面证明G中存在一条哈密顿路径。

由于$m<n$且 G 连通，

因此一定存在不在基本路径 P上的结点 u'与 P 上的结点邻接，设u'与u_i邻接。



证明(续)： (2）下面证明G中存在一条哈密顿路径。

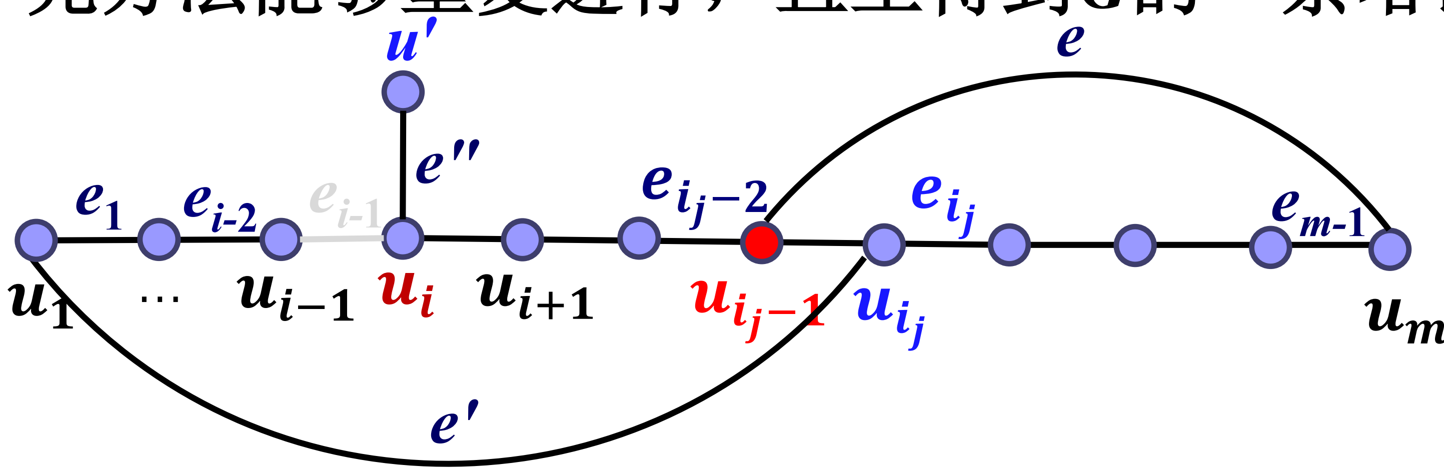
由于$m<n$且 G 连通，

因此一定存在不在基本路径 P上的结点 u'与 P 上的结点邻接，设u'与u_i邻接。

则在回路C上去掉连接u_{i-1} 与u_i的边e_{i-1}再加上连接u'与 u_i的边e'', 则形成一条包括 $m+1$个结点，长度为m的基本路径P':

$$u_{i-1}e_{i-2}\ldots e_1\ u_1 e'\ u_{i_j}\ e_{i_j}\ldots e_{m-1}u_m\ e\ u_{i_j-1}e_{i_j-2}\ldots u_i\ e''u'$$

以上路径扩充方法能够重复进行，直至得到G的一条哈密顿路径。



货郎担问题

- 货郎担问题也叫旅行商问题，即TSP问题（Traveling Salesman Problem），属于组合优化的NP-Hard问题
- 设有n个城市，城市之间均有道路，道路的长度均大于或等于0，可能是∞（对应关联的城市之间无交通线）。一个旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，问他如何走才能使他走的路线最短？

货郎担问题

- 可建模为如下的图论问题

输入：$G=<V, E, W>$，为一个 n 阶完全带权图 K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为 ∞。

输出：G中一条最短的哈密顿回路。

中国邮递员问题(Chinese Postman Problem)

- 邮递员在某一地区的信件投递路程问题。
- 邮递员每天从邮局出发，走遍该地区所有街道再返回邮局，问题是他应如何安排送信的路线可以使所走的总路程最短。
- 中国学者管梅谷在1960年首先提出，并给出了解法——“奇偶点图上作业法”，国际上称为“中国邮递员问题”。

中国邮递员问题类似的是旅行商问题，区别于中国邮递员问题，旅行商问题是说在边赋权的完全图中找一个权和最小的哈密尔顿圈。

中国邮递员问题(Chinese Postman Problem)

- 可建模为如下的图论问题：
  - 给定一个连通图G，每边e有非负权)要求一条回路经过每条边至少一次，且满足总权最小.
  - 若G是欧拉图，则G的任意欧拉闭路都是最优环游，从而可利用弗勒里算法求解。
  - 若G不是欧拉图，则G的任意一个环游必定通过某些边不止一次。

中国邮递员问题类似的是旅行商问题，区别于中国邮递员问题，旅行商问题是说在边赋权的完全图中找一个权和最小的哈密尔顿圈。

总结

- 欧拉图
  - 七桥问题,一笔画,欧拉通(回)路,欧拉图
  - 判定欧拉图的充分必要条件
  - 求欧拉回路的算法
- 哈密顿图
  - 周游世界,哈密顿通(回)路,哈密顿图
  - 判定哈密顿图的必要条件
  - 判定哈密顿图的充分条件
  - 哈密顿回路边不重