离散数学(2) 课程介绍

什么是离散数学？

- 离散数学(**Discrete mathematics**) 是研究离散对象的结构及其相互关系的学科，是现代数学的一个重要分支

离散数学(信息类)
(必修)

离散数学2(必修)

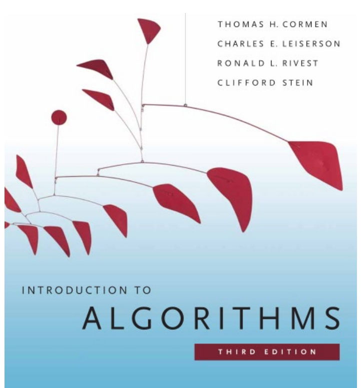
离散数学3(选修)

- 数理逻辑、集合论、图论、组合数学、可计算理论、自动机理论、代数系统、数论、概率论（离散部分）

形式语言与自动机理论
(选修)

为什么学习离散数学？

- 掌握处理离散结构所必须的描述工具和方法
  - 集合、关系、函数、图、树、有限状态机等
- 培养数学抽象思维和严格逻辑推理能力
- 给后继课程提供必要的数学基础
  - 数据结构、编译原理、操作系统、数据库、算法设计与分析、软件工程、计算机网络、密码学



VIII Appendix: Mathematical Background

离散数学(2)的主要内容

- 集合论
  - 集合、关系、函数、自然数和基数
- 图论
  - 图论的基本概念、子图和图的运算
    路径、回路和连通图、欧拉图和哈密顿图
    图的矩阵表示、树、有向树和有序树

课程信息

- 课程名称：离散数学（2）
- 课程类型：专业必修
- 开课年级：本科二年级（秋季学期）
- 课程内容：
  - 集合论：
    - 第1章集合
    - 第2章 关系
    - 第3章 函数
    - 第4章 自然数与基数
  - 图论：
    - 第5章 图论的基本概念
    - 第6章 子图和图的运算
    - 第7章 图的矩阵表示
    - 第8章 欧拉图和哈密顿图
    - 第9章 树、有向树和有序树

课程信息

- 内容：集合论，图论
- 考核方式：闭卷考试
- 教材与参考资料：
  - 离散数学(第三版). 尹宝林、何自强、许光汉、檀凤琴. 高等教育出版社
  - 离散数学. 王兵山等，国防科技大学出版社
  - **Discrete Mathematical Structures, Bernard Kolman, Robert C. Busby, Sharon Ross**，清华大学出版社
  - **Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H. Rosen,** 机械工业出版社
- 课程平台： **www.dmplatform.online**

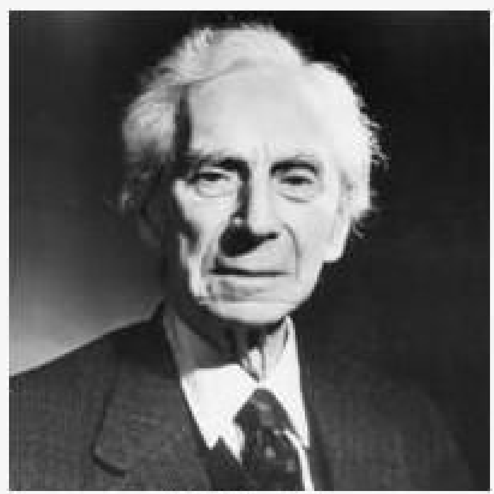
问题思考？

- 问题1：无穷集合是什么？(集合论根本问题）
- 问题2：“整体大于部分”或“整体在数量上多于部分”在无穷集合是否成立？
- 问题3：正整数集与实数集能否一一对应？（康托-戴德金问题）
- 问题4：平面点和直线点能否一一对应？（康托问题）
- 问题5：如果有旅店的房间是无限的，已经住满，是否新来客人仍能居住？（希尔伯特旅店问题）
- 问题6：无穷集合间是否有大小（势）之分？自然数是最小无穷集吗？实数集比自然数大吗？他们之间是否还有其他无穷集（连续统 continue hypothesis)

