第一章 集合的基本概念及其运算

第一章 集合的基本概念及其运算

1.1 集合与元素

1.2 集合间的相等和包含关系

1.3 幂集

1.4 集合的运算

1.5 有穷集的计数原理

1.6 集合的归纳定义法

1.7 有序偶和笛卡儿乘积

1.1 集合与元素

目标要求:

- 会用抽象法表示集合
- 掌握集合的抽象表示和枚举表示的互相转换

重点难点:

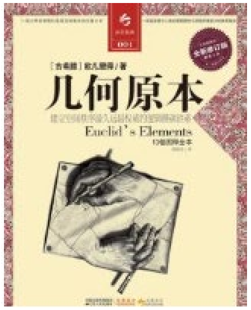
- 集合的抽象表示
- 抽象原则

概念的分类：

- 原始概念、不定义概念：无法用其他已经存在的概念来描述的概念。
- 派生概念：可以由其他已经存在的概念来给出定义的概念。

例：欧氏几何学中，“点”和“线”是原始概念

- 点是没有部分的。
- 点是没有大小而只有位置，不可分割的图形
- 线只有长度而没有宽度。



概念的分类：

- 原始概念、不定义概念：无法用其他已经存在的概念来描述的概念。
- 派生概念：可以由其他已经存在的概念来给出定义的概念。

例：平等四边形、正方形是派生概念

- 平行四边形：在同一个二维平面内，由两组平行线段组成的闭合图形
- 正方形：四条边都相等、四个角都是直角的四边形

1.1.1 集合与元素

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体。 （康托, 1875年）原始概念

例: (1) 全体中国人的集合

(2) 26个英文字母构成的集合

(3) 方程$x^2+4x+1=0$的实根的集合

(4) 2023年北航选修离散数学(2)的学生的集合

一个集合可作为另一个集合的元素

(5) a, b和所有整数的集合构成的集合

(6) 班上高个子学生够成的集合

不能明确区分

(7) 班上1.75以上的高个子学生够成的集合

集合是人们能够**明确区分**的一些对象(客体)构成的一个整体。 （康托）

集合通常用大写英文字母表示：

- **N**:自然数集合(含0)
- **R**:实数集合，**R**$^+$： 正实数集合，**R**$^-$： 负实数集合
- **Q**:有理数集合
- **I**(或**Z**):整数集合，**I**$^+$： 正整数集合

  I$^-$： 负整数集合

元素：集合里含有的对象称为该集合的元素

通常用小写英文字母 表示元素：*a*, *b*, *c*,…

设 a 为任意一个对象，A 为任意一个集合。在 a 和 A 之间有且仅有以下两种情况之一出现：

- a 是 A 的元素，记为 $a \in A$，称为 a 属于 A 或 A 包含 a；
- a 不是 A 中的元素，记为 $a \notin A$，读作 a 不属于 A 或 A 不包含 a。

- 当 $a_1 \in A, a_2 \in A, \ldots, a_n \in A$ 时，常简写为

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$$

- 几类集合：

单元集：含有一个元素的集合，如：$\{a\}, \{\varnothing\}$

n元集：含有n个元素的集合

有穷集：由有穷个元素构成的集合

无穷集：由无穷个元素构成的集合，如：N，R

1.1.2 集合的表示方法

- 四种方法：

(1) 列举法（枚举法）

(2) 部分列举法

(3) 抽象法（命题法）

(4) 归纳定义法

（1）列举法

列举法：依照任意一种次序，不重复地列举出集合的全部元素，并用一对花括号括起来

例: (1) 小于 5的所有正整数:

$\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 20以内的所有素数:

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

（2）部分列举法

部分列举法：

- 依照任意一种次序，不重复地列举出集合的一部分元素，这部分元素要能充分体现出该集合的元素在上述次序下的构造规律

例：N = {0, 1, 2, …}

Z = {…, －2, -1, 0, 1, 2, …}

不超过100的整数集合 = {1, 2, …, 100 }

- 仅适合于元素的构造规律比较明显、简单的集合
- 可以是无限集，也可以是元素个数较多的有限集

（3）抽象法

抽象法:

- 给出一个与 x 有关的谓词（命题）$P(x)$，使得

  $x \in A$ 当且仅当 $P(x)$ 为真

- 称 A 为“使 $P(x)$ 为真的 x 的集合”，记为

  $A = \{x \mid P(x)\}$

例:

$S_1 = \{x \mid x\text{是中国的省}\}$

$S_2 = \{x \mid x=2k+1 \text{ 且 } k \in \mathbf{N}\}$

$= \{x \mid x\text{是正奇数}\}$

一个集合的抽象描述形式不唯一

$S_3 = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{且} 0 \le n < m\},\ m \in \mathbf{N}$

定义1（抽象原则）任给一个性质 P，就确定了一个集合A，A 的元素恰好是具有性质 P 的对象，即：

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

也就是说 $\forall x\,(\,P(x) \leftrightarrow x \in A\,)$

例： $A = \{x \mid x\text{是英文元音字母}\}$

由抽象原则可知，对任意 x:

$$x \in A \Leftrightarrow x\text{是英文元音字母}$$

其中，$\Leftrightarrow$ 表示当且仅当。

Table 1: Grade

学号(I)	姓名(N)	班级(C)	学院(S)	分数(G)
01	张三	1	计算机学院	90
02	李四	1	北京学院	87
03	王五	2	计算机学院	85
04	赵六	2	北京学院	95
05	孙七	3	计算机学院	88
06	周八	3	北京学院	88

SQL查询：

Select N

from Grade

where $G \geq 90$

$$\{ y \mid \exists x, z, w, p \ \mathrm{Grade}(x, y, z, w, p)(p \geq 90)\}$$

查询结果：{张三、赵六}

抽象原则的限制

(1) 谓词 $P(x)$ 要明确清楚

反例：$A = \{x \mid P(x)\}$，$P(x)$：x是花园里美丽的花朵

“美丽” 是一模糊概念。因此 A 不能够成集合。

(2) 不能取 $P(x)$ 为 $x \notin x$ 这样的谓词来定义集合，否则就会产生悖论 （罗素悖论）。

设 $T = \{x \mid x \notin x\}$， 问：$T$是集合吗？

$\forall x$： $x \in T$

抽象原则的限制

(1) 谓词 $P(x)$ 要明确清楚

反例：$A = \{x \mid P(x)\}$，$P(x)$：x是花园里美丽的花朵}

“美丽” 是一模糊概念。因此 A 不能够成集合。

(2) 不能取 $P(x)$ 为 $x \notin x$ 这样的谓词来定义集合，否则就会产生悖论 （罗素悖论）。

设 $T = \{x \mid x \notin x\}$， 问：$T$是集合吗？

$\forall x$：　$x \in T \Leftrightarrow x \notin x$,

把 T 代入 x,

抽象原则的限制

(1) 谓词 $P(x)$ 要明确清楚

反例：$A = \{x \mid P(x)\}$，$P(x)$：x是花园里美丽的花朵}

“美丽” 是一模糊概念。因此 A 不能够成集合。

(2) 不能取 $P(x)$ 为 $x \notin x$ 这样的谓词来定义集合，否则就会产生悖论 （罗素悖论）。

设 $T = \{x \mid x \notin x\}$， 问：$T$是集合吗？

T 不是一个集合

$\forall x$： $x \in T \Leftrightarrow x \notin x$，

把 T 代入 x， 得， $T \in T \Leftrightarrow T \notin T$， 矛盾！

- 抽象原则很危险：

关于集合的直观描述不能作为集合的严格定义。

若 $C = \{ S \mid S\text{是集合且 } S \notin S \}$，则 C 不是集合。

- 康托悖论：$\{ S \mid S \text{ 是集合} \}$
- 理发师悖论：理发师恰给所有不给自己理发的人理发。
- 说谎者悖论：我说的这句话是假话。

理发师悖论：一位乡村理发师宣称他不给村子里任何自己理发的人理发，但给所有不自己理发的人理发。

有人问：理发师先生，您给自己理发吗？

- 理发师悖论与罗素悖论是等价的：

✓ 把每个人看成一个集合：其理发的对象作为元素

理发师 $b=\{ a \mid a$ 不给 a 理发$\}$

- b 给 a 理发 $\Leftrightarrow a \in b \Leftrightarrow a$ 不给 a 理发 $\Leftrightarrow a \notin a$

$b \in b \Leftrightarrow b \notin b$，矛盾

- 假设定义的集合均不会引起悖论

■ 悖论产生的原因：自引用、自作用

1906年法国著名数学家庞加莱指出：

“许多已有悖论的根源与非直谓定义有关，即被定义的对象被包括在借以定义它的各个对象中，也就是借助一个整体来定义属于这个整体的某个部分。”

理发师悖论：

设村子里所有人的集合为 M，因此 $b \in M$。

理发师定义为：$b =\{ a \in M \mid a$不给a理发 $\}$

- 理发师的定义涉及到所有M的成员，而理发师本身就是M的成员。
- 具有循环性质的非直谓定义。

- 集合的公理化：

为了解决集合论中的悖论问题，人们从二十世纪初就开始了公理化集合论的研究。并提出了集合论的种种公理系统。

在本书中和计算机科学中所涉及的集合，一般都不会引起悖论。

- 前面介绍了集合的表示方法有
  - 枚举法：有穷集的表示
  - 部分枚举法：有穷集或无穷集的表示
  - 抽象法：有穷集或无穷集的表示

但用抽象法表示集合时，有时不可能清楚地表示某些集合。

例如算术表达式集合，某高级语言程序集合等等，这时可用集合的归纳定义法来描述。

1.2 集合间的相等和包含关系

目标要求：

掌握集合相等（=）、包含（$\subseteq$）的定义。

掌握 $\in$、=、$\subseteq$ 之间的联系与区别。

掌握空集的性质

重点难点：

集合间的相等与包含关系

空集的性质

证明集合相等

1.2.1 集合的相等关系

定义2 (集合相等)（外延性公理）：设 A, B 为任意两个集合，**若A和B含有相同的元素，则称A和B相等**，记作：$A=B$，即

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

或

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \rightarrow x\in B) \wedge \forall x\,(x\in B \rightarrow x\in A)$$

例：

1. $\{\, x \mid x \leq 4$ 且 x 是正整数 $\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$=\{x \mid x < 6$ 且 x 能整除 $12\}$

2. $\{x \mid x^2-1 = 0\} = \{-1, 1\}$

3. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

—— 集合与其元素排列的次序无关。

4. $\{a, b, a\} = \{a, a, b, b, a\} = \{a, b\}$

—— 集合与其元素重复出现的次数无关

- 由外延性公理可知，对于任意集合A, B, C有

1. $A = A$
2. $A = B \Leftrightarrow B = A$
3. $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

注意：

- 作为集合的元素，未加任何限制；
- 一个集合的元素可以是一个集合。

例如：$\{\varnothing, 1, 2, 3, \{1, 2\}\}$

小结

- 集合是人们能够明确区分的一些对象构成的一个整体 —— 康托，**1875**年
- 集合的表示方法
  - 列举法
  - 部分列举法
  - 抽象法（抽象原则）
    - 谓词要明确清楚
    - 不能产生悖论
- 集合的相等
  - 含有相同的元素
  - 集合与其元素排列的次序及元素重复出现的次数无关

1.2.2 集合的包含关系

定义3 (子集或包含)：若集合A的每一个元素都是集合B的元素，则称A是B的子集，也称A包含于B或B包含A。记作：$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

由定义3可知：对任意集合A有：$A \subseteq A$

$$\begin{aligned}
A \nsubseteq B &\Leftrightarrow \neg\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x\, \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x\, \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\,(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\,) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\,(x \in A) \wedge (x \notin B)\,)
\end{aligned}$$

1.2.2 集合的包含关系

定义4（真子集或真包含）：设 A, B是任意集合，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A为B的真子集，也称 A 真包含于 B，或 B 真包含A。 记作：$A \subset B$ 或 $B \supset A$，即

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x\,(x \in B \wedge x \notin A)$$

- $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

- 关系“$\in$”和“$\subseteq$”的区别：

  $\in$：构成集合A的元素 a与A是“$\in$”关系

  $\subseteq$：集合A的子集 B与A是“$\subseteq$”关系

例：设 $S=\{\{1, 3\}, 4\}$，则

$4 \in S$, $\{1, 3\} \in S$,

$\emptyset \subseteq S$, $\{4\} \subseteq S$, $\{\{1, 3\}\} \subseteq S$, $\{\{1, 3\}, 4\} \subseteq S$

- 关系“$\in$”和“$\subseteq$”的区别：

  $\in$：构成集合A的元素 a与A是“$\in$”关系

  $\subseteq$：集合A的子集 B与A是“$\subseteq$”关系

问题：设A, B为集合, $A \in B$与 $A \subseteq B$是否能同时成立?

