

离散数学 (2)

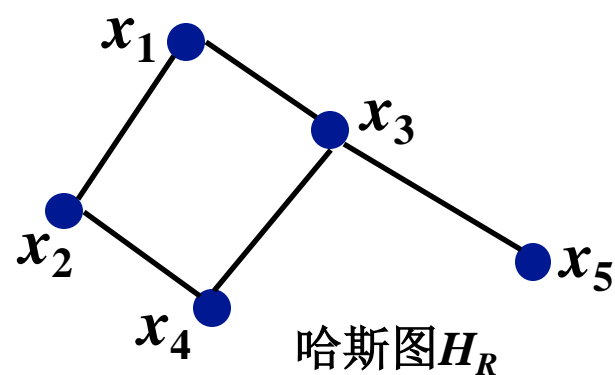
第四次作业讲解

2024 秋季学期

1. 设集合 $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R 的哈斯图如右图所示。

a) 求 P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

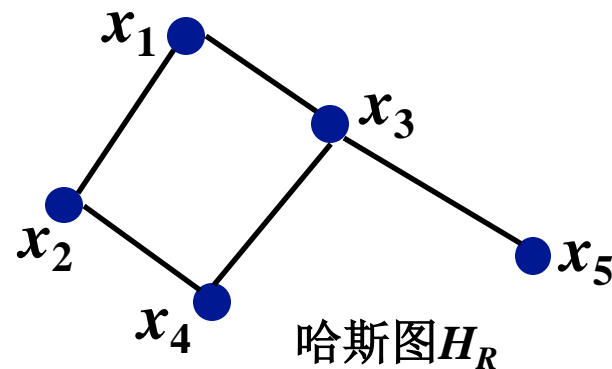
b) 求 $\{x_2, x_3, x_4\}$ 、 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

偏序 $R \subseteq A \times A$	严格偏序
自反的、反对称的和传递的	反自反的、反对称的和传递的
表示为 “ \leq ”，用 $\langle A, \leq \rangle$ 表示偏序结构	表示为 “ $<$ ”，用 $\langle A, < \rangle$ 表示严格偏序结构
$x, y \in A, x \leq y$ 读作 x 小于或等于 y	$x, y \in A, x < y$ 读作 x 小于 y
R	$R - I_A$
$R \cup I_A$	R

1. 设集合 $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R 的哈斯图如右图所示。
- a) 求 P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；
- b) 求 $\{x_2, x_3, x_4\}$ 、 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



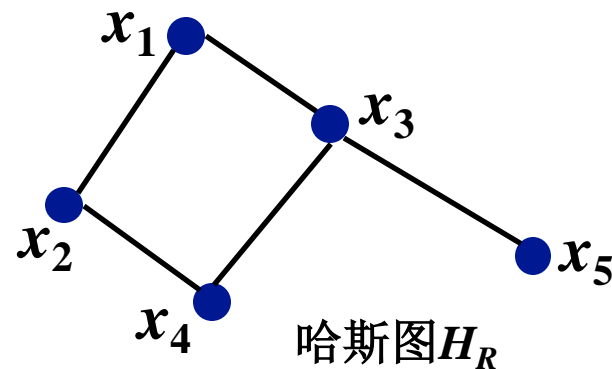
知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

- 设偏序结构 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序结构，
 - 对于任意两个元素 $x, y \in A$ ，如果 $x < y$ 且不存在任何其它元素 $z \in A$ ，使得 $x < z$ 且 $z < y$ ，则称 y 为 x 关于 \leq 的覆盖（或遮盖），简称为 y 为 x 的覆盖。
 - 其哈斯图是一个无向图 H_{\leq} ，满足
 - (1) 集合 A 的每一个元素为 H_{\leq} 中一个点，且
 - (2) 对于任意 $x, y \in A$ ，
 - (a) 如果 $x < y$ ，则点 x 画在点 y 之下，且
 - (b) 如果 y 覆盖 x ，则 x 和 y 之间存在一条无向边。

1. 设集合 $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R 的哈斯图如右图所示。

a) 求 P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求 $\{x_2, x_3, x_4\}$ 、 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