0-1：集合论的产生与发展

- 朴素集合论（康托）
- 罗素悖论（数学的第三次危机）
- 公理集合论（策梅洛）

康托(1845-1918)，
德国数学家、
集合论创始人



罗素(1872-1970)，英国
哲学家、数学家，逻辑
学家、历史学家

策梅洛(1871-1953)，
德国数学家，公理集合
论的主要开创者之一

集合论的创始人——康托

- 格奥尔格·康托尔（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845.3.3-1918.1.6）
- 德国数学家，集合论的创始人。生于俄国圣彼得堡。父亲是丹麦商人，母亲艺术世家。
- 1856年全家迁居德国的法兰克福。在哈雷大学任教（1869-1913），1872年成为该校副教授，1879年任教授。由于学术观点上受到的沉重打击，康托尔曾一度患精神分裂症，虽在1887年恢复了健康，继续工作，但晚年一直病魔缠身
- 康托尔爱好广泛，极有个性，终身信奉宗教。早期在数学方面的兴趣是数论，1870年开始研究三角级数并由此导致19世纪末、20世纪初最伟大的数学成就——集合论和超穷数理论的建立。1888-1893年，康托尔任柏林数学会第一任会长，1890年领导创立德国数学家联合会并任首届主席。

集合论的创始人——康托

- 集合论是直接产生于对“无穷”的数学研究的需要
- 集合论是为了研究各种无穷而建立起来的数学理论
- 数学史的三次危机都与无穷相关

康托

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体。

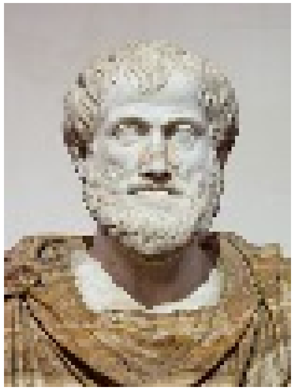
数学的三次危机

- 希帕索斯悖论
  - $\sqrt{2}$：无理数的诞生
- 贝克莱悖论
  - 无穷小：微积分的发展
- 罗素悖论
  - 公理集合论

无穷：遭遇质疑

- 古希腊的哲学家亚里士多德提出：

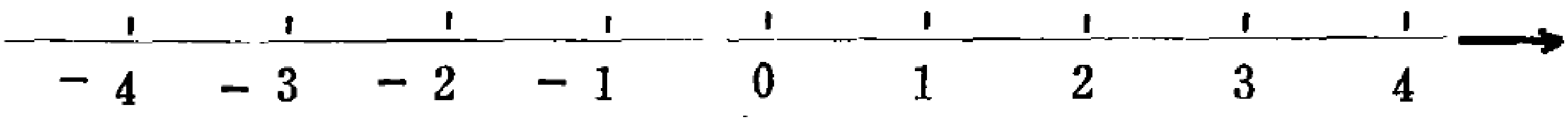
至于“无穷”虽在潜能上有此存在，然后这类潜能的命意并不指望其实现，这只在意识上有此潜在而已。实际是这样，分割一条线永不能分割完毕。在分割过程中，潜在的“无穷”是有的。但这无限毕竟不得实现为独立的存在。



- 德国数学家、“数学王子”高斯提出：

我极力反对把无穷量当成一种完成的东西来使用，这在数学上是绝对不允许的。无穷只不过是在实际谈论极限时的一个说法，有些关系可以要多接近就多接近极限，而另一些则允许无限制地增长。

无穷



- 数轴上除了实数以外，是否还有别的数？
- 实数是否把数轴布满了，是否“连续”？
- 对“无穷”的数量研究提出需求，考虑对各种不同的无穷进行数量比较

集合论就是为了研究各种无穷而建立起来的数学理论

集合论的产生

- “整体大于部分”或“整体在数量上多于部分”在无穷领域是否成立？
- 1636年，伽利略著作《关于新科学的对话》提出“伽利略悖论”：

  1，2，3，4， 5， 6， 7， 8，…

  1，4，9，16，25，36，49，64…

  - 正整数比完全平方数多，但对于任何正整数，又有唯一确定的完全平方数与之对应

  整体大于部分 ➔ 部分能够“等于”整体

集合论的产生

- 两个世纪后，康托提出：

“可以通过一一对应的方法来比较两个集合的元素多少；实无限是一个确实的概念。”

