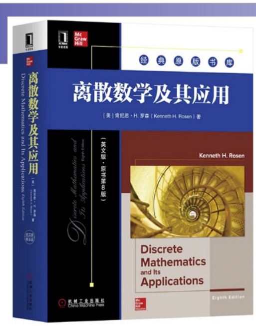
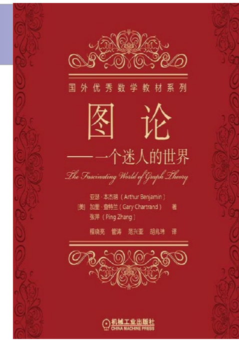
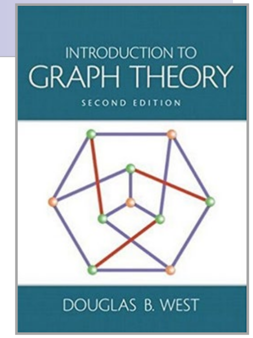
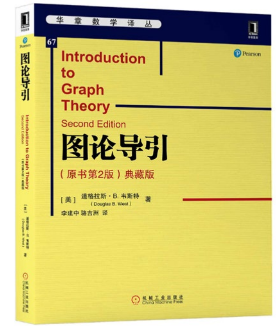
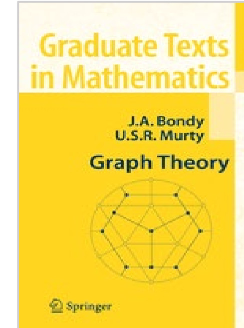








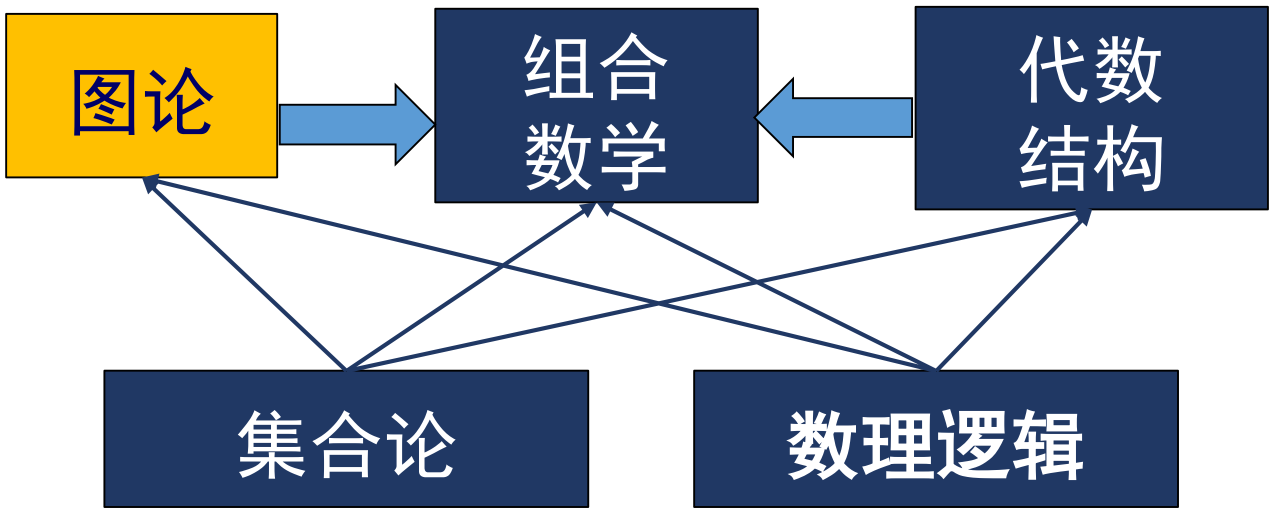


离 散 数 学 2

《图 论》

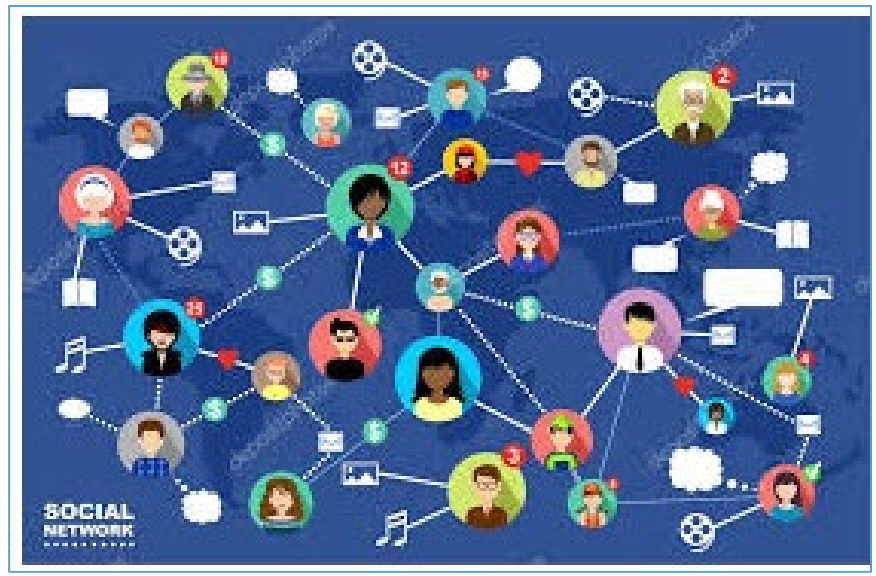
北航计算机学院

离散数学家族



- 集合论：集合代数、关系、函数、集合基数
- 数理逻辑：命题、谓词、模态、时态逻辑、Lambda演算
- 图论：欧拉图、哈密顿图、生成树、路径
- 代数结构：代数系统、群、环、格
- 组合数学：计数、递推关系、生成函数、组合定理

图论应用

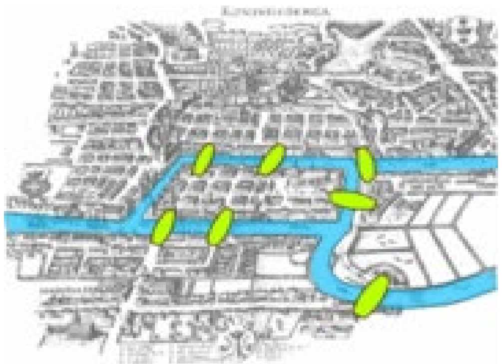


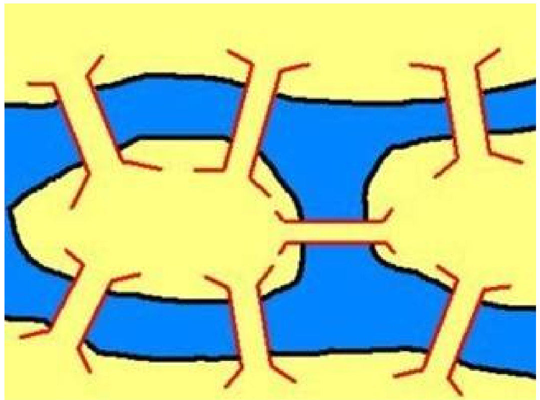
地铁组成的图

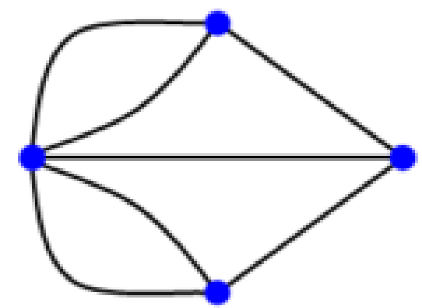
社交关系组成的图

图论起源

Leonhard Euler's paper on
“*Seven Bridges of Königsberg*” , published in 1736.







- 欧拉(L.Euler,1707.4.15-1783.9.18)是瑞士数学家，生于瑞士的巴塞尔(Basel)。
- 与阿基米德、牛顿、高斯列为有史以来贡献最大的四位数学家。

第一章 图的基本概念

目的：图论的基本概念：

- 图结构-->点边关系
- 图自身-->特殊图、度序列
- 图--图-->同构

重点：边的关系，结点度

难点：图同构

（1）图的定义

定义1.1 设 V 和 E 是 有限集合且 $V \neq \varnothing$

(1) 如果 Ψ： $E \to \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in V 且 v_2 \in V\}$, 则称 $G = <V, E, \Psi>$ 为 无向图。

(2) 如果 Ψ： $E \to V \times V$， , 则称 $G = <V, E, \Psi>$ 为 有向图。

- 无向图和有向图都称为图，其中
  - V 称为 G 的结点集，E 称为 G 的边集
  - 图 G 的结点数目称为它的阶
  - Ψ 是从边集 E 到结点的偶对（无序或有序）集上的函数。

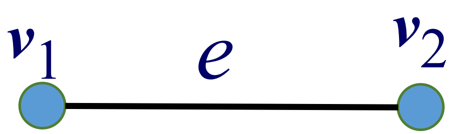
（1）图的定义

定义1.1 设 V 和 E 是 有限集合且 $V \neq \varnothing$

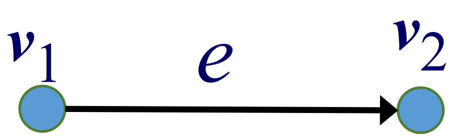
(1) 如果 Ψ： $E \to \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in V 且 v_2 \in V\}$, 则称$G =<V, E, \Psi>$ 为 无向图。

(2) 如果 Ψ： $E \to V \times V$， , 则称 $G =<V, E, \Psi>$为 有向图。

- 无向图的一条边 $< e, \{v_1, v_2\}>$，其中$\Psi(e)=\{v_1, v_2\}$



- 有向图的一条边$< e, < v_1, v_2 >>$，其中$\Psi(e)=<v_1, v_2>$



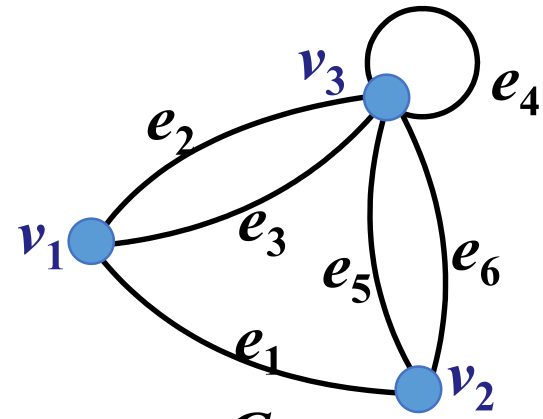
无向图/有向图举例

例1: 设 $V=\{v_1, v_2, v_3\}$, $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,

$\Psi_1=\{<e_1, \{v_1, v_2\}>, <e_2, \{v_1, v_3\}>, <e_3, \{v_1, v_3\}>,$

$<e_4,\{v_3, v_3\}>, <e_5,\{v_2, v_3\}>, <e_6,\{v_2, v_3\}>\}$

$G_1=(V, E, \Psi_1)$ 是一个无向图.

