第三章 函数

第三章函数

3. 1 基本概念

3. 2 函数的复合（合成）

3. 3 逆函数

3. 4 集合的特征函数

早期函数概念(几何函数); 18世纪函数概念(代数函数):19世纪函数概念(变量函数).

1、早期的函数概念来源于人们迫切需要了解日月星辰的运动规律

17世纪,伽俐略(Galileo，1564－1642)在《两门新科学》一书，提出了函数或称为变量关系的概念1673年前后笛卡尔(Descartes，1596－1650)研究解析几何，注意到一个变量对另一个变量的依赖关系

真正函数概念：莱布尼兹1673年首次使用“function” 表示“幂”，后用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等曲线上点的有关几何量

2、函数符号f(x)瑞士数学家欧拉（Euler, 1707 -1783）在1724年提出. 其后, 1748年，欧拉在其《无穷分析引论》一书中把函数定义为由一个变量与一些常量通过任何方式形成的解析表达式

18世纪, 函数概念进入代数函数阶段,当时占主导观点：把函数理解为一个解析表达式．瑞士数学家约翰贝努利(Johann Bernoulli，1667－1748)在1718年对莱布尼兹函数概念从代数角度重新定义：由变量x和常量用任何方式构成的量都可称为x函数，首次强调函数用式子表示.

到19世纪时, 函数概念的发展已经渐渐完善, 进入到变量函数阶段. 1821年，法国数学家柯西(Cauchy，1789－1857) 从变量角度给出了函数的定义

进入20世纪以后，德国数学家康托(Cantor，1845－1918)创立的集合论基础上，对函数概念的认识又有了进一步的深化. 1930年, 美国数学家维布伦(Veblen，1880－1960)用“集合”和“对应”的概念给出了现代函数的定义，通过集合概念把函数的对应关系、定义域和值域进一步具体化了，且打破了“变量是数”的极限，变量可以是数，也可以是其它任何对象.

https://baijiahao.baidu.com/s?id=1745468502331265513&wfr=spider&for=pc

3.1 基本概念

特殊性质的函数：
单射（内射）、满射、双射

二元关系 $R\subseteq X\times Y$ $\xrightarrow{\text{单值性}}$ f 从 X 到 Y 的部分函数 $\xrightarrow{\mathrm{dom}(f)=X}$ f 从 X 到 Y 的函数 $f: X\longrightarrow Y$

定义域dom(R)/ dom(f)
值域 ran(R)/ ran(f)

像 $f[A]$，$A\subseteq X$
源像 $f^{-1}[B]$，$B\subseteq Y$

函数的限制
$f|_A=f\cap(A\times Y)$,
$A\subseteq X$

- 函数是一种特殊类型的二元关系，见下列关系：

设 f_1, f_2是从$\{a, b, c\}$到$\{1, 2\}$的关系

$f_1 = \{<a, 2>,<b, 2>,<c, 1>\}$ 是函数

$f_2 = \{<a, 2>, <b, 2>, <a, 1>\}$ 不是函数

单值性

3.1.1 部分函数

定义1 (部分函数) 如果从集合 X 到 Y 的二元关系 f 是"单值"的，即 f 满足以下条件：

$$\text{若} <x, y_1> \in f \text{且} <x, y_2> \in f\text{，则 } y_1 = y_2\text{，}$$

就称 f 为从 X 到 Y 的部分函数.

- 若 f 是部分函数且$<x, y> \in f$，则称
  - y是 f 在x处的值(在f 作用下x的像点)，记为$y = f(x)$，
  - x 为 y 的一个源像点.

例：下列关系中哪些是部分函数？对于不是部分函数的关系，说明不能构成部分函数的原因.

(1) $\{<x, y> | x, y \in N$ 且 $x+y<10\}$；

(2) $\{<x, y> | x, y \in R$ 且 $y=x^2\}$；

(3) $\{<x, y> | x, y \in R$ 且 $y^2=x\}$

解: (1) 不是部分函数：存在$<0, 1>, <0, 2> \in f$, 但$1 \neq 2$.

(2) 是部分函数；

(3)不是部分函数：存在$<4, 2>, <4, -2> \in f$，但$2 \neq -2$.

3.1.2 定义域与值域

设 f 为从集合 X 到 Y 的部分函数，则

- f 的定义域 **dom (f):**

$$\mathrm{dom}(f) = \{ x \in X \mid \exists y \in Y \text{ 使 } y = f(x) \} \subseteq X$$

✓ 若 $x \in \mathrm{dom}(f)$，就称 f 在 x 处有定义, 记为 “$f(x)\downarrow$”; 否则称 f 在 x 处无定义, 记为 “$f(x)\uparrow$”。

- f 的值域 **ran f:**

$$\mathrm{ran}\, f = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \text{ 使 } y = f(x) \} \subseteq Y$$

单值性: 对每个 $x \in \mathrm{dom}\, f$, 都有唯一的 $y \in \mathrm{ran}\, f$, 使得 $\langle x, y\rangle \in f$。

3.1.3 函数

定义2 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的 部分函数.

1) 若 $\mathrm{dom}\, f = X$，则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称 f 为从 X 到 Y 的函数，记为 $f: X \to Y$.

2) 若 $\mathrm{dom}\, f \subset X$，则称 f 为从 X 到 Y 的严格部分函数.

3) 若 $\mathrm{ran}\, f = Y$，则称 f 为从 X 到 Y 上的部分函数.

4) 若 $\mathrm{ran}\, f \subset Y$，则称 f 为从 X 到 Y 内的部分函数.

5) 若对任意的 x_1，$x_2 \in \mathrm{dom}\, f$，

当 $x_1 \neq x_2$ 时，皆有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称 f 为从 X 到 Y 的 1 - 1 部分函数.

(即：当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，皆有 $x_1 = x_2$)

例：设 U是全集， $\mathcal{P}(U)$是U的幂集。两个集合的并和交运算可如下定义：

$f_{\cup}: \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$,

对任意$A, B \in \mathcal{P}(U)$, $f_{\cup}(<A, B>) = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

$f_{\cap}: P(U) \times P(U) \rightarrow P(U)$,

对任意$A, B \in \mathcal{P}(U)$, $f_{\cap}(<A, B>) = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

例：N 是自然数集合，函数 S：N →N 定义为：

对任意 $n \in$ N， $S(n) = n+1$.

显然，$S(0) = 1$， $S(1) = 2$，函数 S 称为后继函数 .

例：考虑以下从实数集 R到R的部分函数：

(1) 实数的平方根运算 $x^{1/2}$

是从R到R内的部分函数，因为 $x^{1/2}$ 对 $x<0$ 无定义

(2) $f(x)=1/x$

是从R到R内的部分函数，因为 $1/x$ 在 $x=0$处无定义．

(3) $f(x)=x$

是一个从R到R上的函数．

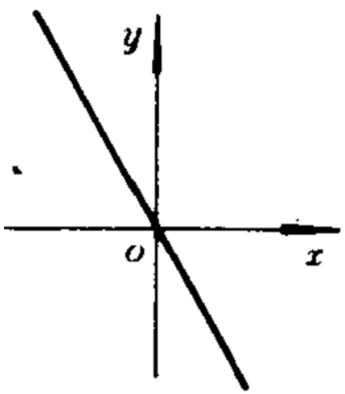
例: 如下定义从实数集R到实数集R的部分函数:

$f_1 = \{<x, -2x> \mid x \in \mathbf{R}\}$ R到R上的1-1函数,

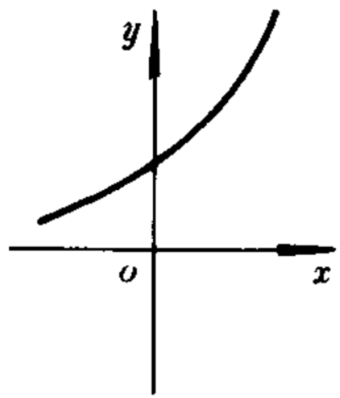
$f_2 = \{< x, 2^x> \mid x \in \mathbf{R}\}$ R到R内的1-1函数,

$f_3 = \{ <x, x^3+2x^2> \mid x \in \mathbf{R}\}$ R到R上的函数,

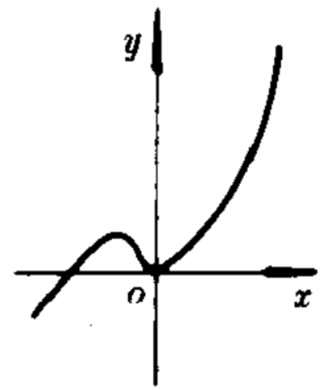
$f_4 = \{<x, x^2>\mid x \in \mathbf{R}\}$ R到R内的函数,



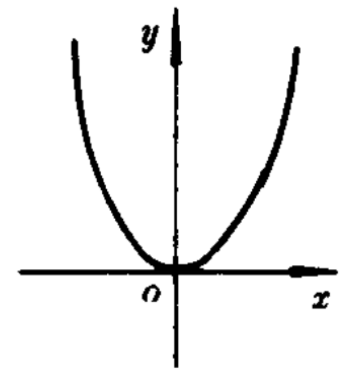
f_1



f_2



f_3



f_4

3.1.4 像与源像

定义4 (部分函数 f 的 像与源像) 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数，$A \subseteq X$ 且 $B \subseteq Y$.

(1) $f[A] = \{ y \in Y \mid \exists x \in A$ 使 $y = f(x) \}$

(2) $f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid \exists y \in B$ 使 $y = f(x) \}$

称 $f[A]$ 为 A 在 f 下的像，$f^{-1}[B]$ 为 B 在 f 下的源像.

即： $f[A] = \{ f(x) \mid x \in A$ 且 $f(x)\downarrow \}$

$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x)\downarrow$ 且 $f(x) \in B \}$

- **dom** $f = \{ x \in X \mid \exists y \in Y$ 使 $y = f(x) \} = f^{-1}[Y]$
- **ran** $f = \{ y \in Y \mid \exists x \in X$ 使 $y = f(x) \} = f[X]$

3.1.4 像与源像

定义4 (部分函数 f 的 像与源像) 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数， $A \subseteq X$ 且 $B \subseteq Y$.

(1) $f[A] = \{ y \in Y \mid \exists x \in A$ 使 $y = f(x) \}$

(2) $f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid \exists y \in B$ 使 $y = f(x) \}$

称 $f[A]$ 为 A 在 f 下的像，$f^{-1}[B]$ 为 B 在 f 下的源像.

即：$f[A] = \{ f(x) \mid x \in A$ 且 $f(x)\downarrow \}$

$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x)\downarrow$ 且 $f(x) \in B \}$

- 实际上定义了一个新的函数 $F: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$，对于 $\forall A \subseteq X$, $F(A) = \{ f(x) \mid x \in A$ 且 $f(x)\downarrow \} = f[A]$

例：设函数$f:\{0,1,2,3\}\to\{a,b,c\}$，

$f=\{<0,b>, <1,a>, <2,c>, <3,b>\}$，则

$f(\{0,1,2,3\})=\{a,b,c\}$

$f(\{2,3\})=\{b,c\}$

$f(\{0\})=\{b\}$

$f(\varnothing)=\varnothing$

例：设函数$f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$，$f(x)=\begin{cases}1 & ,若\ x\ 是奇数\\ x/2 & ,若\ x\ 是偶数\end{cases}$

则

$f(0)=0$　　$f(\{0\})=\{0\}$

$f(1)=1$　　$f(\{1\})=\{1\}$

$f(2)=1$　　$f(\{0,2,4,6,\ldots\})=\mathrm{N}$

$f(3)=1$　　$f(\{4,6,8\})=\{2,3,4\}$

$f(4)=2$　　$f(\{1,3,5,7\})=\{1\}$

函数的限制

定义3 (函数 f 的限制)：设函数 $f: X \to Y$，$A \subseteq X$，则

1) $f \cap (A \times Y)$ 是从 A 到 Y 的函数，称为 f 在 A 上的限制，记作 $f|_A$；

2) 称 f 为 $f|_A$ 到 X 的 延拓 .

$f|_A$ 可表示为：$f|_A = \{<x, y> \mid <x, y> \in f \wedge x \in A\}$

例：设函数 $f: R \to R$ 为：$f(x) = x^2$，

$f|_N = \{<x, x^2> \mid x \in N\}$

$= \{<0,0>, <1,1>, <2,4>, <3,9>, \ldots\ldots\}$

例：设函数 f: R→R，$f(x) = |x|$，其中，$|x|$为 x 的绝对值，设 R_+ 是正实数集合，$g: R_+ \to R$，$g(x) = x$，则：

g 是 f 的限制，即 $g = f|_{R+}$，而 f 是 g 的 延拓 .