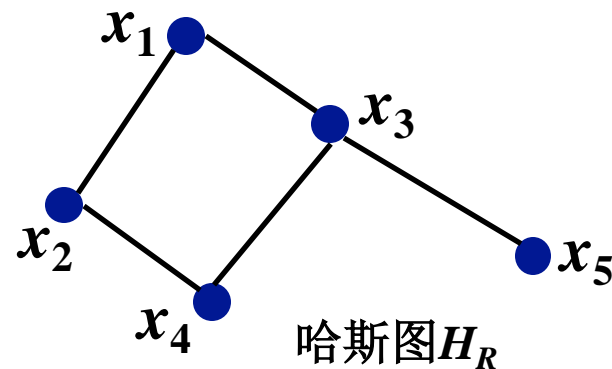
■ 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序结构，并且 $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$, 则

- b 是 S 的 **最大元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \rightarrow x \leq b)$
- b 是 S 的 **极大元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \wedge b \leq x \rightarrow x = b)$
- b 是 S 的 **上界** $\Leftrightarrow b \in A \wedge \forall x (x \in S \rightarrow x \leq b)$
- b 是 S 的 **最小元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \rightarrow b \leq x)$
- b 是 S 的 **极小元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \wedge x \leq b \rightarrow x = b)$
- b 是 S 的 **下界** $\Leftrightarrow b \in A \wedge \forall x (x \in S \rightarrow b \leq x)$

1. 设集合 $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R 的哈斯图如右图所示。

a) 求 P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求 $\{x_2, x_3, x_4\}$ 、 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



知识点：偏序关系、严格偏序关系、哈斯图、特殊元素

■ 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序结构，并且 $S \subseteq A$ ， $S \neq \emptyset$ ，则

➤ b 是 S 的**最小上界(上确界)** $\Leftrightarrow b$ 是 S 的**上界**，且对 S 的**任意上界** x ，都有 $b \leq x$ 。

➤ b 是 S 的**最大下界(下确界)** $\Leftrightarrow b$ 是 S 的**下界**，且对 S 的**任意下界** x ，都有 $x \leq b$ 。

1. 设集合 $P = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序 R 的哈斯图如右图所示。

a) 求 P 的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）；

b) 求 $\{x_2, x_3, x_4\}$ 、 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。

解：a) 最小元：无，最大元： x_1

极小元： x_4, x_5 ，极大元： x_1

b) $\{x_2, x_3, x_4\}$ 的上界为 x_1 ，下界为 x_4

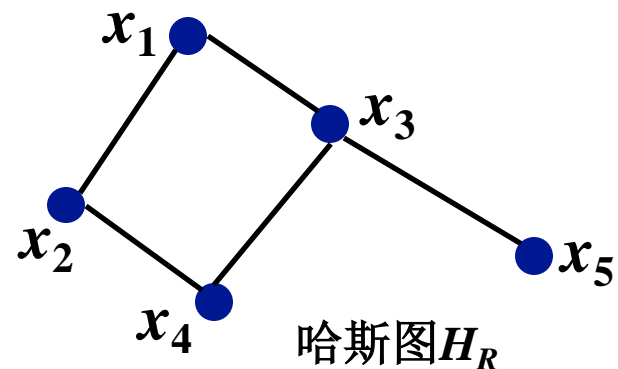
上确界为 x_1 ，下确界为 x_4

$\{x_3, x_4, x_5\}$ 的上界为 x_1, x_3 ，无下界

上确界为 x_3 ，无下确界

$\{x_1, x_2, x_3\}$ 的上界为 x_1 ，下界为 x_4

上确界为 x_1 ，下确界为 x_4



2. 设 R 为集合 S 上的全序关系。证明： R 和 R^{-1} 同时为 S 上的良序当且仅当 S 为有限集。

知识点：全序关系、良序

■ 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序结构，

➤ 如果对于任意 $x, y \in A$ ，或者 $x \leq y$ ，或者 $y \leq x$ ，即 x 与 y 可比，则称 \leq 为 A 上的全序（或线序），并称 $\langle A, \leq \rangle$ 为全序结构或链，即

$$(\forall xy) (x \in A \wedge y \in A \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$$

➤ 如果 A 的每一个非空子集都有一个最小元，则称 \leq 为良序关系， $\langle A, \leq \rangle$ 为良序结构。

■ 偏序结构 $\langle A, \leq \rangle$ 是良序结构的充要条件

➤ \leq 为 A 上的全序关系，且 A 的每个非空子集都有极小元。

➤ \leq 为 A 上的全序关系，且不存在 A 中元素的无穷序列 a_0, a_1, a_2, \dots ，使得对每个 $i \in \mathbb{N}$ ，皆有 $a_{i+1} < a_i$ ，即不存在 A 中元素的无穷递降序列。

