动态规划问题详解

前言

在找工作笔试刷题的过程中，对于动态规划问题不熟悉，找了很多资料，最终发现知乎上的一个回答不错，这里对其进行简单总结。

原回答链接如下：https://www.zhihu.com/question/23995189

生活中的动态规划

先来看看生活中经常遇到的事吧——假设您是个土豪，身上带了足够的1、5、10、20、50、100元面值的钞票。现在您的目标是凑出某个金额w，需要用到尽量少的钞票。

依据生活经验，我们显然可以采取这样的策略：能用100的就尽量用100的，否则尽量用50的……依次类推。在这种策略下，666=6×100+1×50+1×10+1×5+1×1，共使用了10张钞票。

这种策略称为“贪心”：假设我们面对的局面是“需要凑出w”，贪心策略会尽快让w变得更小。能让w少100就尽量让它少100，这样我们接下来面对的局面就是凑出w-100。长期的生活经验表明，贪心策略是正确的。

但是，如果我们换一组钞票的面值，贪心策略就也许不成立了。如果一个奇葩国家的钞票面额分别是1、5、11，那么我们在凑出15的时候，贪心策略会出错：

- 15=1×11+4×1 （贪心策略使用了5张钞票）
- 15=3×5 （正确的策略，只用3张钞票）

为什么会这样呢？贪心策略错在了哪里？

鼠目寸光。

刚刚已经说过，贪心策略的纲领是：“尽量使接下来面对的w更小”。这样，贪心策略在w=15的局面时，会优先使用11来把w降到4；但是在这个问题中，凑出4的代价是很高的，必须使用4×1。如果使用了5，w会降为10，虽然没有4那么小，但是凑出10只需要两张5元。

在这里我们发现，贪心是一种**只考虑眼前情况**的策略。

那么，现在我们怎样才能避免鼠目寸光呢？

如果直接暴力枚举凑出w的方案，明显复杂度过高。太多种方法可以凑出w了，枚举它们的时间是不可承受的。我们现在来尝试找一下性质。

重新分析刚刚的例子。w=15时，我们如果取11，接下来就面对w=4的情况；如果取5，则接下来面对w=10的情况。我们发现这些问题都有相同的形式：“给定w，凑出w所用的最少钞票是多少张？”接下来，我们用f(n)来表示“凑出n所需的最少钞票数量”。

那么，如果我们取了11，最后的代价（用掉的钞票总数）是多少呢？

明显$cost = f(4) + 1 = 4 + 1 = 5$，它的意义是：利用11来凑出15，付出的代价等于f(4)加上自己这一张钞票。现在我们暂时不管f(4)怎么求出来。

依次类推，马上可以知道：如果我们用5来凑出15，cost就是$f(10) + 1 = 2 + 1 = 3$。

那么，现在w=15的时候，我们该取那种钞票呢？**当然是各种方案中，cost值最低的那一个**！

- 取11：$cost = f(4) + 1 = 4 + 1 = 5$
- 取5：$cost = f(10) + 1 = 2 + 1 = 3$
- 取1：$cost = f(14) + 1 = 4 + 1 = 5$