可以同时成立：

设 $S=\{\{1, 3\}, 4\}$， $T = \{\{1, 3\}, 4, \{\{1, 3\}, 4\}\}$，则

$S \in T$ 且 $S \subseteq T$

定理1：设 A, B 是两个集合，则

$$A = B \quad \text{当且仅当} \ A \subseteq B \ \text{且} \ B \subseteq A.$$

证：$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$　　(集合相等定义）

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\to x\in B) \wedge \forall x\,(x\in B\to x\in A)$

$\Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$　　（子集定义）

推论：对任意集合A，$A \subseteq A$

定理2：设 A, B, C 都是集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

证：对任意x，　$x\in A \Rightarrow x\in B$　($A\subseteq B$)

$\Rightarrow x\in C$　($B\subseteq C$）

所以　$A\subseteq C$ 成立　(注：$P \Rightarrow Q$表示 P为真推出Q为真)

例：若 $A \in B$，$B \in C$，则 $A \in C$ 成立吗？

解：一般不成立。

例如：(1) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$, $C = \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$,

有 $A \in B$，$B \in C$，但 $A \notin C$ 。

(2) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$,

$C = \{\{\{1\}, 2\}, \{1\}\}$,

有 $A \in B$，$B \in C$ 且 $A \in C$

1.2.3 两个特殊集合

- 全集 U
- 空集 $\varnothing$

（1）全集

定义5（全集U）：在对集合的研究中，如果所讨论的集合，都是某一固定集合U的子集，称集合U为全集，记作 U，即

$$U = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$$

- 全集 U 是一个相对概念，故全集不唯一
- U的选取与研究的问题有关，随着研究问题的不同可选取不同的集合作为全集
- 有时并不具体指明全集是什么，但总是假定所涉及的每个集合都是全集的一个子集

（2）空集

定义 6（空集$\varnothing$）：不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，即 $\varnothing = \{x \mid P(x) \land \neg P(x)\}$，其中$P(x)$ 是任意谓词。

定理 3：设 A 是任意集合，则 $\varnothing \subseteq A$。

证明: (方法一：反证法)

假设存在集合A，使得$\varnothing \subseteq A$不成立，

则必存在某个元素 $a \in \varnothing$且 $a \notin A$，

与$\varnothing$为空集矛盾。

（2）空集

定义 6（空集$\varnothing$）：不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，即 $\varnothing = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\}$，其中$P(x)$ 是任意谓词。

定理 3：设 A 是任意集合，则 $\varnothing \subseteq A$。

证: (方法二):

已知$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$。

由于 $x \in \varnothing$ 为假，故$\forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$ 是永真式,

故 $\varnothing \subseteq A$ 成立。

定理4：空集是唯一的。

证：假设 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$ 是任意两个空集，

则由定理3知， $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$， 同时 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$。

由定理 1， $\varnothing_1 = \varnothing_2$。

例：判断下列关系是否成立？

(1) $\varnothing \in \varnothing$ ✗

(2) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(3) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

1.3 幂集

目标要求：

掌握幂集的定义

会求集合的幂集

1.3.1 幂集的定义

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集， 记作 $\mathcal{P}(A)$，即

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}。$$

由定义7，以下成立：

(1) $B \subseteq A$ 当且仅当 $B \in \mathcal{P}(A)$

(2) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$

(3) $A \in \mathcal{P}(A)$

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集， 记作 $\mathcal{P}(A)$，即

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}。$$

例：$A = \{a, b, c\}$，求 $\mathcal{P}(A)$

解：A的 0 元 子集： $\varnothing$，

A的 1 元 子集： $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

A的 2 元 子集： $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

A的 3 元 子集： $\{a, b, c\}$

则 A的幂集：

$$\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

例：$A=\{a,b,c\}$，求 $\mathcal{P}(A)$

字典序生成算法

x_a	x_b	x_c	
0	0	0	$\varnothing$
1	0	0	$\{a\}$
0	1	0	$\{b\}$
0	0	1	$\{c\}$
1	1	0	$\{a,b\}$
1	0	1	$\{a,c\}$
0	1	1	$\{b,c\}$
1	1	1	$\{a,b,c\}$

x_a	x_b	x_c		值
0	0	0	$\varnothing$	0
0	0	1	$\{c\}$	1
0	1	0	$\{b\}$	2
0	1	1	$\{b,c\}$	3
1	0	0	$\{a\}$	4
1	0	1	$\{a,c\}$	5
1	1	0	$\{a,b\}$	6
1	1	1	$\{a,b,c\}$	7

- 构造n元集的幂集等价于构造长度为n的所有二进制数

例：$A = \{a, b, c\}$，求 $\mathcal{P}(A)$

逐次法

字典序生成算法

x_a	x_b	x_c		值
0	0	0	$\varnothing$	0
0	0	1	$\{c\}$	1
0	1	0	$\{b\}$	2
0	1	1	$\{b,c\}$	3
1	0	0	$\{a\}$	4
1	0	1	$\{a, c\}$	5
1	1	0	$\{a, b\}$	6
1	1	1	$\{a, b, c\}$	7

反射Gray码生成算法

x_a	x_b	x_c		值
0	0	0	$\varnothing$	0
0	0	1	$\{c\}$	1
0	1	1	$\{b, c\}$	3
0	1	0	$\{b\}$	2
1	1	0	$\{a, b\}$	6
1	1	1	$\{a, b, c\}$	8
1	0	1	$\{a, c\}$	5
1	0	0	$\{a\}$	4

例: 求下列集合的幂集

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

$$\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a,\{a\}\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\varnothing\})) = \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$$

$$= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

例：设B，C为任意两个集合，证明

(1) 若 $B \subseteq C$，则 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$

(2) 若$B \subset C$，则$\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(C)$

证明：(1) 对于任意 X,

$X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq C$（$B \subseteq C$, 定理2）

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(C)$

所以 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$（$\subseteq$的定义）

例：设B，C为任意两个集合，证明

(1) 若 $B \subseteq C$，则 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$

(2) 若$B \subset C$，则$\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(C)$

证明：(2) 由$B \subset C$ 得 $B \subseteq C$且 $B \neq C$，

因此，由(1)得 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$，

且$C \in \mathcal{P}(C)$，但 $C \notin \mathcal{P}(B)$。

故 $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(C)$。

例：设B，C为任意两个集合，证明

(1) 若 $B \subseteq C$，则 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$

(2) 若$B \subset C$，则$\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(C)$

证明：(2) （方法 2）

由$B \subset C$得 $B \subseteq C$，因此由(1)得

$$\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)\text{。}$$

由于 $B \subset C$，则 一定存在 x，使得

$$x \in C, x \notin B$$

则有 $\{x\} \subseteq C, \{x\} \nsubseteq B$，即 $\{x\} \in \mathcal{P}(C), \{x\} \notin \mathcal{P}(B)$。

因此，$\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(C)$。

例：设B, C为任意集合，分别给出下式成立的充分必要条件，并进行证明：

(1) $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$

(2) $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(C)$

(3) $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C)$

1.3.2 有穷集的幂集的基数

定义 8（有穷集的基数）：有穷集合A中所含有元素的个数称为 A 的基数。记作 $\#A$（或 $|A|$，$n(A)$）。

- 若集合 S 是有穷集合，则 S 的幂集 $\mathcal{P}(S)$ 也是有穷集合；反之亦然。

1.3.2 有穷集的幂集的基数

定理 5： 设 A 是有穷集合，则 $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

证明：（方法一）

设A有n个元素，即 $\#A=n$, 则A的m元子集有C_n^m个,

所以 A 共有 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n$ 个子集

由二项式定理：

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots\cdots + C_n^n y^n$$

令$x = y = 1$，则 $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$.

故， $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

1.3.2 有穷集的幂集的基数

定理 5： 设 A 是有穷集合，则 $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

证明：（方法二）

设A有n个元素$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$， $B \in \mathcal{P}(A)$，将B与二进制数$b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$建立如下关系：

$$a_j \in B \Leftrightarrow b_j=1, j=0, 1, 2, \ldots n\text{-}1$$

因此， A的每个子集对应一个长度为 n 二进制数，反之亦然。

而长度为 n 二进制数一共有2^n 个，故$\#\mathcal{P}(A)= 2^n$ 。

1.4 集合的运算

重点：集合运算及运算性质

难点：证明两个集合相等

集合的运算：∩（交）、∪（并）、

－（差，也称相对补）、

～（补，也称绝对补）、⊕（对称差）

广义交、广义并

1.4.1 交、并、差

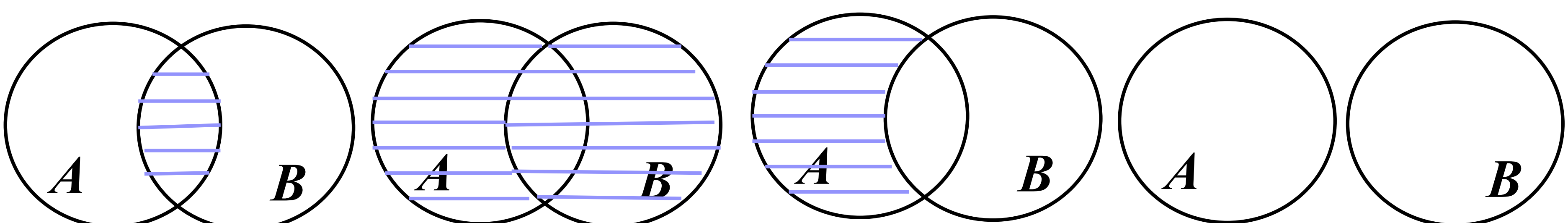
定义 9：设 A 和 B 是任意两个集合

(1) $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

(2) $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

(3) $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

定义 10： 若集合 A 和 B 没有公共元素，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 和 B 是不相交的。



$A \cap B$　　$A \cup B$　　$A - B$　　$A \cap B = \varnothing$

例：设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{3, 4, 5, 6\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$，$A - B$ 和 $B - A$。

解：$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{3, 4\}$

$A - B = \{1, 2\}$

$B - A = \{5, 6\}$

1.4.2 补集

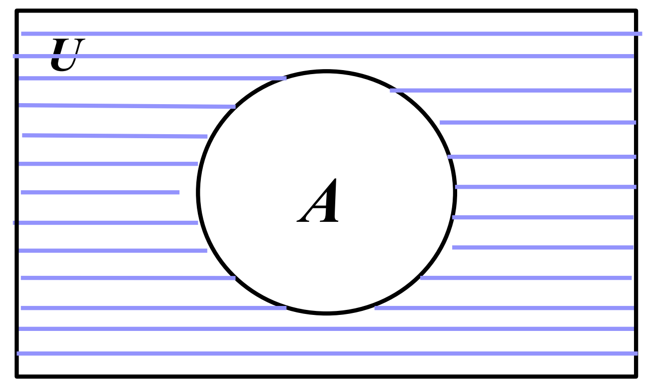
定义11 (补集)：设A是全集U的子集，A 相对于 U 的补集 $U-A$ 称为 A 的绝对补集，简称A的补集，记作$\sim A$。

即：$\sim A = U - A$

$= \{ x \mid x \in U \wedge x \notin A \}$

$= \{x \mid x \notin A\}$

$= \{x \mid \neg(x \in A)\}$



显然，$x \notin A$ 当且仅当 $x \in \sim A$

例：设 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$。

$\sim A = \{3, 4\}$，$\sim B = \{1\}$。

例：证明 $A-B=A\cap\sim B$

证：对于任意 x

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \qquad (-\ 定义)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in\sim B \qquad (\sim\ 定义)$$

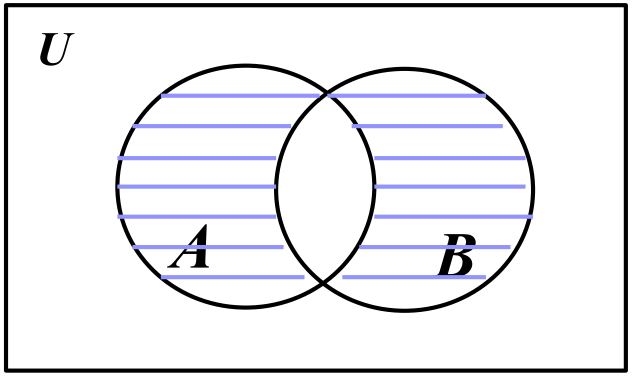
$$\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B \qquad (\cap\ 定义)$$

由外延公理得，$A-B=A\cap\sim B$.