2. 设 R 为集合 S 上的全序关系。证明： R 和 R^{-1} 同时为 S 上的良序当且仅当 S 为有限集。

证明：（充分性）

（反证法）若 S 为有限集，假设 R 与 R^{-1} 中至少有一个不是良序。

假设 R 不是良序，

则必存在 S 的一个非空子集有关于 R 的无限递降序列。

与 S 为有限集矛盾。

假设 R^{-1} 不是良序时，同理可证

因此假设不成立，即 R 和 R^{-1} 均为 S 的良序。

2. 设 R 为集合 S 上的全序关系。证明： R 和 R^{-1} 同时为 S 上的良序当且仅当 S 为有限集。

证明：（必要性）反证法：假设 S 是无限集。

由于 R 为 S 上的良序，则 S 必有关系 R 下的最小元，记为 a_1 。

考虑集合 $S_1=S-\{a_1\}$ ，则 S_1 也为无限集。

同样，由 R 为 S 上的良序，得 S_1 也有关系 R 下的最小元 a_2 ，且 $a_1 \neq a_2$ ， $a_1 R a_2$ 。

一直继续下去，令 $S_n = S_{n-1} - \{a_n\}$ ，则 S_n 也有关系 R 下的最小元 a_{n+1} ，

此时，有 S 中元素构成的序列： a_1, a_2, \dots, a_{n+1} ，满足

$$a_i \neq a_{i+1}, a_i R a_{i+1}, i=1, 2, \dots, n。$$

因此，由于 S 为无限集，如上可得 S 关于关系 R 的无穷递增序列：

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

显然，该序列为 S 在关系 R^{-1} 下的无穷递减序列。

由于 R 是全序，则对任意 $x, y \in S$ ，有 $x R y$ 或 $y R x$ ，即 $y R^{-1} x$ 或 $x R^{-1} y$ ，得 R^{-1} 也是全序。

由上可得 R^{-1} 不是良序，矛盾。

故假设不成立，即 S 是有限集。

3. 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序结构, 证明 A 的每个非空有限子集都至少有一个极小元和极大元。

知识点: 极小元、极大元

■ 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序结构, 并且 $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$, 则

➤ b 是 S 的 **极大元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \wedge b \leq x \rightarrow x = b)$

$\Leftrightarrow S$ 中大于或等于 b 的元素只有 b .

S 中可能有元素与 b 不可比

➤ b 是 S 的 **极小元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \wedge x \leq b \rightarrow x = b)$

$\Leftrightarrow S$ 中小于或等于 b 的元素只有 b .

➤ b 是 S 的 **最大元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \rightarrow x \leq b)$

S 中所有元素均与 b 可比

➤ b 是 S 的 **最小元** $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x (x \in S \rightarrow b \leq x)$

3. 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序结构, 证明 A 的每个非空有限子集都至少有一个极小元和极大元。

证明: (反证法)

假设 S 为 A 的一个非空有限子集, 且 S 没有极小元。

令 $a_0 \in S$, 由于 S 没有极小元, 则一定存在 $a_1 \in S$, 使得 $a_1 < a_0$;

否则, 对 S 中任意元素 b , 必有 $a_0 < b$ 或 $a_0 = b$, 即 a_0 是 S 的极小元。

同样, 由于 S 没有极小元, 则一定存在 $a_2 \in S$, 使得 $a_2 < a_1$; 否则 a_1 是 S 的极小元。

归纳可证, 对任意的 $n \in \mathbb{I}_+$, 若存在 $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$, 满足

$$a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 < a_0,$$

由于 S 没有极小元, 则一定存在 $a_{n+1} \in S$, 使得 $a_{n+1} < a_n$ 。

因此, S 中一定存在一个无限递降序列 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, 与 S 为有限集矛盾。

故, 假设不成立, 即 A 的每个非空有限子集都至少有一个极小元。

同理可证, S 一定有一个极大元。

4. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系。试判断下列 A 上的二元关系是不是 A 上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1 - R_2)$

2) $R_1 \circ R_2$

3) $t(R_1 \cup R_2)$

知识点：二元关系在运算下是否仍然保持自反性、对称性和传递性

R, S	$R \cap S$	$R \cup S$	$R - S$	$R \oplus S$	$\sim R$	$R \circ S$
自反	✓	✓	-	-	-	✓
反自反	✓	✓	✓	✓	-	-
对称	✓	✓	✓	✓	✓	-
反对称	✓	-	✓	-	-	-
传递	✓	-	-	-	-	-

4. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系。试判断下列 A 上的二元关系是不是 A 上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1 - R_2)$