函数的限制

定义 (函数 f 的限制)：设函数 $f: X\to Y$，$A\subseteq X$，则

1) $f\cap(A\times Y)$ 是从 A 到 Y 的函数，称为 f 在 A 上的限制，记作 $f|_A$;

2) 称 f 为 $f|_A$ 到 X 的 延拓 .

$f|_A$ 可表示为：$f|_A =\{<x, y> \mid <x, y>\in f \wedge x\in A\}$

定理1　若 f 为从集合 X 到 Y 的部分函数 且 $A\subseteq X$，则

$$\mathrm{dom}\,(f|_A) = A\cap \mathrm{dom}\, f,$$

$$\mathrm{ran}\,(f|_A) = f[A]$$

若 $A\subseteq \mathrm{dom}\,(f)$，则 $f|_A$ 是全函数.

定理2: 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数.

(1) 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, 则 $f[A_1] \subseteq f[A_2]$;

(2) 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, 则 $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$;

(3) 若 $A \subseteq \mathrm{dom}\, f$, 则 $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$; 为什么是$\subseteq$？

(4) 若 $B \subseteq \mathrm{ran}\, f$, 则 $B = f[f^{-1}[B]]$.

证明：(1) 和 (2) 显然，只证 (3) 和 (4)

(3) 任取 $x \in A$,

由 $A \subseteq \mathrm{dom}\,(f)$, 得 $x \in \mathrm{dom}\,(f)$。

故 $f(x)\downarrow$ 且 $f(x) \in f[A]$,

所以 $x \in f^{-1}[f[A]]$,

得 $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$

定理2: 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数.

(1) 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$， 则 $f[A_1] \subseteq f[A_2]$;

(2) 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$， 则 $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$;

(3) 若 $A \subseteq \mathrm{dom}\, f$， 则 $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$;

(4) 若 $B \subseteq \mathrm{ran}\, f$， 则 $B = f[f^{-1}[B]]$.

证明：4) 任取 $y \in B$， 由 $B \subseteq \mathrm{ran}\, f$， 得 $y \in \mathrm{ran}\, f$ 。

因此，存在 $x \in X$ 使 $y = f(x)$, 得 $x \in f^{-1}[B]$,

从而 $y \in f[f^{-1}[B]]$,

所以， $B \subseteq f[f^{-1}[B]]$。

任取 $y \in f[f^{-1}[B]]$，则存在 $x \in f^{-1}[B]$ 使 $f(x) = y$，

从而 $y \in B$,

所以， $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$。

综上， 得 $B = f[f^{-1}[B]]$.

定理3 设 f 为从集合 X 到 Y 的部分函数, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$

1) $f[\cup\mathcal{A}] = \cup\{f[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$;

2) 若 $\mathcal{A} \neq \varnothing$，则 $f[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{f[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$;

3) $f^{-1}[\cup\mathcal{B}] = \cup\{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$;

4) 若 $\mathcal{B} \neq \varnothing$，则 $f^{-1}[\cap\mathcal{B}] = \cap\{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$.

证明：只证 4)，其它的证明与此类似.

任取 $B \in \mathcal{B}$，则由 $\cap\mathcal{B} \subseteq B$ 可得 $f^{-1}[\cap\mathcal{B}] \subseteq f^{-1}[B]$,

故有 $f^{-1}[\cap\mathcal{B}] \subseteq \cap\{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$;

任取 $x \in \cap\{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$, 任取 $B \in \mathcal{B}$, 则 $x \in f^{-1}[B]$,

即 $f(x) \in B$.

因此 $f(x) \in \cap\mathcal{B}$，即 $x \in f^{-1}[\cap\mathcal{B}]$.

故有：$\cap\{f^{-1}[B] \mid Y \in \mathcal{B}\} \subseteq f^{-1}[\cap\mathcal{B}]$.

综上，$f^{-1}[\cap\mathcal{B}] = \cap\{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$

3.1.5 函数的计数

定义5 设A和B为任意两个集合，记A到B的函数的集合为B^A： $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$.

例: 设A为任意集合，B为任意非空集合.

(1) $A^\phi = \{\phi\}$

因为存在唯一的一个从ϕ 到A的函数 ϕ,

(2) $\phi^B = \phi$

因为不存在从B到ϕ的函数

(3) 是否 存在 从 B 到 $\varnothing$ 的 部分 函数?

定义5 设A和B为任意两个集合，记A到B的函数的集合为B^A： $B^A = \{f \mid f: A \to B\}$.

定理4：若A和B都是有限集，则

$$n(B^A) = (\, n(B)\,)^{n(A)}$$

分析：

设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

A到B的一个函数f包含m个序偶：

$$\langle a_1, * \rangle, \langle a_2, * \rangle, \ldots, \langle a_m, * \rangle$$

每个 $* \in B$.

定理4：若A和B都是有限集，则

$$n(B^A) = (\ n(B)\ )^{n(A)}$$

证明: 设$n(A)=m$且 $n(B)=n$，对m用归纳法.

当$m=0$时， $A=\emptyset$, $B^\emptyset=\{\emptyset\}$, $n(B^\emptyset)=1=n^0$.

设$m=k\ (k\geq 0)$时定理成立.

若$m=k+1$，则$A\neq \phi$, 因此存在$a\in A$.

任取$f\in B^A$, 令$f'=f|_{A-\{a\}}$，则f'是从$A-\{a\}$到B的函数，

得$f=f'\cup\{<a,f(a)>\}$.

按照归纳假设，$n(B^{A-\{a\}})=n^k$.

因此， f'可有n^k种选择.

由于$f(a)$可取B中的任意元素，所以可有n种选择，

故f可有$n^k\cdot n=n^{k+1}$种选择，即$n(B^A)=n^{k+1}$.

综上，结论成立.

3.1.6 特殊性质的函数

定义8（单射、满射、双射）若$f: X \to Y$,

(1) 若 $\mathrm{ran}\, f = Y$, 则称 f 为满射;

即 $\forall y\,(\,y \in Y \to \exists x\,(\,x \in X \wedge f(x) = y\,)\,)$

(2) 若 f 是 1-1的，则称 f 是单射（内射）；

即 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$

$\forall x_1 \forall x_2 (\,x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$

(3) 若 f 既是满射，又是单射，则称 f 为双射.

例：若R为集合A上的等价关系，则

$$\varphi = \{ \langle x, [x]_R \rangle \mid x \in A \}$$

是从A到A/R 的满射，并称φ 为自然映射或正则映射.

例：设 $f: X \to Y$，若存在同一个 $c \in Y$，使得对所有的 $x \in X$， $f(x) = c$，则称 f为常值函数，记为 f_c 。

例: 下列函数是否为满射，单射和双射？

(1) $f:\{1,2\}\to\{0\}$

由于 f 的值域是单元素集，显然 $f(1)=f(2)=0$.

函数f是满射，而不是单射的.

(2) $f:\{a,b\}\to\{2,4,6\}$， $f(a)=2$， $f(b)=6$

f 是单射，而不是满射.

(3) $f:N\to N$， $f(x)=2x$

因 f 的值域是偶整数集，并且 若 $x_1\neq x_2$， 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，所以，函数 f 是单射.

所有奇自然数关于 f 没有源象，因此f 不是满射.

(4) $f:I\to I$， $f(x)=x+1$ $f:N\to N$， $f(x)=x+1$??

因为若 $x_1\neq x_2$， 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，并且对任意 $y\in I$，都存在 $x=y-1\in I$，使得 $y=f(x)$，故函数 f 是双射.

例: 设 $[a, b]$ 表示实数闭区间，$a<b$，即

$$[a, b] = \{ x \mid a \le x \le b \}.$$

令 $f: [0, 1] \to [a, b]$ 为： $f(x) = (b - a)x + a$.

判断 f 是否为满射，单射和双射？

解：若 $x_1 \neq x_2$，则有

$f(x_1) - f(x_2) = (b - a)x_1 + a - ((b - a)x_2 + a)$

$=(b - a)(x_1 - x_2) \neq 0$, 即 $f(x_1) \neq f(x_2)$,

因此 f 是单射.

对任意 $y \in [a, b]$ 都有 $x = (y - a)/(b - a) \in [0, 1]$，使得

$y = f(x)$，故函数 f 是满射.

因此 函数 f 是双射.

例：证明：如果 $f: X \to Y$ 是单射，而且 $A \subseteq X$，则：

$f|_A: A \to Y$ 是单射.

证明： 对于任意 $x_1, x_2 \in A$，因为 $A \subseteq X$，所以 $x_1, x_2 \in X$.

由 $f|_A$ 的定义可知： $f|_A(x_1) = f(x_1)$， $f|_A(x_2) = f(x_2)$，

若 $f|_A(x_1) = f|_A(x_2)$，即 $f(x_1) = f(x_2)$，

由 f 是单射，则有 $x_1 = x_2$.

由单射的定义可知： $f|_A$ 是单射.

思考题

1\. 有限集 X 上 的 满射 必为 单射.

$f: X \longrightarrow X$

2\. 有限集 X 上 的 单射 必为 满射.

3\. 设A和B为有限集, $\#A = m$ 且 $\#B = p$, 试问

a) 有多少个从A到B的函数为 单射?

b) 有多少个从A到B的函数为 满射?

例：设A和B为有限集，$\#A = m$ 且 $\#B = p$.

(1) 有多少个从A到B的单射？

(2) 有多少个从A到B的满射？

解：(1) 显然，当$m>p$时，不存在从A到B的单射.

当$m \leq p$时，从A到B的单射的个数为从B中选m个元素构成的排列个数，即

$$P_p^m = \frac{p!}{(p-m)!}$$

例：设A和B为有限集，$\#A = m$ 且 $\#B = p$

(1) 有多少个从A到B的单射?

(2) 有多少个从A到B的满射?

解：(2) 当$m < p$时，不存在从A到B的满射；

当 $p = 0$且$m \neq 0$，0个；

$p = 0$且$m = 0$，1个；

当 $m \geq p \geq 1$时，从A到B上的一个函数对应集合A的一个包含 p个子集的划分，

而一个划分对应 $p!$ 个函数.

因此从A到B上的满射的个数等于$s(m, p)\,p!$，

其中，$s(m, p)$为集合A的包含p个子集的划分个数.