“如果能够根据某一法则，使集合M与集合N中的元素建立一一对应的关系……那么，集合M与集合N等势或者说具有相同的基数”

集合论的产生

- **1873年11月29日，康托在给德国数学家戴德金的一封信中，明确提出了“正整数集与实数集之间能否建立一一对应呢？”的问题**
- **同年12月7日，再次致信戴德金说他已成功证明正整数集与实数集之间不能建立一一对应**
- **1873年12月7日可以看作是集合论的诞生日**

实数集与自然数集不能一一对应

例：自然数集合与(0, 1]上的点不能一一对应。

假设自然数集合与(0, 1]上的点一一对应，则可以把(0, 1]中所有实数以十进制小数形式列出来：

$a_0=0.a_{00}a_{01}a_{02}\cdots$

$a_1=0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

对角线法

$\cdots$

$a_n=0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$

$\cdots$

构造 $b=0.b_{00}b_{11}b_{22}b_{33}\cdots$, $b_{ii}\neq a_{ii}$, $i=0, 1, 2, \ldots,$

显然，b与上面序列中的任一数都不同，矛盾。

1874年1月，写给戴德金的信中问首：区间和正方形两个点的集合是否能构成一一对应的关系？

- 1877年证明了平面与直线之上的点可以建立一一 对应

  例:（0, 1）与单位正方形两者之间存在一一对应关系

例如：数 0.75146897……

把奇数位、偶数位分别取出得到两个新的数：

0.7169… …，0.5487… …

把以上两位数作为横坐标和纵坐标得到的点落在单位正方形中。

反之同样可构造。

- 一般的n维空间也可以和直线建立一一对应。

可数集与不可数集

- 1874年康托提出“可数（列）集”的概念，并以与自然数集合一一对应为原则对无穷集合进行分类
- 可数集
  - 自然数集
  - 代数数集
  - 有理数集

基数相等

- 不可数集
  - 超越数集
  - 实数集
  - 任意n维空间上的点的集合

基数相等

- 问题：是否存在比实数集更大的基数？

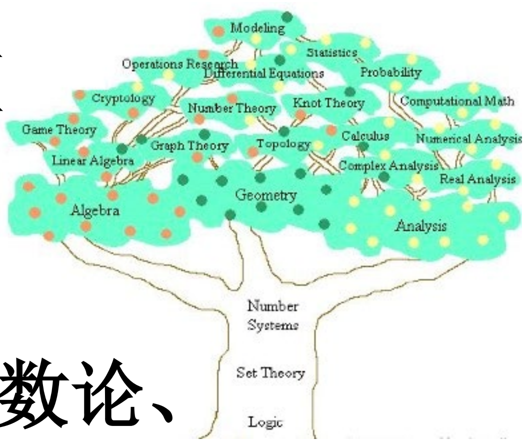
康托定理

- 对任意一个集合A来说， A的幂集的基数总是大于A的基数。
  - 可数集的基数称为阿列夫零，记做$\aleph_0$
  - 可数集的幂集的基数$2^{\aleph_0}$
  - 可数集的幂集的幂集的基数 $2^{2^{\aleph_0}}$

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$$

朴素集合论的创立

- **1883**年康托发表专著《一般集合论基础》，标志着点集论体系的建立
- **1895**年到**1897**年康托出版《超穷数理论基础》，标志着集合论已从点集论过渡到抽象集合论，朴素集合论创建完成
- 集合论占统治地位后，现代数学才真正形成，并用集合论的语言解决了代数、几何分析中长期存在的问题
- **19**世纪末到**20**世纪初，又引出了实变函数论、抽象代数、点集拓扑等众多现代数学分支



康托创立的集合论成为了数学各个学科的基础

朴素集合论的影响

- **1897年第一次国际数学家大会上得到公开承认和称赞**
- **1900年第二次国际数学家大会上希尔伯特提出的23个数学问题的第一个就是连续统问题**

著名数学家庞加莱兴高采烈地宣布“……借助集合论概念，我们可以建造整个数学大厦…… 今天，我们可以说绝对的严格性已经达到了….”

