Vorlesung Multidimensionale und Multimodale Signale, SoSe 2010

Sebastian Rockel (6095961)
Vitali Amann (5788408)

1. Juni 2010

5. Übung (Abgabe: 02.06.2010, 8.30 Uhr, schriftlich)

1. Leiten Sie die Fouriertransformierte der Funktion $\delta_x(x, y) := \delta(x)$ her, wobei $\delta(x)$ die eindimensionale Dirac-Stoß-Funktion bezeichnet.

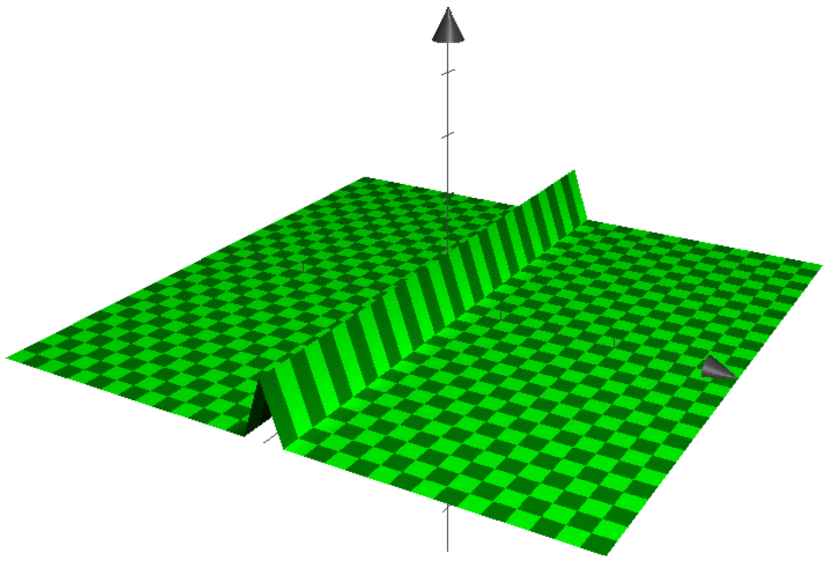

Abbildung 1: $\delta_x(x, y)$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f_x(x) \cdot f_y(y) \\
\delta_{xy}(x,y) &= \delta(x) \cdot \delta(y) \\
\delta_x(x,y) &= \delta(x) \cdot 1(y) \\
\\
F(\delta(x)) &= 1(\omega) \\
\\
F(\delta(x) \cdot 1(y)) &= \delta(x) * 1(y) = 1(\omega) \;\square
\end{aligned}
$$

2. Beschreiben Sie anschaulich das Ergebnis der Faltung eines zweidimensionalen Signals mit der Funktion $\delta_x(x,y)$. Was bedeutet dies im Frequenzbereich?

$$
\begin{aligned}
\delta_x(x,y) * f(u,v) &= \mathbf{F}(\delta_\mathbf{x}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \cdot F(f(u,v)) \text{ (Faltungstheorem)} \\
F(\delta_x(x,y)) &= \mathbf{1}(\omega)
\end{aligned}
$$

Im Ortsraum bedeutet die Faltung eine Ausblendung der x-Achse der zweidimensionalen Funktion. Die y-Achse bleibt erhalten (siehe Abbildung 1). Dieses Ergebnis beruht auf der Sieb/Ausblend-Eigenschaft der δ-Funktion. Im Frequenzbereich bedeutet die Multiplikation mit $1(\omega)$ eine die zweidimensionale Funktion erhaltende (neutrale) Operation.

3. Berechnen Sie das Integral unter der Funktion $\delta^2(x,y) := \delta_x(x,y) \cdot \delta_y(y,x)$.

$$
\begin{aligned}
&\int \delta^2(x,y)\ dx\ dy \\
=&\int \delta_x(x,y) \cdot \delta_y(y,x)\ dx\ dy \\
=&\int \delta_x(x,y)\ dx \ \cdot \ \int \delta_y(y,x)\ dy \\
=&\int \delta(x) \cdot 1(y)\ dx \ \cdot \ \int \delta(y) \cdot 1(x)\ dy \\
=&1 \cdot 1 \\
=&1
\end{aligned}
$$

4. Gegeben sei eine beliebige reellwertige Bildfunktion $f(x,y)$. Nun faltet man diese Funktion mit einer geraden reellwertigen Funktion g (d.h. $g(x,y) = g(-x,-y)$). Wie verändert sich das Quadrat des Phasenspektrums?

Phasenspektrum ist definiert als $\Phi = \arctan \frac{Im(u,v)}{Re(u,v)}$ Bei der Faltung einer beliebigen reellwertige Bildfunktion $f(x,y)$ mit einer geraden reellwertigen Funktion g müssen zwei Fälle betrachtet werden:

1. Eine gerade reellwertige Bildfunktion $f(x,y)$ gefaltet mit g. Bei der Faltung entsteht wieder eine gerade reellwertige Funktion. Die Funktion besitzt nur einen reellen Anteil und keinen imaginären. Daraus folgt für Φ^2:

$$
\begin{aligned}
\Phi^2 &= (\arctan \frac{0}{Re(u,v)})^2 \\
&= (\arctan(0))^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. Eine ungerade reellwertige Bildfunktion $f(x, y)$ gefaltet mit g. Bei der Faltung entsteht eine gerade reellwertige Funktion mit einem ungeraden Imaginäranteil. Für das Phasenspektrum folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= (\arctan \frac{Im(u,v)}{Re(u,v)})^2 \\
&= \lim_{\frac{Im(u,v)}{Re(u,v)} \to \pm\infty} (\arctan \frac{Im(u,v)}{Re(u,v)})^2 \\
&= \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$