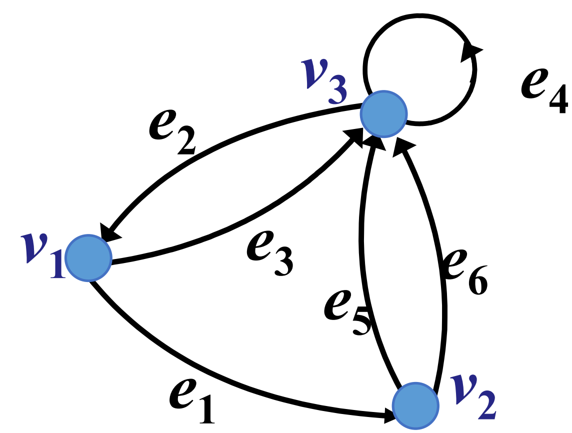


G_1

$\Psi_2=\{<e_1, <v_1, v_2>>, <e_2, <v_3, v_1>>, <e_3, <v_1, v_3>>,$

$<e_4,<v_3, v_3>>, <e_5, <v_2, v_3>>, <e_6, <v_2, v_3>>\}$

$G_2=(V, E, \Psi_1)$ 是一个有向图.



G_2

（2）结点和边的关系：关联、邻接

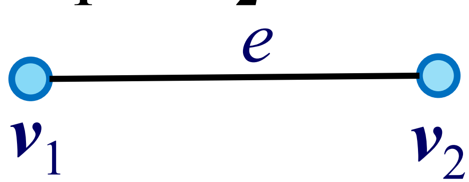
定义1.2 设无向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$，$e, e_1, e_2 \in E$ 且$v_1, v_2 \in V$。

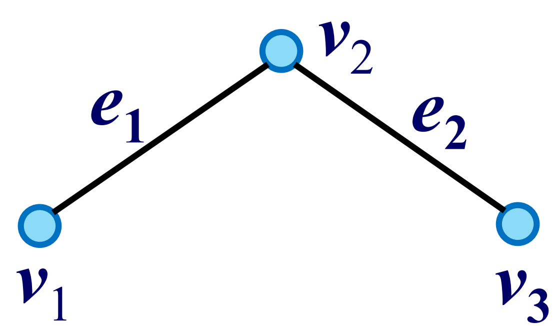
(1) 如果$\Psi(e) = \{v_1, v_2\}$，则称

- e 与 v_1（或v_2）互相关联（**incident**），e 连接 v_1和 v_2，
- v_1和 v_2 既是 e 的起点，也是 e 的终点，也称 v_1 和 v_2 邻接（**adjacent**）。

(2) 如果两条不同边 e_1 和 e_2 与同一个结点关联，

则称 e_1 和 e_2 邻接(**adjacent**)。



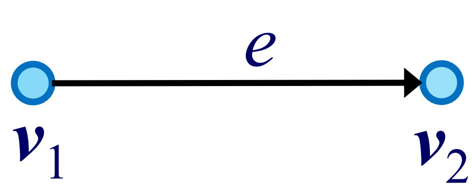


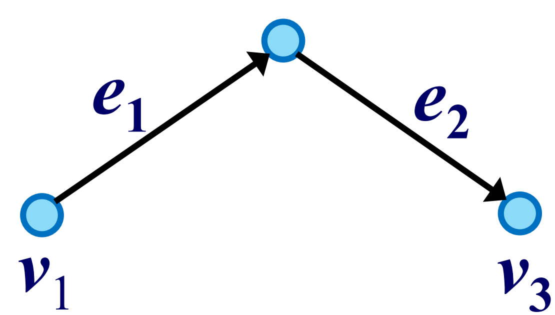
（2）结点和边的关系：关联、邻接

定义1.3 设有向图 $G=<V, E, \Psi>$，$e, e_1, e_2 \in E$且$v_1, v_2 \in V$。

如果$\Psi(e)=<v_1,v_2>$，则称

- e 与 v_1（或v_2）互相关联（**incident**），e 连接 v_1和 v_2，
- v_1是 e 的起点，v_2 是 e 的终点，也称 v_1 和 v_2 邻接（**adjacent**）。





（3）自圈、平行边

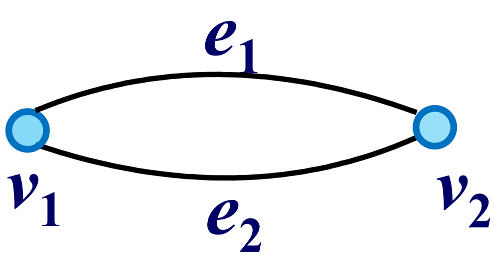
定义1.4 设图 $G = <V, E, \Psi>$，e_1 和 e_2 是 G 的两条不同边。

(1) 如果与e_1关联的两个结点相同，则称 e_1 为自圈(self loop)；

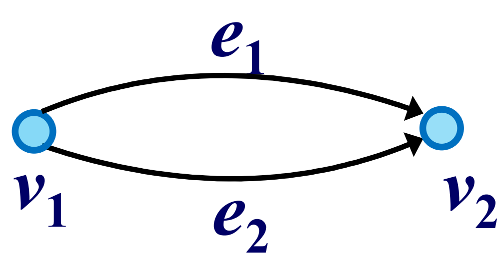
(2) 如果 $\Psi(e_1) = \Psi(e_2)$，则称 e_1 与 e_2 平行；

(3) 如果图 G 没有自圈，也没有平行边，则称G为简单图.

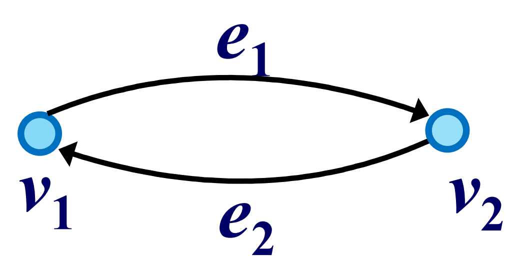
- 在有向图中，如果两条边连接的结点相同，若方向相反，则它们不平行.



平行边

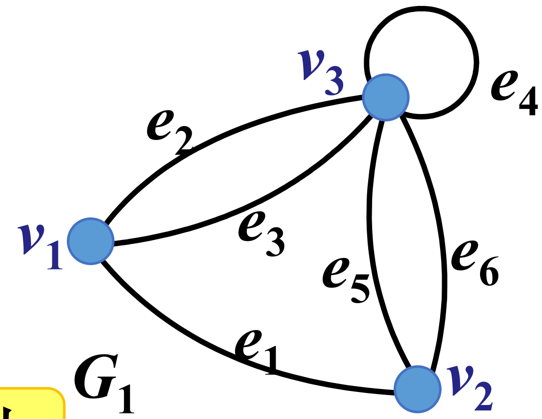


平行边



非平行边

无向图/有向图举例



例1: 设 $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,

$\Psi_1 =\{<e_1, \{v_1, v_2\}>, <e_2, \{v_1, v_3\}>, <e_3, \{v_1, v_3\}>,$

$<e_4,\{v_3, v_3\}>, <e_5,\{v_2, v_3\}>, <e_6,\{v_2, v_3\}>$

平行边

$G_1 = (V, E, \Psi_1)$ 是一个无向图.

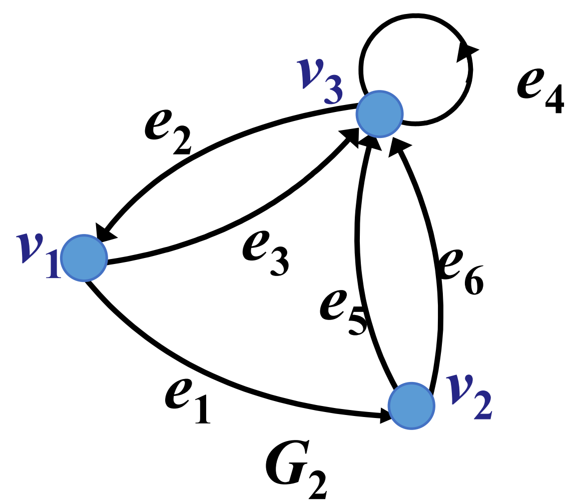
不是平行边

$\Psi_2 =\{<e_1, <v_1, v_2>>, <e_2, <v_3, v_1>>, <e_3, <v_1, v_3>>,$

$<e_4,<v_3, v_3>>, <e_5, <v_2, v_3>>, <e_6, <v_2, v_3>> \}$

平行边

$G_2 = (V, E, \Psi_1)$ 是一个有向图.