第三章函数

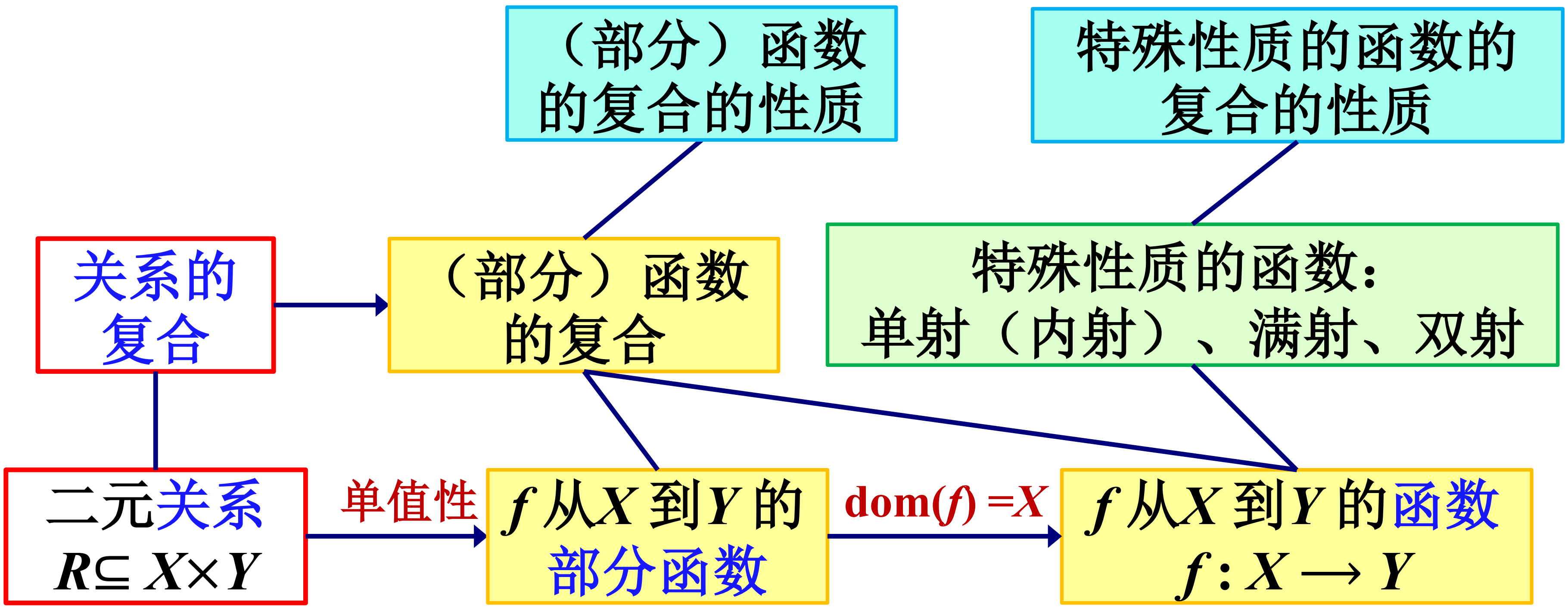
3. 1 基本概念

3. 2 函数的复合（合成）

3. 3 逆函数

3. 4 集合的特征函数

3.2 函数的复合（合成）


（部分）函数的复合的性质
特殊性质的函数的复合的性质
关系的复合
（部分）函数的复合
特殊性质的函数：
单射（内射）、满射、双射
二元关系
$R \subseteq X \times Y$
单值性
f 从 X 到 Y 的部分函数
dom(f) =X
f 从 X 到 Y 的函数
$f : X \longrightarrow Y$

回顾：关系的合成

- 关系的合成：设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是 Y 到 Z 的关系，则

$$R \circ S = \{<x, z> \mid \exists y \in Y (<x, y> \in R \wedge < y, z> \in S) \}$$

为 X 到 Z 的关系，称为 R 和 S 的复合关系.

问题：是否同样定义（部分）函数的合成?

3.2.1（部分）函数的复合

定理5 (部分函数的合成) 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数， 则复合关系 $f\circ g$ 为从 X 到 Z 的部分函数.

复合保持单值性

证明：若 $<x, z_1>, <x, z_2> \in f\circ g$，则有 $y_1, y_2 \in Y$， 使 $<x, y_1> \in f$， $<y_1, z_1> \in g$ 且 $<x, y_2> \in f$， $<y_2, z_2> \in g$.

由于 f 是部分函数，由 $<x, y_1> \in f$， $<x, y_2> \in f$ 得 $y_1 = y_2$，

由于 g 是部分函数，由 $<y_1, z_1> \in g$, $<y_2, z_2> \in g$， $y_1 = y_2$，

得 $z_1 = z_2$.

复合函数

定义6 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，则称复合关系 $f\circ g$ 为 f 与 g 的复合（部分）函数，用 $g\circ f$ 表示，即

$$g\circ f=\{<x, z> \mid x\in X \wedge z\in Z \wedge \exists y(y\in Y \wedge y= f(x) \wedge z = g(y))\}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$x \quad \rightarrow \; y = f(x) \rightarrow \; z = g(y) = g(f(x))$$

$$<x, z> \in g\circ f \Leftrightarrow <x, y> \in f \wedge < y, z> \in g$$

复合函数

定义6 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，则称复合关系 $f \circ g$ 为 f 与 g 的复合（部分）函数，用 $g \circ f$ 表示，即

$$g \circ f = \{<x, z> \mid x \in X \land z \in Z \land \exists y(y \in Y \land y = f(x) \land z = g(y))\}$$

- 复合函数 $g \circ f$ 与复合关系 $f \circ g$ 表示同一个集合.

这种表示上的差异是历史形成的，具有其方便之处：

- 部分函数：$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- 关系：当 $<x, z> \in f \circ g$ 时，必有 $y \in Y$ 使 $<x, y> \in f$ 且 $<y, z> \in g$

例. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, f, g, h 是从 X 到 X 的函数, 它们分别定义为:

$f = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>\}$

$g = \{<1, 2>, <2, 1>, <3, 3>\}$

$h = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 1>\}$

求复合函数 $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ h$

解: $f \circ g = \{<1, 3>, <2, 2>, <3, 1>\}$

$g \circ f = \{<1, 1>, <2, 3>, <3, 2>\}$

$f \circ g \circ h = \{<1, 3>, <2, 2>, <3, 3>\}$

复合（部分）函数的定义域与值域

$$X \xrightarrow{f} Y, \qquad Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\text{dom}\, f \to \text{ran}\, f \qquad \text{dom}\, g \to \text{ran}\, g$$

$$z = g\circ f(x) \qquad x \to y \qquad y \to z$$

$$x \in \text{dom}(g\circ f) \Longrightarrow \exists y(y=f(x) \wedge y \in \text{dom}\, g)$$

$$\Longrightarrow x \in f^{-1}[\text{dom}\, g]$$

$$z \in \text{ran}(g\circ f) \Longrightarrow \exists y(y \in \text{ran}\, f \wedge z=g(y))$$

$$\Longrightarrow z \in g[\text{ran}\, f]$$

问题：反向是否成立？

定理6：设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，则

(1) $\mathrm{dom}(g\circ f) = f^{-1}[\mathrm{dom}\, g]$ 且 $\mathrm{ran}(g\circ f) = g[\mathrm{ran}\, f]$.

(2) 若 f 和 g 都是全函数，则 $g\circ f$ 也是全函数.

证明：(1) 给定任意 $x\in \mathrm{dom}\,(g\circ f)$,

则有 $z\in Z$ 使得 $<x, z>\in g\circ f$,

因此, 必有 $y\in Y$ 使得 $<x, y>\in f$ 且 $<y, z>\in g$.

由 $<y, z>\in g$ 可知 $y\in \mathrm{dom}\, g$,

又由 $<x, y>\in f$ 得 $x\in f^{-1}[\mathrm{dom}\, g]$.

故 $\mathrm{dom}(g\circ f) \subseteq f^{-1}[\mathrm{dom}\, g]$

定理6：设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，则

(1) $\mathrm{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\mathrm{dom}\ g]$ 且 $\mathrm{ran}(g \circ f) = g[\mathrm{ran}\ f]$.

(2) 若 f 和 g 都是全函数，则 $g \circ f$ 也是全函数.

证明（续）：(1) 给定任意 $x \in f^{-1}[\mathrm{dom}\ g]$,

则有 $y \in \mathrm{dom}\ g$ 使得 $<x, y> \in f$.

由 $y \in \mathrm{dom}\ g$ 得，存在 $z \in Z$ 使 $<y, z> \in g$，故 $<x, z> \in g \circ f$,

这表明 $x \in \mathrm{dom}\,(g \circ f)$.

故 $f^{-1}[\mathrm{dom}\ g] \subseteq \mathrm{dom}(g \circ f)$.

综上，$\mathrm{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\mathrm{dom}\ g]$.

同理可证： $\mathrm{ran}\,(g \circ f) = g\,[\mathrm{ran}\ f]$.

定理6：设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，则

(1) $\mathrm{dom}(g\circ f) = f^{-1}[\mathrm{dom}\ g]$ 且 $\mathrm{ran}(g\circ f) = g[\mathrm{ran}\ f]$.

(2) 若 f 和 g 都是全函数，则 $g\circ f$ 也是全函数.

$\mathrm{dom}\ (g\circ f) = X$

证明： (2) 由(1)知， $\mathrm{dom}\ (g\circ f) = f^{-1}[\ \mathrm{dom}\ g\ ]$。

由于 g为全函数，

因此， $\mathrm{dom}\ g = Y$。

又由于 f 为全函数，因此 $f^{-1}[\ Y\ ] = X$。

故 $\mathrm{dom}\ (g\circ f) = f^{-1}[\ \mathrm{dom}\ g\ ] = f^{-1}[\ Y\ ] = X.$

所以， $g\circ f$ 也是 全函数.

例. 设对于 $x \in \mathrm{R}$，$f(x) = x+2$，$g(x) = x-2$，$h(x) = 3x$，R 是实数集合.求 $g \circ f$，$f \circ g$，$f \circ f$，$g \circ g$，$f \circ h$，$h \circ g$，$h \circ f$，$(f \circ h) \circ g$，$f \circ (h \circ g)$.

解

$$g \circ f = \{ <x, x> \mid x \in \mathrm{R} \}$$

$$f \circ g = \{ <x, x> \mid x \in \mathrm{R} \} = g \circ f$$

$$f \circ f = \{ <x, x+4> \mid x \in \mathrm{R} \}$$

$$g \circ g = \{ <x, x-4> \mid x \in \mathrm{R} \}$$

$$f \circ h = \{ <x, 3x+2> \mid x \in \mathrm{R} \}$$

$$h \circ g = \{ <x, 3x-6> \mid x \in \mathrm{R} \}$$

$$h \circ f = \{ <x, 3x+6> \mid \mathrm{x} \in \mathrm{R} \}$$

$$(f \circ h) \circ g = \{ < x, 3x-4 > \mid x \in \mathrm{R} \}$$

$$f \circ (h \circ g) = \{ < x, 3x-4 > \mid x \in \mathrm{R} \} = f \circ (h \circ g)$$

例 设 $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$，$g: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$，且 $g(x) = 2x$,

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x\text{是偶数} \\ 0 & \text{x是奇数} \end{cases}$$

求：$f \circ g$，$g \circ f$

解： (1) $f \circ g$ ： $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = x$,

(2) $g \circ f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$

若 x 是 偶数： $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x/2) = x$

若 x 是 奇数： $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$

所以，$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x & \text{当 } x\text{是偶数} \\ 0 & \text{当 } x\text{是奇数} \end{cases}$

3.2.2 函数复合运算的性质

恒等函数： 集合 X上的恒等关系

$$I_X = \{<x, x>| \, x \in X\}$$

称为 X 到 X 的恒等函数.

定理7 设函数 $f: X \to Y$， I_X和 I_Y是恒等函数，则

$$f \circ I_X = I_Y \circ f = f$$

证明: 对任意$x \in X, y \in Y$, 有 $<x, x> \in I_X$， 且 $<y, y> \in I_Y$,

有 $<x, y> \in f \Leftrightarrow <x, x> \in I_X \wedge <x, y> \in f$

$\Leftrightarrow <x, y> \in f \circ I_X$

$<x, y> \in f \Leftrightarrow <x, y> \in f \wedge <y, y> \in I_Y$

$\Leftrightarrow <x, y> \in I_Y \circ f$

3.2.2 函数复合运算的性质

定理 8 若 f 是 X 到 Y 的部分函数，g是 Y 到 Z 的部分函数，h 是 Z 到 W 的部分函数，则

（结合律）

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

证明：由题设，$h\circ g$，$g\circ f$，$h\circ(g\circ f)$, $(h\circ g)\circ f$ 均有定义，又因为f, g, h是关系, 由关系的复合运算满足结合律，因此定理成立.

函数的幂

定义7 若函数 $f : X \to X$，则 f 的 n 次幂，记为 f^n，可归纳定义如下:

1) $f^0 = I_X$

2) $f^{n+1} = f \circ f^n$，即对任意 $a \in X$,

   a) $f^0(a) = I_X(a) = a$;

   b) $f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$

例: 设 $X = \{0, 1, 2\}$，求出 X^X 中满足 $f^2 = f$ 的所有函数.

解: 假设函数 f 满足 $f^2 = f$，则对任意 $a \in X$,

若 $f(a) = a$，则 $f^2(a) = f(a) = a$. (1)

若 $f(a) = b$ ($b \neq a$)，则由 $f^2(a) = f(b) = f(a) = b$,得 $f(b) = b$. (2)

下面证明满足(1)与(2)的函数 f 一定满足 $f^2 = f$.

对任意的 $a \in X$,

若 $f(a) = a$, 则 $f^2(a) = a = f(a)$;

若 $f(a) = b \neq a$, 且 $f(b) = b$，则 $f^2(a) = f(f(a)) = f(b) = b = f(a)$.

得：f 是满足 $f^2 = f$ 的函数当且仅当对任意 $a \in X$, $f(a) = a$ 或 $f(a) = b \neq a$ 且 $f(b) = b$.