第三次数学危机——罗素悖论

- 康托是在直观意义上理解集合并进行其开创性研究《超穷数理论基础》：

"我们将集合理解为任何将我们思想中那些确定而彼此独立的对象放在一起而形成的聚合"

- 德国弗雷格数学家使用概括原则定义集合：

"对任意性质φ，存在集合$X=\{x|\varphi(x)\}$，X恰好含有所有具有性质φ的对象"

- **1901**年罗素发现罗素悖论：

令$\varphi(x)$ = "x是集合并且$x \notin x$"，则$R=\{x|\varphi(x)\}$是一个集合。

问题：R是否属于R?

- **1899**年，康托已经预感到他的集合论可能引出逻辑混乱，在给戴德金的信中说到：不能谈论由所有的集合组成的集合"

第三次数学危机——罗素悖论

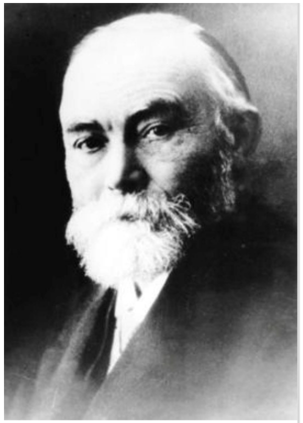
- 理发师悖论

- 说谎者悖论

第三次数学危机——罗素悖论

- **1902年罗素将悖论写信告诉了数学家弗雷格**
- 弗雷格在已处于付印中的《算术的基本规律》第二卷中加了一个补遗：

"一个科学家所遇到的最不合心意的事莫过于是在他的工作即将结束时，其基础崩溃了。罗素先生的一封信正好把我置于这个境地。"



第三次数学危机的影响

- 如何挽救集合论？
  - 罗素：数理逻辑
  - 希尔伯特：公理化方法
  - 荷兰数据家布劳维尔：拒绝承认集合论
- 公理化系统
  - **ZFC**公理化系统

1908年，法国数学家策梅洛提出Z公理化框架

1922年由以色列数学家弗兰克尔和挪威数学家斯科林完善为ZFC公理化系统

  - **NBG**公理化系统

1925年由冯·诺伊曼提出

后经 瑞士数学家贝尔纳斯1937年和哥德尔1940年完善

“科学大厦的建立并不像盖房子那样要先打好所有的基础，然后再去建造与扩充房间。科学更喜欢尽快地获取宽裕的遨游空间。只有当后来种种迹象显示出其松散的基础无法再承受房间扩建的重压时，才设法对其进行支撑与加固。这不是一种缺陷。相反，这是一条正确健康的发展道路。”

——希尔伯特

概念谱系：有穷集合 *vs* 穷集合

<table>
<tr><th></th><th></th><th>有穷集合</th><th>无穷集合</th></tr>
<tr><td rowspan="6">概念</td><td>集合</td><td colspan="2">人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体</td></tr>
<tr><td rowspan="3">基数</td><td>A所含有元素的个数|A|</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">A与B对等(A～B)⇔存在A到B的双射</td></tr>
<tr><td>$|A|=|B|, |A|<|B|, |A|>|B|$</td><td>存在A到B的双射、单射、满射</td></tr>
<tr><td>可数集</td><td></td><td>与自然数集N对等的集合(A～N)</td></tr>
<tr><td>不可数集</td><td></td><td>$|A|>|N|$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">性质</td><td rowspan="3">区别</td><td>存在自然数 n，A～n</td><td>不存在自然数 n，A～n</td></tr>
<tr><td>鸽巢原理</td><td>希尔伯特的旅馆</td></tr>
<tr><td>A不能与它的真子集对等</td><td>A有与它对等的真子集</td></tr>
<tr><td>幂集</td><td colspan="2">$\mathcal{P}(A), |A| < |\mathcal{P}(A)|$</td></tr>
<tr><td>超穷基数</td><td></td><td>$|N| = \aleph_0 < \aleph_1 = 2^{\aleph_0} < \aleph_2 = 2^{\aleph_1} < \ldots$</td></tr>
<tr><td>连续统问题</td><td></td><td>有没有$\aleph_0$和 $\aleph_1$之间的超穷基数？</td></tr>
</table>