（4）结点的度

定义1.5 设 v 是图 G 的结点。

(1) 如果 G 是无向图，G中与 v 关联的边的数目称为 v 的度，记为 $d_G(v)$ 。

(2) 如果 G 是有向图，

G中以 v 为起点的边的数目称为 v 的出度，记为$d_G^+(v)$;

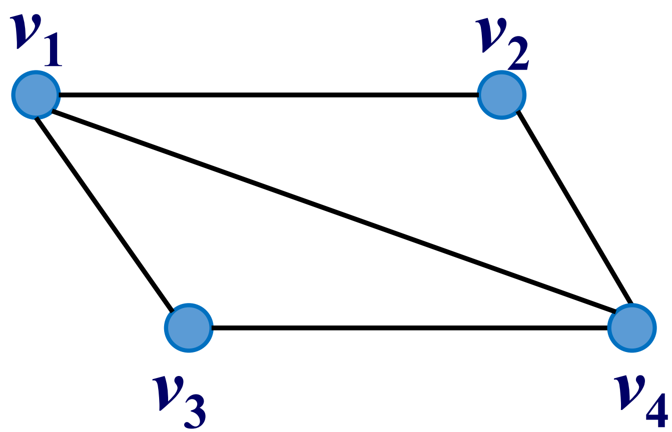
G中以 v 为终点的边的数目称为v的入度，记为$d_G^-(v)$;

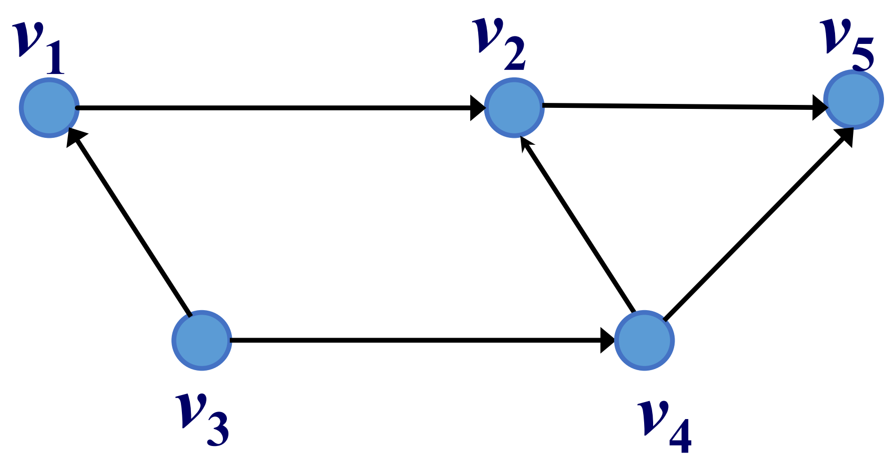
v 的出度与入度之和称为 v 的度，记为 $d_G(v)$.

- 注意：
  - 在计算无向图中结点的度时，一个自圈要计算两次，因为自圈也是边。
  - 每增加一条边，都使图中所有结点的度数之和增加 2。

结点度的举例

例：计算如下图结点度





握手定理

定理1.1 设无向图 $G=<V,E,\Psi>$有m条边，则

$$\Sigma_{v\in V}\, d_G(v)=2m\ .$$

证明: 因为每条边为图中提供次数均为2.

定理1.2 设有向图 $G=<V,E,\Psi>$ 有 m 条边， 则

$$\Sigma_{v\in V}\, d_G^{+}(v)=\Sigma_{v\in V}\, d_G^{-}(v)=m\text{，且}$$

$$\Sigma_{v\in V}\, d_G(v)=2m\ .$$

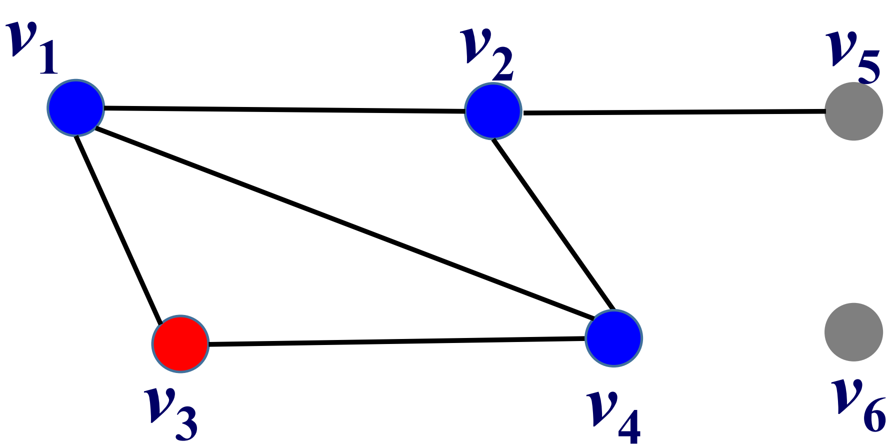
证明：因为每条边既是一个结点的出边，也是另一个结点入边。

（5）几类特殊结点：奇结点、偶结点

定义1.6 定义以下特殊点：

(1)度为奇数的结点称为奇结点；

(2)度为偶数的结点称为偶结点；



奇结点、偶结点

定义1.6 定义以下特殊点：

(1)度为奇数的结点称为奇结点；

(2)度为偶数的结点称为偶结点；

定理1.3 任何图中都有偶数个奇结点。

证明: 给定无向图 $G=<V, E, \Psi>$，且G中有 m 条边。

假设 V_1是 G 中奇结点集合，V_2是 G 中偶结点集合。则有

$$2m=\sum_{v\in V} d_G(v)=\sum_{v\in V_1} d_G(v)+\sum_{v\in V_2} d_G(v)$$

显然，$\sum_{v\in V_2} d_G(v)$是偶数，得 $\sum_{v\in V_1} d_G(v)$ 是偶数。

因此V_1中必有偶数个奇结点。

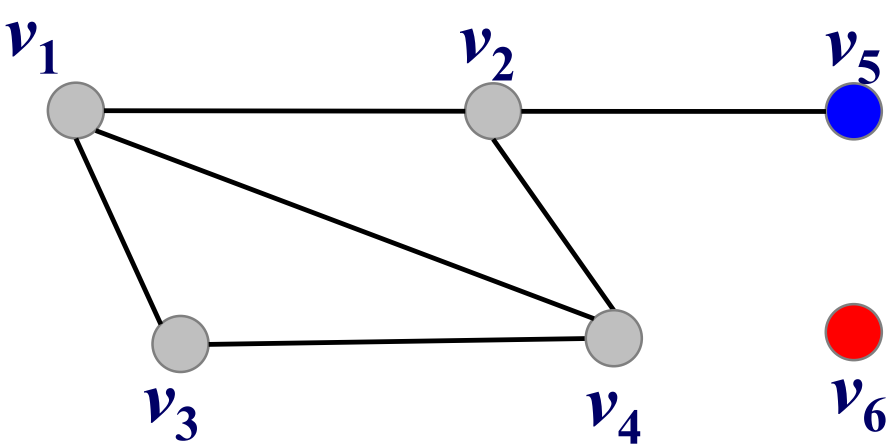
对有向图同样证明。

（5）几类特殊结点：孤立点、端点

定义1.7 定义以下特殊点：

(1)度为 0 的结点 称为 孤立点；

(2)度为 1 的结点 称为 端点 .



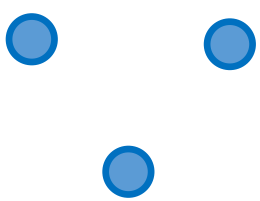
(6) 几类特殊图：零图、平凡图、正则图

定义1.8 定义以下特殊图：

(1) 结点都是孤立点的图称为零图；

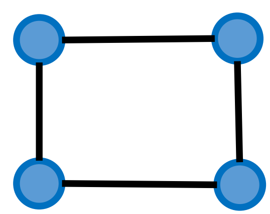
(2) 一阶零图称为平凡图；

(3) 所有结点的度均为自然数 d 的<u>无向图</u>称为 d 度正则图；

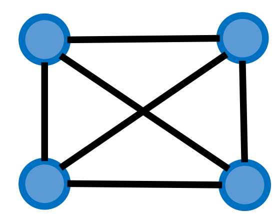


3阶零图

平凡图



4阶2度正则图



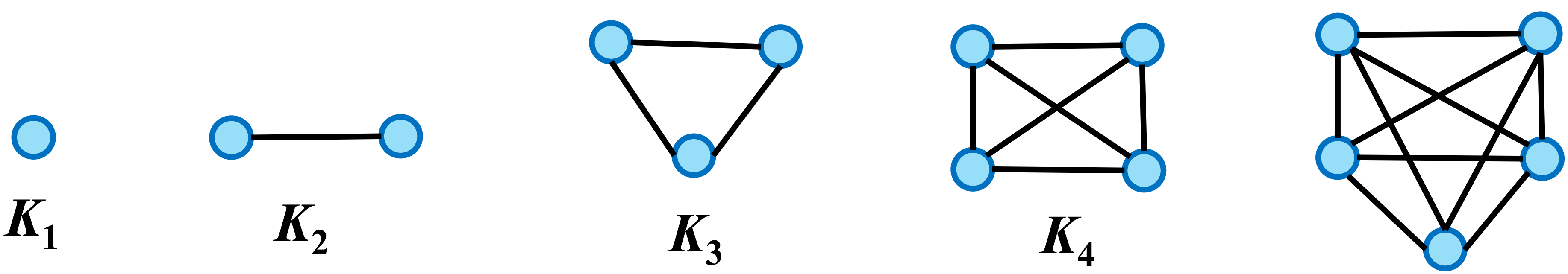
4阶3度正则图

（6）几类特殊图：完全图

定义1.8（续） 定义以下特殊图：

(4) 设 $n \in I_+$，如果 n 阶简单无向图 G 是 n-1 度正则图，则称 G 为 完全无向图，记为K_n。

(5)设 $n \in I_+$，每个结点的出度和入度均为 n-1 的 n 阶简单有向图称为 完全有向图。



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

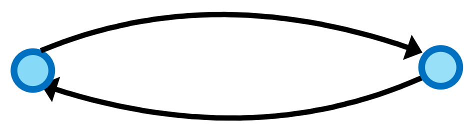
（6）特殊图

定义1.8（续） 定义以下特殊图：

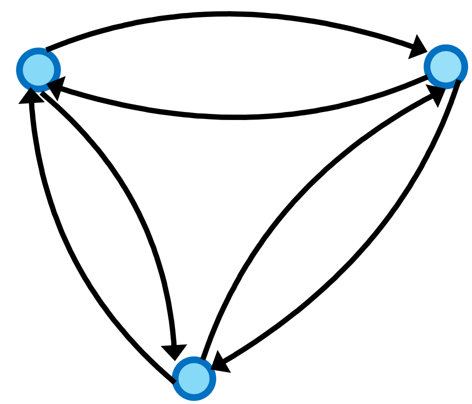
(4) 设 $n \in I_+$，如果 n 阶<u>简单</u>无向图 G 是 n-1 度正则图，则称 G 为 完全无向图，记为K_n。

(5)设 $n \in I_+$，每个结点的出度和入度均为 n-1 的 n 阶<u>简单</u>有向图称为 完全有向图。

1阶完全有向图



2阶完全有向图



3阶完全有向图

（6）特殊图

定义1.8 定义以下特殊图：

(1) 结点都是孤立点的图称为零图；

(2) 一阶零图称为平凡图；

(3) 所有结点的度均为自然数 d 的无向图称为 d 度正则图；

(4) 设 $n \in I_+$，如果 n 阶简单无向图 G 是 n-1 度正则图，则称 G 为 完全无向图，记为K_n。

(5)设 $n \in I_+$，每个结点的出度和入度均为 n-1 的 n 阶简单有向图称为 完全有向图。

- 完全无向图必是正则图，但正则图不一定是完全无向图.

n-1 度正则图是n阶完全图

（6）特殊图

定义1.8 定义以下特殊图：

(1) 结点都是孤立点的图称为零图；

(2) 一阶零图称为平凡图；

(3) 所有结点的度均为自然数 d 的无向图称为 d 度正则图；

(4) 设 $n \in I_+$，如果 n 阶简单无向图 G 是 n-1 度正则图，则称 G 为 完全无向图，记为K_n。

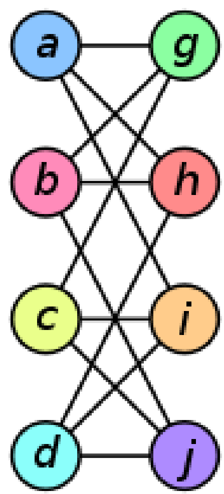
(5)设 $n \in I_+$，每个结点的出度和入度均为 n-1 的 n 阶简单有向图称为 完全有向图。

- 完全无向图必是正则图，但正则图不一定是完全无向图.
- 零图也是正则图.

