离散数学（2）
第五次作业讲解

2024 秋季学期

1. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。若对每个$S_1\in \Pi_1$，皆有 $S_2\in \Pi_2$，使得$S_1\subseteq S_2$，就称Π_1为Π_2的加细，记为$\Pi_1 \leq \Pi_2$。如果$\Pi_1 \leq \Pi_2$且$\Pi_1 \neq \Pi_2$，就称Π_1为Π_2的真加细，并记为$\Pi_1<\Pi_2$。设R_1和R_2是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$当且仅当$A/R_1 \leq A/R_2$;

b) $R_1 \subset R_2$当且仅当$A/R_1 < \mathrm{A}/\mathrm{R}_2$;

知识点：划分

- 设 A 为任意集合且 $\Pi\subseteq\mathcal{P}(A)$．如果$\Pi$满足：
  (1) 若$S \in\Pi$，则$S\neq\phi$;
  (2) $\cup\Pi=A$;
  (3) 若$S_1, S_2 \in\Pi$, 且$S_1 \cap S_2 \neq\phi$，则$S_1=S_2$.

则称Π为A的一个划分.

- 若R为集合A上的等价关系，则商集 $A/R=\{[x]_R \mid x\in A\}$为$A$的一个划分. （定理22）

1. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。若对每个$S_1\in \Pi_1$， 皆有 $S_2\in \Pi_2$，使得$S_1\subseteq S_2$，就称Π_1为Π_2的加细，记为$\Pi_1 \le \Pi_2$。如果$\Pi_1 \le \Pi_2$且$\Pi_1 \ne \Pi_2$，就称Π_1为Π_2的真加细，并记为$\Pi_1<\Pi_2$。设R_1和R_2是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当$A/R_1 \le A/R_2$;

b) $R_1 \subset R_2$ 当且仅当$A/R_1 < A/R_2$;

证明：a) 必要性。

若 $R_1 \subseteq R_2$，对任意 $[x]_{R_1}\in A/R_1$, 下面证明： $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$ ，其中$[x]_{R_2} \in A/R_2$。

对任意 $y\in [x]_{R_1}$， 有$<x, y>\in R_1$。

由于$R_1 \subseteq R_2$，因此，$<x, y>\in R_2$，得 $y\in [x]_{R_2}$.

故 $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$ 。

因此，得 $A/R_1 \le A/R_2$.

1. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。若对每个$S_1 \in \Pi_1$，皆有 $S_2 \in \Pi_2$，使得$S_1 \subseteq S_2$，就称Π_1为Π_2的加细，记为$\Pi_1 \leq \Pi_2$。如果$\Pi_1 \leq \Pi_2$且$\Pi_1 \neq \Pi_2$，就称Π_1为Π_2的真加细，并记为$\Pi_1 < \Pi_2$。设R_1和R_2是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$当且仅当$A/R_1 \leq A/R_2$;

b) $R_1 \subset R_2$当且仅当$A/R_1 < \mathrm{A}/\mathrm{R}_2$;

证明：a) 充分性。

若 $A/R_1 \leq A/R_2$，对任意$<x, y> \in R_1$，下面证明$<x, y> \in R_2$。

由$<x, y> \in R_1$得 $y \in [x]_{R_1}$。

由于$A/R_1 \leq A/R_2$，则存在$[x']_{R_2}$，使得$[x]_{R_1} \subseteq [x']_{R_2}$，从而有$y \in [x']_{R_2}$。

又由于$[x]_{R_1} \subseteq [x']_{R_2}$且 $x \in [x]_{R_1}$，得 $x \in [x']_{R_2}$，从而$[x]_{R_2} = [x']_{R_2}$。

所以，得 $y \in [x]_{R_2}$，即$<x, y> \in R_2$。

综上，可得$R_1 \subseteq R_2$。

1. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。若对每个$S_1\in \Pi_1$，皆有 $S_2\in \Pi_2$，使得$S_1\subseteq S_2$，就称Π_1为Π_2的加细，记为$\Pi_1 \leq \Pi_2$。如果$\Pi_1 \leq \Pi_2$且$\Pi_1 \neq \Pi_2$，就称Π_1为Π_2的真加细，并记为$\Pi_1<\Pi_2$。设R_1和R_2是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当$A/R_1 \leq A/R_2$;

b) $R_1 \subset R_2$ 当且仅当$A/R_1 < A/R_2$;