1.4.3 对称差集

定义12（对称差集）：设 A 和 B 是任意两个集合，A 和 B 的对称差集，记为 $A \oplus B$，定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

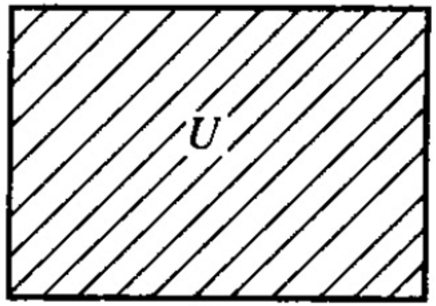


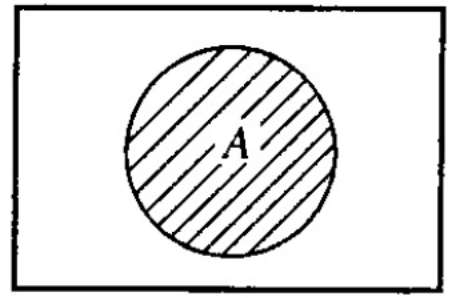
- $A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$
- $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

例：设 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$。

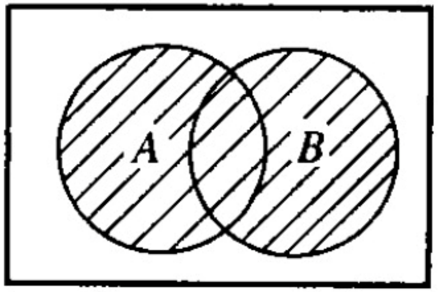
$A \oplus B = \{1, 3, 4\}$。

文氏图



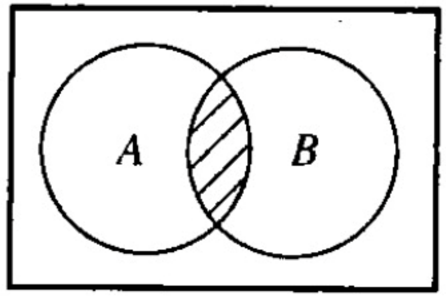


A



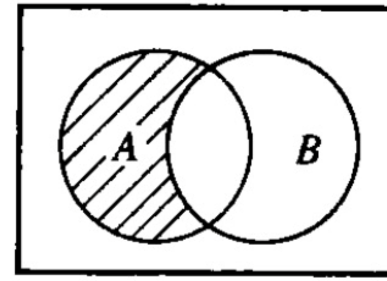
$A \cup B$

$= \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$



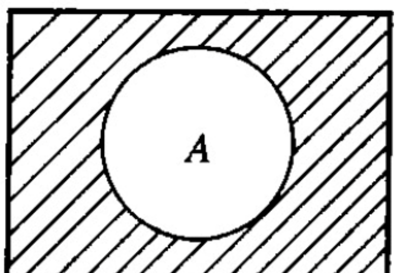
$A \cap B$

$= \{x \mid x \in A \land x \in B\}$



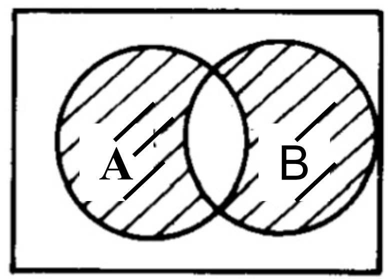
$A - B$

$= \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$



$\sim A = U - A$

$= \{x \mid x \in U \land x \notin A\}$



$A \oplus B$

$= (A-B) \cup (B-A)$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

1.4.4 集合运算的性质

定理6 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则有

i) $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$;

ii) $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$;

iii) $A - B \subseteq A$;

iv) $A - B = A \cap \sim B$;

v) 若 $A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$;

vi) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$;

vii) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$，则 $A \subseteq B \cap C$。

例: 设A与B是任意集合。

(1) $x \in A \oplus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

(2) $x \notin A \oplus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

(3) $A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$

(4) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$

怎么证明?

(5) $A \oplus B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

(6) $A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$

(7) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

集合运算的基本定律

幂等律：$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	交换律：$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
同一律：$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	

零律： $A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	否定律： $A \cup \sim A = U$ $A \cap \sim A = \varnothing$
吸收律： $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	
德·摩尔根律： $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	
对合律： $\sim (\sim A) = A$ $\sim \varnothing = U$ $\sim U = \varnothing$	

对集合运算的基本定律的说明

- 在不含 $-$ 的集合恒等式中，将 $\cup$ 和 $\cap$ 互换，$\varnothing$ 和 U 互换，得到的仍是集合恒等式。—— 对偶原理

吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$　　零律：$A\cup U=U$

$A\cap(A\cup B)=A$　　$A\cap\varnothing=\varnothing$

- 将不含 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 的命题逻辑等值式中的 $\vee$ 换为 $\cup$，$\wedge$ 换为 $\cap$，$\neg$ 换为 ~，0 换为 $\varnothing$，1 换为 U，$\Leftrightarrow$ 换为 $=$，就得到集合恒等式。

双重否定律	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$	
排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$	
矛盾律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$	
假言易位	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	
幂等律	$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$
交换律	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
	$A \oplus B \Leftrightarrow B \oplus A$	
结合律	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \oplus B) \oplus C \Leftrightarrow A \oplus (B \oplus C)$	
分配律	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
	$A \wedge (B \oplus C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$	
德·摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
同一律	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	$A \vee 0 \Leftrightarrow A$
	$A \oplus 0 \Leftrightarrow A$	
零　律	$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

将不含 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 的命题逻辑等值式中的 $\vee$ 换为 $\cup$, $\wedge$ 换为 $\cap$, $\neg$ 换为 ~, 0 换为 $\varnothing$, 1 换为 U，$\Leftrightarrow$ 换为 =，就得到集合恒等式。

除了上述性质外，常用性质还有 $A-B=A\cap\sim B$ 和下面两个性质定理。

定理7：设 A 和 B 是全集 U 的子集，$B=\sim A$ 当且仅当 $A\cup B=U$ 和 $A\cap B=\varnothing$。

证明：（必要性）若 $B=\sim A$，则

$$A\cup B=A\cup\sim A=U,$$

$$A\cap B=A\cap\sim A=\varnothing$$

（充分性） 若 $A\cup B=U$ 和 $A\cap B=\varnothing$，则

$$B=U\cap B=(A\cup\sim A)\cap B=(A\cap B)\cup(\sim A\cap B)$$

$$=\varnothing\cup(\sim A\cap B)=(A\cap\sim A)\cup(\sim A\cap B)$$

$$=\sim A\cap(A\cup B)=\sim A\cap U=\sim A。$$

定理 8：设 A 和 B 是全集 U 的子集，则下列命题等价：
(1)$A \subseteq B$；(2)$A\cup B = B$; (3) $A \cap B = A$; (4) $A - B = \varnothing$

常用于证明两个集合的包含关系

证: **(1)⇒(2)**：对于任意 x，由"∪"定义可知

如果 $x \in B$，则 $x\in A\cup B$，因此 $B \subseteq A\cup B$

对于任意 $y\in A\cup B$，则 $y\in A$ 或者 $y\in B$。

由于 $A \subseteq B$，得 $y\in B$，因此 $A\cup B \subseteq B$。

故 $A\cup B = B$。

设(1) 成立，证(2).

$x\in \mathrm{A} \cup B \Leftrightarrow x\in \mathrm{A} \vee x\in \mathrm{B}$

$\Rightarrow x\in \mathrm{B} \vee x\in \mathrm{B}$

$\Rightarrow x\in \mathrm{B}$

定理 8：设 A 和 B是全集U的子集，则下列命题等价：

(1)$A \subseteq B$；(2)$A \cup B = B$; (3) $A \cap B = A$; (4) $A - B = \varnothing$

常用于证明两个集合的包含关系

证: (2) $\Rightarrow$(3) :

$A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$ （吸收律）

(3) $\Rightarrow$(4) :

$A - B = (A \cap B) - B = A \cap B \cap \sim B = \varnothing$

(4) $\Rightarrow$(1)：(反证法)

假设 $A \subseteq$ B不成立，

则存在x，$x \in A$但 $x \notin B$，

因此 $x \in A - B$，即$A - B \neq \varnothing$，

与已知条件 (4)矛盾。故必有$A \subseteq B$。

定理8：设 A 和 B是全集U的子集，则下列命题等价：
(1)$A \subseteq B$；(2)$A \cup B = B$; (3) $A \cap B = A$; (4) $A - B = \varnothing$

例：设A，B，C是任意集合，试证：

若$A \subseteq B$且 $C \subseteq D$，则 $A \cup C \subseteq B \cup D$

证明：因为 $A \subseteq B$且$C \subseteq D$，则

由定理 8 得，$A \cup B = B$ 且 $C \cup D = D$.

因此，$(A \cup B) \cup (C \cup D) = B \cup D$,

即$(A \cup C) \cup (B \cup D) = B \cup D$.

同样由定理 8 得，$A \cup C \subseteq B \cup D$.

证明两个集合相等常用以下两种方法：

（1）集合相等定义（元素分析法）

（2）集合运算的基本定律（等式推理）

例：试证：$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$。

证明: (方法一)对任意 x,

$$x\in A-(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B \vee x\in C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A-B \wedge x\in A-C$$

$$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$$

所以，$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$。

例：　试证：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明：(方法二)

$A-(B\cup C)$

$=A\cap\sim(B\cup C)$

$=A\cap(\sim B\cap\sim C)$　　德·摩尔根律

$=(A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$　幂等律

$=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$　结合律，交换律

$=(A-B)\cap(A-C)$

例：设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A \cap (B-A) = \varnothing$

(2) $A-(A-B) = A \cap B$

(3) $(A-B) \oplus B = (A-B) \cup B$

证明: (1) $A \cap (B-A) = A \cap (B \cap \sim A)$

$= A \cap (\sim A \cap B)$ (交换律)

$= (A \cap \sim A) \cap B$ (结合律)

$= \varnothing \cap B$ (否定律)

$= \varnothing$ (零律)

例：设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A \cap (B-A) = \varnothing$

(2) $A-(A-B) = A \cap B$

(3) $(A-B) \oplus B = (A-B) \cup B$

证明: (2) $A-(A-B) = A \cap \sim(A-B)$

$= A \cap \sim(A \cap \sim B)$

$= A \cap (\sim A \cup B)$ (德·摩尔根律)

$= (A \cap \sim A) \cup (A \cap B)$ (分配律)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (否定律)

$= A \cap B$ (零律)

例：判断一下结论是否成立，如果成立，就给予证明，如果不成立，就用文氏图加以说明。

(1) 若$A\cup B=A\cup C$, 则$B=C$;

(2) 若$A\cap B=A\cap C$, 则$B=C$;

(3) 若$A\subseteq B\cup C$, 则$A\subseteq B$或$A\subseteq C$;

(4) 若$B\cap C\subseteq A$, 则$B\subseteq A$或$C\subseteq A$;

(5) 若$A\cap C\subseteq B\cap C$且$A\cap\sim C\subseteq B\cap\sim C$, 则$A\subseteq B$;

(6) 若$A\cap B=A\cap C$且$\sim A\cap B=\sim A\cap C$, 则$B=C$。

1.4.5 交、并的推广

可把两个集合的∩，∪ 运算推广到 n个集合上:

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合，则:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

分别记作 $\cap_{i=1}^{n} A_i$ 和 $\cup_{i=1}^{n} A_i$。

同理可把无穷多个集合的 ∩，∪分别记为：

$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n \cap \cdots\cdots$$

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n \cup \cdots\cdots$$

如何给出精确定义?

广义交、广义并

定义13 (集类或集合族)：如果一个集合的**所有元素都是集合**，则称该集合为集类。

定义14 （集类上的∪、∩运算 (广义并、广义交))

设$\mathcal{B}$为任意集类，

(1) 称集合$\{\, x \mid \exists X(X \in \mathcal{B} \land x \in X) \,\}$为$\mathcal{B}$的<u>广义并</u>，记为 $\cup\mathcal{B}$；

(2) 若$\mathcal{B} \neq \varnothing$，则称集合$\{\, x \mid \forall X(\, X \in \mathcal{B} \to x \in X\,) \,\}$为$\mathcal{B}$的<u>广义交</u>，记为 $\cap\mathcal{B}$。

$\cap\varnothing$ 没有意义

$$\cup\mathcal{B}=\{x \mid \exists X(X\in\mathcal{B}\wedge x\in X)\}$$

$$\cap\mathcal{B}=\{x \mid \forall X(X\in\mathcal{B}\to x\in X)\},\ \mathcal{B}\neq\varnothing$$

- $\cap\varnothing$ 没有意义。

若 $\mathcal{B}=\varnothing$，则蕴涵式 $X\in\mathcal{B}\to x\in X$ 的前件为假，

因此 $\forall X(X\in\mathcal{B}\to x\in X)$为真，

从而，$\cap\mathcal{B}$为全集 U。

所以，要求 $\mathcal{B}\neq\varnothing$。

$\cup\mathcal{B}=\{x \mid \exists X(X\in\mathcal{B}\wedge x\in X)\}$

$\cap\mathcal{B}=\{x \mid \forall X(X\in\mathcal{B}\rightarrow x\in X)\}$, $\mathcal{B}\neq\varnothing$

- 若 $\mathcal{B}=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$，则

$$\cup\mathcal{B}=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$$

$$\cap\mathcal{B}=B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_n=\bigcap_{i=1}^{n}B_i$$

- 若 $\mathcal{B}=\{B_i \mid i\in\mathrm{N}\}$，则

$$\cup\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$$

$$\cap\mathcal{B}=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$$

- 若有集合 J，使 $\mathcal{B}=\{B_i \mid i\in J\}$，则

$$\cup\mathcal{B}=\bigcup_{i\in J}B_i$$

$$\cap\mathcal{B}=\bigcap_{i\in J}B_i$$

$\cup\mathcal{B}=\{ x \mid \exists X(X \in \mathcal{B} \wedge x \in X) \}$

$\cap\mathcal{B} = \{ x \mid \forall X (X \in \mathcal{B} \to x \in X) \}$, $\mathcal{B} \neq \varnothing$

