№1.7. Вариант 18

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (x_1-3)^2 + \frac{3}{2}\alpha; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + \frac{\alpha}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1-3)^2 + \frac{3}{2}\alpha = 0 & (1) \\ x_1 - x_2 + \frac{\alpha}{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $x_1 = \pm\frac{\sqrt{-6\alpha}}{2} + 3$ (2): $x_2 = x_1 + \frac{\alpha}{3}$

$$x_{2,1} = \frac{\sqrt{-6\alpha}}{2} + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow$$

$$x_{2,2} = -\frac{\sqrt{-6\alpha}}{2} + \frac{\alpha}{3}$$

$\Rightarrow \alpha \leq 0$

1) ~~$\alpha > 0$~~: $\alpha < 0$

$a_{11} = 2x_1 - 6$

$a_{12} = 0$

$a_{21} = 1$

$a_{22} = -1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2\cdot\left(\frac{\sqrt{-6\alpha}}{2}+3\right)-6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 - \lambda E = \begin{pmatrix} \sqrt{-6\alpha}+6-6-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

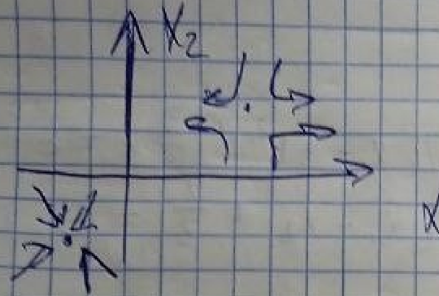
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{-6\alpha} & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = (\sqrt{-6\alpha}-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{-6\alpha} > 0$$
$$\lambda_2 = -1 < 0$$
$\Rightarrow$ седло.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2\left(-\frac{\sqrt{-6\alpha}}{2}+3\right)-6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 - \lambda E = \begin{pmatrix} -\sqrt{-6\alpha}-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

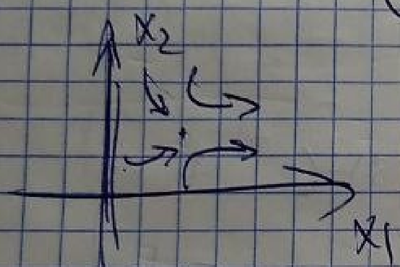
$$\Delta = (-\sqrt{-6\alpha}-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{-6\alpha} < 0$$
$$\lambda_2 = -1 < 0$$
$\Rightarrow$ уст. узел.



2) $\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 3 \\ \bar{x}_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = -\lambda(-1-\lambda) = 0$



$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ седло-узел

3) $\alpha > 0$ – не имеет решений в обл действ чисел.
тип бифр – седло-узел.
Точка бифр $\alpha = 0$.
необх. условие бифр-ия седло-узел: один из корней из хар-го ур-я при изм пар-ра проходит через 0

$$\frac{x_1^{n+1} - x_1^n}{\Delta t} = (x_1^n - 3)^2 + \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow x_1^{n+1} = x_1^n + \Delta t x_1^{2n} - 6\Delta t x_1^n + 9\Delta t + \frac{3}{2}\Delta t \alpha = x_1^n + \Delta t(x_1^{2n} - 6x_1^n + 9 + \frac{3}{2}\alpha)$$

$$\frac{x_2^{n+1} - x_2^n}{\Delta t} = x_1^n - x_2^n + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow x_2^{n+1} = \Delta t x_1^n - \Delta t x_2^n + x_2^n + \frac{\alpha}{3}\Delta t$$

№ 1.8

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 9\alpha x_1 - x_2 - 2x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 9\alpha x_2 - 2x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$\alpha = -\frac{1}{8}$
$\alpha = -\frac{1}{18}$
$\alpha = \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$a_{11} = 9\alpha - 2x_2^2 - 6x_1^2 = 9\alpha$

$a_{12} = -1 - 4x_1x_2 = -1$

$a_{21} = 1 - 4x_1x_2 = 1$

$a_{22} = 9\alpha - 6x_2^2 = 9\alpha$

$$A = \begin{pmatrix} 9\alpha & -1 \\ 1 & 9\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda E = \begin{pmatrix} 9\alpha-\lambda & -1 \\ 1 & 9\alpha-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta = (9\alpha - \lambda)^2 + 1 = 0$

$(9\alpha - \lambda)^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i + 9\alpha$

1) $\alpha < 0$ уст. фокус

2) $\alpha = 0$ центр

3) $\alpha > 0$ неуст фокус.