显而易见，cost值最低的是取5的方案。**我们通过上面三个式子，做出了正确的决策**！

这给了我们一个**至关重要**的启示——$f(n)$ 只与$f(n-1), f(n-5), f(n-11)$ 相关；更确切地说：

$$f(n) = min\{f(n-1), f(n-5), f(n-11)\} + 1$$

这个式子是非常激动人心的。我们要求出$f(n)$，只需要求出几个更小的f值；既然如此，我们从小到大把所有的f(i)求出来不就好了？注意一下边界情况即可。

以n=15为例，说明过程：

- n=0，自然f(0) =0;
- n=1,f(1)=f(0)+1=1
- n=2,f(2)=f(1)+1=2
- n=3,f(3)=f(2)+1=2+1=3
- n=4,f(4)=f(3)+1=3+1=4
- n=5,f(5)有2种情况，
    - f(5)=f(4)+1=4+1=5，选5张1元的；
    - f(5)=f(0)+1=0+1=1,选一张5元的
    - 很明显，应当选择f(5)=f(0)+1=1,选一张5元的方案
- n=6,f(6)也有两种方案，
    - f(6)=f(5)+1=2,选一张1元和一张5元的，5元的先选
    - f(6)=f(1)+1=2,选一张1元和一张5元的，1元的先选
- n=7,f(7)=f(6)+1=2+1=3(选两张1元和一张5元的)，f(7)=f(2)+1=3(选2张1元的和一张5元的)
- n=8,f(8)=f(7)+1=3+1=4（选三张1元和一张5元的）f(8)=f(3)+1=4(选三张1元的和一张5元的)
- n=9,f(9)=f(8)+1=4+1=5(选四张1元和一张5元的)，f(9)=f(4)+1=5（选4张一元的和一张5元的）
- n=10,2种情况：
    - f(10)=f(9)+1=4+1=5（选五张1元和一张5元的）
    - f(10)=f(5)+1=1+1=2（选两张5元的）
    -
        - 最终，f(10)=2
- n=11,3种情况：
    - f(11)=f(10)+1=2+1=3（选两张5元和一张1元的）
    - f(11)=f(6)+1=2+1=3（选两张5元的和一张1元的）
    - f(11)=f(0)+1=1(选1张11元的)
    - 最终，f(11)=1
- n=12,3种情况：
    - f(12)=f(11)+1=1+1=2（选一张11元和一张1元的）
    - f(12)=f（7）+1=3+1=4（选两张5元的和2张1元的）
    - f(12)=f(11)+1=1+1=2（选一张11元和一张1元的）
    - 最终，f(12)=2
- n=13,3种情况：
    - f(13)=f(12)+1=2+1=3（选一张11元和两张1元的）
    - f(13)=f（8）+1=4+1=5（选两张5元的和3张1元的）
    - f(13)=f(3)+1=3+1=4（选一张11元和三张1元的）
    - 最终，f(13)=3
- n=14,3种情况：
    - f(14)=f(13)+1=3+1=4（选一张11元和三张1元的）
    - f(14)=f（9）+1=4+1=5（选两张5元的和四张1元的）

    - f(14)=f(3)+1=3+1=4（选一张11元和三张1元的)
    - 最终，f(14)=4
- n=15,3种情况：
    - f(15)=f(14)+1=4+1=5（选一张11元和四张1元的）
    - f(15)=f（10）+1=2+1=3（选三张5元的）
    - f(15)=f(4)+1=4+1=5（选一张11元和四张1元的)
    - 最终，f(15)=3

我们以$O(n)$ 的复杂度解决了这个问题。现在回过头来，我们看看它的原理：

- !$f(n)$ 只与$f(n-1), f(n-5), f(n-11)$的值相关。
- 我们只关心$f(w)$ 的**值**，不关心是怎么凑出w的。

这两个事实，保证了我们做法的正确性。它比起贪心策略，会分别算出取1、5、11的代价，从而做出一个正确决策，这样就避免掉了“鼠目寸光”！

它与暴力的区别在哪里？我们的暴力枚举了“使用的硬币”，然而这属于冗余信息。我们要的是答案，根本不关心这个答案是怎么凑出来的。譬如，要求出f(15)，只需要知道f(14),f(10),f(4)的值。**其他信息并不需要。**我们舍弃了冗余信息。我们只记录了对解决问题有帮助的信息——f(n).

我们能这样干，取决于问题的性质：求出f(n)，只需要知道几个更小的f(c)。**我们将求解f(c)称作求解f(n)的“子问题”。**

这就是DP（动态规划，dynamic programming）.

将一个问题拆成几个子问题，分别求解这些子问题，即可推断出大问题的解。

思考题：请稍微修改代码，输出我们凑出w的**方案。**

2. 几个简单的概念

【无后效性】

一旦f(n)确定，“我们如何凑出f(n)”就再也用不着了。

要求出f(15)，只需要知道f(14),f(10),f(4)的值，而f(14),f(10),f(4)是如何算出来的，对之后的问题没有影响。

“未来与过去无关”，这就是**无后效性。**

（严格定义：如果给定某一阶段的状态，则在这一阶段以后过程的发展不受这阶段以前各段状态的影响。）

【最优子结构】

回顾我们对f(n)的定义：我们记“凑出n所需的**最少**钞票数量”为f(n).