例： 设 $C = \{ \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\} \}$

则 $\cup C =$

$\cap C =$

$$\cup\mathcal{B}=\{\, x \mid \exists X(X\in\mathcal{B}\wedge x\in X)\,\}$$

$$\cap\mathcal{B}=\{\, x \mid \forall X(X\in\mathcal{B}\rightarrow x\in X)\,\},\ \mathcal{B}\neq\varnothing$$

例：设 $C=\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}$

则 $\cup C=\{0\}\cup\{0,1\}\cup\{0,1,2\}$

$\cap C=$

$\cup\mathcal{B}=\{\,x \mid \exists X(X\in\mathcal{B}\wedge x\in X)\,\}$

$\cap\mathcal{B}=\{\,x \mid \forall X\,(\,X\in\mathcal{B}\rightarrow x\in X\,)\,\}$, $\mathcal{B}\neq\varnothing$

例：设 $C=\{\,\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\}\,\}$

则 $\cup C=\{0\}\cup\{0,1\}\cup\{0,1,2\}$

$=\{0,1,2\}$

$\cap C=$

$\cup\mathcal{B}=\{\,x \mid \exists X(X\in\mathcal{B}\wedge x\in X)\,\}$

$\cap\mathcal{B}=\{\,x \mid \forall X(\,X\in\mathcal{B}\rightarrow x\in X\,)\,\}$, $\mathcal{B}\neq\varnothing$

例：设 $C=\{\,\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\}\,\}$

则 $\cup C=\{0\}\cup\{0,1\}\cup\{0,1,2\}$

$=\{0,1,2\}$

$\cap C=\{0\}\cap\{0,1\}\cap\{0,1,2\}$

$\cup \mathcal{B}=\{ x \mid \exists X(X \in \mathcal{B} \wedge x \in X) \}$

$\cap \mathcal{B} = \{ x \mid \forall X (X \in \mathcal{B} \rightarrow x \in X) \}$, $\mathcal{B} \neq \varnothing$

例：设 $C =\{ \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\} \}$

则 $\cup C =\{0\} \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\}$

$=\{0, 1, 2\}$

$\cap C =\{0\} \cap \{0, 1\} \cap \{0, 1, 2\}$

$= \{0 \}$

$$\cup \mathcal{B}=\{ x \mid \exists X(X \in \mathcal{B} \wedge x\in X) \}$$

$$\cap \mathcal{B} = \{ x \mid \forall X (X \in \mathcal{B} \rightarrow x\in X) \} , \ \mathcal{B}\neq\varnothing$$

例： $\cup \varnothing = \varnothing$

$\cup \{\varnothing\}= \varnothing$

$\cap\{\varnothing\} = \varnothing$

$\cup \{\{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}\}= \{a, b, \{a, b\}\}$

$\cap\{\{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}\} = \varnothing$

例： $\cap\mathcal{P}(A)=\varnothing$

$\cup \mathcal{P}(A)= A$

定理 9 设A为任意集合，$\mathcal{B}$为任意集合族，则有：

(1) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则 $A\cup(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cup B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(2) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cap(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(3) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cup(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cup B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(4) $A\cap(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(5) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cap\mathcal{B})=\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(6) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cup\mathcal{B})=\cap\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

称(3)与(4)为广义分配律，(5)与(6)为广义德·摩尔根律

定理 9 设A为任意集合，$\mathcal{B}$为任意集合族，则有：

(1) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cup(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cup B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(2) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cap(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(3) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cup(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cup B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(4) $A\cap(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(5) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cap\mathcal{B})=\cup\{\sim B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(6) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cup\mathcal{B})=\cap\{\sim B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(5) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cap\mathcal{B})=\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

证明：任取$x\in\sim(\cap\mathcal{B})$，则$x\notin(\cap\mathcal{B})$。

因此，必存在$B\in\mathcal{B}$, 使得 $x\notin B$，即$x\in\sim B$。

从而，$x\in\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$,

因此$\sim(\cap\mathcal{B})\subseteq\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

任取$x\in\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$,

则存在$B\in\mathcal{B}$，使得$x\in\sim B$，即$x\notin B$。

所以$x\notin\cap\mathcal{B}$，即$x\in\sim(\cap\mathcal{B})$。

因此$\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}\subseteq\sim(\cap\mathcal{B})$。

综上可得，$\sim(\cap\mathcal{B})=\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$。

定理 9 设A为任意集合，$\mathcal{B}$为任意集合族，则有：

(1) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则 $A\cup(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cup B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(2) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cap(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(3) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cup(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cup B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(4) $A\cap(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(5) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cap\mathcal{B})=\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(6) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cup\mathcal{B})=\cap\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

问题：(1)中为什么要求$\mathcal{B}\neq\varnothing$？

假设$\mathcal{B}=\varnothing$.

当 $A\neq\varnothing$时，$A\cup(\cup\mathcal{B})=A$;

$\cup\{A\cup B \mid B\in\mathcal{B}\}=\{x \mid \exists B\,(B\in\mathcal{B}\wedge x\in A\cup B)\}$

$=\varnothing$ 矛盾！

定理 9 设A为任意集合，$\mathcal{B}$为任意集合族，则有：

(1) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则 $A\cup(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cup B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(2) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cap(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(3) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cup(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cup B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(4) $A\cap(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(5) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cap\mathcal{B})=\cup\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

(6) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cup\mathcal{B})=\cap\{\sim B \mid B\in\mathcal{B}\}$

问题： (4)中为什么不要求$\mathcal{B}\neq\varnothing$？

假设$\mathcal{B}=\varnothing$.

$A\cap(\cup\mathcal{B})=\varnothing$,

$\cup\{A\cap B \mid B\in\mathcal{B}\}=\{x \mid \exists B\,(B\in\mathcal{B}\wedge x\in A\cap B)\}$

$=\varnothing$ 不矛盾！

定理 9 设A为任意集合，$\mathcal{B}$为任意集合族，则有：

(1) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则 $A\cup(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cup B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(2) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cap(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(3) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$A\cup(\cap\mathcal{B})=\cap\{A\cup B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(4) $A\cap(\cup\mathcal{B})=\cup\{A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(5) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cap\mathcal{B})=\cup\{\sim B\mid B\in\mathcal{B}\}$

(6) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则$\sim(\cup\mathcal{B})=\cap\{\sim B\mid B\in\mathcal{B}\}$

问题：(6)中为什么要求$\mathcal{B}\neq\varnothing$？

$\cap\{\sim B\mid B\in\mathcal{B}\}=\{x\mid\forall B(B\in\mathcal{B}\rightarrow x\in\sim B)\}$，

即为广义交，要求$\mathcal{B}\neq\varnothing$。

定理 10 设 A 为任意集合， $\mathcal{B}$为任意集类。

(1)若 $B\in\mathcal{B}$，则 $\cap\mathcal{B}\subseteq B$ 且 $B\subseteq\cup\mathcal{B}$；

(2)若对每个$B\in\mathcal{B}$皆有$A\subseteq B$，则 $A\subseteq\cap\mathcal{B}$（$\mathcal{B}\neq\varnothing$时）；

(3)若对每个$B\in\mathcal{B}$ 皆有 $B\subseteq A$，则$\cup\mathcal{B}\subseteq A$。

定理 11 设$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 为任意两个集类，则有

$$\bigcup(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = \bigcup\{A\cup B \mid A\in\mathcal{A} \text{ 且 } B\in\mathcal{B}\}$$

$$= (\bigcup\mathcal{A})\cup(\bigcup\mathcal{B})$$

设 $a, b\in$ I 且 $a\neq 0$。令"$a \mid b$"表示"a整除b"，

"$a\nmid b$"表示"a不能整除b"。

例：对每个 $n\in$ N，设 $A_n=\{a \mid a\in \mathrm{N}, 2^n|a$ 且 $2^{n+1}\nmid a\}$，

求 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$。

$A_0 = \{a \mid a\in \mathrm{N}, 2^0|a$ 且 $2^1\nmid a\}$是所有正奇数的集合；

$A_1 = \{a \mid a\in \mathrm{N}, 2|a$ 且 $2^2\nmid a\}=\{2b|b$ 是正奇数$\}$；

$A_2 = \{a \mid a\in \mathrm{N}, 2^2|a$ 且 $2^3\nmid a\}=\{2^2 b|b$ 是正奇数$\}$；

…… ……

$A_n = \{a \mid a\in \mathrm{N}, 2^n|a$ 且 $2^{n+1}\nmid a\}=\{2^n b|b$ 是正奇数$\}$

…… ……

猜测：$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathrm{I}^+$？

例：对每个 $n \in \mathrm{N}$，设 $A_n=\{a \mid a \in \mathrm{N}, 2^n | a$ 且 $2^{n+1} \nmid a\}$，求 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$。

解：由于对任意 $n \in N$，$2^n|0$ 且$2^{n+1}|0$，所以 $0 \notin \mathrm{A}_n$。

因此，$0 \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$，得$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \mathrm{I}^+$。

任取 $a \in \mathrm{I}^+$，一定存在 $n \in N$，及奇数 b 使得 $a=2^n b$。

因此，$2^n|a$ 且 $2^{n+1} \nmid a$，得 $a \in A_n$，

从而 $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$。

得 $\mathrm{I}^+ \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$。

综上所述得 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathrm{I}^+$。

例: 设 $A_n=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x>n\}, n \in \mathbf{N}$。

试求$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$和 $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

$A_0=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x>0\}$

$A_1=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x>1\}$

$A_2=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x>2\}$

… …

$A_n=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x>n\}$… …

$A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_2 \subset A_1 \subset A_0$

例: 设 $A_n=\{x|\ x\in \mathbf{R}$ 且 $x>n\}$, $n\in$N。

试求$\cup_{n=0}^{\infty}A_n$和 $\cap_{n=0}^{\infty}A_n$

解：(1)由于对任意的$n\in$N，有 $A_n\subseteq A_0$,

因此 $\cup_{n=0}^{\infty}A_n\subseteq A_0$ 。

又由于 $A_0\subseteq\cup_{n=0}^{\infty}A_n$，得$\cup_{n=0}^{\infty}A_n=A_0$ 。

(2) 下面证明$\cap_{n=0}^{\infty}A_n=\varnothing$。

假设 $\cap_{n=0}^{\infty}A_n\neq\varnothing$，则存在 $m\in$N， $m\in\cap_{n=0}^{\infty}A_n$。

得 $m\in A_m$, 与 A_m 的定义矛盾。

因此，假设不成立，即$\cap_{n=0}^{\infty}A_n=\varnothing$。

第一章 集合的基本概念及其运算

1.1 集合与元素

1.2 集合间的相等和包含关系

1.3 幂集

1.4 集合的运算

1.5 有穷集的计数原理

1.6 集合的归纳定义法

1.7 有序偶和笛卡儿乘积

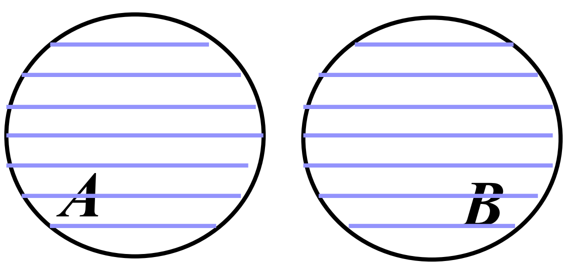
1.5 有穷集的计数原理

引理1：若 A 和 B 是有穷集合，且$A\cap B=\varnothing$，则

$$\#(A\cup B)=\#A+\#B$$

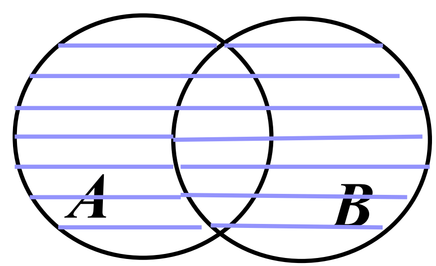
定理 12：若 A 和 B 是有穷集合，则

$$\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$$



$A\cup B$

$(A\cap B=\varnothing)$



$A\cup B$

定理12：若 A 和 B 是有穷集合，则

$$\#(A\cup B) = \#A + \#B - \#(A\cap B)$$

证：显然 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 是有穷集。

$$A\cup B = A\cup B = (A\cup B)\cap(A\cup\sim A)$$

$$= A\cup(B\cap\sim A) \qquad \text{（分配律）}$$

由于 $A\cap(B\cap\sim A) = \varnothing$，根据引理 1 得

$$\#(A\cup B) = \#A + \#(B\cap\sim A) \qquad (1)$$

又 $B = B\cap(A\cup\sim A)$

$$= (B\cap A)\cup(B\cap\sim A) \qquad \text{（分配律）}$$

同样 $(B\cap A)\cap(B\cap\sim A) = \varnothing$，根据引理 1 得

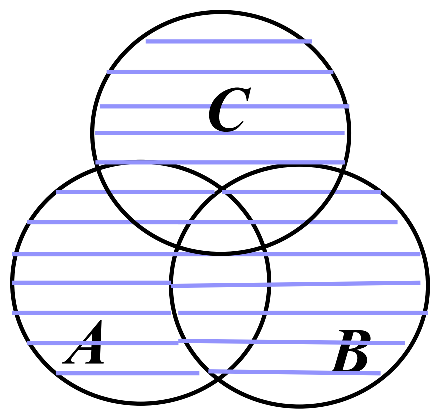
$$\#B = \#(B\cap A) + \#(B\cap\sim A),$$

