Vorlesung Multidimensionale und Multimodale Signale, SoSe 2010

Sebastian Rockel (6095961)
Vitali Amann (5788408)

9. Juni 2010

6. Übung (Abgabe: 09.06.2010, 8.30 Uhr, schriftlich)

1. Diskutieren Sie die komplexwertige Gabor-Transformation und ihre Fourier-Transformierte. Welchen Bezug sehen Sie zu der Klasse der Hermitischen Funktionen?

Hermitesche Funktionen erlauben die Beschreibung singulärer Ereignisse, wie z.B. die Eigenschaften von einem Signal zum bestimmten Zeitpunkt. Bei der Gabor-Transformation wird versucht ein Signal mit Hilfe von Zeitfenstern in bestimmten Zeitintervallen zu untersuchen. Dabei ist die Zeitfensterfunktion ein Gauss. Und bei der Transformation wird die untersuchte Funktion mit der Gauss-Funktion multipliziert. Diese Eigenschaft wird auch bei hermiteschen Funktionen verwenden, wo ein hermitescher Polynom mit Gaussverteilung multipliziert wird.

2. Gegeben sei die zweidimensionale isotrope Gauss-Funktion: $Gauss_\sigma(x, y)$

Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion nach σ, sowie die zweite Ableitung der Funktion nach x und die zweite Ableitung nach y.

1. Ableitung nach σ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\sigma}\ \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\
=&-\frac{2}{2\pi\sigma^3}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{x^2+y^2}{2}(-\frac{2}{\sigma^3})) \\
=&e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{1}{\pi\sigma^3} + \frac{1}{2\pi\sigma^2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^3}) \\
=&e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{1}{\pi\sigma^3} + \frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^5}) \\
=&\frac{1}{\pi\sigma^3}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2} - 1)
\end{aligned}
$$

2. Doppelte Ableitung nach x:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\ \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\
=&\frac{d}{dx}\ \frac{1}{2\pi\sigma^2}(-\frac{2x}{2\sigma^2})\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\
=&\frac{d}{dx}\ (-\frac{1}{2\pi\sigma^4})\ x\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\
=&-\frac{1}{2\pi\sigma^4}(e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}+x\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{2x}{2\sigma^2})) \\
=&\frac{1}{2\pi\sigma^4}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(\frac{x^2}{\sigma^2}-1)
\end{aligned}$$

3. Doppelte Ableitung nach y:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dy^2}\ \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\
=&\frac{d}{dy}\ \frac{1}{2\pi\sigma^2}(-\frac{2y}{2\sigma^2})\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\
=&\frac{d}{dy}\ (-\frac{1}{2\pi\sigma^4})\ y\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\
=&-\frac{1}{2\pi\sigma^4}(e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}+y\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(-\frac{2y}{2\sigma^2})) \\
=&\frac{1}{2\pi\sigma^4}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(\frac{y^2}{\sigma^2}-1)
\end{aligned}$$

Wie stehen diese Ableitungen in Beziehung? Beachte: Die Summe der zweiten Ableitungen nach x undy wird als *Laplacian of Gaussion* bezeichnet und stellt einen üblichen Kantenoperator dar.

Für die Summe der zweiten Ableitungen nach x und y ergibt sich:

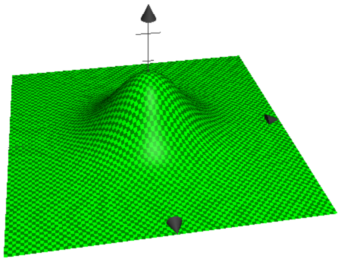
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\sigma^4}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(\frac{x^2}{\sigma^2}-1)+\frac{1}{2\pi\sigma^4}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(\frac{y^2}{\sigma^2}-1) \\
&\qquad=\frac{1}{2\pi\sigma^4}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(\frac{x^2}{\sigma^2}-1+\frac{y^2}{\sigma^2}-1) \\
&\qquad=\frac{1}{2\pi\sigma^4}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}(\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}-2)
\end{aligned}$$

Die 1. Ableitung nach σ stellt die Steigung der $Gauss_\sigma$-Kurve dar. Leitet man die Gauss-Funktion zweimal nach x, bzw. y ab erhält man den Laplacian of Gaussian-Operator in x, bzw. in y-Richtung. Damit erkennt man in einer 2D-Funktion (z.B. ein Bild) Orte großer Veränderungen (also Kanten an denen sich die Intensität sehr "schnell" ändert. Siehe auch Abb. 1(a), 1(b), 1(c), 1(d). Abb. 1(c) zeigt dabei die in x und y-ausgerichtete Suche nach Veränderungen. Die Anwendung des Laplace-Operators auf die Gauss-funktion macht hier nur Sinn um durch eine (Tiefpass-)Filterung (Gauss) ein "überreagieren" des Laplace-Operators auf Rauschen (im Bild) zu minimieren.

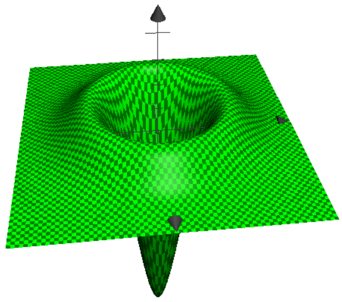
Wie kann man den *Laplacian of Gaussion* in einem Gaussian Skalenraum effizient approximieren?

Der Laplacian of Gaussion kann durch die Differenz zweier Gaussfunktionen approximiert werden. Wie die Approximation fr̈ LoG funktioniert, wird häufig mit Hilfe der Wärmediffusionsgleichung, einer Differentialgleichung aus der Thermodynamik, die von der Gauà ¦unktion erfüllt wird, gezeigt. Allgemein gilt für die Wärmediffusionsgleichung (rechte Seite der Gleichung entspricht dem LoG):

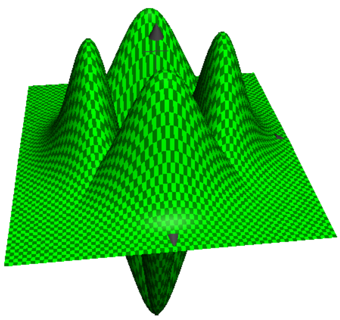
$$\frac{\delta G_\sigma(x,y)}{\delta\sigma}=\sigma\nabla^2 G_\sigma(x,y)$$



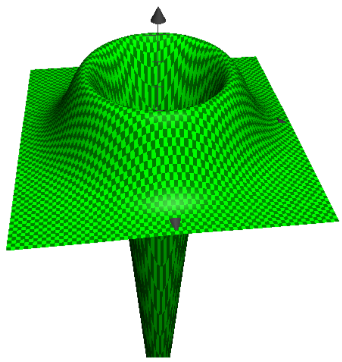
(a) $Gauss_{\sigma}(x, y)$



(b) $d^2/d\sigma, \sigma = 0,5$



(c) d^2/dx^2 und $d^2/dy^2, \sigma = 0,5$



(d) LoG,$\sigma = 0,5$

Abbildung 1: Funktionen