2) $R_1 \circ R_2$

3) $t(R_1 \cup R_2)$

解：1) 不一定是。

例如：令 $A = \{1, 2, 3\}$, $R_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$, $R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$,
显然， R_1 与 R_2 都是 A 上的等价关系。

$R_1 - R_2 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$, $r(R_1 - R_2) = R_1$ 仍为等价关系。

例如：令 $A = \{1, 2, 3\}$,

$$R_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \},$$

$$R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}.$$

显然， R_1 与 R_2 都是 A 上的等价关系。

但 $R_1 - R_2 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$,

$r(R_1 - R_2) = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$ 不满足传递性，不是等价的。

4. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系。试判断下列 A 上的二元关系是不是 A 上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1 - R_2)$

2) $R_1 \circ R_2$

3) $t(R_1 \cup R_2)$

解：2) 不一定是。

例如：令 $A = \{1, 2, 3\}$, $R_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$, $R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$, 显然， R_1 与 R_2 都是 A 上的等价关系。

$R_1 \circ R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$ 仍为等价关系。

例如：令 $A = \{1, 2, 3\}$,

$R_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$,

$R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$ 。

显然， R_1 与 R_2 都是 A 上的等价关系。

但 $R_1 \circ R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$, 显然不满足对称性，因此，不是等价关系。

4. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系。试判断下列 A 上的二元关系是不是 A 上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1 - R_2)$

2) $R_1 \circ R_2$

3) $t(R_1 \cup R_2)$

解：3) $t(R_1 \cup R_2)$ 是等价关系。

由于 R_1 与 R_2 是等价关系，因此是自反的，对称的和传递的。

可证 $R_1 \cup R_2$ 仍然是自反和对称的（证明请补充），

而传递闭包保持自反性和对称性，

因此，得 $t(R_1 \cup R_2)$ 是自反、对称、传递的，即为等价关系。

5. 试判断下列定义在二维欧氏空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上的二元关系 T 是否为 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上的偏序、严格偏序、全序和良序？

a) 若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 当且仅当 $x_1 \leq x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$ ；

b) 若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 当且仅当 $x_1 < x_2$ ，或者 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$ 。

解： a) ① 对任意 $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，

由于 $x \leq x$ 且 $y \leq y$ ，因此，有 $\langle x, y \rangle T \langle x, y \rangle$ ，得 T 是自反的。

② 对任意 $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，若 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 且 $\langle x_2, y_2 \rangle T \langle x_1, y_1 \rangle$ ，
则有 $x_1 \leq x_2$ ， $y_1 \leq y_2$ ， $x_2 \leq x_1$ 且 $y_2 \leq y_1$ ，得 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$ ，从而 $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$ 。

因此， T 是反对称的。

③ 对任意 $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_3 \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，若 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ ， $\langle x_2, y_2 \rangle T \langle x_3, y_3 \rangle$ ，
则有 $x_1 \leq x_2$ ， $y_1 \leq y_2$ ， $x_2 \leq x_3$ 且 $y_2 \leq y_3$ ，得 $x_1 \leq x_3$ 且 $y_1 \leq y_3$ ，

因此， $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_3, y_3 \rangle$ ，即 T 是传递的。

综上， T 是偏序关系，但不是严格偏序关系。

对于 $\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，显然 $\langle 2, 3 \rangle \bar{T} \langle 3, 2 \rangle$ ，因此， T 不是全序关系。

令 S 为大于0且小于1的实数集合，即 S 为开区间 $(0, 1)$ ，则 $S \times S$ 为 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的一个非空子集，显然， $S \times S$ 关于偏序 T 没有最小元。因此， T 不是良序。

5. 试判断下列定义在二维欧氏空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上的二元关系 T 是否为 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上的偏序、严格偏序、全序和良序？

a) 若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 当且仅当 $x_1 \leq x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$ ；

b) 若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 当且仅当 $x_1 < x_2$ ，或者 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$ 。

解： b) ① 对任意 $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，

由于 $x = x$ 且 $y \leq y$ ，因此，有 $\langle x, y \rangle T \langle x, y \rangle$ ，得 T 是自反的。

② 对任意 $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，若 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 且 $\langle x_2, y_2 \rangle T \langle x_1, y_1 \rangle$ ，
则必须满足 $x_1 = x_2$ ， $y_1 \leq y_2$ 且 $y_2 \leq y_1$ ，得 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$ ，从而 $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$ 。

因此， T 是反对称的。

③ 对任意 $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_3 \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ，若 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ ， $\langle x_2, y_2 \rangle T \langle x_3, y_3 \rangle$ ，