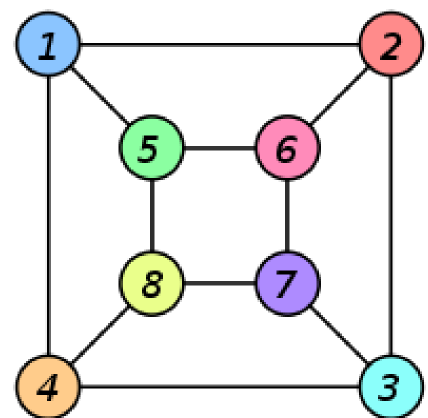
n-1 度正则图是n阶完全图

（7）同构 (isomorphism)

■ 问题：两个表面上看起来不同的图，可能表达相同的结点和边的关联关系？



G



H

■ 问题：如何定义该关系？该关系性质是否存在充分必要条件？

（7）同构 (isomorphism)

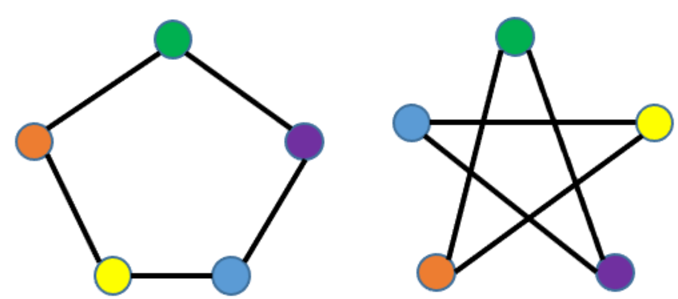
定义1.9 设图 $G=<V, E, \Psi>$ 和 $G'=<V', E', \Psi'>$。

如果存在 双射 $f:V\to V'$ 和 双射 $g:E\to E'$，使得

对于任意 $e\in E$ 及 $v_1, v_2\in V$ 都有：

$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, & \text{若 } \Psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ <f(v_1), f(v_2)>, & \text{若 } \Psi(e) = <v_1, v_2> \end{cases}$$

则称 G 与 G' 同构，记做 $G\cong G'$，并称 f 和 g 为 G 与 G' 之间的同构映射，简称同构。

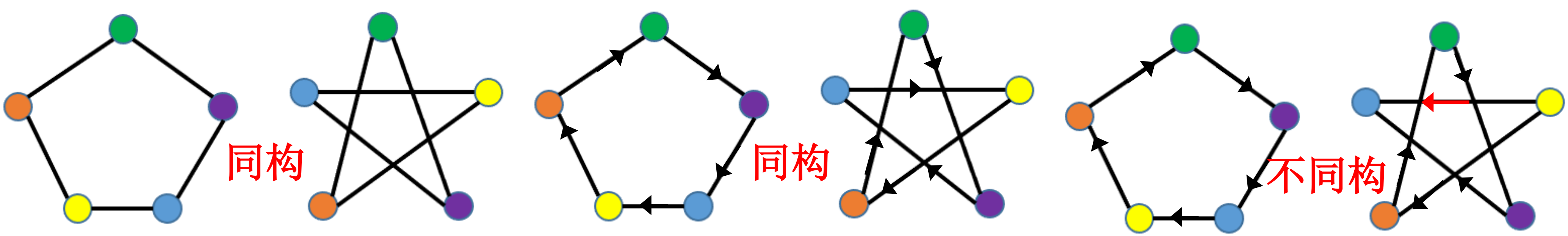


（7）同构 (isomorphism)

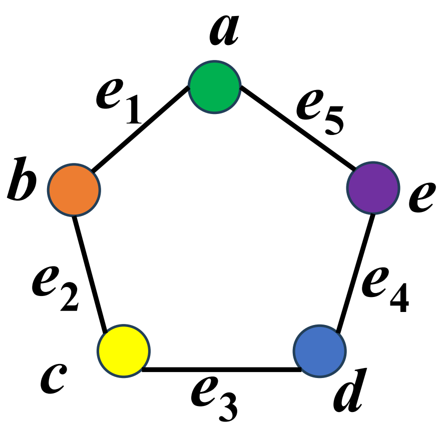
定义1.9 设图 $G=<V, E, \Psi>$ 和 $G'=<V', E', \Psi'>$。如果存在双射 $f: V\rightarrow V'$ 和双射 $g: E\rightarrow E'$，使得对于任意 $e\in E$ 及 $v_1, v_2\in V$ 都有：

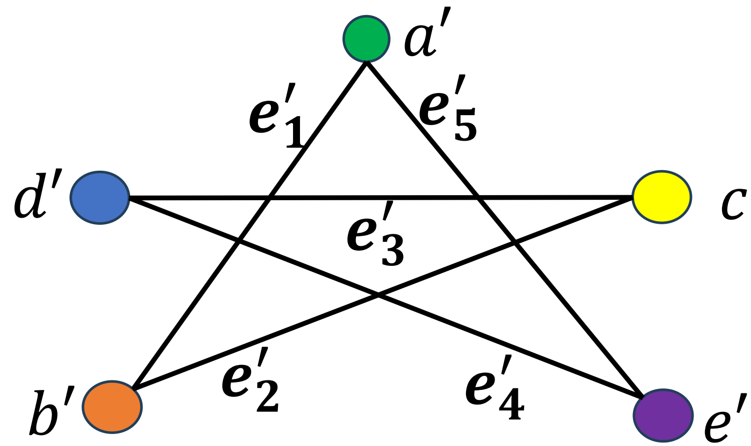
$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, \text{若 } \Psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ <f(v_1), f(v_2)>, \text{若 } \Psi(e) = <v_1, v_2> \end{cases}$$

则称 G 与 G' 同构，记做 $G\cong G'$，并称 f 和 g 为 G 与 G' 之间的同构映射，简称同构。



同构 (isomorphism)：实例





$f(a)=a'$	$g(e_1)=e'_1$	$\Psi(e_1)=\{a, b\}\Longrightarrow \Psi'(g(e_1))=\Psi'(e'_1)=\{a', b'\}=\{f(a), f(b)\}$
$f(b)=b'$	$g(e_2)=e'_2$	$\Psi(e_2)=\{b, c\}\Longrightarrow \Psi'(g(e_2))=\Psi'(e'_2)=\{b', c'\}=\{f(b), f(c)\}$
$f(c)=c'$	$g(e_3)=e'_3$	$\Psi(e_3)=\{c, d\}\Longrightarrow \Psi'(g(e_3))=\Psi'(e'_3)=\{c', d'\}=\{f(c), f(d)\}$
$f(d)=d'$	$g(e_4)=e'_4$	$\Psi(e_4)=\{d, e\}\Longrightarrow \Psi'(g(e_4))=\Psi'(e'_4)=\{d', e'\}=\{f(d), f(e)\}$
$f(e)=e'$	$g(e_5)=e'_5$	$\Psi(e_5)=\{a, e\}\Longrightarrow \Psi'(g(e_5))=\Psi'(e'_5)=\{a', e'\}=\{f(a), f(e)\}$