集合论是为了研究无穷集而建立起来的数学理论

集合论主要内容及关联

集合	关系	函数	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	关系的定义 关系的相等 关系的表示 - 矩阵表示 - 图表示	函数的定义 - 部分函数 - 全函数	自然数的定义 - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数系统
集合的关系 - 相等、包含 子集	关系的性质 - (反)自反、(反)对称、 传递	函数的性质 - 单射、满射 - 双射	自然数的性质 - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义进行证明
幂集	关系的运算 - 作为集合的运算 - 逆、合成运算 - 自反(对称 、传递)闭包	函数的运算 - 函数的合成 - 逆函数 - 运算下是否满足函数性质	无限集合等势 - 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆 - 基数大小：满(单)射 - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数集等势 - 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1) - $\#A<\#2^A$
集合的运算 $\cup, \cap, -, \oplus, \sim$			
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉原理	序关系 - 偏序、全序、拟序、良序		
有序偶 笛卡尔积	等价关系 划分	特征函数	

集合论主要内容及关联

集合	关系	函数	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	关系的定义 关系的相等 关系的表示 - 矩阵表示 - 图表示	函数的定义 - 部分函数 - 全函数	自然数的定义 - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数系统
集合的关系 - 相等、包含 子集	关系的性质 - (反)自反、(反)对称、 传递	函数的性质 - 单射、满射 - 双射	自然数的性质 - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义进行证明
幂集	关系的运算 - 作为集合的运算 - 逆、合成运算 - 自反(对称 、传递)闭包	函数的运算 - 函数的合成 - 逆函数 - 运算下是否满足函数性质	无限集合等势 - 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆 - 基数大小：满(单)射 - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数集等势 - 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1) - $\#A<\#2^A$
集合的运算 $\cup, \cap, -, \oplus, \sim$			
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉原理	序关系 - 偏序、全序、拟序、良序		
有序偶 笛卡尔积	等价关系 划分	特征函数	

集合论主要内容及关联

集合	关系	函数	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	关系的定义 关系的相等 关系的表示 - 矩阵表示 - 图表示	函数的定义 - 部分函数 - 全函数	自然数的定义 - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数系统
集合的关系 - 相等、包含 子集	关系的性质 - (反)自反、(反)对称、 传递	函数的性质 - 单射、满射 - 双射	自然数的性质 - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义进行证明
幂集 集合的运算 $\cup, \cap, -, \oplus, \sim$	关系的运算 - 作为集合的运算 - 合成、逆运算 - 自反(对称 、传递)闭包	函数的运算 - 函数的合成 - 逆函数 - 运算下是否满足函数性质	无限集合等势 - 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆 - 基数大小：满(单)射 - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数集等势 - 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1) - #A<#2^A
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉原理	序关系 - 偏序、全序、拟序、良序		
有序偶 笛卡尔积	等价关系 划分	特征函数	

集合论主要内容及关联

<table>
<tr><th>集合</th><th>关系</th><th>函数</th><th>基数</th></tr>
<tr><td>集合的定义
- 列举法
- 部分列举法
- 抽象法
- 归纳定义</td><td>关系的定义
关系的相等
关系的表示
- 矩阵表示
- 图表示</td><td>函数的定义
- 部分函数
- 全函数</td><td>自然数的定义
- 集合的后继
- 自然数的归纳定义
- 冯.诺依曼自然数系统</td></tr>
<tr><td>集合的关系
- 相等、包含
子集</td><td>关系的性质
- (反)自反、(反)对称、 传递</td><td>函数的性质
- 单射、满射
- 双射</td><td>自然数的性质
- 数学归纳法
- 自然数的归纳定义进行证明</td></tr>
<tr><td>幂集</td><td rowspan="2">关系的运算
- 作为集合的运算
- 逆、合成运算
- 自反(对称 、传递)闭包</td><td rowspan="3">函数的运算
- 函数的合成
- 逆函数
- 运算下是否满足函数性质</td><td rowspan="4">无限集合等势
- 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆
- 基数大小：满(单)射
- 等势：存在双射
- 可数集：与自然数集等势
- 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1)
- $\#A<\#2^A$</td></tr>
<tr><td>集合的运算
$\cup, \cap, -, \oplus, \sim$</td></tr>
<tr><td>有穷集的计数
- 容斥原理
- 抽屉原理</td><td>序关系
- 偏序、全序、拟序、良序</td></tr>
<tr><td>有序偶
笛卡尔积</td><td>等价关系
划分</td><td>特征函数</td></tr>
</table>