f(n)的定义就已经蕴含了“最优”。利用w=14,10,4的**最优**解，我们即可算出w=15的**最优**解。

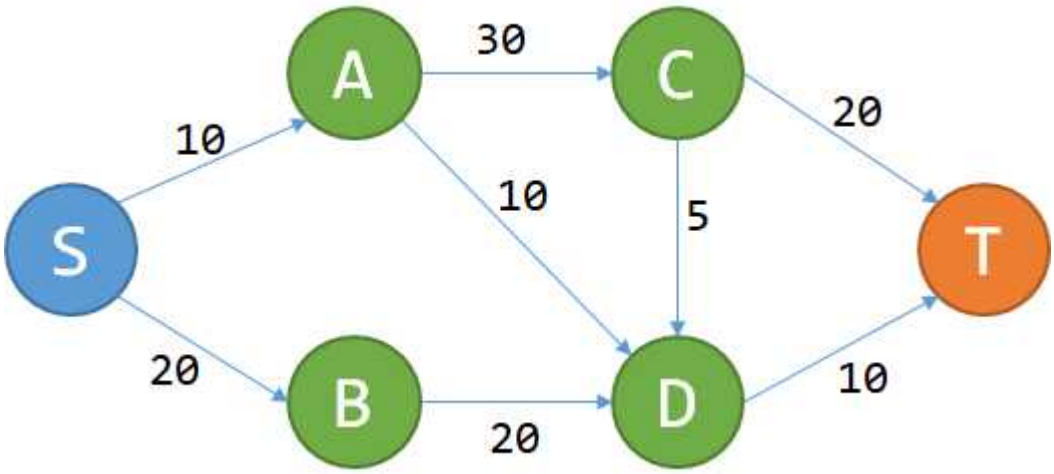
大问题的**最优解**可以由小问题的**最优解**推出，这个性质叫做“最优子结构性质”。

引入这两个概念之后，我们如何判断一个问题能否使用DP解决呢?

能将大问题拆成几个小问题，且满足无后效性、最优子结构性质。

3. DP的典型应用：DAG最短路

问题很简单：给定一个城市的地图，所有的道路都是单行道，而且不会构成环。每条道路都有过路费，问您从S点到T点花费的最少费用。



一张地图。边上的数字表示过路费。

这个问题能用DP解决吗？我们先试着记从S到P的最少费用为f(P).

想要到T，要么经过C，要么经过D。从而$f(T) = min\{f(C) + 20, f(D) + 10\}$![.

好像看起来可以DP。现在我们检验刚刚那两个性质：

- 无后效性：对于点P，一旦f(P)确定，以后就只关心f(P)的值，不关心怎么去的。
- 最优子结构：对于P，我们当然只关心到P的最小费用，即f(P)。如果我们从S走到T是$S \to P \to Q \to T$，那肯定S走到Q的最优路径是$S \to P \to Q$）。对一条最优的路径而言，从S走到**沿途上所有的点（子问题）**的最优路径，都是这条大路的一部分。这个问题的最优子结构性质是显然的。

既然这两个性质都满足，那么本题可以DP。式子明显为：

$$f(P) = min\{f(R) + w_{R \to P}\}$$

其中R为有路通到P的所有的点，$w_{R \to P}$ 为R到P的过路费。

手动分析过程如下：

- f(S)=0
- f(A)=f(S)+10=10;
- f(B)=f(S)+20=20;
- f(C)=f(A)+30=10+30=40;
- f(D)=min(f(A)+10,f(C)+5,f(B)+20)=min(20,45,40)=20,
- f(T)=min(f(C)+20,f(D)+10)=min(60,30)=30

4. 对DP原理的一点讨论

【DP的核心思想】

DP为什么会快？　　无论是DP还是暴力，我们的算法都是在**可能解空间**内，寻找**最优解。**

来看钞票问题。暴力做法是枚举所有的可能解，这是最大的可能解空间。　　DP是枚举**有希望成为答案的解。**这个空间比暴力的小得多。

也就是说：DP自带剪枝。

DP舍弃了一大堆不可能成为最优解的答案。譬如：　　15 = 5+5+5 被考虑了。　　15 = 5+5+1+1+1+1+1 从来没有考虑过，因为这不可能成为最优解。