同构 (isomorphism)：实例

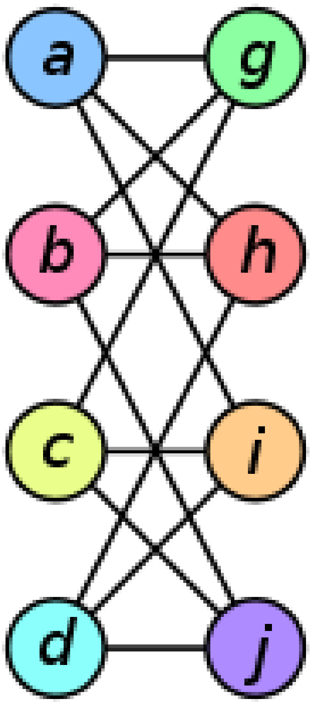


图 G

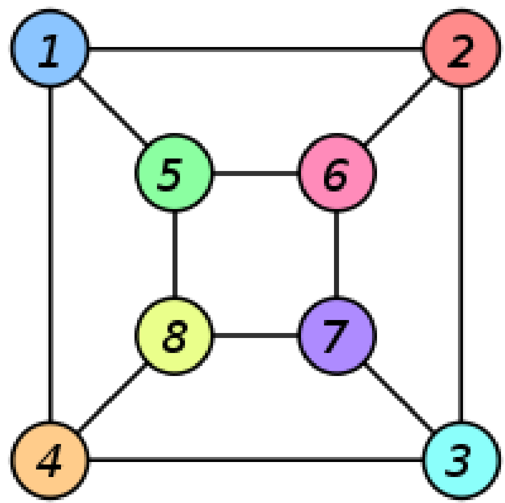


图 H

$f(a) = 1$

$f(b) = 6$

$f(c) = 8$

$f(d) = 3$

$f(g) = 5$

$f(h) = 2$

$f(i) = 4$

$f(j) = 7$

同构 (isomorphism)关系判定

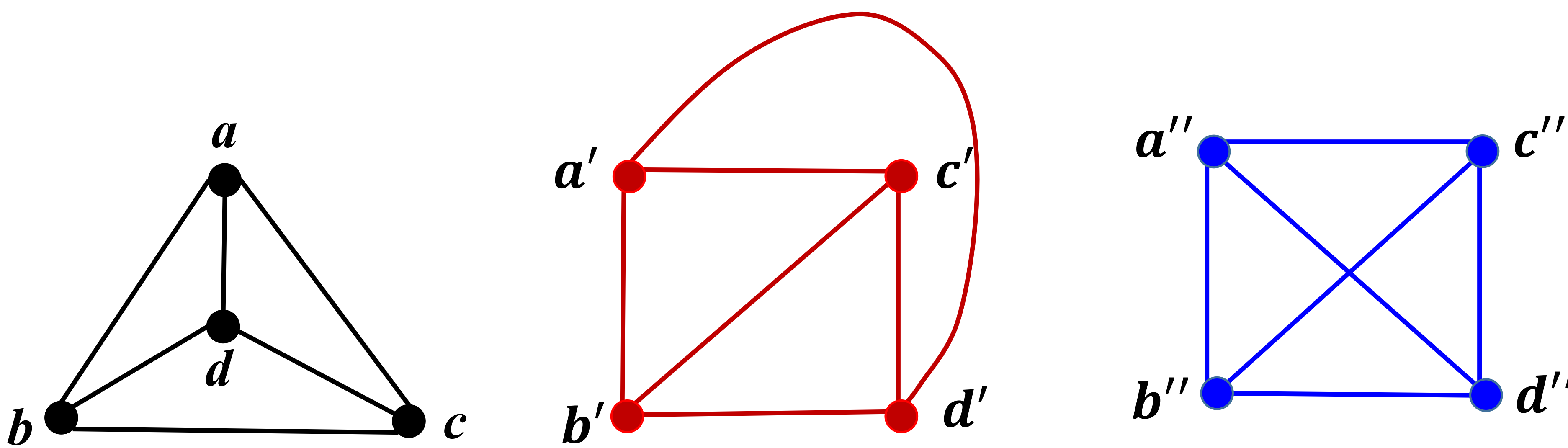
- 难题：判断两个图同构的简单而充分的条件?

  可以给出一些两个图同构的必要条件！

- 必要条件：两个同构的图必有相同的结点个数、边数、结点度数
  - 双射 f 保持结点之间的邻接关系，
  - 双射 g 保持边之间的邻接关系。

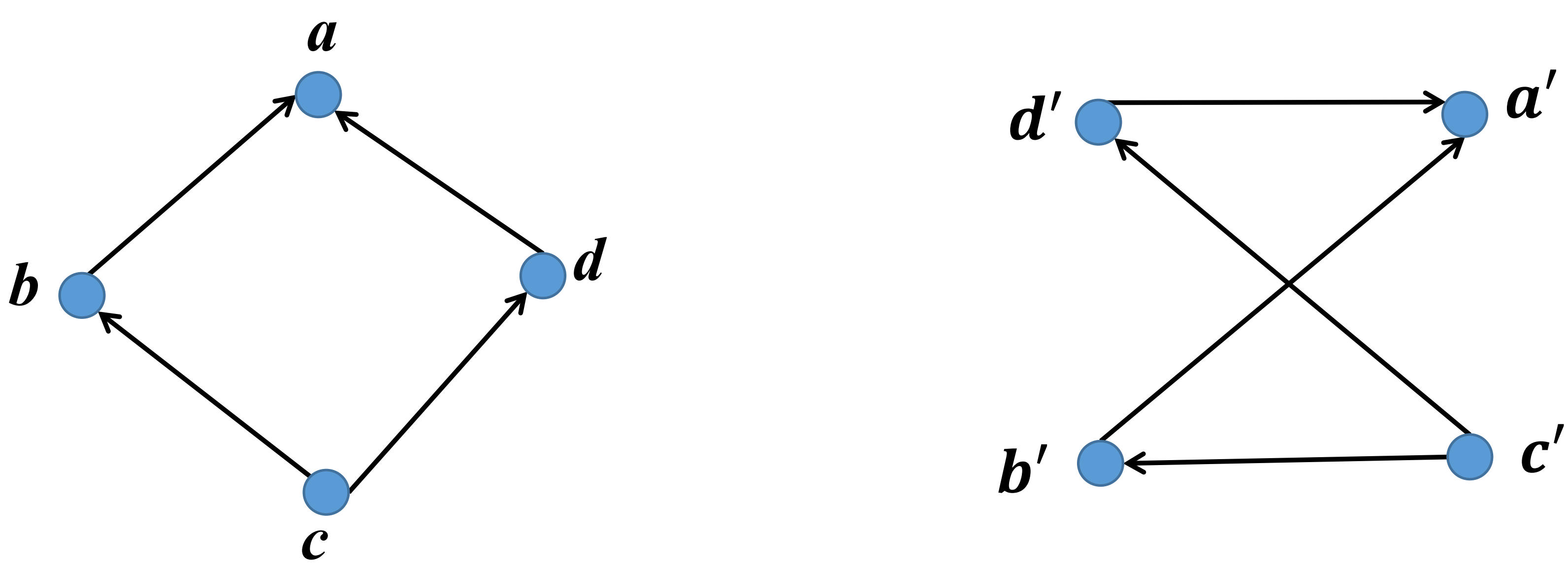
同构 (isomorphism)关系判定

例：以下 3个无向图（3度正则图）是否同构?



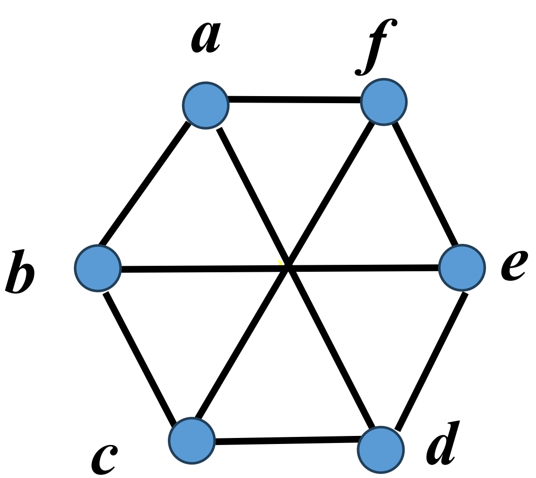
同构 (isomorphism)关系判定

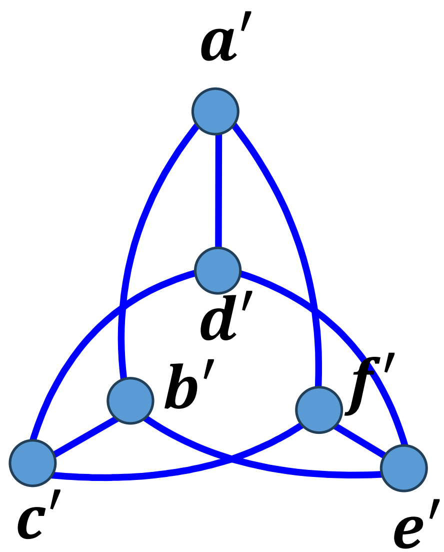
例:以下2 个有向图是否同构?

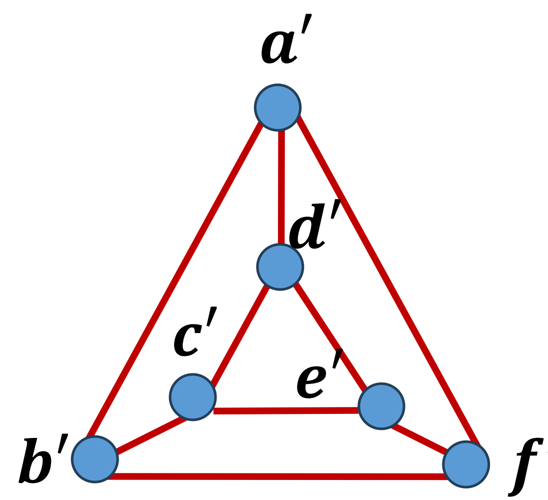


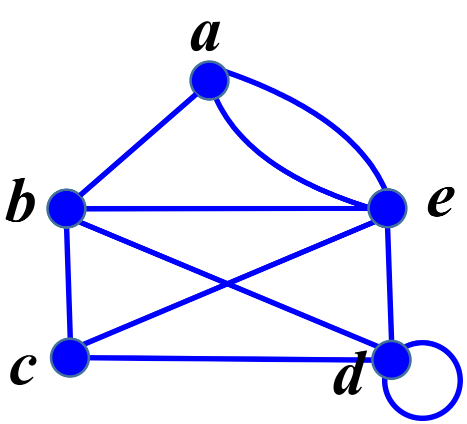
同构 (isomorphism)关系判定

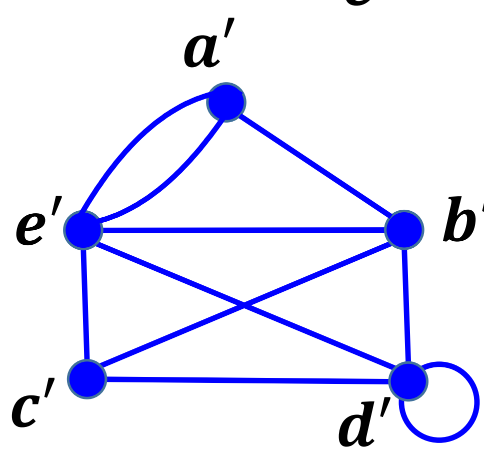
例: 判断下图是否同构?