集合论主要内容及关联

集合	关系	函数	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	关系的定义 关系的相等 关系的表示 - 矩阵表示 - 图表示	函数的定义 - 部分函数 - 全函数	自然数的定义 - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数系统
集合的关系 - 相等、包含 子集	关系的性质 - (反)自反、(反)对称、 传递	函数的性质 - 单射、满射 - 双射	自然数的性质 - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义进行证明
幂集	关系的运算 - 作为集合的运算 - 逆、合成运算 - 自反(对称 、传递)闭包	函数的运算 - 函数的合成 - 逆函数 - 运算下是否满足函数性质	无限集合等势 - 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆 - 基数大小：满(单)射 - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数集等势 - 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1) - $\#A<\#2^A$
集合的运算 $\cup, \cap, -, \oplus, \sim$			
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉原理	序关系 - 偏序、全序、拟序、良序		
有序偶 笛卡尔积	等价关系 划分	特征函数	

集合论主要内容及关联

集合	关系	函数	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	关系的定义 关系的相等 关系的表示 - 矩阵表示 - 图表示	函数的定义 - 部分函数 - 全函数	自然数的定义 - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数系统
集合的关系 - 相等、包含 子集	关系的性质 - (反)自反、(反)对称、 传递	函数的性质 - 单射、满射 - 双射	自然数的性质 - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义进行证明
幂集	关系的运算 - 作为集合的运算 - 逆、合成运算 - 自反(对称 、传递)闭包	函数的运算 - 函数的合成 - 逆函数 - 运算下是否满足函数性质	无限集合等势 - 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆 - 基数大小：满(单)射 - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数集等势 - 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1) - #A<#2^A
集合的运算 $\cup, \cap, -, \oplus, \sim$			
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉原理	序关系 - 偏序、全序、拟序、良序		
有序偶 笛卡尔积	等价关系 划分	特征函数	

集合论主要内容及关联

集合	关系	函数	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	关系的定义 关系的相等 关系的表示 - 矩阵表示 - 图表示	函数的定义 - 部分函数 - 全函数	自然数的定义 - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数系统
集合的关系 - 相等、包含 子集	关系的性质 - (反)自反、(反)对称、 传递	函数的性质 - 单射、满射 - 双射	自然数的性质 - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义进行证明
幂集 集合的运算 $\cup, \cap, -, \oplus, \sim$	关系的运算 - 作为集合的运算 - 逆、合成运算 - 自反(对称 、传递)闭包	函数的运算 - 函数的合成 - 逆函数 - 运算下是否满足函数性质	无限集合等势 - 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆 - 基数大小：满(单)射 - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数集等势 - 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1) - $\#A<\#2^A$
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉原理	序关系 - 偏序、全序、拟序、良序		
有序偶 笛卡尔积	等价关系 划分	特征函数	

集合论主要内容及关联

集合	关系	函数	基数
集合的定义 - 列举法 - 部分列举法 - 抽象法 - 归纳定义	关系的定义 关系的相等 关系的表示 - 矩阵表示 - 图表示	函数的定义 - 部分函数 - 全函数	自然数的定义 - 集合的后继 - 自然数的归纳定义 - 冯.诺依曼自然数系统
集合的关系 - 相等、包含 子集	关系的性质 - (反)自反、(反)对称、 传递	函数的性质 - 单射、满射 - 双射	自然数的性质 - 数学归纳法 - 自然数的归纳定义进行证明
幂集	关系的运算 - 作为集合的运算 - 逆、合成运算 - 自反(对称 、传递)闭包	函数的运算 - 函数的合成 - 逆函数 - 运算下是否满足函数性质	无限集合等势 - 抽屉原理不再成立：希尔伯特旅馆 - 基数大小：满(单)射 - 等势：存在双射 - 可数集：与自然数集等势 - 等势集合：2^N, R, [0, 1], (0, 1], [0, 1), (0, 1) - $\#A<\#2^A$
集合的运算 $\cup, \cap, -, \oplus, \sim$			
有穷集的计数 - 容斥原理 - 抽屉原理	序关系 - 偏序、全序、拟序、良序		
有序偶 笛卡尔积	等价关系 划分	特征函数	

THE END