有 $\#(B\cap\sim A) = \#B - \#(B\cap A)$。

代入 (1) 式得 $\#(A\cup B) = \#A + \#B - \#(A\cap B)$

推论：若A，B 和 C是有穷集合，则

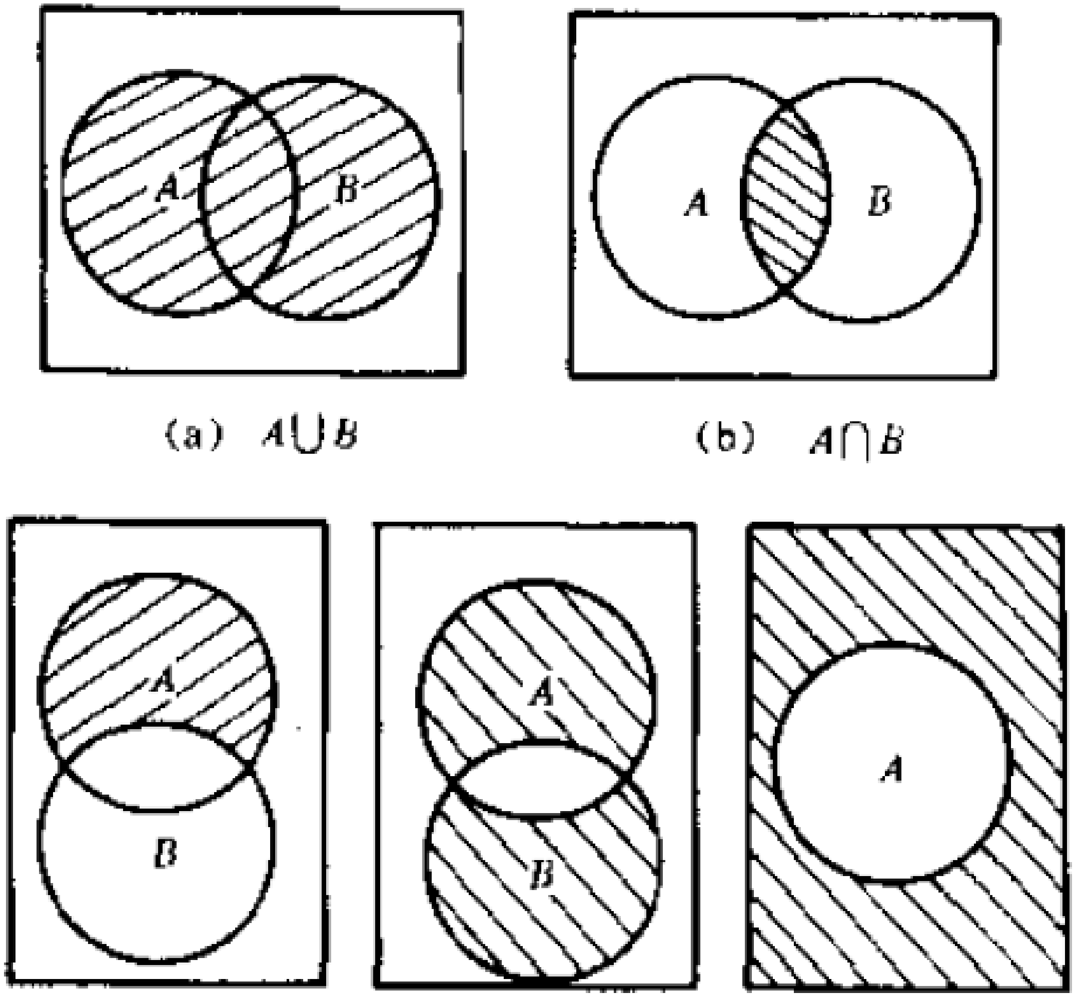
$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$



$A \cup B \cup C$

- 可推广到n个有穷集合（数学归纳法证明）
- 有穷集合计数问题的求解，可利用上述定理 或 推论，还可利用文氏图和代数相结合的方法。

文氏图



(a) $A \cup B$　(b) $A \cap B$

(c) $A - B$　(d) $A \oplus B$　(e) $\sim A$

例：外语系120名学生中，其中

(1) 100名学生至少学习英语、德语、法语中的一种

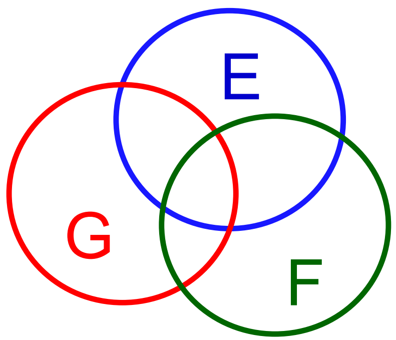
(2) 有65人学英语，45人学德语，42人学法语

(3) 20人既学英语又学德语，25人既学英语又学法语，15人既学德语又学法语。

求同时学这三种外语的人数和仅学其中一门外语的人数。

解：设集合E, G, F分别表示学习英语、德语、法语的学生集合，

则 $\#(E\cup G\cup F) = \#E + \#G + \#\mathrm{F} - \#(E\cap G) - \#(E\cap F) - \#(G\cap F) + \#(E\cap G\cap F)$，其中



(1) $\#(E\cup G\cup F) = 100$,

(2) $\#E=65$, $\#G=45$, $\#F=42$,

(c) $\#(E\cap G)=20$, $\#(E\cap F)=25$, $\#(G\cap F)=15$。

因此得：$\#(E\cap G\cap F) = 8$，即同时学三种外语有 8 人。

例：外语系120名学生中，其中

(1) 100名学生至少学习英语、德语、法语中的一种

(2) 有65人学英语，45人学德语，42人学法语

(3) 20人既学英语又学德语，25人既学英语又学法语，15人既学德语又学法语。

求同时学这三种外语的人数和仅学其中一门外语的人数。

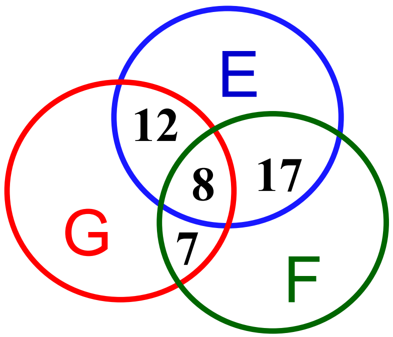
解（续）：仅学英语和德语的人数为20－8 = 12，

仅学英语和法语的人数为25－8 = 17，

仅学德语和法语的人数为15－8 = 7，

因此，仅学其中一门外语的人数为：

$$100 - 12 - 17 - 7 - 8 = 56$$



例: 求1到1000（包括1和1000在内）不能被5, 6和8整除的整数的个数.

解：设A_1, A_2和A_3分别是1到1000中分别能被5, 6和8整除的数集合，那么不能被5, 6和8整除的数的集合为$U-(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$，其中U为包括1到1000的整数集合。

由于 $|A_1|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$， $|A_2|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$，

$|A_3|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$，

$|A_1 \cap A_2|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$，

$|A_1 \cap A_3|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25$， $|A_2 \cap A_3|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$，

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8$，

得 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|= 200+166+125-33-25-41+8=400$

因此不能被5, 6和8整除的整数个数为1000-400=600.

1.6 集合的归纳定义法

前面介绍了集合的表示方法有

1. 枚举法：有穷集的表示
2. 部分枚举法：有穷集或无穷集的表示
2. 抽象法：有穷集或无穷集的表示

但用抽象法表示集合时，有时不可能清楚地表示某些 集合.

例如算术表达式集合，某高级语言程序集合等等，这时可用集合的归纳定义法来描述.

归纳定义法：

(1) 基本项： 非空集 $S_0 \subseteq A$； (规定A的一些生成元）

(已知某些元素属于A，保证A不空）

(2) 归纳项： 一组规则，从 A 中元素出发，依据这些规则所获得的元素仍然是 A 中的元素；

(3) 极小化：

(a) A中每个元素都是通过有限次使用(1)或(2)获得的;

(b) 如果集合 S 也满足 (1)和 (2)，则 $A \subseteq S$；

(b) 如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 (1)和 (2)，则 $S = A$ 。

- 极小化保证： A 是同时满足 (1) 和(2) 的最小集合

例：非负偶数集合

$$E = \{x \mid \exists y\,(y \in N \land x = 2y)\}$$

E 的归纳定义如下：

(1) $0 \in E$

(2) 若 $n \in E$，则 $(n+2) \in E$

(3) 只有限次应用(1)、(2)得到的数才是E中的元素。

例：求下列归纳定义的集合 P

(1) $3 \in P$

(2) 若 $x, y \in P$，则 $x + y \in P$

(3) 只有限次应用(1)、(2)得到的数才是P中的元素。

P是 由3的倍数的正整数组成：

$$P = \{x \mid \exists y\,(y \in I^{+} \land x = 3y)\}$$

思考题

用归纳定义法给出下列集合：

1. 允许有前0的十进制无符号整数的集合;
2. 不允许有前0的十进制无符号整数的集合;
3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合;
4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合
5. 不允许有前0的被 5 整除的二进制无符号整数的集合

归纳定义法：

(1) 基本项： 非空集 $S_0 \subseteq A$；（规定A的一些生成元）

（已知某些元素属于A，保证A不空）

(2) 归纳项： 一组规则，从 A 中元素出发，依据这些规则所获得的元素仍然是 A 中的元素；

(3) 极小化：

(a) A中每个元素都是通过有限次使用(1)或(2)获得的；

(b) 如果集合 S 也满足 (1)和 (2)，则 $A \subseteq S$

(b) 如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 (1)和 (2)，则 $S = A$ 。

- 极小化保证： A 是同时满足 (1) 和(2) 的最小集合

1. 允许有前0的十进制无符号整数的集合

解法 一:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A$;

2) 若 $a \in S_0$ 且 $\beta \in A$ ， 则 $a\beta \in A$;

3) 极小化。

解法 二:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A$;

2) 若 $\alpha, \beta \in A$， 则 $\alpha\beta \in A$;

3) 极小化。

2. 不允许有前0的十进制无符号整数的集合;

漏掉元素:
中间含有0的整数，如302 (因为02 $\notin A$)

解法 一:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A$;

2) 若 $a \in S_0 - \{0\}$ 且 $\beta \in A$， 则 $a\beta \in A$。

3) 极小化。

解法 二:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq \mathrm{A}$;

2) 若 $\alpha, \beta \in A$ 且 $\alpha \neq 0$， 则 $\alpha\beta \in A$ 。

3) 极小化。

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = \mathbf{0}$

$\boxed{1} \boxed{\qquad\qquad\qquad} \boxed{0} \neq \mathbf{0}$

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = \mathbf{0}$

$\boxed{1 \quad\quad\quad\quad 0} \neq \mathbf{0}$

设从左至右第一个为0的位置为 j，j=2,…, n

1	1	…	1	0		0
1	**2**			***j***		***n***

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

0

$= \mathbf{0}$

1		0

$\neq \mathbf{0}$

设从左至右第一个为0的位置为 j， j=2,…, n

1	1	…	1	0		0
1	**2**			j		n

$j = 2$:

1	0		0

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合：

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = \mathbf{0}$

1		0	$\neq \mathbf{0}$

设从左至右第一个为0的位置为 j，$j=2,\ldots,n$

1	1	…	1	0		0
1	**2**			j		n

$j = 2$:

1	0		0

设从第3个位置开始，全为0

$$\underbrace{1\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;\ldots\;0}_{\alpha}\;\underbrace{0}_{\beta\,=\,0} \qquad \alpha 0$$

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合：

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = \mathbf{0}$

1		0	$\neq \mathbf{0}$

设从左至右第一个为0的位置为 j，j=2,…, n

1	1	…	1	0		0
1	**2**			j		n

j = 2:

1	0		0

设从第3个位置开始，第一个为1的位置为k，k=3,…, n-1

1	0	…	0	1		0
				k		

$\alpha\beta$

$\underbrace{1\ 0\ \ldots\ 0}_{\alpha}\ \underbrace{1\ \ \ \ 0}_{\beta}$

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = 0$

1		0

$\neq 0$

设从左至右第一个为0的位置为 j，$j=2,\ldots,n$

1	2			j		n
1	1	…	1	0		0

$j = n$:

1	1	1	1	1	1	…	1	1	0

$$0 \xrightarrow{1\alpha} 10 \xrightarrow{1\alpha} 110 \xrightarrow{1\alpha} 1110 \xrightarrow{1\alpha} \ldots \xrightarrow{1\alpha} 111\ldots10$$

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合：

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = \mathbf{0}$

1		0

$\neq \mathbf{0}$

设从左至右第一个为0的位置为 j，$j=2,\ldots,n$

1	1	…	1	0		0
1	**2**			j		n

$2<j<n$：与 $j=2$ 时同样讨论

1	1	…	1	0		0
				j		

设从第j+1个位置开始，所有位置全为0：

1	1	…	1	0	0	…	0	0
				j				

$$1\ 1\ \ldots\ 1\ \underbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}_{\beta}\ \underbrace{0}_{\gamma=0}$$