图同态（homomorphism）

设图 $G=<V, E, \Psi>$ 和 $G'=<V', E', \Psi'>$。如果存在

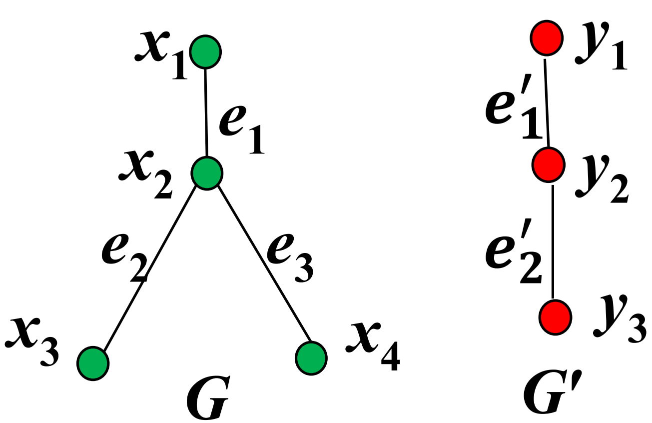
$$f: V \to V' \text{ 和 } g: E \to E',$$

同构：f, g均为双射

使得对于任意 $e \in E$ 及 $v_1, v_2 \in V$ 都有：

$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, \text{若 } \Psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ \\ <f(v_1), f(v_2)>, \text{若 } \Psi(e) = <v_1, v_2> \end{cases}$$

则称 G 与G' 同态，记做 $G \to G'$。



$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = f(x_4) = y_3$$

$$g(e_1) = e'_1, g(e_2) = g(e_3) = e'_2$$

例：证明任何阶大于1的简单无向图必有两结点度相等

证明：设G是一个n阶简单无向图（$n>1$），则G没有自圈也没有平行边。

(1) 假设 G 的孤立点数目大于1，则G 至少有两个孤立点，度为 0，结论成立.

(2) 假设G只有一个孤立点，则剩下的n-1个点的度只能为 1, 2, …, 或 n-2.

因此由抽屉原理知，必有两个结点的度相同。

(3) 假设 G 没有孤立点，则 n个点的度只能为1, 2, …, 或 n-1.

同样由抽屉原理知，必有两个结点的度相同。

例：在任意的六个人中，若没有三个人彼此都认识，则必有三个人彼此都不认识。

证明：假设无向图G中有六个结点 **A, B, C, D, E, F**，表示任意六个人，且**G中一条边表示该条边的两个端点互相认识**。

假设六个人没有三个人彼此认识，则没有三个点两两之间都邻接。

（1）若A至少与3个其他结点邻接，不妨假设A与C, D, E邻接，

则C, D, E 三个点两两之间都没有边。

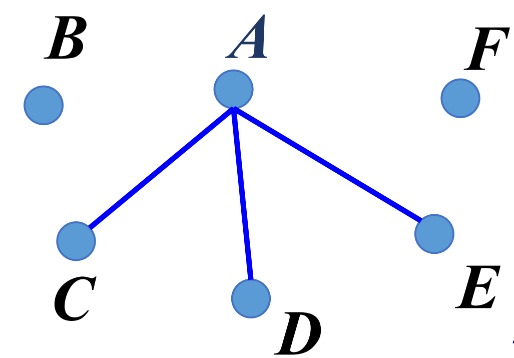
否则，不失一般性,假设C与D邻接，则A,C,D三个人彼此都认识，矛盾。

（2）若A最多只与2个其他结点邻接，则至少有3个点与A不邻接。

假设A与C, D, E不邻接。

由于C,D,E不会两两之间都邻接，假设C,D不邻接，

则有A, C, D两两之间不邻接。



Ramsey定理

通俗形式：在任意的六个人中，若没有三个人彼此都认识，则必有三个人彼此都不认识。

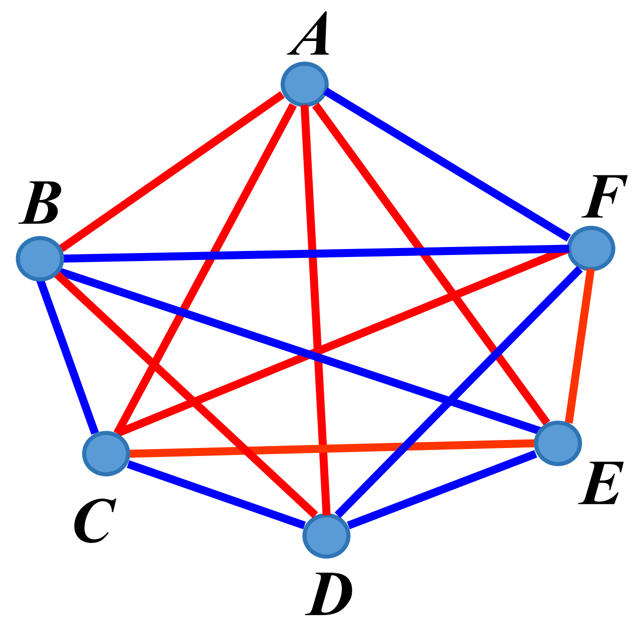
图形式：(6个顶点的完全图K_6)

- 顶点：每个人

  边：两个人的彼此认识

- 边着色：红边表示认识，

  蓝边表示不认识



问题转化为：给图K_6的边任意着红色、蓝色后，一定存在一个红色三角形或蓝色三角形

Ramsey定理

通俗形式：在任意的六个人中，若没有三个人彼此都认识，则必有三个人彼此都不认识。

给图 K_6的边任意着红色、蓝色，一定存在一个红色 K_3 或 蓝色 K_3，记为$K_6 \to K_3, K_3$

Ramsey定理：如果$m \geq 2$及$n \geq 2$是两个整数，则一定存在正整数 p，使得

$$K_p \to K_m, \ K_n$$

图案Pattern

结点从1-5的连接图有多少种？（不存在孤立点）

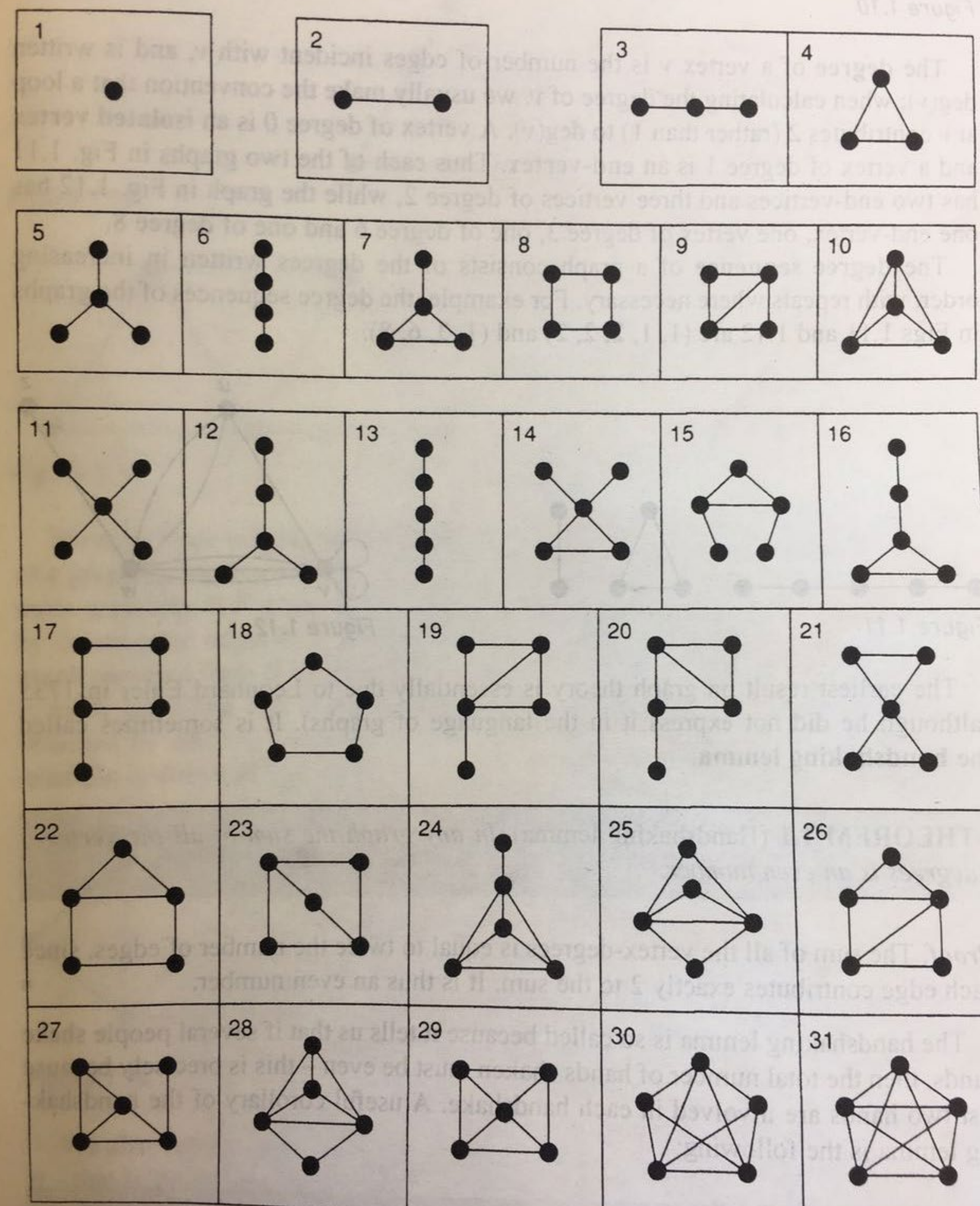


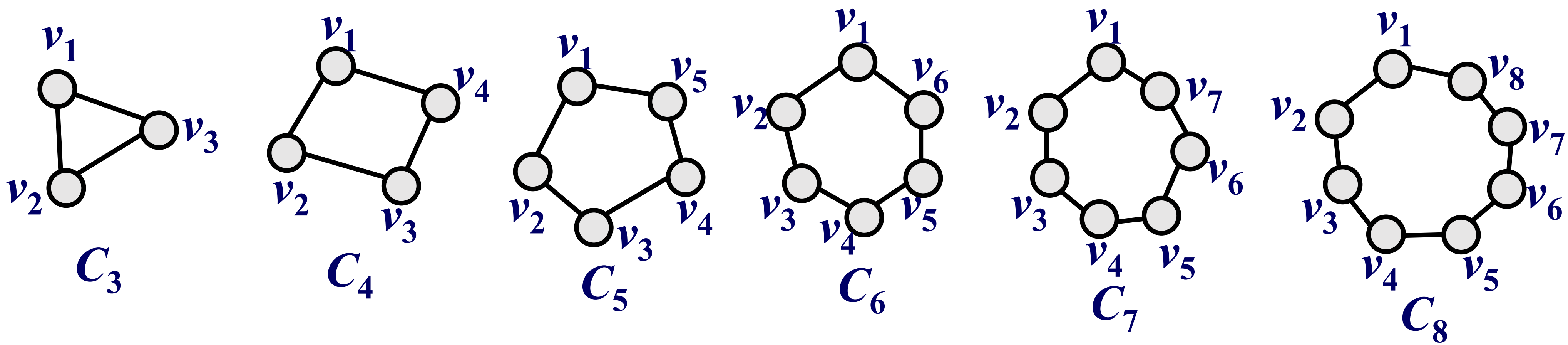
Figure 1.9

特殊的图结构

- 完全图 (Complete graphs) K_n
- 圈图 (Cyclic graphs) C_n
- 轮图 (Wheel graphs) W_n
- n-立方图 (n-Cubes) Q_n
- 二分图 (Bipartite graphs)
- 完全二分图 (Complete bipartite graphs) $K_{m,n}$