例: 设 $X = \{0, 1, 2\}$，求出 X^X 中满足 $f^2 = f$ 的所有函数.

解: 因此，满足条件 $f^2(x) = f(x)$ 的函数是:

(1) 只有一个$a \in \{0, 1, 2\}$,满足$f(a)=a$:

$f_1(x) = \{ <0, 0>, <1, 0>, <2, 0> \}$

$f_2(x) = \{ <0, 1>, <1, 1>, <2, 1> \}$

$f_3(x) = \{ <0, 2>, <1, 2>, <2, 2> \}$

(2) 只有两个$a \in \{0, 1, 2\}$,满足$f(a)=a$:

$f_4(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$，$f_5(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$f_6(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$，$f_7(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

$f_8(x) = \{ \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$，$f_9(x) = \{ \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

(3) 任意$a \in \{0, 1, 2\}$, 满足$f(a)=a$

$f_{10}(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

3.2.3 特殊性质函数的复合

定理9 设 $f: X \longrightarrow Y$ 和 $g: Y \longrightarrow Z$，则

(1) 若 f 和 g 都是满射，则 $g \circ f$ 也是满射.

(2) 若 f 和 g 都是单射，则 $g \circ f$ 也是单射

(3) 若 f 和 g 都是双射，则 $g \circ f$ 也是双射

定理10 设 f：$X \rightarrow Y$ 和 g：$Y \rightarrow Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射;

2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射;

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射.

定理9 设 $f: X \longrightarrow Y$ 和 $g: Y \longrightarrow Z$，则

(1) 若 f 和 g 都是满射，则 $g \circ f$ 也是满射.

(2) 若 f 和 g 都是单射，则 $g \circ f$ 也是单射

(3) 若 f 和 g 都是双射，则 $g \circ f$ 也是双射

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\underset{\neq \emptyset}{f^{-1}(g^{-1}(\{z\}))} \quad \underset{\neq \emptyset}{g^{-1}(\{z\})} \quad \{z\}$$

任意 $z \in Z$

解: (1) 因为 f 和 g 都是满射，

因此ran $f = Y$, ran $g=Z$.

得 ran $(g \circ f) = g(\text{ran}\, f) = g(Y) = Z$.

因此 $g \circ f$是满射.

定理9 设 $f: X \longrightarrow Y$ 和 $g: Y \longrightarrow Z$，则

(1) 若 f 和 g 都是满射，则 $g \circ f$ 也是满射.

(2) 若 f 和 g 都是单射，则 $g \circ f$ 也是单射

(3) 若 f 和 g 都是双射，则 $g \circ f$ 也是双射

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & f(x_1) & g(f(x_1)) \\ \neq & \neq & \neq \\ x_2 & f(x_2) & g(f(x_2)) \end{array}$$

(2)若 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$,

因为 f 是单射，因此 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

又因为 g 是单射，得 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$.

即 $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

故 $g \circ f$ 为单射.

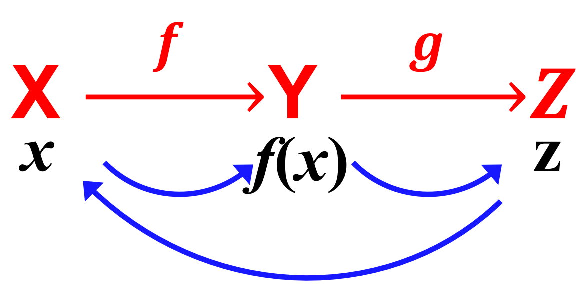
定理10 设 f：$X \to Y$ 和 g：$Y \to Z$

1) 若 $g\circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g\circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g\circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射.

规则：左满 右单



$z = g\circ f(x) = g(f(x))$

定理10 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射.

规则：左满 右单

证明: (1) 只需证明 $\mathrm{ran}\, g = Z$.

显然 $\mathrm{ran}\, g \subseteq Z$.

由 $\mathrm{ran}\, f \subseteq Y$ 可知 $g[\,\mathrm{ran}\, f\,] \subseteq g[Y] = \mathrm{ran}\, g$

而 $g[\mathrm{ran}\, f\,] = g \circ f[X]$

$= \mathrm{ran}(g \circ f)$

$= Z$ (因为$g \circ f$满射),

所以 $Z \subseteq \mathrm{ran}\, g$，综上，可得 $Z = \mathrm{ran}\, g$，即 g 为满射.

定理10 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射.

规则：左满 右单

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

(2) 反证法：

假设 f 不是单射，则有 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 使

$$f(x_1) = f(x_2),$$

因此 $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$，

这与 $g \circ f$ 为单射 矛盾.

所以假设不成立，即 f 为单 射.

(3) 由(1)与(2)可得.

定理10 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

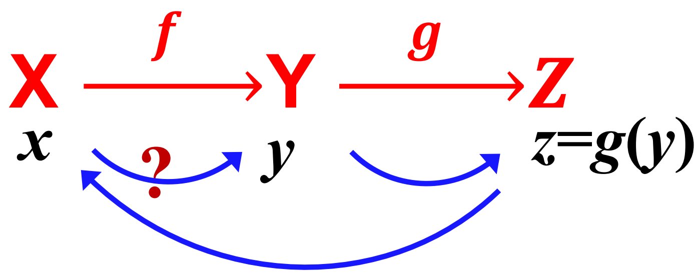
1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射.

规则：左满 右单

- 若 $g \circ f$ 是满射，则 f 不一定是满射；



$z = g \circ f(x) = g(f(x))$

例：$X=\{a\}$，$Y=\{0,\ 1\}$, $Z=\{b\}$.

$f=\{\langle a, 0\rangle\}$, $g=\{\langle 0, b\rangle, \langle 1, b\rangle\}$,

$g \circ f=\{\langle a, b\rangle\}$是满射，但 f 不是满射

定理10 设 f：$X \to Y$ 和 g： $Y \to Z$

1) 若 $g\circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g\circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g\circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射.

规则：左满 右单

- 若 $g\circ f$ 是单射，则 g 不一定是单射；

$$\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$$

$$y_1 \neq y_2$$

例：$X = \{a\}$， $Y = \{0, 1，2\}, Z = \{b\}$.

$f = \{<a, 2>\}, g = \{<0, b>, <1, b>, <2, b>\}$,

$g\circ f = \{<a, b>\}$ 是单射，但 g 不是单射

例

1. 设 $A = \{ 1, 2, \ldots, n \}$。有多少满足以下条件的从$A$到$A$的函数$f$:

a) $f \circ f = f$

b) $f \circ f = I_A$

c) $f \circ f \circ f = I_A$

第三章函数

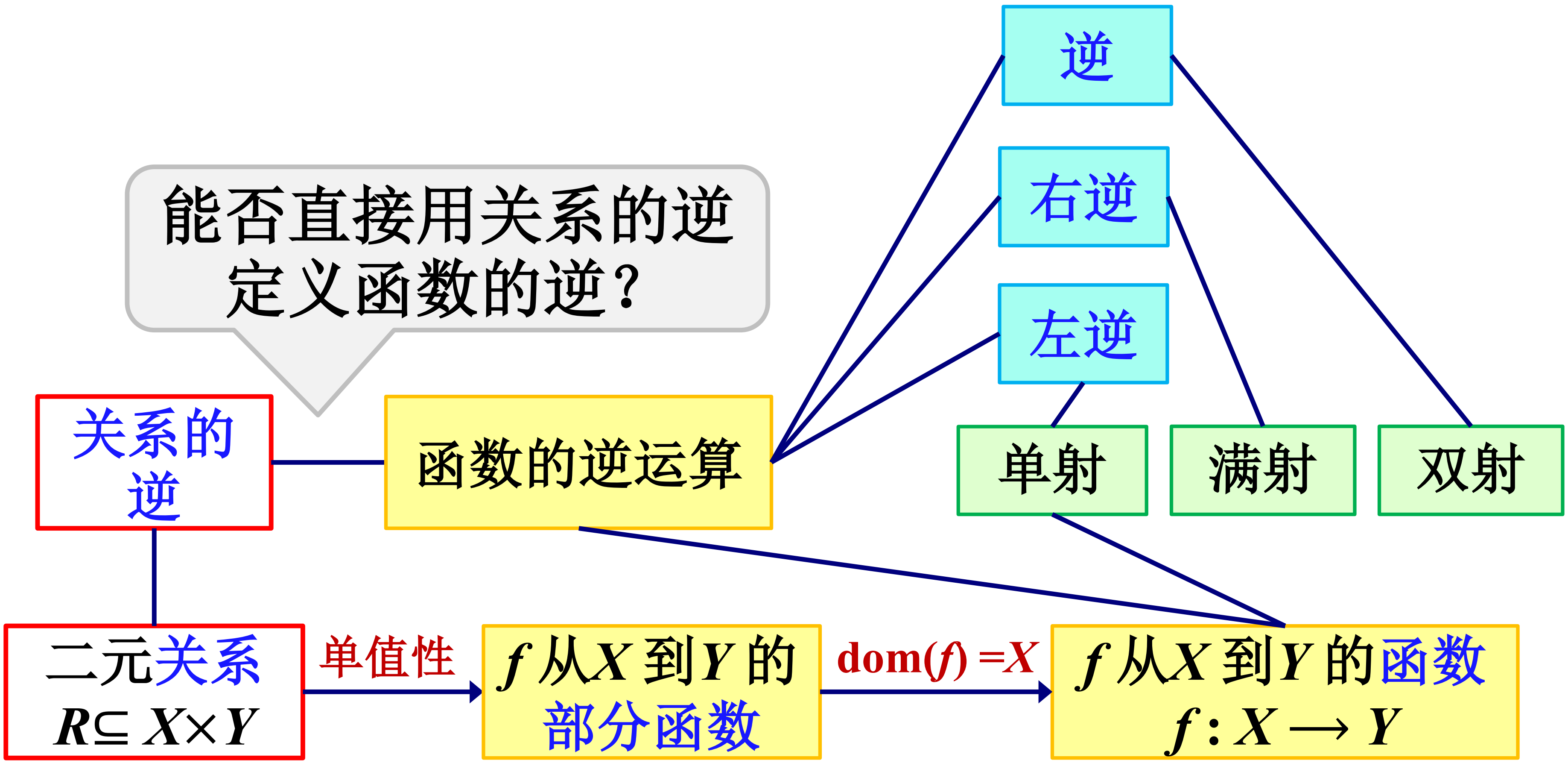
3.1 基本概念

3.2 函数的复合（合成）

3.3 逆函数

3.4 集合的特征函数

3.3 逆函数


逆
右逆
左逆
能否直接用关系的逆定义函数的逆？
关系的逆
函数的逆运算
单射
满射
双射
二元关系 $R \subseteq X \times Y$
单值性
f 从 X 到 Y 的部分函数
$\mathrm{dom}(f) = X$
f 从 X 到 Y 的函数 $f: X \longrightarrow Y$

3.3.1 逆函数

问题：能否用关系的逆定义函数的逆？

例： 设 函数 $f: \mathbf{I} \to \mathbf{I}, f = \{ < i, i^2 > \mid i \in \mathbf{I} \}$

作为关系的逆： $f^{-1} = \{ < i^2, i >, < i^2, -i > \mid i \in \mathrm{N} \}$

显然， <1, 1>， <1, -1> $\in f^{-1}$,

所以，关系 f^{-1} 不是部分函数,

故 不能把逆函数直接定义为逆关系 .

3.3.1 逆函数

定义9　设 X 和 Y 为集合 且 $f: X \to Y$.

1)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$，则称 f 为左可逆的，并称 g 为 f 的一个左逆函数，简称 左逆.

2)若有 $g: Y \to X$ 使 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为右可逆的，并称 g 为 f 的一个右逆函数，简称 右逆.

3)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为可逆的，并称 g 为 f 的一个逆函数，简称 逆.