$1\ldots11\beta0$

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合：

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = \mathbf{0}$

1		0

$\neq \mathbf{0}$

设从左至右第一个为0的位置为 j，j=2,…, n

1	2			j		n
1	1	…	1	0		0

2< j <n：与 j = 2 时同样讨论

				j		
1	1	…	1	0		0

设从第j+1个位置开始，第一个为1的位置为k：

$$1\;1\;\ldots\;1\;\underbrace{\overset{j}{0}\;0\;\ldots\;0}_{\beta}\;\underbrace{\overset{k}{1}\;\;\;\;0}_{\gamma}$$

1…11$\beta\gamma$

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
	1	1	1	0	14
1	0	0	0	0	16

两种形式：

$\boxed{0} = \mathbf{0}$

$\boxed{1 \quad \cdots \quad 0} \neq \mathbf{0}$

共有两种生成规则：$\mathbf{1}\alpha$， $\alpha\beta$

解：

1) 令 $S_0 = \{\mathbf{0}\} \subseteq A$；

2) 若 $\alpha \in A$，则 $\mathbf{1}\alpha \in A$；

3) 若 $\alpha, \beta \in A$ 且 $\alpha \neq \mathbf{0}$，则 $\alpha\beta \in A$。

4)极小化。

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析:

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类:

a) N_0: 能被3整除

b) N_1: 除以3余数为1

c) N_2: 除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数,

a) $\alpha 0$是α的2倍

b) $\alpha 1$是α的2倍加1

$\alpha \in N_0$ ➔

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析：

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类：

a) N_0：能被3整除

b) N_1：除以3余数为1

c) N_2：除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数,

a) $\alpha 0$是α的2倍

b) $\alpha 1$是α的2倍加1

$$\alpha \in N_0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha 0 \in N_0 \\ \alpha 1 \in N_1 \end{array}$$

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析：

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类：

a) N_0：能被3整除

b) N_1：除以3余数为1

c) N_2：除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数，

a) $\alpha 0$是α的2倍

b) $\alpha 1$是α的2倍加1

$\alpha \in N_0 \Rightarrow \alpha 0 \in N_0$　　$\alpha \in N_1$

$\alpha 1 \in N_1$

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析：

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类：

a) N_0：能被3整除

b) N_1：除以3余数为1

c) N_2：除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数,

a) $\alpha 0$是α的2倍

b) $\alpha 1$是α的2倍加1

$$\alpha \in N_0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha 0 \in N_0 \\ \alpha 1 \in N_1 \end{cases} \qquad \alpha \in N_1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha 0 \in N_2 \\ \alpha 1 \in N_0 \end{cases}$$

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析:

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类:

a) N_0: 能被3整除

b) N_1: 除以3余数为1

c) N_2: 除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数,

a) $\alpha0$是α的2倍

b) $\alpha1$是α的2倍加1

$\alpha \in N_0 \rightarrow \alpha0 \in N_0$, $\alpha1 \in N_1$

$\alpha \in N_1 \rightarrow \alpha0 \in N_2$, $\alpha1 \in N_0$

$\alpha \in N_2$

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析:

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类:

a) N_0: 能被3整除

b) N_1: 除以3余数为1

c) N_2: 除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数,

a) $\alpha 0$是α的2倍

b) $\alpha 1$是α的2倍加1

$\alpha \in N_0 \rightarrow \alpha 0 \in N_0$ $\alpha 1 \in N_1$	$\alpha \in N_1 \rightarrow \alpha 0 \in N_2$ $\alpha 1 \in N_0$	$\alpha \in N_2 \rightarrow \alpha 0 \in N_1$ $\alpha 1 \in N_2$

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

$\alpha \in N_0 \rightarrow \alpha 0 \in N_0$ $\alpha 1 \in N_1$	$\alpha \in N_1 \rightarrow \alpha 0 \in N_2$ $\alpha 1 \in N_0$	$\alpha \in N_2 \rightarrow \alpha 0 \in N_1$ $\alpha 1 \in N_2$

1)基本项： $\{0\} \subseteq N_0$， $\{1\} \subseteq N_1$， $\varnothing \subseteq N_2$;

2）归纳项：

若 $\alpha \in N_0$ 且 $\alpha \neq 0$，则 $\alpha 0 \in N_0$， $\alpha 1 \in N_1$;

若 $\alpha \in N_1$，则 $\alpha 0 \in N_2$， $\alpha 1 \in N_0$;

若 $\alpha \in N_2$，则 $\alpha 0 \in N_1$， $\alpha 1 \in N_2$。

其中， N_0 就是我们所要的集合。

集合的联立归纳定义法

四种表示方法的比较

表 示 方 式	适　用　对　象	特　　点
列举法	有限集	直观
部分列举法	有限集或无限集	直观
命题法	任意集	易表达
归纳法	非空集	易计算机实现

例：字符串集合Σ^*

- 字母表Σ：字母(或称符号)的非空有限集合。
- 字母表Σ上的字符串是由Σ中的字母组成的有穷序列。

例：$\Sigma = \{a, b, c\}$，$a, ab, cba, aabbac$ 是Σ上的字符串。

- 字符串的长度：字符串 x 所含字母的个数，称为字符串 x 的长度，记作 $|x|$。

例：$|ab| = 2$，$|a|=1$，$|aabbac|= 6$

- 若 $|x| = 0$，则称 x 为空串，记做 ε

例：字符串集合Σ^*

■ **字符串相等**：设 x 和 y 是任意两个字符串，

则 $x = y$ 当且仅当

(1) $|x| = |y|$，且

(2) 组成 x 的诸字符与组成 y的诸字符依次相同。

例：若 $x = ab$，$y = ab$，则 $x = y$；

若 $x = ab$，$y = ba$，则 $x \neq y$。

例：字符串集合Σ^*

- 字符串的连接：设 Σ 是一字母表，x, y是 Σ上字符串,

$$x = a_1 a_2 \ldots a_n, \; y = b_1 b_2 \ldots b_m \;,$$

x 和 y 的连接记作 xy, $xy = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m$

- 规定：
  - $x\varepsilon = \varepsilon x = x$,
  - n个 x 的连接记作 x^n, $x^0 = \varepsilon$, $x^{n+1} = x^n x$
  - $|xy| = |x| + |y|$
  - 字符串的连接运算满足结合律: $x(yz) = (xy)z$

例：字符串集合Σ^*

- 设 x, y, z是任意字符串，则称 x 是字符串 xy 的前缀，y 是字符串 xy 的后缀。
  - ε 是 每个字符串的前缀、后缀

例：给定字符串 *abccba*，

前缀：*ε, a, ab, abc, abcc, abccb, abccba*

对应的后缀：*abccba, bccba, ccba , cba , ba, a, ε*

- 称 x，y，z 分别是字符串 xyz 的子串。
  - ε 是 每个字符串的子串
- 若 x 是 y 的子串（前缀，后缀）并且 $x \neq y$，则称 x 是 y 的 真子串（真前缀，真后缀）

例：字符串集合Σ^*

- Σ上的 所有字符串构成的集合，记做 Σ^*;
- Σ上的 所有非空字符串的集合，记做Σ^+

Σ^* 的归纳定义如下：

1) $\{\varepsilon\} \cup \Sigma \subseteq \Sigma^*$

2) 若 $x \in \Sigma^*$ 和 $a \in \Sigma$，则 $xa \in \Sigma^*$ (或 $ax \in \Sigma^*$)

3) Σ^*中的每一个元素都可通过有限次应用上述1)、2)规则得到。

例：字符串集合Σ^+

- Σ上的 所有字符串构成的集合，记做 Σ^*;
- Σ上的 所有非空字符串的集合，记做 Σ^+

Σ^+ 的归纳定义如下

1）$\Sigma \subseteq \Sigma^+$

2）若 $x \in \Sigma^+$ 和 $a \in \Sigma$，则 $xa \in \Sigma^+$ (或 $ax \in \Sigma^+$)

3）Σ^+ 中的每一个元素都 可通过有限次应用上述1)、2)规则得到。

- **∑上的语言**：Σ^*的子集

例如：{a, ab, cba, bba} 是 Σ = {a, b, c}上的语言.

- **语言的运算**：
  - 语言的**乘积 (连接)**：设 A 和 B 是∑上的语言，A 和 B 的乘积记作 $AB = \{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$

例：A = {ε, a, ab }，B = {a, bb }，则

AB = {a, bb, aa, abb, aba, abbb }

  - 语言的**幂运算A^n**：(1) $A^0 = \{\varepsilon\}$，(2) $A^{n+1} = A^nA$，$n \in N$
  - 语言的**闭包运算A^***：$A^* = \{\varepsilon\} \cup A \cup A^2 \cup \ldots\ldots$
  - A的**正闭包A^+**：$A^+ = A \cup A^2 \cup \ldots\ldots$

例：令 B = {a，bb}，则 B^2 = {aa, abb, bba, bbbb }

B^* = {ε, a, bb, aa, abb, bba, bbbb, …}

定理：设 A, B, C和D 是∑上的任意语言，则下列关系成立

(1) $A\varnothing = \varnothing A = \varnothing$

(2) $A\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}A = A$

(3) $(AB)C = A(BC)$

(4) 若 $A \subseteq B$ 和 $C \subseteq D$，则 $AC \subseteq BD$

(5) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

(6) $(B \cup C)A = BA \cup CA$

(7) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$

(8) $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$

定理：设 A, B, C和D 是Σ上的任意语言，则下列关系成立

(1) $A\varnothing = \varnothing A = \varnothing$

证明：由定义知$A\varnothing=\{ xy \mid x \in A \wedge y \in \varnothing \}$.

对任意的 $y \in \Sigma^*$， $y \in \varnothing$为假，所以对所有的$x, y \in \Sigma^*$,

$x \in A \wedge y \in \varnothing$为假。

因此，没有满足谓词的x和y。

故集合$A\varnothing = \varnothing$。

同理可证 $\varnothing A = \varnothing$。

定理：设 A, B, C和D 是Σ上的任意语言，则下列关系成立

(4) 若 $A \subseteq B$ 和 $C \subseteq D$，则 $AC \subseteq BD$

证明：对于任意 z，

$z \in AC$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in C)$

$\Rightarrow \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in B \wedge y \in D)$ ($A \subseteq B$ 和 $C \subseteq D$)

$\Leftrightarrow z \in BD$

所以，$AC \subseteq BD$。

定理：设 A, B, C和D 是∑上的任意语言，则下列关系成立

(5) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

证明：对于任意 z

$z \in A(B \cup C)$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in (B \cup C))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y ((z = xy \wedge x \in A \wedge y \in B) \vee (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in C))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in B) \vee \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow z \in AB \vee z \in AC$

$\Leftrightarrow z \in AB \cup AC$

定理：设A、B是Σ上的任意语言，m、n是任意自然数，则下列关系成立：

（1）$A^m A^n = A^{m+n}$

（2）$(A^m)^n = A^{mn}$

（3）若 $A \subseteq B$，则 $A^n \subseteq B^n$

定理：设A、B是 Σ上的任意语言，$n \in N$，则下列关系成立：

（1）$A^* = \{ \varepsilon \} \cup A^+$

（2）$A^n \subseteq A^*$，$n \geq 0$

（3）$A^n \subseteq A^+$，$n \geq 1$

定理：设A、B是Σ上的任意语言，$n\in N$，则下列关系成立：

（1）$A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$

（2）$A^n \subseteq A^*$， $n\geq 0$

（3）$A^n \subseteq A^+$， $n\geq 1$

(4) $A \subseteq A B^*$

(5) $A \subseteq B^*A$

(6) 若 $A \subseteq B$，则 $A^* \subseteq B^*$

(7) 若 $A \subseteq B$， 则 $A^+ \subseteq B^+$

(8) $A A^* = A^*A = A^+$

(9) 若 $\varepsilon \in A$，则 $A^* = A^+$

(10) $(A^*)^* = A^* A^* = A^*$

(11) $(A^*)^* = (A^+)^* = A^*$

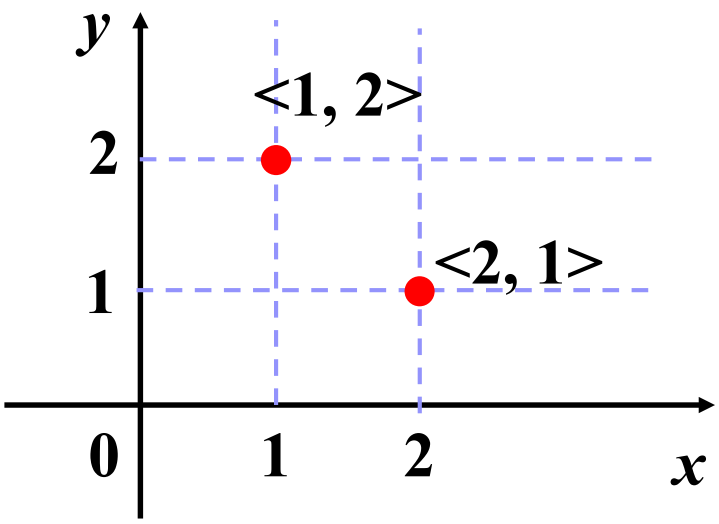
(12) $(A^+)^+ = A^+$

1.7 有序偶和笛卡儿乘积

- 掌握有序偶和笛卡儿乘积的定义和性质
- 熟练掌握求两个集合的笛卡儿乘积

- 偶集（二元集）：任意两个元素x, y组成的集合$\{x, y\}$
  - $\{x, y\} = \{y, x\}$
  - 又称为无序偶集，简称无序偶

例：平面直角坐标系坐标 $<x, y>$：有序偶



1.7.1 有序偶

定义15：（有序偶）任给两个对象 x 和 y，将它们按规定的顺序构成的序列，称之为**有序偶**，记为$<x, y>$。其中，x 称为有序偶的第一元，y 称为第二元。

注意：有序偶$\neq$二元集

如：　$<a, b> \neq <b, a>$

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

$$<a, a> \neq <a>$$

$$\{a, a\} = \{a\}$$

有序偶的集合定义： 1921年, 波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratovski）给出了一种有序偶的集合表示：

$$<x, y> = \{ \{x\}, \{x, y\} \}。$$

库拉托夫斯基，波兰数学家

$$<x, x> = \{ \{x\}, \{x, x\} \} = \{ \{x\} \}$$

定理13 有序偶的唯一性定理：

$<u, v> = <x, y>$当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

分析： $<u, v> = <x, y> \Leftrightarrow \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

$\Leftrightarrow u=x，\ v=y$???

