Vorlesung Multidimensionale und Multimodale Signale, SoSe 2010

Sebastian Rockel (6095961)
Vitali Amann (5788408)

12. Juni 2010

7. Übung (Abgabe: 16.06.2010, 8.30 Uhr, schriftlich)

1.a. Wie stark muss man ein n-dimensionales Signal glätten, um die Standardabweichung des Rauschens zu halbieren?

$$
\begin{aligned}
Gegeben: \ \sigma^2_{reduced\ noise} &\approx \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss})^n}\ \sigma^2_{noise} \\
Ansatz: \ \sigma_{reduced\ noise} &:= \frac{1}{2}\sigma_{noise} \\
(\frac{1}{2}\sigma_{noise})^2 &\approx \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss})^n}\ \sigma^2_{noise} \\
\frac{1}{2}\sigma_{noise} &\approx \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss})^{\frac{n}{2}}}\ \sigma_{noise},\ \sigma_{noise} > 0 \\
\frac{1}{2} &\approx \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss})^{\frac{n}{2}}} \\
2 &\approx (2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss})^{\frac{n}{2}} \\
4 &\approx (2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss})^n \\
\sqrt[n]{4} &\approx 2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss} \\
\sqrt[n]{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} &\approx \sigma_{Gauss}
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, je mehr Dimensionen das Eingangssignal hat, desto geringer muss die Glättung ausfallen, um die Standardabweichung des Rauschens zu halbieren.

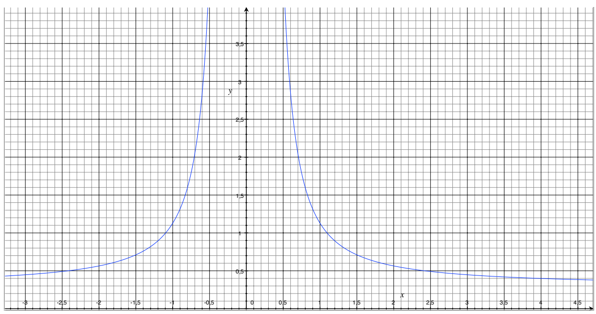

Abbildung 1: Zusammenhang von Dimension (x=| n |) und Glättung (y= σ_{Gauss})

1.b. Auf welche Weise hängt die Varianz des Lokalisierungsfehlers für die Fälle n=1,2,3 von dem Grad des ursprünglichen Rauschens und dem Grad der Glättung ab? Was bedeutet das für die Anwendung von schwellenwertbasierten Kantendetektoren in verrauschten zweidimensionalen Bildern?

Gesucht: Verhältnis μ zu σ_{noise} und σ_{Gauss}

$$\mu = Erwartungswert,\ \sigma = Standardabweichung,\ \sigma^2 = Varianz$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0 \\ -\frac{1}{2} & x \leq 0 \end{cases} \\
g(x) &= \frac{1}{\sigma_{Gauss}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma_{Gauss}})^2},\ \int_A \to 1 \\
\mu &= \frac{\frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sigma_{Gauss})^n}\sigma_{noise}^2}{(f_b'(0))^2} \\
f_b(x) &= f(x) * g(x) \\
&= F^{-1}(F(x) \cdot G(x)) \\
F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{Gauss}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma_{Gauss}})^2} \cdot e^{-j\omega x} dx \cdot \left(\int_{-\infty}^{0} -\frac{1}{2} e^{-j\omega x} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-j\omega x} dx\right)
\end{aligned}$$

Integral der normierten Gauss-Funktion ist 1. Leider ergibt sich aus der Substraktion der weiteren Integrale 0 und lässt so keine weiteren Interpretationen zu!?