- 若 $x_1 < x_2$ ：则对于 $x_2 < x_3$ 或 $x_2 = x_3$ 都有 $x_1 < x_3$ ，因此， $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_3, y_3 \rangle$ ；

- 若 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$ ：若 $x_2 < x_3$ 则有 $x_1 < x_3$ ；若 $x_2 = x_3$ 且 $y_2 \leq y_3$ ，则有 $x_1 = x_3$ 且 $y_1 \leq y_3$ 。因此，

$\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_3, y_3 \rangle$ ；

因此， T 是传递的。

综上， T 是偏序关系，但不是严格偏序关系。

5. 试判断下列定义在二维欧氏空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上的二元关系 T 是否为 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上的偏序、严格偏序、全序和良序？

a) 若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 当且仅当 $x_1 \leq x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$ ；

b) 若 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 当且仅当 $x_1 < x_2$ ，或者 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$ 。

解： b)由上面可知， T 是偏序关系。

对任意 $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

- 若 $x_1 = x_2$ ，则一定有 $y_1 \leq y_2$ 或 $y_2 \leq y_1$ ，因此一定有 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 或 $\langle x_2, y_2 \rangle T \langle x_1, y_1 \rangle$

- 若 $x_1 \neq x_2$ ，则一定有 $x_1 < x_2$ 或 $x_2 < x_1$ ，因此一定有 $\langle x_1, y_1 \rangle T \langle x_2, y_2 \rangle$ 或 $\langle x_2, y_2 \rangle T \langle x_1, y_1 \rangle$

在偏序关系 T 上， $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle$ 始终可比，因此 T 是全序关系。

令 S 为大于0且小于1的实数集合，即 S 为开区间 $(0, 1)$ ，则 $S \times S$ 为 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的一个非空子集，显然， $S \times S$ 关于偏序 T 没有最小元。因此， T 不是良序。

6. 如果集合 A 上的二元关系 R 满足 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$, 则 $\langle z, x \rangle \in R$, 就称 R 是循环的。

证明： 集合 A 上的二元关系 R 是 A 上的等价关系，当且仅当 R 是自反的和循环的。

证明： （必要性）

设 R 是 A 上的等价关系，则 R 是自反的、对称的和传递的，只需证明 R 是循环的。

对任意 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$,

由 R 是传递的，得 $\langle x, z \rangle \in R$ 。

又由于 R 是对称的，得 $\langle z, x \rangle \in R$ 。

因此， R 是循环的。

6. 如果集合 A 上的二元关系 R 满足 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$, 则 $\langle z, x \rangle \in R$, 就称 R 是循环的。

证明： 集合 A 上的二元关系 R 是 A 上的等价关系，当且仅当 R 是自反的和循环的。

证明：（充分性）

若 R 是自反的和循环的，则只需证明 R 是对称的和传递的。

(a)对任意 $\langle x, y \rangle \in R$,

由于 R 是自反的，因此有 $\langle x, x \rangle \in R$ 。

又由于 R 是循环的，因此，由 $\langle x, x \rangle, \langle x, y \rangle \in R$ 得 $\langle y, x \rangle \in R$ 。

所以 R 是对称的。

(b)对任意 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$ ，由于 R 是循环的，因此， $\langle z, x \rangle \in R$ 。

由(a)知 R 是对称的，因此， $\langle x, z \rangle \in R$ 。

所以， R 是传递的。

综上， R 是等价关系。

7. 设集合 A 上的二元关系 R 是自反的。证明 R 为等价关系的充要条件是：
若 $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in R$ ，则 $\langle b, c \rangle \in R$ 。

证明：（必要性）

假设 R 为等价关系，则 R 是自反的、对称的和传递的。

若 $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in R$ ，由于 R 为对称的，则 $\langle b, a \rangle \in R$ ，
由于 R 是传递的，因此由 $\langle b, a \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in R$ 得 $\langle b, c \rangle \in R$ 。

(充分性) 只需证明 R 是对称的和传递的。

a) 对任意 $\langle x, y \rangle \in R$ ，

由于 R 是自反的，则 $\langle x, x \rangle \in R$ ，故有 $\langle y, x \rangle \in R$ ，
因此， R 是对称的。

b) 对任意 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$ ，

由于 R 是对称的，因此 $\langle y, x \rangle \in R$ ，再由 $\langle y, z \rangle \in R$ ，
得 $\langle x, z \rangle \in R$ 。

因此， R 是传递的。

综上，得 R 是等价关系。