证明：b) 必要性。

若 $R_1 \subset R_2$，则有$R_1 \subseteq R_2$。由a)知，$A/R_1 \leq A/R_2$，下面证明 $A/R_1 \neq A/R_2$

由于$R_1 \subset R_2$，必存在$<x, y>$，使得$<x, y> \in R_2$但$<x, y> \notin R_1$。

则一定有 $y\in [x]_{R_2}$且$y\notin [x]_{R_1}$，即$[x]_{R_2} \in A/R_2$，但$[x]_{R_1} \notin A/R_1$。

因此，$A/R_1 \neq A/R_2$。

故有$A/R_1 < A/R_2$。

1. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。若对每个$S_1\in \Pi_1$，皆有 $S_2\in \Pi_2$，使得$S_1\subseteq S_2$，就称Π_1为Π_2的加细，记为$\Pi_1 \le \Pi_2$。如果$\Pi_1 \le \Pi_2$且$\Pi_1 \ne \Pi_2$，就称Π_1为Π_2的真加细，并记为$\Pi_1<\Pi_2$。设R_1和R_2是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当$A/R_1 \le A/R_2$;

b) $R_1 \subset R_2$ 当且仅当$A/R_1 < A/R_2$;

证明：b) 充分性。

若 $A/R_1 < A/R_2$，则有$A/R_1\le A/R_2$且$A/R_1 \ne A/R_2$。

由于$A/R_1\le A/R_2$，由 a)可得 $R_1 \subseteq R_2$，下面证明$R_1 \subset R_2$。

对于任意$[x]_{R_1}$，由于$A/R_1\le A/R_2$，则必有$[x']_{R_2} \in A/R_2$，使得$[x]_{R_1}\subseteq [x']_{R_2}$。

由于$x \in [x]_{R_1}$，得$x \in [x']_{R_2}$，因此，$[x']_{R_2}$就为$[x]_{R_2}$，即必有$[x]_{R_1}\subseteq [x]_{R_2}$。

由于$A/R_1 \ne A/R_2$，则一定存在$[x_0]_{R_1}\in A/R_1$，使得$[x_0]_{R_1} \subset [x_0]_{R_2}$，

则有$[x_0]_{R_2} \notin A/R_1$。

因此，一定存在 $y \in A$，使得$< x_0, y> \in R_2$但$< x_0, y> \notin R_1$。

因此， $R_1\subset R_2$。

2.设 f 为从集合X到Y的部分函数且 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$。证明：

1) $f[\cup\mathcal{A}] = \cup\{ f[A] \mid A\in \mathcal{A} \}$；

2) 若$\mathcal{A}\neq\varnothing$，则 $f[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$；

并说明为什么 2)中“$\subseteq$”不能替换为 “=”。

知识点：像、广义并与广义交

- 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数，$A \subseteq X$，则 A 在 f 下的像 $f[A] = \{ y \in Y \mid \exists x \in A$ 使 $y = f(x) \}$
  $= \{ f(x) \mid x \in A$ 且 $f(x)\downarrow \}$

- 设$\mathcal{B}$ 为任意集类，
  - B 的广义并$\cup\mathcal{B}=\{ x \mid \exists X(X \in B \wedge x\in X) \}$为$\mathcal{B}$的广义并
  - 若$\mathcal{B} \neq\varnothing$， $\mathcal{B}$ 的广义交$\cap\ \mathcal{B} =\{ x \mid \forall X(X \in B \to x\in X) \}$

2.设 f 为从集合X到Y的部分函数且 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$。证明：

1) $f[\cup\mathcal{A}] = \cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$；

2) 若$\mathcal{A}\neq\varnothing$，则 $f[\cap\mathcal{A}]\subseteq\cap\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$；

并说明为什么 2)中"$\subseteq$"不能替换为"$=$"。

证明： 1) 对任意 $b\in f[\cup\mathcal{A}]$，则存在$a\in\cup\mathcal{A}$，使得$b=f(a)$。

因为$a\in\cup\mathcal{A}$，因此，存在$A\in\mathcal{A}$，使得 $a\in A$。

故 $b\in f[A]\subseteq\cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$，得 $b\in\cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$。

