Лабораторная работа №1

Вариант 17.

Уравнение: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x+1) - 2t$ $\quad x \in [0; 1]$, $t \in [0; 1]$

$u(t=0; x)=0$

$u(t; x=0)=0$

$u(t, x=1) = 2t$

1. Записать явную разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = 1 \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + (j-1) \cdot h \cdot ((j-1)h+1) - 2\Delta t \cdot n$$

2. Определить порядок аппроксимации разн. схемы

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_j^n (\Delta t)^3 + \ldots$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_j^n h^3 + \ldots$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n h^2 - \frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_j^n h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_j^n h^4 - \ldots$$

Подставляя это в разностную схему в разн. схему

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big| (\Delta t)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_j^n h^2 +$$

$$+ (j-1) \cdot h \cdot (j-1)(h+1) - 2n\Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + O(\Delta t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n + O(h^2) + (j-1)h(j-1)(h+1) -$$

$$- 2n\Delta t$$

Таким образом, получаем первый порядок по времени и со вторым порядком по координате:

$O(\Delta t) + O(h^2)$ или $O(\Delta t, h^2)$

3. Метод гармоник

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

Представим решение РС в виде гармоники.

$$u_j^n = \lambda^n \cdot e^{ij\alpha}$$

Подставим:

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{ij\alpha}}{\Delta t} = \frac{\lambda^n e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^n e^{i\alpha j} + \lambda^n e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}$$

Упрощаем сократив на $\lambda^n e^{i\alpha j}$:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{[e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}]}{h^2}$$

Используя тригонометрические тождества заменим:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{-4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{h^2} \qquad \lambda = 1 - \frac{4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{h^2} \cdot \Delta t$$

Учитывая $|\lambda| \le 1$ – необходимое условие устойчивости:

$$-1 + \frac{4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{h^2} \Delta t \le 1$$

Max значение $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le 1$

$$\frac{\Delta t}{h^2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \le \frac{h^2}{2}$$

4. Вывести рекуррентное соотношение

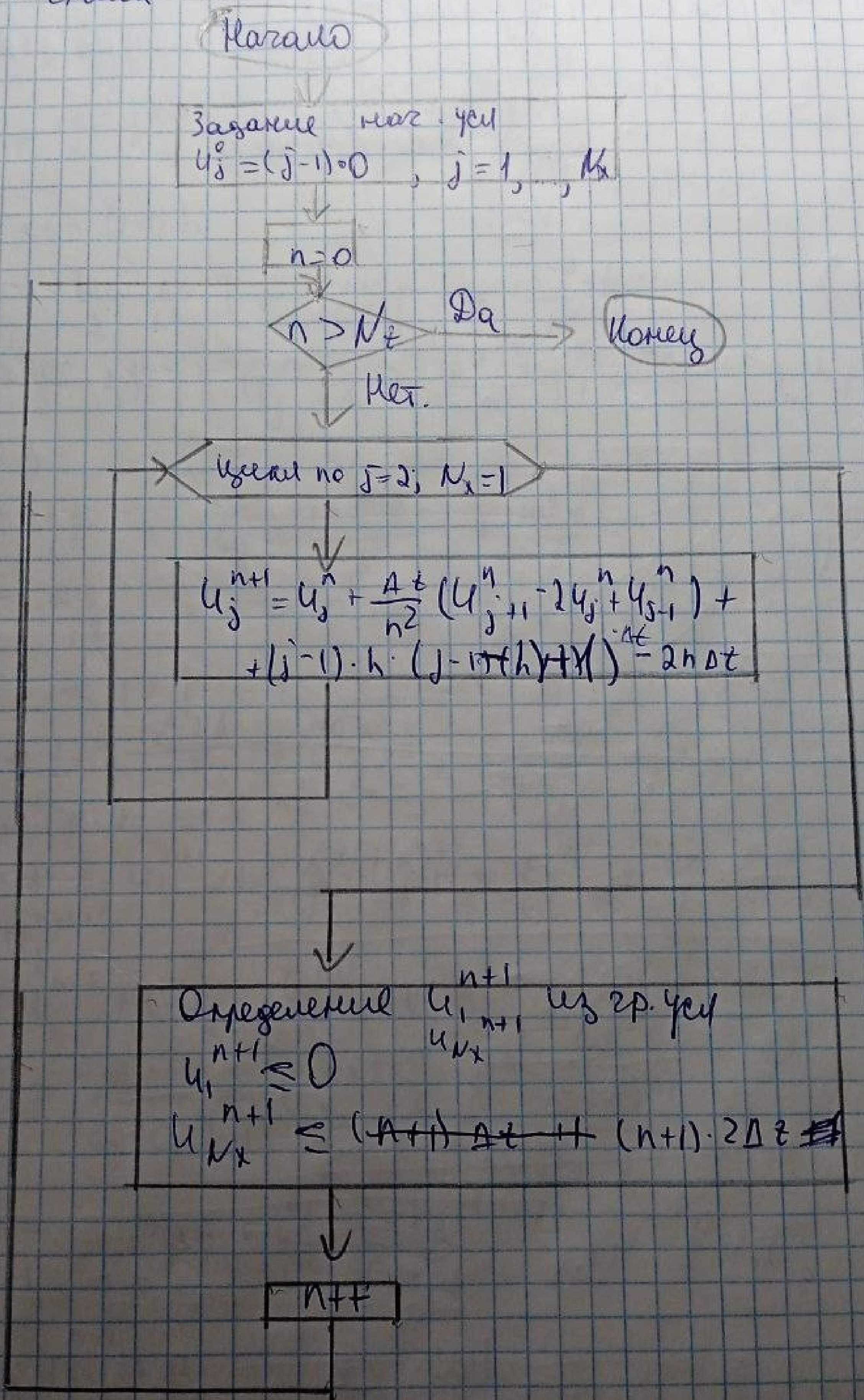
Рекуррентное соотношение выводится из разн. схемы.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) + (j-1)\cdot h\cdot(j+1) - 2n\Delta t$$