问题：一个函数的左逆、右逆和逆是否一定存在？是否唯一？它们存在的条件是什么？

例：如下定义N上的四个函数：

$f_1=\{<0, 0>, <1, 0>\}\cup\{<n+2, n>\mid n\in N\}$

$f_2=\{<0, 1>, <1, 1>\}\cup\{<n+2, n>\mid n\in N\}$

$g_1=\{<n, n+2>\mid n\in N\}$

$g_2=\{<0, 0>\}\cup\{<n+1, n+3>\mid n\in N\}$

对任意$n\in N$,

(1) $(f_1\circ g_1)(n)=f_1(n+2)=n$

(2) $(f_2\circ g_1)(n)=f_2(n+2)=n$

(3) $(f_1\circ g_2)(n)=\begin{cases} f_1(0)=0, & n=0 \\ f_1(n+2)=n, & n>0 \end{cases}$

(4) $(f_2\circ g_2)(n)=\begin{cases} f_2(0)=1, & n=0 \\ f_2(n+2)=n, & n>0 \end{cases}$

因此，$f_1\circ g_1=f_2\circ g_1=f_1\circ g_2=I_N$

- f_1与f_2都是g_1的左逆
- f_1是g_2的左逆
- g_1与g_2都是f_1的右逆
- g_1是f_2的右逆

例：设 F_X 是所有从 X 到 X 的双射的集合，其中 $X = \{1, 2, 3\}$. 求出 F_X 的全部元素， 并求出每个元素的逆函数 .

解：因为 F_X 的元素均为双射，所以 $n(F_X) = 3! = 6$.

设 $F_X = \{ f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \}$

$f_1 = \{ <1, 1>, <2, 2>, <3, 3> \}$

$f_2 = \{ <1, 1>, <2, 3>, <3, 2> \}$

$f_3 = \{ <1, 2>, <2, 1>, <3, 3> \}$

$f_4 = \{ <1, 2>, <2, 3>, <3, 1> \}$

$f_5 = \{ <1, 3>, <2, 1>, <3, 2> \}$

$f_6 = \{ <1, 3>, <2, 2>, <3, 1> \}$

故 $f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$, $f_4^{-1} = f_5$, $f_5^{-1} = f_4$, $f_6^{-1} = f_6$.

3.3.2 （左、右）可逆的充要条件

定理11：设 X 和 Y 为集合且 $X\neq\varnothing$. 若 $f: X\longrightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为单射；

(2) f 为左可逆

(3) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的 $g: Z\rightarrow X$ 和 $h: Z\rightarrow X$, 当 $f\circ g=f\circ h$ 时，皆有 $g=h$.

定理12: 设 X 和 Y 为集合, 若 $f: X\rightarrow Y$, 则下列条件等价:

(1) f 为满射；

(2) f 为右可逆；

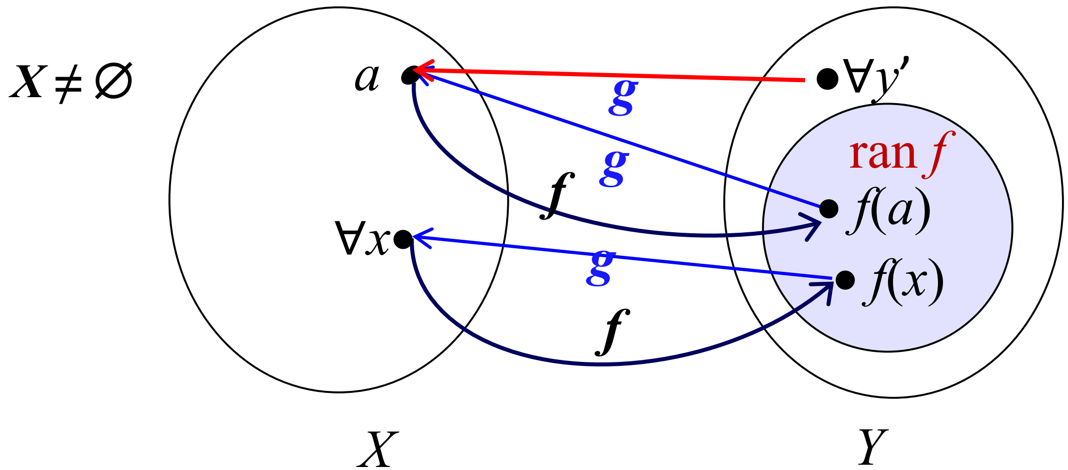
(3) f 可右消去，即对任意集合 Z 及任意的 $g: Y\rightarrow Z$ 和 $h: Y\rightarrow Z$, 当 $g\circ f=h\circ f$ 时，皆有 $g=h$.

定理11：设 X 和 Y 为集合且 $X \neq \varnothing$. 若f: $X \longrightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为单射；

(2) f 为左可逆 $\exists\, g: Y \longrightarrow X$, s.t., $g \circ f = I_X$

(3) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的g: $Z \rightarrow X$和 h: $Z \rightarrow X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g = h$.



定理11：设 X 和 Y 为集合且 $X \neq \varnothing$. 若 $f: X \longrightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为单射；

(2) f 为左可逆 $\exists\, g: Y \longrightarrow X$, s.t., $g \circ f = I_X$

(3) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的 $g: Z \rightarrow X$ 和 $h: Z \rightarrow X$, 当 $f \circ g = f \circ h$ 时，皆有 $g = h$.

证明：(1) $\Longrightarrow$(2) 设 f 是单射，则对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

即，若 $f(x_1) = f(x_2)$，则必有 $x_1 = x_2$.

因此，f 的逆关系 f^{-1} 为从 Y 到 X 的一个部分函数.

由于 $X \neq \varnothing$，令 $a \in X$，如下定义函数 $g: Y \rightarrow X$:

$$g = f^{-1} \cup ((Y - \operatorname{ran} f) \times \{a\}),$$

对任意 $x \in X$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$，即 $g \circ f = I_X$.

因此，g 为 f 的一个左逆，f 为左可逆.

定理11：设 X 和 Y 为集合且 $X \neq \varnothing$. 若$f: X \longrightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为单射；

(2) f 为左可逆 $\exists\, g: Y \longrightarrow X$, s.t., $g \circ f = I_X$

(3) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的$g: Z \to X$和 $h: Z \to X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g=h$.

证明: (2) $\Rightarrow$(3) 若 f 为左可逆的，

则有 $f_1: Y \to X$，使得 $f_1 \circ f = I_X$。

对于任意集合 Z 及任意的 $g: Z \to X$ 和 $h: Z \to X$,

当 $f \circ g = f \circ h$ 时，有

$$f_1 \circ (f \circ g) = f_1 \circ (f \circ h),$$

得 $g = I_X \circ g = (f_1 \circ f) \circ g = f_1 \circ (f \circ g)$

$= f_1 \circ (f \circ h) = (f_1 \circ f) \circ h = I_X \circ h = h$。因此，$f$ 可左消去.

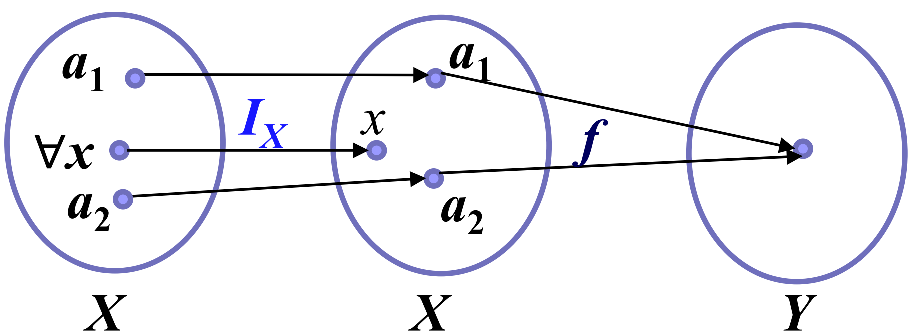
定理11：设 X 和 Y 为集合且 $X \neq \varnothing$. 若$f: X \longrightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为单射；

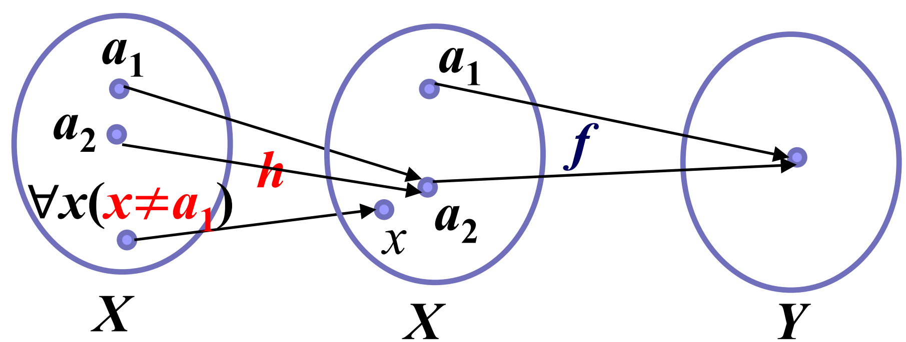
(2) f 为左可逆 $\exists\, g: Y \longrightarrow X$, s.t., $g \circ f = I_X$

(3) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的$g: Z \rightarrow X$和 $h: Z \rightarrow X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g = h$.

证明: (3) $\Longrightarrow$(1) 反证法.



$f \circ I_X = f$



$f \circ h = f$

定理11：设 X 和 Y 为集合且 $X\neq\varnothing$. 若$f: X\longrightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为单射；

(2) f 为左可逆 $\exists\, g:Y\longrightarrow X$, s.t., $g\circ f=I_X$

(3) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的$g: Z\rightarrow X$和 $h: Z\rightarrow X$, 当$f\circ g=f\circ h$时，皆有$g=h$.

证明: (3) $\Longrightarrow$(1) 反证法.

假设f不是单射, 则必有$a_1, a_2\in X$, 使得$a_1\neq a_2$且$f(a_1)=f(a_2)$.

定义$h: X\rightarrow X$，满足 $h(x)=\begin{cases} x, x\neq a_1 \\ a_2, x=a_1 \end{cases}$, 则有 $h\neq I_X$,

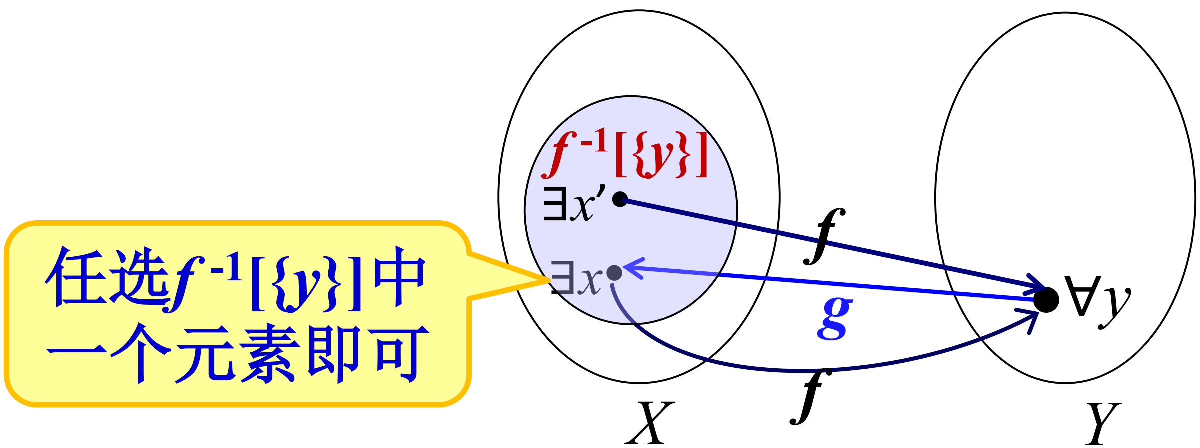
且 $f\circ I_X=f=f\circ h$, 与(3) 矛盾，因此 f 一定是单射.

定理12: 设 X 和 Y 为集合, 若f: $X \to Y$, 则下列条件等价:

(1) f 为满射;

(2) f 为右可逆; $\exists\ g:Y\longrightarrow X$, s.t., $f\circ g = I_Y$

(3) f 可右消去, 即对任意集合 Z 及任意的 g: $Y\rightarrow Z$ 和 h:$Y\rightarrow Z$, 当 $g \circ f = h \circ f$ 时, 皆有 $g=h$.



$f\circ g = I_Y$

定理12: 设 X 和 Y 为集合, 若f: $X \to Y$, 则下列条件等价:

(1) f 为满射;

(2) f 为右可逆; $\exists\, g:Y \longrightarrow X$, s.t., $f \circ g = I_Y$

(3) f 可右消去，即对任意集合 Z 及任意的 g: $Y \to Z$ 和 h:$Y \to Z$, 当 $g \circ f = h \circ f$ 时，皆有 $g=h$.

证明: (1) $\Rightarrow$(2) 若 f 为满射，则对任意的$y \in Y$，有$x \in X$, 使得 $y = f(x)$, 即$f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$.