故有 $f[\cup\mathcal{A}]\subseteq\cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$

对任意$b\in\cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$，则存在$A\in\mathcal{A}$，使得 $b\in f[A]$。

因此，存在 $a\in A\subseteq\cup\mathcal{A}$，使得 $b=f(a)\in f[\cup\mathcal{A}]$，得 $b\in f[\cup\mathcal{A}]$。

得 $\cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}\subseteq f[\cup\mathcal{A}]$。

综上，$f[\cup\mathcal{A}] = \cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$。

2.设 f 为从集合X到Y的部分函数且 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$。证明：

1) $f[\cup\mathcal{A}] = \cup\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$；

2) 若$\mathcal{A}\neq\varnothing$，则 $f[\cap\mathcal{A}]\subseteq\cap\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$；

并说明为什么 2)中“$\subseteq$”不能替换为“$=$”。

证明： 2)若$\mathcal{A}\neq\varnothing$，对任意 $b\in f[\cap\mathcal{A}]$，则存在$a\in\cap\mathcal{A}$，使得$b=f(a)$。

因为 $a\in\cap\mathcal{A}$，因此，对任意$A\in\mathcal{A}$，使得 $a\in A$。

故，对任意$A\in\mathcal{A}$，均有$b\in f[A]$，得$b\in\cap\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$。

所有，得$f[\cap\mathcal{A}]\subseteq\in\cap\{f[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$。

下面给出 $\cap\{f[A]A\in\mathcal{A}\}\subseteq f[\cap\mathcal{A}]$ 不成立的反例：

$X=\{1, 2, 3, 4\}$，$Y=\{a\}$，$A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{3, 4\}$, $\mathcal{A}=\{A_1, A_2\}$，$f=\{<1, a>, <3, a>\}$,

$f[A_1]=\{a\}$，$f[A_2]=\{a\}$，$f[A_1]\cap f[A_2]=\{a\}$,

$A_1\cap A_2=\emptyset$，$f[A_1\cap A_2]=\emptyset$。

3. 下列集合能够定义函数？如果能，求出它的定义域和值域。

(1) $\{ <1, <2, 3> >, <2, <3, 4> >, <3, <1, 4> >, <4, <1, 4> > \}$；

(2) $\{ <1, <2, 3 > >, <2, <3, 4 > >, <3, <3, 2 > > \}$；

(3) $\{< 1, <2 , 3 > > , < 2 , <3 , 4 > >, < 1, <2 , 4 > > \}$；

(4) $\{ <1, <2, 3 >, <2, <2,3> >, <3, <2, 3>> \}$.

知识点：函数、定义域与值域

- 如果从集合X到Y的二元关系 f 是 “ 单值 ” 的，即f 满足： 若$<x, y_1>\in f$ 且$<x, y_2>\in f$，则 $y_1 = y_2$，就称 f 为从 X 到 Y 的部分函数.
  - f 的定义域 $\mathrm{dom}\,(f) = \{ x\in X \mid \exists y \in Y$ 使 $y = f(x) \} \subseteq X$
  - f 的值域 $\mathrm{ran}\,f = \{ y \in Y \mid \exists x \in X$ 使 $y = f(x) \} \subseteq Y$
- 如果f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数且 $\mathrm{dom}\,f = X$，则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称 f 为从 X 到 Y 的函数，记为 $f: X \to Y$.

3. 下列集合能够定义函数？如果能，求出它的定义域和值域。

(1) { <1, <2, 3> >, <2, <3, 4> >, <3, <1, 4> >, <4, <1, 4> > };

(2) { <1, <2, 3 > >, <2, <3, 4 > >, <3, <3, 2 > >};

(3) {< 1, <2 , 3 > > , < 2 , <3 , 4 > >, < 1, <2 , 4 > > };

(4) { <1, <2, 3 >, <2, <2, 3> >, <3, <2, 3>> }.