圈图（cyclic graph）

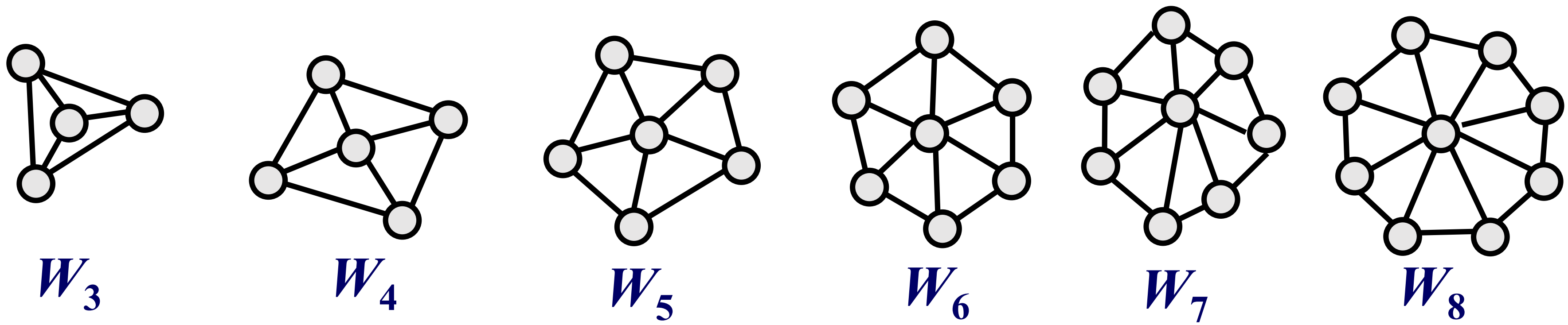
- 设 G是n阶简单无向图（ $n\geq 3$），若n 个结点恰形成一个圈，则称 G 为圈图，记为 C_n，其中
  - $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$,
  - $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\dots,\{v_{n-1},v_n\},\{v_n,v_1\}\}$.



问题：C_n有多少条边？

轮图Wheels

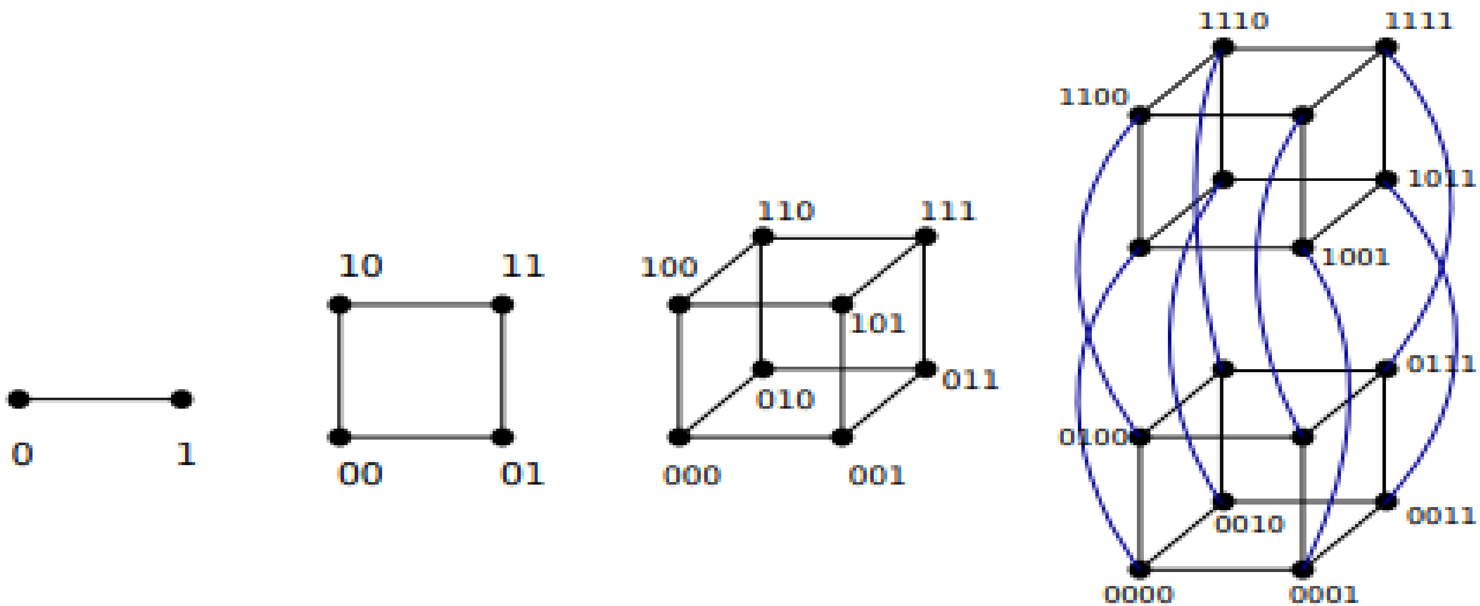
- 设 G是n阶简单无向图（ $n\geq 3$），若n-1 个结点恰形成一个圈图，且第n个结点与圈图上的每个结点邻接，则称 G 为轮图，记为 W_n，其中
  - $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,
  - $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_{n-2},v_{n-1}\},\{v_{n-1},v_1\}\}$
    $\cup\{\{v_1,v_n\},\{v_2,v_n\},\ldots,\{v_{n-1},v_n\}\}$.



问题：W_n有多少条边？

立方图n-cubes

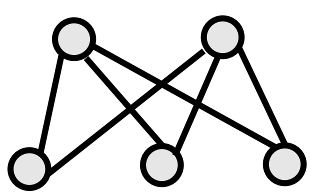
- 设 G是n阶简单无向图，其中 $n=2^k$, $k\in I_+$.
  - 结点集合 $V=\{0, 1, 2, \ldots, 2^k-1\}$，每个结点用二进制表示
  - 两个结点邻接当且仅当它们的二进制表示只有一位不同



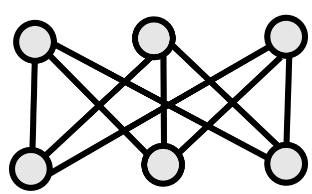
问题：结点数 2^n（n是序号)，边数是多少？ $n\cdot 2^{n-1}$

二分图与完全二分图

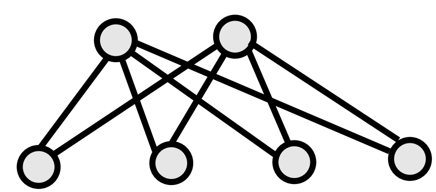
- 设 G是n 阶简单无向图，其结点集$V = V_1 \cup V_2$，$V_1 \cap V_2 = \emptyset$，若对于任意边$(u, v) \in E$，则有$u \in V_1$且$v \in V_2$，称G是二分图或偶图，记为$G = (V_1, V_2; E)$.
- 若二分图$G = (V_1, V_2; E)$满足V_1（V_2）中的每个结点与V_2（V_1）中所有结点均邻接，则称G为完全二分图，记为 $K_{m,n}$.



$K_{2,3}$

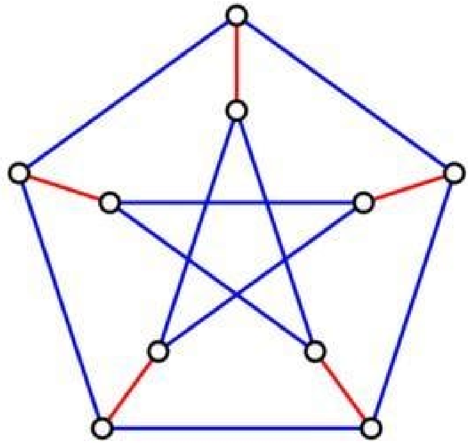


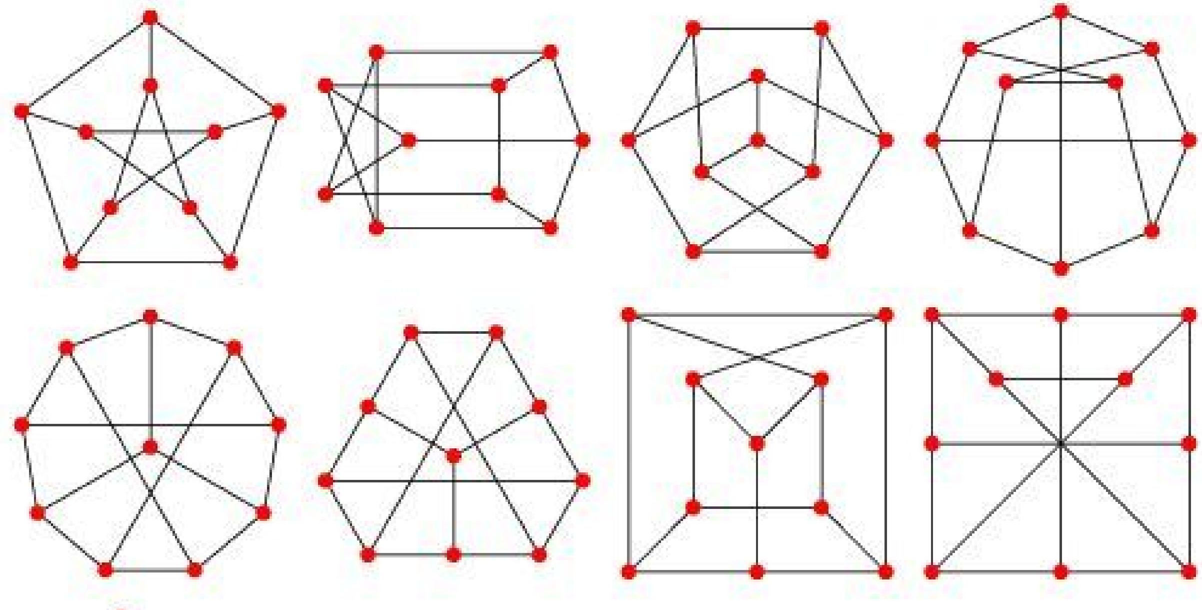
$K_{3,3}$



$K_{2,4}$

补充2：Petersen图





- 彼得森(1839----1910)，丹麦哥本哈根大学数学教授。家境贫寒，因此而辍过学。19岁出版了对数的专著。32岁获哥本哈根大学数学博士学位，然后大学作数学教授。
- 彼得森是一位出色的名教师。他讲课遇到推理困难时，总是说："这是显而易见的"，
- 1891年，彼得森发表了一篇奠定他图论历史地位的28页的论文。这篇文章被公认是第一篇包含图论基本结论的文章。同时也是第一次在文章中使用"图"术语。
- 1898年，彼得森又发表了一篇只有3页的论文，在这篇文章中，为举反例构造了著名的彼得森图。

补充3：度序列

- 定义1（度序列）如果$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$;则称非负整数序列$(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_p))$为图$G$的度序列。(定义中的图指广义的图,含有多重边或环).