如下定义函数 g: $Y \to X$, 使得，对任意的$y \in Y$, 任取 $x_y \in f^{-1}[\{y\}]$, 定义 $g(y) = x_y$.

则有对任意的 $y \in Y$，$(f \circ g)(y) = f \circ (g(y)) = f(x_y)=y$.

因此 $f \circ g = I_Y$, 从而 f 是右可逆.

定理12: 设 X 和 Y 为集合, 若f: $X \to Y$, 则下列条件等价:

(1) f 为满射;

(2) f 为右可逆; $\exists\, g: Y \longrightarrow X$, s.t., $f \circ g = I_Y$

(3) f 可右消去，即对任意集合 Z 及任意的 g: $Y \rightarrow Z$ 和 $h: Y \rightarrow Z$, 当 $g \circ f = h \circ f$ 时，皆有 $g=h$.

证明: (2) $\Rightarrow$(3) 若 f 右可逆，则存在 f_1: $Y \to X$, 使得

$$f \circ f_1 = I_Y.$$

又由 $g \circ f = h \circ f$，得

$$g = g \circ (f \circ f_1) = (g \circ f) \circ f_1$$

$$= (h \circ f) \circ f_1 = h \circ (f \circ f_1) = h.$$

因此，f 可右消去。

定理12: 设 X 和 Y 为集合, 若$f: X \to Y$, 则下列条件等价:
(1) f 为满射;
(2) f 为右可逆; $\exists\, g: Y \longrightarrow X$, s.t., $f \circ g = I_Y$
(3) f 可右消去, 即对任意集合 Z 及任意的 $g: Y \rightarrow Z$ 和 $h: Y \rightarrow Z$, 当 $g \circ f = h \circ f$ 时, 皆有 $g=h$.

证明: (3) $\Rightarrow$(1) 假设 f 不是满射, 则存在$b \in Y$, 使得 $b \notin \mathrm{ran}\, f$.

(a) 若$X=\emptyset$, 则由 $f: X \to Y$, 可知$f = \emptyset$.

令$Z=\{1, 2\}$, $g: Y \to Z$, 满足 $g(y) = 1$,

$h: Y \to Z$, 满足 $h(y) = 2$.

此时, $g \neq h$, 但 $g \circ f = h \circ f = \emptyset$, 与(3) 矛盾.

定理12: 设 X 和 Y 为集合, 若f: $X \to Y$, 则下列条件等价:

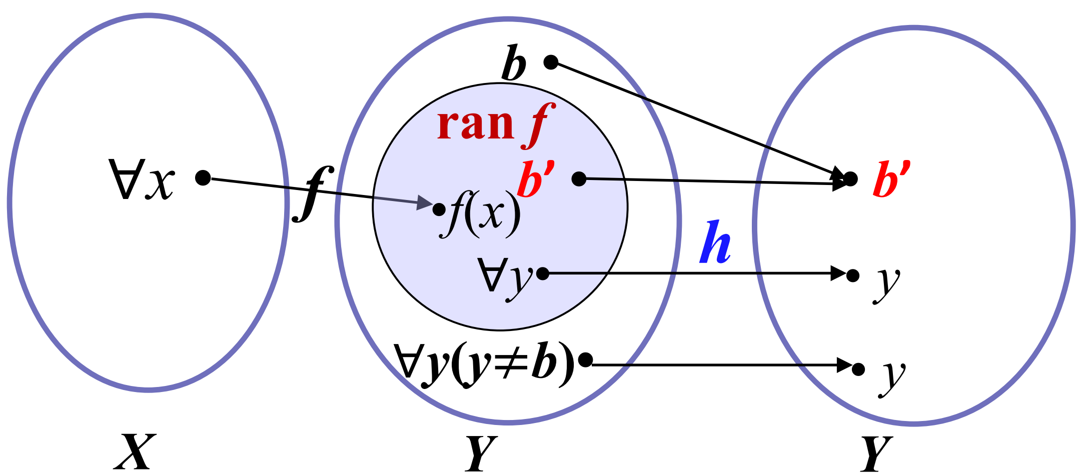
(1) f 为满射;

(2) f 为右可逆; $\exists\ g:Y\longrightarrow X$, s.t., $f\circ g = I_Y$

(3) f 可右消去, 即对任意集合 Z 及任意的 g: $Y\rightarrow Z$ 和 h:$Y\rightarrow Z$, 当 $g\circ f = h\circ f$ 时, 皆有 $g=h$.

证明: (3) $\Rightarrow$(1) 假设 f 不是满射, 则存在$b \in Y$, 使得 $b \notin \mathrm{ran}\, f$.

(b) 若$X \neq \emptyset$, 则有ran $f \neq \emptyset$.



$h\circ f = f = I_Y\circ f$

$h \neq I_Y$

定理12: 设 X 和 Y 为集合, 若$f: X \to Y$, 则下列条件等价:

(1) f 为满射;

(2) f 为右可逆; $\exists\, g: Y \longrightarrow X$, s.t., $f \circ g = I_Y$

(3) f 可右消去, 即对任意集合 Z 及任意的 $g: Y \rightarrow Z$ 和 $h: Y \rightarrow Z$, 当 $g \circ f = h \circ f$ 时, 皆有 $g=h$.

证明: (3) $\Rightarrow$ (1) 假设 f 不是满射, 则存在$b \in Y$, 使得 $b \notin \mathrm{ran}\, f$.

(b) 若$X \neq \emptyset$, 则有$\mathrm{ran}\, f \neq \emptyset$.

任取$b' \in \mathrm{ran}\, f$, 显然有$b \neq b'$.

定义 $h: Y \to Y$, 满足 $h(y)=\begin{cases} y, & y \neq b \\ b', & y = b \end{cases}$, 有$h \neq I_Y$, 且

$h \circ f = I_Y \circ f$, 与(3) 矛盾.

综上所述, f 为满射.

定理13: 设 X 和 Y 为二集合，若 $f: X \to Y$ 既是左可逆的，又是右可逆的，则 f 是可逆的，且 f 的左逆和右逆都等于 f 的唯一的逆.

证明: 设 $g_1: Y \to X$, $g_2: Y \to X$ 分别是 f 的左逆与右逆, 即

$$g_1 \circ f = I_X,\quad f \circ g_2 = I_Y.$$

则 $g_1 = g_1 \circ I_Y = g_1 \circ (f \circ g_2)$

$$= (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_X \circ g_2 = g_2.$$

因此，g_1是 f 的逆.

下面证明唯一性. 假设 g_3也是 f 的逆，即

$$g_3 \circ f = I_X, f \circ g_3 = I_Y.$$

则 $g_3 = g_3 \circ I_Y = g_3 \circ (f \circ g_1)$

$$= (g_3 \circ f) \circ g_1 = I_X \circ g_1 = g_1。$$

定理13: 设 X 和 Y 为二集合，若 $f: X \to Y$ 既是左可逆的，又是右可逆的，则 f 是可逆的，且 f 的左逆和右逆都等于 f 的唯一的逆.

定义10： 设 X 和 Y 为二集合. 若 f：$X \to Y$ 为可逆的，则 f 的 逆函数用 f^{-1} 表示.

定理14 若 X和Y 为二集合 且$f: X \to Y$, 则下列条件等价：

(1) f 是双射；

(2) f 既是左可逆的，又是右可逆的；

(3) f 是可逆的；

(4) f 的 逆关系 f^{-1} 即为 f 的 逆函数.

证明: (1) $\Rightarrow$(2)，(2) $\Rightarrow$(3)都可由定理11、12、13直接得到.

(3) $\Rightarrow$(4) 若 f 是可逆的，则存在唯一的逆 $f^{-1}: Y \to X$, 使得

$f \circ f^{-1} = I_Y$, 且 $f^{-1} \circ f = I_X$.

由于 I_Y 是满射，因此 f 是满射，由于 I_X 是单射，因此 f 是单射，所以 f 是双射，则其逆关系也是函数，即为 f 的逆.

(4) $\Rightarrow$(1) 因为f^{-1}是f的逆函数，故 f^{-1} 既是 f 的左逆又是 f 的右逆，即 $f^{-1} \circ f = I_X, f \circ f^{-1} = I_Y$.

因此 f 既是单射又是满射，即 f 是双射.

3.3.3 函数复合与逆的性质

定理15: 设X, Y, Z为三集合。若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是可逆的，则 $g \circ f$ 也是可逆的，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

证明：因为：

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$

$$= g \circ I_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_Z$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$$

$$= f^{-1} \circ I_Y \circ f = f^{-1} \circ f = I_X$$

故 $g \circ f$ 是可逆的，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

例：设 函数 $f: X \to Y$ 且 $g: Y \to X$，若令

$$A = \{ a \in X \mid g(f(a)) = a \} \text{ 且}$$

$$B = \{ b \in Y \mid f(g(b)) = b \}$$

则 $f[A] = B$ 。

例：设 A 为有限集 且 $f: A \to A$，证明：

(1) 若有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$，则 f 为双射；

(2) 若 f 为双射，则有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$.

例：设 函数 $f: X \rightarrow Y$ 且 $g: Y \rightarrow X$，若令

$$A = \{ a \in X \mid g(f(a)) = a \} \text{ 且}$$

$$B = \{ b \in Y \mid f(g(b)) = b \}$$

则 $f[A] = B$ 。

例：设 A 为有限集 且 $f: A \rightarrow A$，证明：

(1) 若有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$，则 f 为双射；

(2) 若 f 为双射，则有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$.

例：设 A 为有限集 且 $f: A \to A$，证明：

(1) 若有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$，则 f 为双射；

(2) 若 f 为双射，则有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$.

证明: (1) 由 $f^n = I_A$,

有 $f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1} = I_A$, 且 I_A 为双射.

由 $f^{n-1} \circ f = I_A$ 为单射，可知 f 为单射.

由 $f \circ f^{n-1} = I_A$ 为满射，可知 f 为满射.

故 f 为双射.

例：设 A 为有限集 且 $f: A \to A$，证明：

(1) 若有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$，则 f 为双射；

(2) 若 f 为双射，则有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$.

证明: (2) 因 f 为双射, 由归纳法可知:对每个 $n > 0$, f^n 均为双射.

设 $n(A)=m$, 则A上的双射有 $m!$个，

由抽屉原理可知：在 f, f^2，f^3，…，$f^{m!+1}$ 这 $m!+1$个双射中，必有两个相等， 不妨设为：$f^j = f^k$ ($1 \leq k < j$)，