解： (1) 为 {1, 2, 3, 4}到 {<2, 3>, <3, 4>, <1, 4> }的函数，且
定义域为 {1, 2, 3, 4}，值域为{<2, 3>, <3, 4>, <1, 4> }。

(2) 为{1, 2, 3}到 {<2, 3>, <3, 4>, <3, 2> }的函数，且
定义域为 {1, 2, 3}，值域为{<2, 3>, <3, 4>, <3, 2> }。

(3) 不是函数， 因为有< 1, <2 , 3 > > , < 1, <2 , 4 > > ，不满足单值性，不是部分函数，也不是函数。

(4)为 {1, 2, 3}到 {<2, 3> }的函数，且
定义域为 {1, 2, 3}，值域为{<2, 3>}。

4. 设f为从X到Y的部分函数，试证明：

a) 若$A, B\in P(X)$，则$f[A]-f[B]\subseteq f[A-B]$，并举例说明不能用“=”代替其中的“$\subseteq$”；

b) 若$C, D\in P(Y)$，则$f^{-1}[C-D]=f^{-1}[C]-f^{-1}[D]$。

知识点：像、原像

- 设f为从集合X到集合Y的部分函数，$A\subseteq X$且$B\subseteq Y$，则
  - A在f下的像 $f[A]=\{y\in Y \mid \exists x\in A$ 使 $y=f(x)\}$
    $=\{f(x) \mid x\in A$ 且 $f(x)\downarrow\}$
  - B在f下的源像 $f^{-1}[B]=\{x\in X \mid \exists y\in B$ 使 $y=f(x)\}$
    $=\{x\in X \mid f(x)\downarrow$ 且 $f(x)\in B\}$

4. 设f为从X到Y的部分函数，试证明：

a) 若$A, B \in P(X)$，则$f[A]-f[B] \subseteq f[A-B]$，并举例说明不能用"="代替其中的"⊆"；

b) 若$C, D \in P(Y)$，则$f^{-1}[C-D]=f^{-1}[C]-f^{-1}[D]$。

证明： a) 对任意$y \in f[A]-f[B]$，则$y \in f[A]$且$y \notin f[B]$

由$y \in f[A]$知，一定存在$x \in A$，使得$y=f(x)$.

假设$x \in B$，则一定有$y \in f[B]$，矛盾。

因此有$x \notin B$，得$x \in A-B$，所以有$y \in f[A-B]$.

综上可得$f[A]-f[B] \subseteq f[A-B]$。

下面给出$f[A-B] \subseteq f[A]-f[B]$不成立的反例：

令$X=\{1, 2\}$，$Y=\{0\}$，$A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$f=\{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$。

$f[A]-f[B]=\{0\}-\{0\}=\emptyset$，而$f[A-B]=\{f(1)\}=\{0\}$.

4. 设f为从X到Y的部分函数，试证明：

a) 若$A, B\in \mathcal{P}(X)$，则$f[A]-f[B]\subseteq f[A-B]$，并举例说明不能用“=”代替其中的“$\subseteq$”；

b) 若$C, D\in \mathcal{P}(Y)$，则$f^{-1}[C-D]=f^{-1}[C]-f^{-1}[D]$。

证明：b) 对任意$x\in f^{-1}[C-D]$，一定存在$y\in C-D$，使得$y=f(x)$。

由$y\in C-D$, 得$y\in C$且$y\notin D$，因此有$x\in f^{-1}[C]$，$x\notin f^{-1}[D]$，

得 $x\in f^{-1}[C]-f^{-1}[D]$.

故有$f^{-1}[C-D]\subseteq f^{-1}[C]-f^{-1}[D]$.

对任意$x\in f^{-1}[C]-f^{-1}[D]$，有$x\in f^{-1}[C]$且$x\notin f^{-1}[D]$.

则存在$y\in C$使得$y=f(x)$.

假设$y\in D$，由$y=f(x)$得$x\in f^{-1}[D]$，矛盾。

因此，$y\notin D$,得$y\in C-D$，从而$x\in f^{-1}[C-D]$.

故$f^{-1}[C]-f^{-1}[D]\subseteq f^{-1}[C-D]$.

综上可得$f^{-1}[C]-f^{-1}[D]=f^{-1}[C-D]$