思考？ **给出一个图的度序列，能否判断图的类型？**

- 定义2：简单图的度序列为成图序列.
- 可简单图化判定（Havel定理）
  - 把序列排成不增序，即$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$，
  - 则d可简单图化当且仅当$d'=\{d_2-1，d_3-1，\ldots\ldots d(d_1+1)-1，\ d(d_1+2)，d(d_1+3)，\ldots\ldots d_n\}$可简单图化。
  - 简单的说，把d排序后，找出度最大的点（设度为d_1），把它与度次大的d_1个点之间连边，然后这个点就可以不管，一直继续该过程，直到建出完整的图，或出现负度等不合理的情况。

证明：*http://journals.cambridge.org/download.php?file=%2FBAZ%2FBAZ33_01%2FS0004972700002872a.pdf&code=2cca4625499f37e69a01ec5fab104dcd*

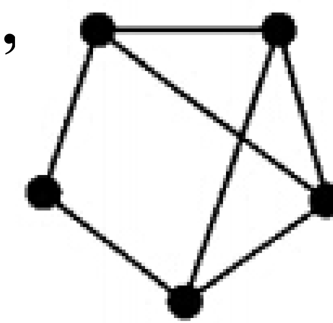
补充3：度序列（示例）

- 假设度序列（已经是非递增顺序排序） 3, 3, 3, 3, 2

1. 由于最大的是3，则从第2个开始，后面3个的值都要减去1，同时第1个值置0，即得：0, 2, 2, 2, 2
2. 重新排序后为：2, 2, 2, 2, 0。最大的为2，则从第2个开始，后面2个的值都要减去1，同时第1个值置0，即0, 1, 1, 2, 0
3. 重新排序后为2, 1, 1, 0, 0。最大的为2，则从2个开始，后面的2个值都要减去1，同时第1个值置0，即0, 0, 0, 0, 0，全部的值已经为0，即可以成图

- 假设一个度序列（已经是非递增顺序排序）4,4,3,2,1

按照上面的方法，可以得到如下序列0,3,2,1,0-----3,2,1,0,0,1,0,-1,0，出现负数，则不能成图



课堂练习

D. 课堂思考

- 抽象数学定义？

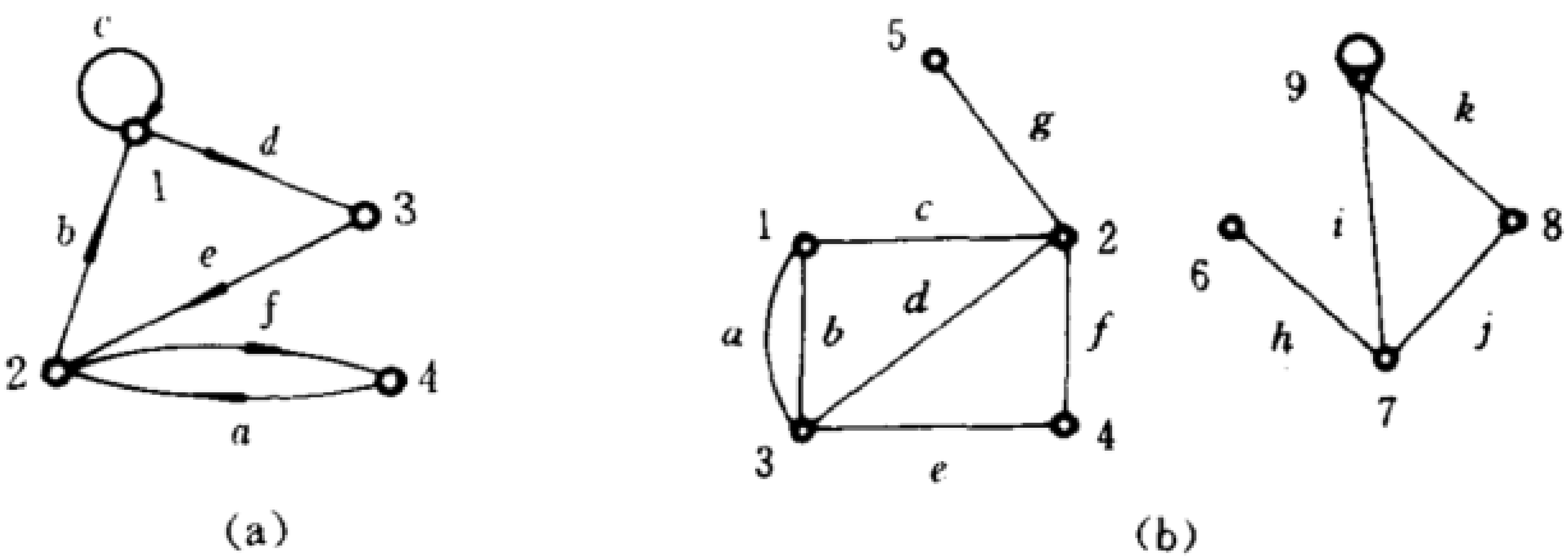
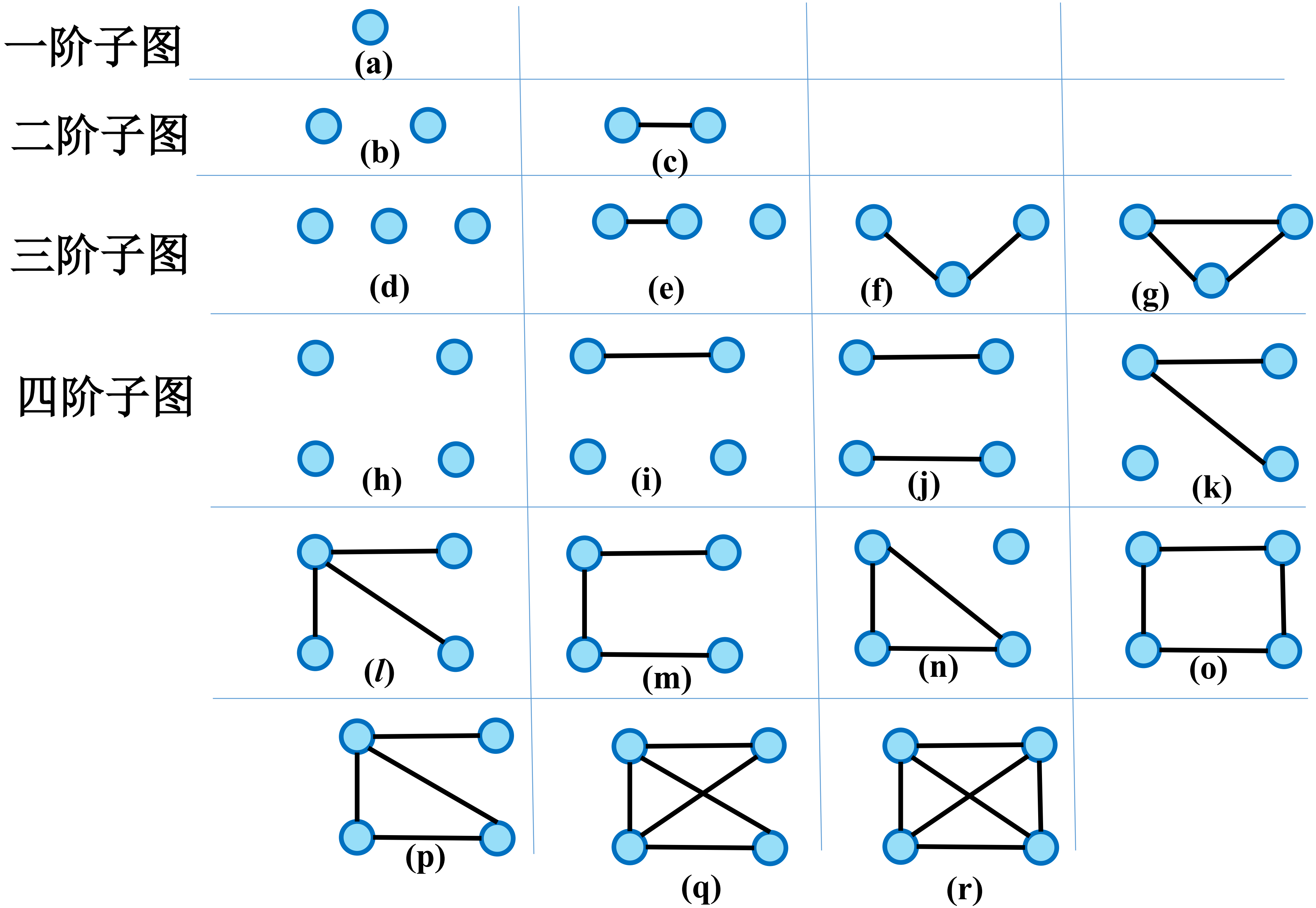


图 7.1.8


一阶子图
二阶子图
三阶子图
四阶子图
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)
(m)
(n)
(o)
(p)
(q)
(r)