从而我们可以得到DP的核心思想：**尽量缩小可能解空间。**

在暴力算法中，可能解空间往往是指数级的大小；如果我们采用DP，那么有可能把解空间的大小降到多项式级。

一般来说，解空间越小，寻找解就越快。这样就完成了优化。

【DP的操作过程】

一言以蔽之：**大事化小，小事化了。**

将一个大问题转化成几个小问题；　　求解小问题；　　推出大问题的解。

【如何设计DP算法】

下面介绍比较通用的设计DP算法的步骤。

首先，把我们面对的**局面**表示为x。这一步称为**设计状态。**　　对于状态x，记我们要求出的答案(e.g. 最小费用)为f(x).我们的目标是求出f(T). **找出f(x)与哪些局面有关（记为p）**，写出一个式子（称为**状态转移方程**），通过f(p)来推出f(x).

【DP三连】

设计DP算法，往往可以遵循DP三连：

我是谁？ ——设计状态，表示局面　　我从哪里来？　　我要到哪里去？ ——设计转移

设计状态是DP的基础。接下来的设计转移，有两种方式：一种是考虑我从哪里来（本文之前提到的两个例子，都是在考虑“我从哪里来”）；另一种是考虑我到哪里去，这常见于求出f(x)之后，**更新能从x走到的一些解。**这种DP也是不少的，我们以后会遇到。

总而言之，“我从哪里来”和“我要到哪里去”只需要考虑清楚其中一个，就能设计出状态转移方程，从而写代码求解问题。前者又称pull型的转移，后者又称push型的转移。（这两个词是

妹妹告诉我的，不知道源出处在哪）

思考题：如何把钞票问题的代码改写成“我到哪里去”的形式？ 提示：求出f(x)之后，更新f(x+1),f(x+5),f(x+11).

5. 例题：最长上升子序列

扯了这么多形而上的内容，还是做一道例题吧。

最长上升子序列（LIS）问题：给定长度为n的序列a，从a中抽取出一个子序列，这个子序列需要单调递增。问最长的上升子序列（LIS）的长度。　　e.g. 1,5,3,4,6,9,7,8的LIS为1,3,4,6,7,8，长度为6。

如何设计状态（我是谁）？

我们记$f(x)$为以a_x 结尾的LIS长度，那么答案就是$max\{f(x)\}$

状态x从哪里推过来（我从哪里来）？

考虑比x小的每一个p：如果$a_x > a_p$，那么f(x)可以取f(p)+1.　　解释：我们把a_x接在a_p的后面，肯定能构造一个以a_x结尾的上升子序列，长度比以a_p结尾的LIS大1.那么，我们可以写出状态转移方程了：

$$f(x) = \max_{p<x, a_p<a_x} \{f(p)\} + 1$$

至此解决问题。两层for循环，复杂度$O(n^2)$

手动推导过程如下：

- a=1时，因为a最小，所以f(1)=1
- a=5时，f(5)=f(1)+1=2
- a=3时，因为比5小，所以只能f(3)=f(1)+1=2
- a=4时，因为比5小，比3大，所以f(4)=max(f(1)+1,f(3)+1)=max(2,3)=3
- a=6时，因为目前是最大的，所以f(6)=max(f(1)+1,f(5)+1,f(3)+1,f(4)+1)=max(2,3,3,4)=4
- a=9时，因为是目前最大的，所以f(9)=max(f(1)+1,f(5)+1,f(3)+1,f(4)+1,f(6)+1)=max(2,3,3,4,5)=5
- a=7时，因为仅比9小，所以f(7)=max(f(1)+1,f(5)+1,f(3)+1,f(4)+1,f(6)+1)=max(2,3,3,4,5)=5
- a=8时，因为仅比9小，所以f(8)=max(f(1)+1,f(5)+1,f(3)+1,f(4)+1,f(6)+1,f(7)+1)=max(2,3,3,4,5,6)=6

所以，最长上升字串元素个数是6，对应的字串是1,3,4,6,7,8

下面，针对列出的2个实例，给出java版的解决方案