定理 13 有序偶的唯一性定理：

$<u，v>=<x，y>$当且仅当 $u=x$ 和 $v=y$。

证: (充分性) 当 $u=x, v=y$ 时,有

$$\{u\}=\{x\} \text{ 和 } \{u, v\}=\{x,y\},$$

因此有 $\{\{u\}, \{u, v\}\}=\{\{x\}, \{x, y\}\}$,

即$<u, v>=<x, y>$

定理 13 有序偶的唯一性定理：

$<u, v>=<x, y>$当且仅当 $u=x$ 和 $v=y$。

证: (必要性)

由 $<u, v>=<x, y>$，得 $\{\{u\},\{u, v\}\}=\{\{x\},\{x, y\}\}$，

分两种情况来证$u=x$，$v=y$。

(1) 设 $u=v$。因为$<u, v>=\{\{u\},\{u, v\}\}=\{\{u\}\}$，

且 $<u, v>=<x, y>=\{\{x\},\{x, y\}\}$，

因此 $\{\{u\}\}=\{\{x\},\{x, y\}\}$。所以 $u=x=y$。

因此有 $u=x$，$v=y$。

(2) 设 $u\neq v$。因为$\{\{u\},\{u, v\}\}=\{\{x\},\{x, y\}\}$，

所以 $\{u\}=\{x\}$，$\{u, v\}=\{x, y\}$。

因此有 $u=x$，$v=y$。

定义16（n元序偶） 设 $n\in I^+$ 且 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 n 个任意的元素。

i) 若 n=1，则令 $<x_1>= x_1$

ii) 若 n=2，则令 $<x_1, x_2>= \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$

iii) 若 n >2，则令

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = <<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$$

称 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$为由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 组成的 n元序偶，并称每个 x_i（$1\leqslant i\leqslant n$) 为它的第 i 个分量。

定理 14 设 $n\in I^+$ 且 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 $y_1, y_2,\ldots, y_n$ 为任意元素，则 $<x_1, x_2, \ldots, x_n> = <y_1, y_2, \ldots, y_n>$ 当且仅当

$$(x_1= y_1) \wedge (x_2= y_2) \wedge \ldots \wedge (x_n= y_n)$$

用关于 n 的数学归纳法证明。

例：把三元序偶$< a, b, c >$定义为$\{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\} \}$，合适吗？说明理由。

解：不合适：违反唯一性定理。

反例：$<a, b, a> = \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, a\}\}= \{\{a\}, \{a, b\}\}$

$<a, a, b> =\{ \{a\}, \{a, a\}, \{a, a, b\} \}= \{\{a\}, \{a, b\}\}$

显然 $a \neq b$ 时，$<a, b, a>$与$<a, a, b>$不相等，但按上述集合定义相等，矛盾。

例. 1) 设C是集合，$x, y \in C$, 试证 $<x, y> \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$

2) $a \in \cup <a, b>$且$b \in \cup <a, b>$

1.7 有序偶和笛卡儿乘积

- 掌握有序偶和笛卡儿乘积的定义和性质
- 熟练掌握求两个集合的笛卡儿乘积

1.7.2 笛卡尔乘积

定义17 (笛卡尔乘积) 集合 A 和 B 的笛卡儿乘积 $A\times B$ 定义为： $A\times B = \{<x, y> \mid x\in A \wedge y \in B\}$

例：$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x\}$，$D = \varnothing$，则有：

$A\times B = \{<a, 1>,<a, 2>,<a, 3>,<b, 1>,<b, 2>, <b, 3>\}$

$B\times A = \{<1, a>, <1, b>,<2, a>, <2, b>,<3, a>, <3, b>\}$

因此，笛卡尔乘积不满足交换律。

1.7.2 笛卡尔乘积

定义17 (笛卡尔乘积) 集合 A 和 B 的笛卡儿乘积 $A\times B$ 定义为： $A\times B = \{\langle x, y\rangle \mid x\in A \wedge y \in B\}$

例：$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x\}$，$D = \varnothing$，则有：

$A\times D = \{a, b\} \times\varnothing = \varnothing$

$D\times A = \varnothing\times\{a, b\} = \varnothing$

因此，当$A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$ 时，$A\times B = \varnothing$ 。

问题： 若$A\times B = \varnothing$，是否一定有$A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$？

定理15 设A，B为任意两个集合，则

$$A\times B=\varnothing \text{ 当且仅当 } A=\varnothing \text{ 或 } B=\varnothing 。$$

证明： 只需证明

$$A\times B\neq\varnothing \text{ 当且仅当 } A\neq\varnothing \text{ 且 } B\neq\varnothing$$

定理 16 若A, B 为任意两个有限集，则

$$\#(A\times B)=\#A\cdot\#B。$$

定理17 设 A，B，C 和 D 为任意四个非空集合，则

(1) $A \times B \subseteq C \times D$ 当且仅当 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$;

(2) $A \times B = C \times D$ 当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$。

证： (1) （必要性）

假设 $A \times B \subseteq C \times D$成立。

对任意 $x \in A, y \in B$, 有

$$\langle x, y\rangle \in A \times B。$$

由 $A \times B \subseteq C \times D$ 得， $\langle x, y\rangle \in C \times D$。

因此， $x \in C$ 且$y \in D$。

得，$A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$。

定理17 设 A，B，C 和 D 为任意四个非空集合，则

(1) $A\times B \subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$;

(2) $A\times B = C\times D$ 当且仅当 $A=C$ 且 $B=D$。

证： (1) （充分性）

假设$A\subseteq C$ 且$B \subseteq D$成立。

对任意的$<x, y> \in A\times B$，有 $x\in A$且 $y\in B$。

由 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$ 得 $x\in C$，$y\in D$。

因此，$<x, y> \in C\times D$。

得， $A\times B\subseteq C\times D$。

(2) 由(1) 可得。

定理18 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$；

(2) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$；

(3) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$；

(4) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$；

(5) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$；

(6) $(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$。

定理18 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;

证: (1) 由定理17知

$$A\times B\subseteq A\times(B\cup C),\ A\times C\subseteq A\times(B\cup C),$$

因此， $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$ 。

对任意的$<x, y>\in A\times(B\cup C)$，则$x\in A$ 且$y\in B\cup C$。

考虑两种情况： $y\in B$或$y\in C$:

(a) 若 $y\in B$，则$<x, y>\in A\times B$;

(b) 若 $y\in C$，则$<x, y>\in A\times C$;

因此$<x, y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$,

得$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$。

综上，有 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$。

定理18 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$；

(2) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$；

(3) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$；

(4) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$；

(5) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$；

(6) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$。

定理18 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(5) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$；

证: $<x,y>\in A\times(B-C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B-C$,

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\notin C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B \wedge <x,y>\notin A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in (A\times B)-(A\times C)$,

故 $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$。

例：以下命题是否成立，给出证明或反例：

(1) $(A \cap B)\times(C \cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$

(2) $(A \cup B)\times(C \cup D) = (A\times C) \cup (B\times D)$

解: (1) 成立。对于任意$<x，y>$,

$<x，y>\in (A \cap B)\times(C \cap D) \Leftrightarrow x \in A\cap B \wedge y\in C \cap \mathrm{D}$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y\in C \wedge y\in D$

$\Leftrightarrow(x \in A \wedge y\in C) \wedge (x \in B \wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow <x，y>\in (A\times C) \wedge <x，y>\in (B\times D)$

$\Leftrightarrow <x，y>\in (A\times C) \cap (B\times D)$

所以， $(A \cap B)\times(C \cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$

(2) 不成立。

反例：$A=\{1\}, B=\{2\}, C=\{3\}, D=\{4\}$

或 $A=\varnothing, B=\{2\}, C=\{3\}, D=\varnothing$

可把两个集合的笛卡儿乘积推广到多个集合上

定义18： 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意 n 个集合，它们的笛卡儿乘积 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 定义为：

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$= \{ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid \text{当 } i = 1, \ldots, n \text{ 时，} x_i \in A_i \}$$

- 特别地， 将 $A \times A \times \ldots\ldots \times A$ 记作 A^n

例：n维欧氏空间是实数轴 R的 n维笛卡尔乘积 $\mathbf{R}^n$, 即

$$\mathbf{R}^n = \{ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_i \in \mathbf{R}, 1 \le i \le n \}$$

- n个集合的笛卡儿乘积有与两个集合的笛卡儿乘积相同的运算性质。

总结

1.1 集合与元素

1.2 集合间的相等和包含关系

1.3 幂集

1.4 集合的运算

1.5 有穷集的计数原理

1.6 集合的归纳定义法

1.7 有序偶和笛卡儿乘积

THE END

例： 给出下列命题的充分必要条件，并证明。

(1) $P(B) \subseteq P(C)$

(2) $P(B) \subset P(C)$

(3) $P(B) = P(C)$

解: (1) $P(B) \subseteq P(C)$ iff $B \subseteq C$。

(必要性) 对任意的$x \in B$，有$\{x\} \subseteq B$, 因此$\{x\} \in P(B)$, t得 $\{x\} \in P(C)$。所以$\{x\} \subseteq C$, 得$x \in C$。因此$B \subseteq C$。

(充分性) 对任意的$y \in P(B)$，有$y \subseteq B$， 因此$y \subseteq C$。从而$y \in P(C)$, 所以$P(B) \subseteq P(C)$ 。

(3) 由(1) 知 $P(B) = P(C)$ iff $B=C$。

例： 给出下列命题的充分必要条件，并证明。

(1) $P(B) \subseteq P(C)$

(2) $P(B) \subset P(C)$

(3) $P(B) = P(C)$

解 (2) $P(B) \subset P(C)$ iff $B \subset C$。

(必要性) 若$P(B) \subset P(C)$，则$P(B) \subseteq P(C)$，由(1) 知$B \subseteq C$。

由于$P(B) \subset P(C)$，则存在一个x 使得$x \in P(C)$, $x \notin P(B)$。

得到 $x \subseteq C$ 但$x \nsubseteq B$。因此$P(B) \subset P(C)$。

(充分性) 同理可证。

例. 证明以下充分必要条件:

(1) $x \notin A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

(2) $A \oplus B = A \oplus C$ iff $B=C$

(3) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

证: (1) $x \notin A \oplus B$

$\Leftrightarrow x \notin (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$ (⊕的定义)

$\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \cap (\sim B \cup \sim A)$ (分配律)

$\Leftrightarrow x \in \sim((A \cup B) \cap (\sim B \cup \sim A))$

$\Leftrightarrow x \in \sim(A \cup B) \cup \sim(\sim B \cup \sim A)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow x \in (\sim A \cap \sim B) \vee x \in B \cap A$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

$A \oplus B = (A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B)$? ?

例. 证明以下充分必要条件:

(1) $x \notin A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

(2) $A \oplus B = A \oplus C$ iff $B = C$

(3) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

(1) $A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$ (⊕的定义)

$= (A \cup B) \cap (\sim B \cup \sim A)$ (分配律)

$= \sim(\,(A \cup B) \cap (\sim B \cup \sim A))$

$= \sim (A \cup B) \cup \sim (\sim B \cup \sim A)$

$= (\sim A \cap \sim B) \cup (B \cap A)$

$= (A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B)$

例. 证明以下充分必要条件：

(1) $x \notin A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

(2) $A \oplus B = A \oplus C$ iff $B=C$

(3) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

证: (2) (充分性) 显然成立。

(必要性) 反证法。假设 $B \neq C$，则一定存在 $x \in B$ 且 $x \notin C$，或者存在 $x \in C$ 且 $x \notin B$。不失一般性，假设 $x \in B$ 且 $x \notin C$。

(a) 如果 $a \in A$，得 $x \notin A \oplus B$ 且 $x \in A \oplus C$，矛盾。

(b) 如果 $a \notin A$，得 $x \in A \oplus B$ 且 $x \notin A \oplus C$，矛盾。

因此，假设不成立，即 $B=C$。

例. 证明以下充分必要条件:

(1) $x \notin A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

(2) $A \oplus B = A \oplus C$ iff $B=C$

(3) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

证: (3) (充分性) 如果 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$，则 $A \cup B = B$ 或 $A \cup B = A$。

对任意的集合X, $X \subseteq A \cup B$ iff $X \subseteq B$ 或 $X \subseteq A$。

因此 $X \in P(A \cup B)$ iff $X \in P(A) \cup P(B)$。

(必要性) 反证法。假设 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ 不成立，则 $A \nsubseteq B$ 且 $B \nsubseteq A$.