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi \dfrac{dr}{dt} - r\sin\varphi \dfrac{d\varphi}{dt} = 9\alpha r\cos\varphi - r\sin\varphi - 2\cdot r^3\cos\varphi \\ \sin\varphi \dfrac{dr}{dt} + r\cos\varphi \dfrac{d\varphi}{dt} = r\cos\varphi + 9\alpha r\sin\varphi - 2r^3\sin\varphi \end{cases}$$

$\dfrac{dr}{dt} = 9r\alpha - 2r^3 = r(9\alpha - 2r^2) \Rightarrow$ $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm\dfrac{3\sqrt{2\alpha}}{2}$

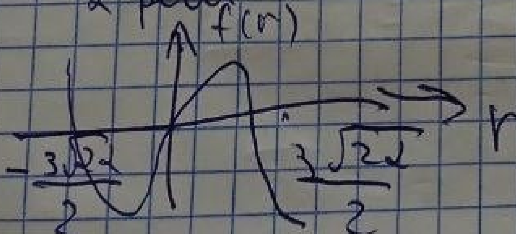
$-r\dfrac{d\varphi}{dt} = -r \Rightarrow \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \Rightarrow \varphi = t + C_1$

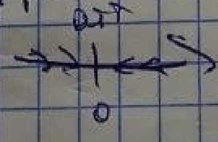
со знаком $\ominus$ не имеет смысла

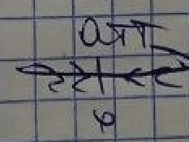
1) $\alpha > 0$ 2 реш

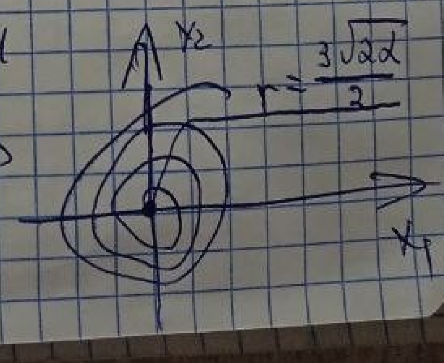
2) $\alpha = 0$ 1 реш

3) $\alpha < 0$ 1 реш









реп атт

$0 \quad \frac{3\sqrt{2\alpha}}{2}$

Появляется пред цикл с $r = \frac{3\sqrt{2\alpha}}{2}$

при $\alpha > 0$

$\alpha = 0$ т. бифур Андронова-Хопфа

т.к. $\lambda_{1,2}$ компл-сопр

числа с real част $\neq 0$

$$\frac{x_1^{n+1} - x_1^n}{\Delta t} = 9\alpha x_1^n - x_2^n - 2x_1^n\left(x_1^{2n} + x_2^{2n}\right)$$

$$x_1^{n+1} = 9\Delta t \alpha x_1^n - \Delta t x_2^n - 2x_1^{3n}\Delta t - 2x_2^{2n}x_1^n \Delta t + x_1^n$$

$$\frac{x_2^{n+1} - x_2^n}{\Delta t} = x_1^n + 9\alpha x_2^n - 2x_2^n\left(x_1^{2n} + x_2^{2n}\right)$$

$$x_2^{n+1} = \Delta t\, 9\alpha x_2^n - 2x_2^n x_1^{2n}\Delta t - 2x_2^{3n}\Delta t + x_2^n$$