因为 f 为双射，故有逆函数 f^{-1}，得

$$f^{j-k} = f^j \circ (f^{-1})^k = f^k \circ (f^{-1})^k = I_A.$$

第三章函数

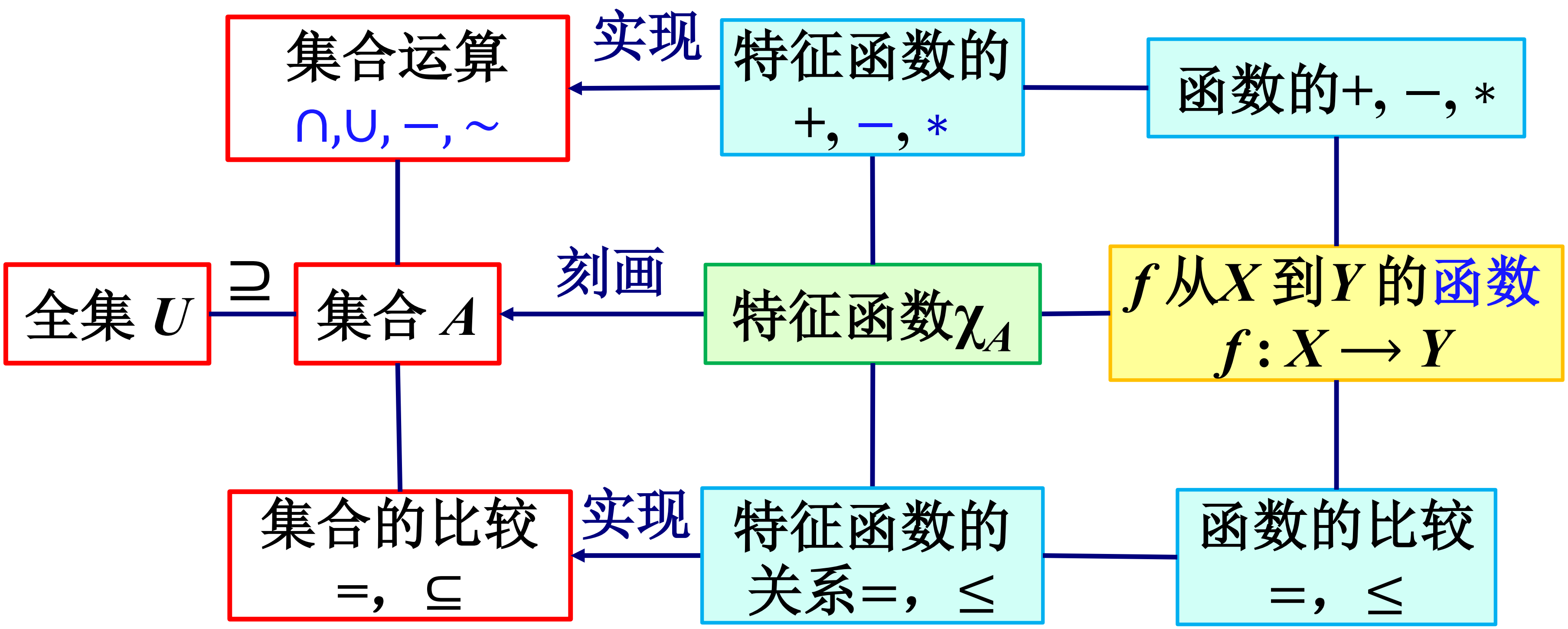
3. 1 基本概念

3. 2 函数的复合（合成）

3. 3 逆函数

3. 4 集合的特征函数

3.4 集合的特征函数



集合运算
∩,∪, −, ~
实现
特征函数的
+, −, *
函数的+, −, *
全集 U
⊇
集合 A
刻画
特征函数χ_A
f 从X 到Y 的函数
$f:X\longrightarrow Y$
集合的比较
=, ⊆
实现
特征函数的
关系=, ≤
函数的比较
=, ≤

函数的比较和运算

定义10：设X为任意集合，f和g都是从X到实数集R的函数，

(1) $f \leq g$：对每个$x \in X$, 皆有 $f(x) \leq g(x)$;

(2) $f+g: X \to \mathrm{R}$, 对每个$x \in X$, 皆有

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

称 $f+g$为f和g的和;

(3) $f-g: X \to \mathrm{R}$, 对每个$x \in X$, 皆有

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),$$

称 $f-g$为f和g的差;

(4) $f*g: X \to \mathrm{R}$, 对每个$x \in X$, 皆有

$$(f*g)(x)=f(x)*g(x),$$

称 $f*g$为f和g的积.

3.4.1 特征函数的定义

定义11 (特征函数) 设 U 是全集，A 是 U 的子集，A的特征函数 χ_A 为如下定义的从U到R的函数：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in A\\ 0, & 若\ x\notin A\end{cases}$$

例：设 U 是某大学 全体学生的集合，A 是计算机学院学生的集合，求 $\chi_A(x)$.

解：若 x 是计算机学院的学生，则 $\chi_A(x)=1$，

若 x 不是计算机学院的学生，则 $\chi_A(x)=0$.

例：设 $U=\{a, b, c, d\}$，$A=\{a, c\}$，$\chi_A(x)$ 是 特征函数，求 $\chi_A(x)$.

解：$\chi_A(a)=1$，$\chi_A(b)=0$，$\chi_A(c)=1$，$\chi_A(d)=0$

3.4.2 特征函数的性质

设A与B是全集 U 的任意两个子集, $0: U\to \mathbf{R}$, $1: U\to \mathbf{R}$, 使得对任意 $x\in U$, $0(x)=0$, $1(x)=1$.

(1) $0 \le \chi_A \le 1$

(2) $\chi_A=0$ 当且仅当$A=\varnothing$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)=0) \Leftrightarrow A=\varnothing$

(3) $\chi_A=1$ 当且仅当$A=U$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)=1) \Leftrightarrow A=U$

(4) $\chi_A \le \chi_B$当且仅当 $A\subseteq B$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)\le \chi_B(x)) \Leftrightarrow A\subseteq B$

(5) $\chi_A = \chi_B$当且仅当 $A=B$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)=\chi_B(x)) \Leftrightarrow A=B$

3.4.2 特征函数的性质

设A与B是全集 U 的任意两个子集，**0**: $U\rightarrow$ **R**, **1**: $U\rightarrow$ **R**,
使得对任意 $x\in U$, **0**(x) =0, **1**(x)=1.

(6) $\chi_{\sim A} = 1- \chi_A$ $\quad$ $\forall x, \chi_{\sim A}(x) = 1 - \chi_A(x)$

(7) $\chi_{A\cap B} = \chi_A * \chi_B$ $\quad$ $\forall x, \ \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) * \chi_B(x)$

(8) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A * \chi_B$ $\quad$ $\forall x, \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) * \chi_B(x)$

(9) $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_A * \chi_B$ $\quad$ $\forall x, \ \chi_{A-B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) * \chi_B(x)$

(10) $\chi_A * \chi_B = \chi_A$当且仅当$A \subseteq B$ $\quad$ $\forall x\,(\chi_A(x) * \chi_B(x) = \chi_A(x) \Leftrightarrow A \subseteq B)$

(11) $\chi_A * \chi_A = \chi_A$ $\quad$ $\forall x, \chi_A(x) * \chi_A(x) = \chi_A(x)$

3.4.3 特征函数的应用

$\chi_A = \chi_B$ 当且仅当 $A = B$

例：证明 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

证明：$\chi_{A\cap(B\cup C)}$

$= \chi_A * \chi_{B\cup C}$

$= \chi_A * (\chi_B + \chi_C - \chi_{B\cap C})$

$= \chi_A * \chi_B + \chi_A * \chi_C - \chi_A * \chi_{B\cap C}$

$= \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} - \chi_{A\cap(B\cap C)}$

$= \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} - \chi_{(A\cap B)\cap(A\cap C)}$

$= \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

例: 用特征函数求$(A-B)\cup(A-C)=A$成立的充分必要条件.

解: $\chi_{(A-B)\cup(A-C)} = \chi_{(A-B)} + \chi_{(A-C)} - \chi_{(A-B)\cap(A-C)}$

$= \chi_A - \chi_A * \chi_B + \chi_A - \chi_A * \chi_C - \chi_{(A-B)} * \chi_{(A-C)}$

$= 2\chi_A - \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_C$

$- (\chi_A - \chi_A * \chi_B) * (\chi_A - \chi_A * \chi_C)$

$= 2\chi_A - \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_C - (\chi_A * \chi_A - \chi_A * \chi_A * \chi_C - \chi_A * \chi_B * \chi_A +$

$\chi_A * \chi_B * \chi_A * \chi_C)$

$= 2\chi_A - \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_C - \chi_A + \chi_A * \chi_C + \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_B * \chi_c$

$= \chi_A - \chi_A * \chi_B * \chi_c$

因此 $(A-B)\cup(A-C)=A \Leftrightarrow \chi_A - \chi_A * \chi_B * \chi_c = \chi_A$

$\Leftrightarrow \chi_A * \chi_B * \chi_c = 0 = \chi_{A\cap B\cap C}$

$\Leftrightarrow A\cap B \cap C = \emptyset$.

总结：第三章函数

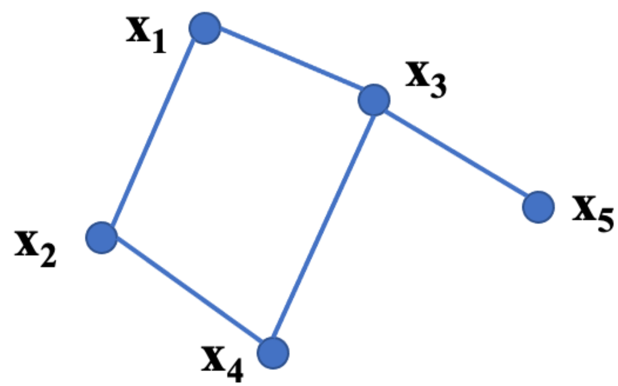
- 基本概念
  - ✓ 部分函数、（全）函数
  - ✓ 单射、满射
- 函数的复合（合成）
  - ✓ 关系的复合（合成）
  - ✓ （部分）函数的合成仍是（部分）函数
- 逆函数
  - ✓ 合成运算保持单射与满射
  - ✓ 左满右单
- 逆函数
  - 左逆、右逆、逆
- 集合的特征函数

作业7

设集合$P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$上的偏序 R的哈斯图$H_R$如下图所示。

a)求P的最小元、最大元、极小元和极大元（如果存在的话）。

b)求$\{x_2, x_3, x_4\}$、$\{x_3, x_4, x_5\}$和$\{x_1, x_2, x_3\}$的上界、下界、上确界和下确界（如果存在的话）。



集合P上的偏序R的哈斯图H_R

解：a) P的最大元：x_1； 最小元：没有；

极大元：x_1； 极小元：x_4, x_5

b) $\{x_2, x_3, x_4\}$的上界：x_1； 下界：x_4 ,

上确界 x_1, 下确界：x_4

$\{x_3, x_4, x_5\}$的上界：x_1, x_3, 下界没有,

上确界 x_3, 下确界：没有

$\{x_1, x_2, x_3\}$的上界：x_1, 下界 x_4,

上确界 x_1, 下确界：x_4

2. 设$< A, \leq >$为偏序结构，证明A的每个非空有限子集都至少有一个极小元和极大元.

证明：证： (反证法)设 S为A的任意一个非空有限子集，且S没有极小元.

由于S非空，则对任意的$a_0 \in S$, 存在$a_1 \in S$, 使得$a_1 \leq a_0$.

因为a_1不是极小元，因此存在 a_2，使得$a_2 \leq a_1 \leq a_0$.

可以证明，对任意的$n \in I_+$, 若存在$a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$,

满足 $a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 \leq a_0$,。

由于S没有极小元，则一定存在a_{n+1}，使得$a_{n+1} \leq a_n$.

由归纳法知，S中一定存在一个无限递减序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$,

与S为有限集矛盾.

因此S一定有一个极小元.

同理可证S一定有一个极大元.

3. 设 R为集合 S上的全序关系。证明 R和 R^{-1}同时为 S上的良序，当且仅当S为有限集。

证明：（必要性）反证法：

假设S是无限集。

由于R为S的良序，则S必有关系R下的最小元，记为a_1。

考虑集合 $S_1=S-\{a_1\}$，则S_1也为无限集。

由R为S的良序，得S_1也有关系R下的最小元a_2，且$a_1 \neq a_2$，a_1Ra_2。

一直继续下去，令$S_n=S_{n-1}-\{a_n\}$，S_n也有关系R下的最小元a_{n+1}。

因此，由于S为无限集，可得S关于关系R的无穷递增序列：

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

显然，该序列为S在关系 R^{-1}下的无穷递降序列。

由于R是全序，可证R^{-1}也是全序（请补充证明），与 R^{-1}为良序矛盾。故假设不成立，即S是有限集。

3. 设 R为集合 S上的全序关系。证明 R和 R^{-1}同时为 S上的良序，当且仅当S为有限集。

证明：(充分性)

若S为有限集，假设R与R^{-1}中至少有一个不是良序。

不失一般性，假设 R不是良序，

S中必存在关于R的无限递降序列，与S为有限集矛盾。

因此假设不成立，即R和R^{-1}均为S的良序。

4. 试判断下列I 上的二元关系是不是I上的等价关系，并说明理由。

a) $\{<i, j> \mid i, j \in I$ 且 $ij>0\}$

b) $\{< i, j> \mid i, j \in I$ 且 $i \le 0 \}$

解：a) 由于0*0=0, 因此0与0不满足关系，
因此该关系不满足自反性，因此不是等价关系。

b) 对任意i>0，有i与i不满足关系，因此该关系不满足自反性，因此不是等价关系。

5. 设集合 A 上的二元关系 R是自反的。证明R为等价关系的充要条件是：

若<a, b>, <a, c> ∈R, 则<b, c> ∈R.

证明：（必要性）假设R为等价关系，

则R是自反、对称、传递的。

若<a, b>, <a, c> ∈R，

由于R为对称的，则<b, a>∈R，

由于R是传递的，

因此由 <b, a>∈R，<a, c> ∈R 得 <b, c>∈R.

