离散数学（2）
第七次作业讲解

2024 秋季学期

1. 计算以下式子，并把计算结果用自然数表示。

(1) $2\cup 3$;

(2) $2\cap 3$;

(3) $\bigcup 5$;

(4) $\bigcap 6$;

(5) $\bigcup(\bigcup 7)$.

知识点：集合的后继、自然数集合的归纳定义

- 集合 A 的后继 $A^+ = A \cup \{ A \}$
  - $\varnothing^+ = \{ \varnothing \}, \{ \varnothing \}^+ = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$
  - $A \in A^+, A \subseteq A^+, A^+ \neq \varnothing$
- 自然数集合N的归纳定义：

  (1) $0\in N$，这里 $0 = \varnothing$;

  (2) 若 $n\in N$，则 $n^+\in N$；

  (3) 若 $S \subseteq N$, 且满足

  (a) $0\in S$

  (b) 如果 $n\in S$，则 $n^+\in S$

  则 $S = N$.

$0 = \varnothing$

$1 = 0^+ = 0\cup\{0\} = \varnothing \cup\{\varnothing\} = \{ \varnothing\} = \{0\}$

$2 = 1^+ = 1\cup\{1\} = \{\varnothing\} \cup\{\{\varnothing\}\} = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}\} = \{0, 1\}$

$3 = 2^+ = 2\cup\{2\} = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}\} \cup\{\{ \varnothing, \{ \varnothing \}\}\} = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}, \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} \} = \{ 0, 1, 2 \}$

$\cdots$

$n+1 = n^+ = \cdots = \{ 0, 1, \cdots, n \}$

$\cdots$

1. 计算以下式子，并把计算结果用自然数表示。

(1) $2\cup 3$;

(2) $2\cap 3$;

(3) $\cup 5$;

(4) $\cap 6$;

(5) $\cup(\cup 7)$.

解： (1) $2\cup 3=\{0, 1\}\cup\{0, 1, 2\}=\{0, 1, 2\}=3$

(2) $2\cap 3=\{0, 1\}\cap\{0, 1, 2\}=\{0, 1\}=2$

(3) $\cup 5=\cup 4^{+}=4$ （因为有结论$\cup n^{+}=n$ ）

或 $\cup 5=\cup\{0, 1, 2, 3, 4\}=\cup\{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$

$=\varnothing\cup\{0\}\cup\{0, 1\}\cup\{0, 1, 2\}\cup\{0, 1, 2, 3\}$

$=\{0, 1, 2, 3\}=4$

(4) $\cap 6=\cap\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}=0\cap 1\cap 2\cap 3\cap 4\cap 5$，而$0=\varnothing$，得$\cap 6=\varnothing$.

(5) 类似(3)可得，$\cup 7=6$.

因此，$\cup(\cup 7)=\cup 6=5$.

2. 令集合 $A=[0, 1)$，$B=(0, 1)$，证明 A 与 B 等势。

知识点：集合的等势、集合的基数的大小关系

- 设 A 和 B 为两个集合，
  - A 与 B 等势（$A \sim B$）$\Leftrightarrow$ 存在从 A 到 B 的双射
    $\Leftrightarrow \#A = \#B$
    $\Leftrightarrow \#A \le \#B$ 且 $\#B \le \#A$
  - $\#A \le \#B \Leftrightarrow$ 存在从 A 到 B 的单射
    $\Leftrightarrow$ 存在从 B 到 A 的单射

2. 令集合 A=[0, 1)，B=(0, 1)，证明 A与B等势。

证: 如下定义f: [0, 1) → (0, 1)：对任意 $x \in$ [0, 1)，

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{i+1}, & x = \frac{1}{i},\ i \in \mathrm{N}, i \geq 2 \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

可证：f是单射，也是满射，从而是双射（补充）.

因此，A与B等势。

3. 设 $a_0, a_1, a_2,\ldots$ 为由自然数组成的严格单调递增序列。证明:若$n \in \mathrm{N}$，则$n \le a_n$.