则存在x, y使得 $x \in A, x \notin B, y \in B, y \notin A$。

得 $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, 但 $\{x, y\} \nsubseteq A$, $\{x, y\} \nsubseteq B$。

因此， $\{x, y\} \in P(A \cup B)$ 但 $\{x, y\} \notin P(A) \cup P(B)$ 。矛盾

例：判断一下结论是否成立，如果成立，就给予证明，如果不成立，就用文氏图加以说明。

(1) 若$A\cup B=A\cup C$, 则$B=C$; ✗

(2) 若$A\cap B=A\cap C$, 则$B=C$; ✗

(3) 若$A\subseteq B\cup C$, 则$A\subseteq B$或$A\subseteq C$; ✗

(4) 若$B\cap C\subseteq A$, 则$B\subseteq A$或$C\subseteq A$; ✗

(5) 若$A\cap C\subseteq B\cap C$且$A\cap\sim C\subseteq B\cap\sim C$, 则$A\subseteq B$;

(6) 若$A\cap B=A\cap C$且$\sim A\cap B=\sim A\cap C$, 则$B=C$。

解：(1) 反例：$A=\{1, 2\}, B=\{1\}, C=\{1, 2\}$。

(2) 反例：$A=\{1\}, B=\{1\}, C=\{1, 2\}$。

(3) 反例：$A=\{1, 2\}, B=\{1\}, C=\{2\}$。

(4) 反例：$A=\{1\}, B=\{1, 2\}, C=\{1, 3\}$。

例：判断一下结论是否成立，如果成立，就给予证明，如果不成立，就用文氏图加以说明。

(5) 若$A\cap C \subseteq B\cap C$且$A \cap \sim C \subseteq B \cap \sim C$, 则$A \subseteq B$;

(6) 若$A \cap B=A \cap C$且$\sim A\cap B= \sim A \cap C$, 则$B=C$。

证: (5) 对任意$x\in A$，考虑两种情况：$x \in C$或$x \notin C$:

(a) 当$x \in C$时，有$x \in A\cap C$，则$x \in B\cap C$，得$x \in B$。

因此，$A \subseteq B$。

(b) 当$x \notin C$时，有$x \in \sim C$, 因此$x \in A\cap \sim C$。

所以$x \in B \cap \sim C$，得$x \in B$。因此$A \subseteq B$。

例：判断一下结论是否成立，如果成立，就给予证明，如果不成立，就用文氏图加以说明。

(5) 若$A\cap C \subseteq B\cap C$且$A \cap \sim C \subseteq B \cap \sim C$, 则$A \subseteq B$;

(6) 若$A \cap B = A \cap C$且$\sim A \cap B = \sim A \cap C$, 则$B=C$。

证: (6) $B = B \cap (A \cup \sim A)$

$$= (B \cap A) \cup (B \cap \sim A)$$

$$= (C \cap A) \cup (C \cap \sim A)$$

$$= C \cap (A \cup \sim A)$$

$$= C$$

例：试证 若 $A \subseteq B$ 和 $C \subseteq D$，则 $AC \subseteq BD$

证明：对于任意 z

$z \in AC$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in C)$

$\Rightarrow \exists x \exists y (z = xy \wedge x \in B \wedge y \in D)$ ($A \subseteq B$ 和 $C \subseteq D$)

$\Leftrightarrow z \in BD$

所以，$AC \subseteq BD$

例：试证 $A(B \cup C) = AB \cup AC$

证明：对于任意 z

$z \in A(B \cup C)$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, (z = xy \wedge x \in A \wedge y \in (B \cup C))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, (z = xy \wedge x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, ((z = xy \wedge x \in A \wedge y \in B) \vee (z=xy \wedge x \in A \wedge y \in C))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, ((z=xy \wedge x \in A \wedge y \in B) \vee \exists x \exists y\, (z=xy \wedge x \in A \wedge y \in C))$

$\Leftrightarrow z \in AB \vee z \in AC$

$\Leftrightarrow z \in AB \cup AC$

定理： 设A、B是∑上的任意语言，m、n是任意自然数，则下列关系成立：

（1） $A^m A^n = A^{m+n}$

（2） $(A^m)^n = A^{mn}$

（3）若 $A \subseteq B$，则 $A^n \subseteq B^n$

定理： 设A、B是 Σ上的任意语言，$n\in N$，则下列关系成立：

(1) $A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$;　　(2) $A^n \subseteq A^*$，$n\geq 0$

(3) $A^n \subseteq A^+$，　$n\geq 1$;　(4) $A \subseteq A B^*$

(5) $A \subseteq B^*A$;　　(6) 若 $A \subseteq B$，则 $A^* \subseteq B^*$

(7) 若 $A \subseteq B$，　则 $A^+ \subseteq B^+$

(8) $A A^* = A^*A = A^+$

(9) 若 $\varepsilon \in A$，则 $A^* = A^+$

(10) $(A^*)^* = A^* A^* = A^*$

(11) $(A^*)^* = (A^+)^* = A^*$

(12) $(A^+)^+ = A^+$

作业：

1.用归纳定义法给出下列集合：

(1)不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；

(2)不允许有前0的被 5 整除的二进制无符号整数的集合。

2。 给出下列命题的充分必要条件，并证明。

(1) $P(B) \subseteq P(C)$

(2) $P(B) \subset P(C)$

(3) $P(B) = P(C)$

3。 证明以下充分必要条件

(1) $x \notin A \oplus B$ iff $B=C$

(2) $A \oplus B = A \oplus C$ iff $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

(3) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff

$$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$$

作业：《离散数学》王兵山

习题1.2 (12-13页)

3. e), g)

4. d), e)

6. a), c), e), g)

例：如果$B \cup C \subseteq A$，判断

$$(A\times A)-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$$

是否成立，给出证明或反例。

解：不成立。

反例: $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$

$(A\times A)-(B\times C)=\{<1, 1>, <1, 3>, <2, 1>, <2,2>$

$<2,3>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>\}$

$(A-B)\times(A-C)=\{2, 3\}\times\{1, 2\}$

$=\{<2, 1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

例：$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{ x \}$，$D = \varnothing$ ，则有：

$$(A\times B)\times C = \{<<a, 1>, x>, <<a, 2>, x>, <<a, 3>, x>, <<b, 1>, x>, <<b, 2>, x>, <<b, 3>, x>\}$$

$$= \{<a, 1,x>, <a, 2, x>, <a, 3, x>, <b, 1, x>, <b, 2, x>,<b, 3, x>\}$$

$$A\times(B\times C) = \{<a,<1, x>>,<a,< 2, x>>,<a,< 3, x>>, <b,< 1, x>>,<b,< 2, x>>,<b,< 3, x>>\}$$

因此，笛卡尔乘积不满足 结合律。

定义14（集类上的∪、∩运算 (广义并、广义交)）

设$\mathcal{B}$为任意集类。

(1) 称集合$\{x \mid 有X\in\mathcal{B}使x\in X\}$为$\mathcal{B}$的广义并，并记为$\cup\mathcal{B}$；

(2) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则称集合$\{x \mid 若X\in\mathcal{B}，则x\in X\}$为$\mathcal{B}$的广义交，记为$\cap\mathcal{B}$。

$$x\in\cup\mathcal{B}\quad \text{iff}\quad 有X\in\mathcal{B}使\ x\in X$$

$$x\in\cap\mathcal{B}\quad \text{iff}\quad 若\ X\in\mathcal{B}则\ x\in X$$

注意：若 $\mathcal{B}=\varnothing$, 则蕴涵式 $X\in\mathcal{B}\to x\in X$ 的前件为假，$\forall X（X\in\mathcal{B}\to x\in X）$为真，这就定义了全集 U。因此，要求 $A\neq\varnothing$。

例：外语系120名学生中，其中

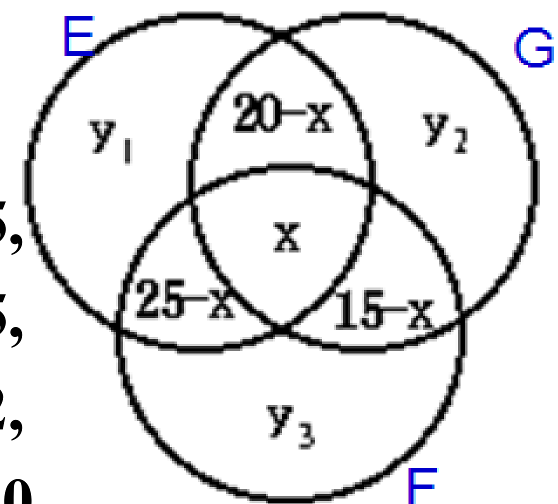
(1) 100名学生至少学习英语、德语、法语中的一种, (2) 有65人学英语，45人学德语，42人学法语， (3) 20人既学英语又学德语，25人既学英语又学法语，15人既学德语又学法语。

求同时学这三种外语的人数 和 仅学其中一门外语的人数。

解2：设同时学这三种外语的人数为 x，仅学英语、德语、法语的学生人数分别为y_1, y_2, y_3。 故

仅学英语和德语的人数为20－x, 仅学英语和法

－x, 仅学德语和法语的人数为15－x。



由学英语的有65人得 $y_1+20-x+x+25-x=65$,

由学德语的有45人得 $y_2+20-x+x+15-x=45$,

由学法语的有42人得 $y_3+25-x+x+15-x=42$,

$$y_1+20-x+x+25-x+y_2+15-x+y_3=100$$

解方程组得： $x=8$ ，$y_1=28$, $y_2=18$, $y_3=10$。因此，同时学这三门外语的有8人，仅学一门的有 28＋18＋10＝56人。

定理8 设A为任意集合，$\mathcal{B}$为任意集合族，则有：

(1) 若$\mathcal{B} \neq \varnothing$，则 $A \cup (\cup \mathcal{B}) = \cup \{A \cup C \mid C \in \mathcal{B}\}$

(2) 若$\mathcal{B} \neq \varnothing$，则$A \cap (\cap \mathcal{B}) = \cap \{A \cap C \mid C \in \mathcal{B}\}$

(3) 若$\mathcal{B} \neq \varnothing$，则$A \cup (\cap \mathcal{B}) = \cap \{A \cup C \mid C \in \mathcal{B}\}$

(4) $A \cap (\cup \mathcal{B}) = \cup \{A \cap C \mid C \in \mathcal{B}\}$

(5) 若$\mathcal{B} \neq \varnothing$，则$\sim(\cap \mathcal{B}) = \cup \{\sim C \mid C \in \mathcal{B}\}$

(6) 若$\mathcal{B} \neq \varnothing$，则$\sim(\cup \mathcal{B}) = \cap \{\sim C \mid C \in \mathcal{B}\}$

称(3)与(4)为广义分配律，(5)与(6)为广义德·摩尔根律

定理9 设 A 为任意集合， $\mathcal{B}$为任意集类。

(1) 若 $B\in\mathcal{B}$ ， 则 $\cap\mathcal{B}\subseteq B$ 且 $B\subseteq\cup\mathcal{B}$ ；

(2) 若对每个$B\in\mathcal{B}$皆有$A\subseteq B$， 则 $A\subseteq\cap\mathcal{B}$ ；

(3) 若对每个$B\in\mathcal{B}$皆有 $B\subseteq A$， 则$\cup\mathcal{B}\subseteq A$。

定理10 设$\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$ 为任意两个集类，则有

$$\cup(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = \cup\{A\cup B \mid A\in\mathcal{A} \text{ 且 } B\in\mathcal{B}\}$$

$$= (\cup\mathcal{A})\cup(\cup\mathcal{B})$$

例：设A={0, 1}，B={1, 2}，试确定下列集合

(1) $A\times\{1\}\times B$

(2) $A^2\times B$

(3) $(B\times A)^2$

解: (1) $A\times\{1\}\times B$={ <0, 1, 1>, <0, 1, 2>, <1, 1,1>, <1,1, 2> }

(2) $A^2\times B= A\times A\times B$={<0, 0, 1>, <0, 0, 2>, <0, 1, 1>, <0, 1, 2>, <1, 0, 1>, <1, 0, 2>, <1, 1, 1>, <1, 1, 2> }

(3) $(B\times A)^2=B\times A\times B\times A$={ <1, 0, 1, 0>, <1, 0, 1, 1>, <1, 0, 2, 0>, <1, 0, 2, 1>, <1, 1, 1, 0>, <1, 1, 1, 1>, <1, 1, 2, 0>, <1, 1, 2, 1>, <2, 0, 1, 0>, <2, 0, 1, 1>, <2, 0, 2, 0>, <2, 0, 2, 1>, <2, 1, 1, 0>, <2, 1, 1, 1>, <2, 1, 2, 0>, <2, 1, 2, 1> }