5. 设集合 A 上的二元关系 R是自反的。证明R为等价关系的充要条件是：

$$\text{若} <a, b>, <a, c> \in R, \text{则} <b, c> \in R.$$

证明： (充分性) 只需证明R是对称，传递的。

对任意$<x, y>\in R$，

由于R是自反的，则$<x, x>\in R$，

故 由$<x, y>\in R$， $<x, x>\in R$ 得$<y, x>\in R$，

因此，R 是对称的。

对任意$<x, y>, <y, z>\in R$，

由于R是对称的，因此$<y, x>\in R$，

再由$<y, z>\in R$，得$<x, z>\in R$。

因此，R是传递的。

综上，得 R是等价关系。

作业8

设 $\boldsymbol{\Pi_1}$和$\boldsymbol{\Pi_2}$都是集合 A的划分。试判断下列集类是不是A的划分，为什么？

a) $\mathbf{\Pi_1 \cap \Pi_2}$

b) $(\boldsymbol{\Pi_1} \cap (\boldsymbol{\Pi_2} - \boldsymbol{\Pi_1})) \cup \boldsymbol{\Pi_1}$

作业8

1. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。试判断下列集类是不是A的划分，为什么？

a) $\Pi_1 \cap \Pi_2$

b) $(\Pi_1 \cap (\Pi_2 - \Pi_1)) \cup \Pi_1$

解：a)

假设$\Pi_1 \cap \Pi_2$ 是A的划分，

则$\cup (\Pi_1 \cap \Pi_2) = A$。

又因为$\Pi_1 \cap \Pi_2 \subseteq \Pi_1$，$\Pi_1 \cap \Pi_2 \subseteq \Pi_2$，且$\cup \Pi_1 = \cup \Pi_2 = A$。

显然 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1$，且$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_2$，从而$\Pi_1 = \Pi_2$。

显然 $\Pi_1 = \Pi_2$时，$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1$ 是A的划分。

故，$\Pi_1 \cap \Pi_2$是A的划分当且仅当$\Pi_1 = \Pi_2$。

作业8

1. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。试判断下列集类是不是A的划分，为什么？

a) $\Pi_1 \cap \Pi_2$

b) $(\Pi_1 \cap (\Pi_2 - \Pi_1)) \cup \Pi_1$

解:

b)

$(\Pi_1 \cap (\Pi_2 - \Pi_1)) \cup \Pi_1 = (\Pi_1 \cap (\Pi_2 \cap \sim\Pi_1)) \cup \Pi_1$

$= ((\Pi_1 \cap \sim\Pi_1) \cap \Pi_2) \cup \Pi_1$

$= \Pi_1$

因此，$(\Pi_1 \cap (\Pi_2 - \Pi_1)) \cup \Pi_1$为A的划分

2. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。若对每个$S_1 \in \Pi_1$，皆有 $S_2 \in \Pi_2$，使得$S_1 \subseteq S_2$，就称Π_1为Π_2的加细，记为$\Pi_1 \leq \Pi_2$。如果$\Pi_1 \leq \Pi_2$且$\Pi_1 \neq \Pi_2$，就称Π_1为Π_2的真加细，并记为$\Pi_1 < \Pi_2$。

设R_1和R_2是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当$A/R_1 \leq A/R_2$;

b) $R_1 \subset R_2$ 当且仅当$A/R_1 < A/R_2$;

证明：

a) 假设 $R_1 \subseteq R_2$，对任意 $[x]_{R1} \in A/R_1$,

下面证明：$[x]_{R1} \subseteq [x]_{R2}$，其中$[x]_{R2} \in A/R_2$。

对任意 $y \in [x]_{R1}$，有$<x, y> \in R_1$。

由于$R_1 \subseteq R_2$，因此$<x, y> \in R_2$，所以$y \in [x]_{R2}$.

故 $[x]_{R1} \subseteq [x]_{R2}$。

因此 $A/R_1 \leq A/R_2$.

2. 设 Π_1和Π_2都是集合 A的划分。若对每个$S_1 \in \Pi_1$，皆有 $S_2 \in \Pi_2$，使得$S_1 \subseteq S_2$，就称Π_1为Π_2的加细，记为$\Pi_1 \le \Pi_2$。如果$\Pi_1 \le \Pi_2$且$\Pi_1 \ne \Pi_2$，就称Π_1为Π_2的真加细，并记为$\Pi_1 < \Pi_2$。

设R_1和R_2是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当$A/R_1 \le A/R2$;

b) $R_1 \subset R_2$ 当且仅当$A/R_1 < A/R2$;

证明：

b) 假设 $R_1 \subset R_2$，则有$R_1 \subseteq R_2$，

由a)得$A/R_1 \le A/R2$。

因为$R_1 \subset R_2$，因此存在$<x, y> \in R_2$，但$<x, y> \notin R_1$.

因此，$y \in [x]_{R2}$, $y \notin [x]_{R1}$。

所以$[x]_{R2} \in A/R_2$, 但 $[x]_{R2} \notin A/R_1$。

综上得 $A/R_1 < A/R2$。

4. 设R_1和R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，为什么？

1) R_1-R_2;

2) r(R_1-R_2)

3) $R_2 \circ R_1$

4) t($R_1 \cup$ R2)

证明：**1)** 不是，**R_1-R_2**不满足自反性。

4. 设R_1和R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，为什么？

1) $r(R_1-R_2)$

证明：

2) 由于R_1-R_2不满足传递性，因此，$r(R_1-R_2)$不一定满足传递性。

例如：$A=\{1,2,3,4\}$

$R_1=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <3, 1>\}$

$R_2=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 3>, <3, 4>, <1, 4>, <3, 1>, <4, 3>, <4, 1>\}$

R_1, R_2都是A上的等价关系。

$R_1-R_2=\{<1, 2>, <2, 3>, <2, 1>, <3, 2>\}$,

$r(R_1-R_2)=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <2, 3>, <2, 1>, <3, 2>\}$不是传递的，因此不是等价关系。

4. 设R_1和R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，为什么？

2 ） $r(R_1-R_2)$

证明：

2) 由于R_1-R_2不满足传递性，因此，$r(R_1-R_2)$不一定满足传递性。

例如：A={1,2,3,4}

R_1={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>,<4, 4>, <1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <3, 1>}

R_2={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>,<4, 4>, <2, 3>, <3, 4>, <2, 4>, <3, 2>, <4, 3>, <4, 2>}

R_1, R_2都是A上的等价关系。

R_1-R_2={<1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 1>},

$r(R_1-R_2)$ ={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>,<4, 4>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 1>}满足自反，对称，传递，是等价关系。

作业 9

1. 设A为集合，若对任意 S_1，$S_2 \in \mathcal{P}(A)$，皆令$f(S_1, S_2)=S_1 \cap S_2$。证明：f 是从$\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)$到$\mathcal{P}(A)$的二元函数。

证明：显然 f 是从$\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)$到$\mathcal{P}(A)$的二元关系。

对任意的 $<S_1, S_2>, <S_3, S_4> \in \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)$，

则$f(S_1, S_2)=S_1\cap S_2, f(S_3, S_4)=S_3\cap S_4$

若 $<S_1, S_2>=<S_3, S_4>$，则$S_1= S_3$, $S_2=S_4$, 因此，$S_1\cap S_2=S_3\cap S_4$

故 f 满足单值性，因此f为从$\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)$到$\mathcal{P}(A)$的部分函数。

显然 $\mathrm{dom}\ f = \mathcal{P}(A) \times\mathcal{P}(A)$。

综上，f是从$\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(A)$到$\mathcal{P}(A)$的二元函数。

2. 设 f 为从集合X到Y的部分函数, $\mathrm{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathrm{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$。

证明：1) $f[\cup \mathrm{A}] = \cup \{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\}$;

2) 若$\mathrm{A} \neq \varnothing$，则 $f[\cap \mathrm{A}] \subseteq \cap\{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\}$。

并说明为什么 2)中 "$\subseteq$" 不能替换为 "="。

证明： 设$A = \{A1, \ldots, A_n\}$,

1) 对任意 $b \in f[\cup \mathrm{A}]$, 则存在$a \in \cup \mathrm{A}$, 使得$b = f(a)$。

因为$a \in \cup \mathrm{A}$，则存在$A_i \in \mathrm{A}$, 使得 $a \in A_i$

故有 $b \in f[A_i] \subseteq \cup \{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\}$。

即 $b \in \cup \{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\}$。

故有 $f[\cup \mathrm{A}] \subseteq \cup \{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\}$

对任意$b \in \cup \{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\}$，则存在$A_i \in \mathrm{A}$, 使得 $b \in f[Ai]$。

则存在$a \in A_i$使得 $b = f(a) \in f[A_i] \subseteq f[\cup \mathrm{A}]$, 即$b \in f[\cup \mathrm{A}]$.

得 $\cup \{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\} \subseteq f[\cup \mathrm{A}]$.

综上，$f[\cup \mathrm{A}] = \cup \{f[A] \mid A \in \mathrm{A}\}$。

2. 设f为从集合X到Y的部分函数, A $\subseteq \mathcal{P}(X)$, B$\subseteq\mathcal{P}(Y)$。

证明：1) $f[\cup A] = \cup \{ f[A] \mid A\in A \}$;

2) 若A $\neq\varnothing$，则 $f[\cap A] \subseteq \cap\{ f[A] \mid A\in A\}$。

并说明为什么 2)中 “$\subseteq$” 不能替换为 “=”。

证明： 设$A= \{A1, \ldots, A_n \}$,

2) 对任意 $b\in f[\cap A]$, 则存在$a\in\cap A$, 使得$b=f(a)$。

因为$a\in\cap A$，则对任意$A_i \in A$, 有 $a\in A_i$，$f\in f[A_i]$.

故， $b\in\cap \{ f[A] \mid A\in A \}$。

得 $f[\cap A] \subseteq \cap\{ f[A] \mid A\in A \}$。

令 X={1, 2, 3, 4 }, Y={1}, $f(1)$=f(2)=f(3)=f(4)=1.

$A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{3, 4\}$, $A=\{A_1, A_2\}$,

$\cap A=\varnothing$, $f(\cap A)=\varnothing$，而 $\cap\{ f[A] \mid A\in A\}=f[A_1] \cap f[A_2]=\{1\}$

3. 下列集合能够定义函数吗？如果能，求出它们的定义域和值域。

1) { <1, <2, 3> >, <2, <3, 4> >, <3, <1, 4> >, < 4, <1, 4> >}

2) { < 1, <2, 3>>, < 2, <3, 4> >, <1, <2, 4>> }

解： 1） 令A={1，2，3，4},则定义了从A到$\mathcal{P}$(A)的函数，定义域为A, 值域为{<2,3>, <3, 4>, <2, 4>}。

2) 由于< 1, <2, 3>>， <1, <2, 4>>同时出现 ，不满足单值性，因此不是函数。

4. 设 f, g, h 是从R到R的函数，对于 每个 $x \in R$，皆有

$f(x) = x+3, g(x) = 2x+1, h(x) = x/2$。

试求 $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ g$ 和$f \circ h \circ g$

解：$g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ g$ 和$f \circ h \circ g$ f都是R到R的函数，其中，

$g \circ f(x) = 2x+7$

$f \circ h(x) = x/2+3$

$h \circ g(x) = (2x+1)/2$

$f \circ h \circ g = (2x+1)/2+3 = x + 7/2$

5. 设A ={1, 2, …, n}。有多少个满足以下条件的从A到A的函数 f :

a) $f \circ f = f$

b) $f \circ f = I_A$

解： a) 假设函数 f 满足$f^2 = f$，则对任意$a \in X$,

若 f (a) = a, 则 f^2 (a) = f (a) = a.

若f (a) = b (b≠a), 则由 $f^2(a)=f(b) = f(a)=b$,得f(b) = b.

设 f 是A上的函数，满足只存在k个A中的元素a使得f(a)=a.

假设$A_1 \subseteq A$, $|A_1|=k$, 且对任意 $a \in A_1$, 有f(a)=a，

则对任意的$b \in A- A_1$, 一定存在一个$c \in A_1$, 有f(b)=c.

否则，若存在c’$\in A- A_1$,使得f(b)=c’，则f(c’)=c’，与只在k个A中的元素a使得f(a)=a矛盾.

因此，满足$f^2 = f$ 的函数的个数为 $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{n-k}$