证：关于 n进行第一归纳法，证明若$n\in\mathrm{N}$，则$n\le a_n$。

(1) 当$n=0$时，显然有 $0 \le a_0$。

(2) 假设当$n = k \ge 0$时，命题成立，即 $k\le a_k$。

下面证明当$n = k+1$时，有$k+1\le a_{k+1}$

由于$a_0, a_1, a_2 \ldots$为严格单调递增序列，因此有 $a_{k+1} > a_k$，得 $a_{k+1} \ge a_k+1$。

又由归纳假设知 $a_k \ge k$，

所以，得 $a_{k+1}\ge a_k+1\ge k+1$。

综上所述，由数学归纳法得：若$n\in\mathrm{N}$，则$n\le a_n$。

4. 称一个集合A为传递的，如果A的元素的元素都仍然是A的元素。证明每个$n\in N$ 都是传递的。

证明：对 n进行第一数学归纳法证明.

当$n=0$时，$0=\emptyset$.

当$n=1$时，$1=0^+=\{\emptyset\}$.

显然，0与 1中没有元素的元素，因此，0与1都是传递的.

当 $n=2$时，$2=1^+=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$，2的元素的元素只有$\emptyset$，属于2，因此，2是传递的.

假设当$n\geq 2$时，n是传递的，即对任意$a\in n$, 任意$x\in a$, 有$x\in n$.

下面证明 $n^+=n\cup\{n\}$也是传递的.

对任意的$a\in n^+$，则$a\in n$或者 $a\in\{n\}$.

(a) 若$a\in n$，则由归纳假设知，对任意$x\in a$，有$x\in n$, 由$n^+=n\cup\{n\}$ 得$x\in n^+$.

(b) 若$a\in\{n\}$，则$a=n$，则对任意$x\in a=n$， 由$n^+=n\cup\{n\}$得 $x\in n^+$.

因此，n^+是传递的.

综上，由数学归纳知，每个$n\in N$都是传递的。

5. 设有一个口袋，装有n个球，甲、乙两人轮流从口袋里取球，规定每人可拿 1 至 m个球，其中$n>m$ 且最后取完口袋里的球者为获胜者。
试证明：如果甲先取球且$(m+1)\nmid n$，则甲总能获胜。

知识点：单射、满射、双射

- 若 $f: X \to Y$,
  - 若 $\mathrm{ran}\, f = Y$，则称 f 为满射，即 $\forall y\, (\, y \in Y \to \exists x\, (\, x \in X \wedge f(x) = y\,)\,)$
  - 若 f 是 1-1的，则称 f 是单射（内射），即

$$\forall x_1 \forall x_2 (\, x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 (\, x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$$

  - 若 f 既是满射，又是单射，则称 f 为双射.

5. 设有一个口袋，装有n个球，甲、乙两人轮流从口袋里取球，规定每人可拿 1 至 m个球，其中$n>m$ 且最后取完口袋里的球者为获胜者。

试证明：如果甲先取球且$(m+1)\nmid n$，则甲总能获胜。

证明：设 $n = (m+1)\, q + r$，其中 q 是非负整数，且$m \geq r > 0$。

对 q 用第一归纳法。

(1) 当$q = 0$时，$n = r$且$m \geq r \geq 1$，所以甲可一次将r 个球取完，则甲获胜。

(2) 对任意的$k \geq 0$，假设当 $q = k$ 时命题为真，

则当$q = k+1$时，即存在 r 使得$n = (m+1)\,(k+1) + r$，$m \geq r > 0$.

此时，甲先取 r 个球，然后乙只能拔倒 x（$1\leq x \leq m$）个球，

此时剩下 $n' = (m+1)(k+1) + r - r - x = (m+1)k + (m+1-x)$ 个球。

由$1\leq x \leq m$ 得 $1\leq m+1 - x \leq m$，则根据归纳假设可知甲总能获胜。

即当$q = k+1$时，命题也为真。

综上可得，甲总能获胜。