Implementação e Análise de Métodos Numéricos: Newton-Cotes

Lucas Fontes Buzuti
Departamento de Engenharia Elétrica
Centro Universitário FEI
São Bernardo do Campo-SP, Brasil
lucas.buzuti@outlook.com

***Resumo*—Este artigo tem uma finalidade acadêmica na implementação e análise de métodos numéricos usando as fórmulas de Newton-Cotes. As fórmulas usadas para análise foram *Regras do Ponto Médio ou das Retângulos*, *Regra Trapezoidal* e *Regra de Simpson*, sendo que também foram adotadas funções para testar a implementação. Na implementação foi utilizada a programação orientada a objeto na linguagem *C++*, tendo em foco a otimização e a velocidade na execução dos métodos numéricos.**

***Index Terms*—métodos numéricos, Newton-Cotes, otimização, programação orientada a objeto, C++**

I. Introdução

Este artigo tem em seu objetivo a implementação e análise de métodos numéricos usando as fórmulas de Newton-Cotes. A implementação tem como alvo a utilização da linguagem *C++*, no qual é focada na otimização e na velocidade da execução de algoritmos, métodos numéricos, simulações e outros [1].

Em análise numérica há um grande conjunto de algoritmos cujo principal objetivo é a de estimar o valor numérico da integral de uma função definida, com um grau de precisão pré-definido. A integral numérica consiste em encontrar um número que se aproxima da área de uma função. Nem todas as funções admitem uma primitiva de forma explícita, sendo que pode ser muito complicado avaliá-la, ou seja, pode ser mais fácil usar a integração numérica do que fazer a integração simbólica.

II. Teoria

Em métodos numéricos, as fórmulas de Newton-Cotes, ou Regras de Quadratura de Newton-Contes, são um conjuntos de fórmulas para integração numérica baseadas na avaliação do integrante em pontos igualmente espaçados.

As fórmulas de Newton-Cotes podem ser úteis se o valor do integrante, em pontos igualmente espaçados, é fornecido. Se for possível ter uma troca de pontos, em que o integrante é avaliado, então outros métodos podem ser mais adequados.

O método básico envolvido na aproximação numérica de integração é denominado de *Quadratura Numérica* e consiste em aproximar a função $f(x)$, definida entre $[a, b]$ e conhecidas, em pontos x_i entre $i = 0, \ldots, n$ igualmente espaçados, em que $x_0 = a$ e $x_n = b$ [2], de tal forma que a aproximação é definida sendo:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i), \tag{1}$$

onde α_i são os coeficientes reais. Pode-se dividir o processo de integração numérica em três fases: decompondo o domínio de integração em sub-intervalos, realizando a integração aproximada da função de cada pedaço e somando os resultados numéricos obtidos.

As fórmulas de Newton-Cotes utilizadas são *Regras do Ponto Médio ou das Retângulos*, *Regra Trapezoidal* e *Regra de Simpson*, e podem ser descritas como [2]:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) \frac{f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}, \tag{4}$$

respectivamente. O cálculo do erro de aproximação é a diferença entre o valor real da integral, para o valor aproximado. Os erros das fórmulas de Newton-Cotes já é conhecida da literatura [2], e podem ser descritas como:

$$\frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\zeta), \tag{5}$$

$$-\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\zeta), \tag{6}$$

$$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta), \tag{7}$$

onde ζ está entre a e b. As Equações 5, 6 e 7 representam as equações de erro das respectivas fórmulas: *Regras do Ponto Médio ou das Retângulos*, *Regra Trapezoidal* e *Regra de Simpson*. Pode-se estimar o erro mudando o tamanho do intervalo, esse método se denomina quadratura adaptativa.

III. Proposta e Implementação

Este artigo propõe utilizar a linguagem *C++* para a implementação[1] dos métodos numéricos usando as fórmulas de Newton-Cotes com o método de quadratura adaptativa. Esta implementação foi feita em um computador com sistema operacional *Linux*, com o compilador *GCC*, a versão da linguagem utilizada foi a *C++11*. Para desenvolver os método numéricos, foi utilizada a programação orientada a objeto (POO), onde visa a construção de classes e métodos.

Foi codificada uma classe denominada *NewtonCotes*. Para avaliar a implementação computou-se três funções: $\int_0^1 e^x \ dx$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ dx$ e $\int_0^1 e^{-x^2} \ dx$.

IV. Experimentos e Resultado

Para analisar as fórmulas de Newton-Cotes, foi computado o valor de suas integrais e comparadas com os valores reais. As funções $\int_0^1 e^x \ dx$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ dx$ e $\int_0^1 e^{-x^2} \ dx$ obtiveram as seguintes integrais ilustrada na Tabela I.

Tabela I
Resultados das fórmulas de Newton-Cotes

	Retângulos	*Trapezoidal*	*Simpson*
$\int_0^1 e^x \ dx$	1.2840	1.0585	1.4266
$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ dx$	2.6998	0.5726	0.5938
$\int_0^1 e^{-x^2} \ dx$	1.0645	0.8775	1.1827

Comparando os valores reais com os resultados obtidos pelas fórmulas de Newton-Cotes, sendo que os valores reais são: $\int_0^1 e^x \ dx \approx 1.7183$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ dx \approx 0.78540$ e $\int_0^1 e^{-x^2} \ dx \approx 0.746824$, logo, *Simpson* apresenta a melhor aproximação.

V. Conclusão

Neste artigo pode-se implementar e analisar os métodos numéricos usando as fórmulas de Newton-Cotes. Conclui-se que, entre as três fórmulas utilizadas, a fórmula da *Regra de Simpion* é a que mais se aproxima-se do volor real de uma integral, uma vez que a ordem dessa regra é superior das outras duas. Embora *Simpson* mostrou-se ser eficiente, as fórmulas de Newton-Cotes não se limita a essas três, têm-se outras fórmulas com ordem ainda maiores que a de *Simpson* e resultando em uma aproximação ainda melhor.

Referências

[1] Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., Press, W. H., Vetterling, W. T. (1992). Numerical recipes in C. SMR, 693(1), 59-70.

[2] BIANCHI, Reinaldo. Programação Científica 5a Aula. 2019 5 - 18 slides.

[1] https://github.com/buzutilucas/scientific-programming/tree/master/Ex05