Апроксимация начального и граничного условия

$$u_j^0 = (j-1)h \qquad u_1^0 = 0 \qquad u_{N_x}^{n+1} = (n+1)\cdot 2\Delta t$$

5. Блок-схема


Начало
Задание нач. усл
$u_j^0=(j-1)\cdot 0$, $j=1,\dots,N_x$
$n=0$
$n > N_t$
Да
Конец
Нет.
Цикл по $j=2, N_x-1$
$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) +$
Определение u_1^{n+1}, $u_{N_x}^{n+1}$ из гр. усл
$u_1^{n+1} = 0$
$u_{N_x}^{n+1} = (n+1)\cdot 2\Delta t$
n++

Лабораторная работа №1
(неявн. разн. схема). Метод прогонки
Вариант 17.

Уравнение: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\cdot(x+1) - 2t$ $\quad x \in [0;1]$, $t \in [0;1]$

$u(t=0;x)=0$ параб.

$u(t;x=0)=0$ тип

$u(t;x=1)=2t$

1. Записать неявную разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (j-1)h\cdot((j-1)h)+1) - 2n\Delta t$$

2. Определить порядок аппроксимации

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n (\Delta t)^2 + \ldots$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n h^2 + \ldots$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_j^n h^3 + \ldots$$

Подставляя эти зависимости в разностную схему, получим: $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + O(\Delta t) = 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n + O(h^2) + f(u_j^n; t^n; x_j)$

Таким образом, получаем первый порядок по времени и со вторым порядком по координате

$$O(\Delta t) + O(h^2) \quad \text{или} \quad O(\Delta t, h^2)$$

3. Метод Гармоник

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}$$

Подставим решение РС в виде гармоники
$$u_j^n = \lambda^n \cdot e^{i\alpha j}$$

Подставляя, получим:
$$\frac{\lambda^{n+1} \cdot e^{i\alpha j} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha j}}{\Delta t} = \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} + \lambda^{n+1} e^{i\alpha(j-1)}}{h^2}$$

Сократим на $\lambda^n e^{i\alpha j}$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \lambda \left(\frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} \right)$$

Используя тригонометрические тождества, заменим:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} = \frac{-4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{h^2} \cdot \lambda \quad \Big| \Delta t$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{h^2} \Delta t} \le 1 \text{ — всегда}$$

ТРУ ☺

Абсолютно устойчива

4. Привести схему к виду, удобному для прогонки
Из методички:
$$-\frac{\Delta t}{h^2} u_{j+1}^{n+1} \left(1 + \frac{2\Delta t}{h^2}\right) u_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{h^2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \Delta t \, ((j-1) \cdot h \cdot (((j-1) \cdot h) + 1) - 2 h \Delta t) \quad (*)$$

Введем обозначения
$$a_j = -\frac{\Delta t}{h^2} \qquad b_j = 1 + \frac{2\Delta t}{h^2} \qquad c_j = -\frac{\Delta t}{h^2}$$

$$\xi_j^n = u_j^n + (j-1) h \, (((j-1) \cdot h) + 1 - 2 h \Delta t)$$

Учитывая обозначения, (*) примет вид:

$$a_j \, u_{j+1}^{n+1} + b_j \, u_j^{n+1} + c_j \, u_{j-1}^{n+1} = \xi_j^n$$

5. Проверить сходимость прогонки

Условие сходимости

$$|a_j| + |c_j| < |b_j|$$

$$\frac{\Delta t}{h^2} + \frac{\Delta t}{h^2} < \underline{1} + \frac{2\Delta t}{h^2}$$ Вывод: все гуд

6. Найти α_1, β_1, u_N^{n+1}

Для определения прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по коорд x, т.е. α_1, β_1 используя рекуррентное соотношение для $j=1$

$$u_1^{n+1} = \alpha_1 u_2^{n+1} + \beta_1$$

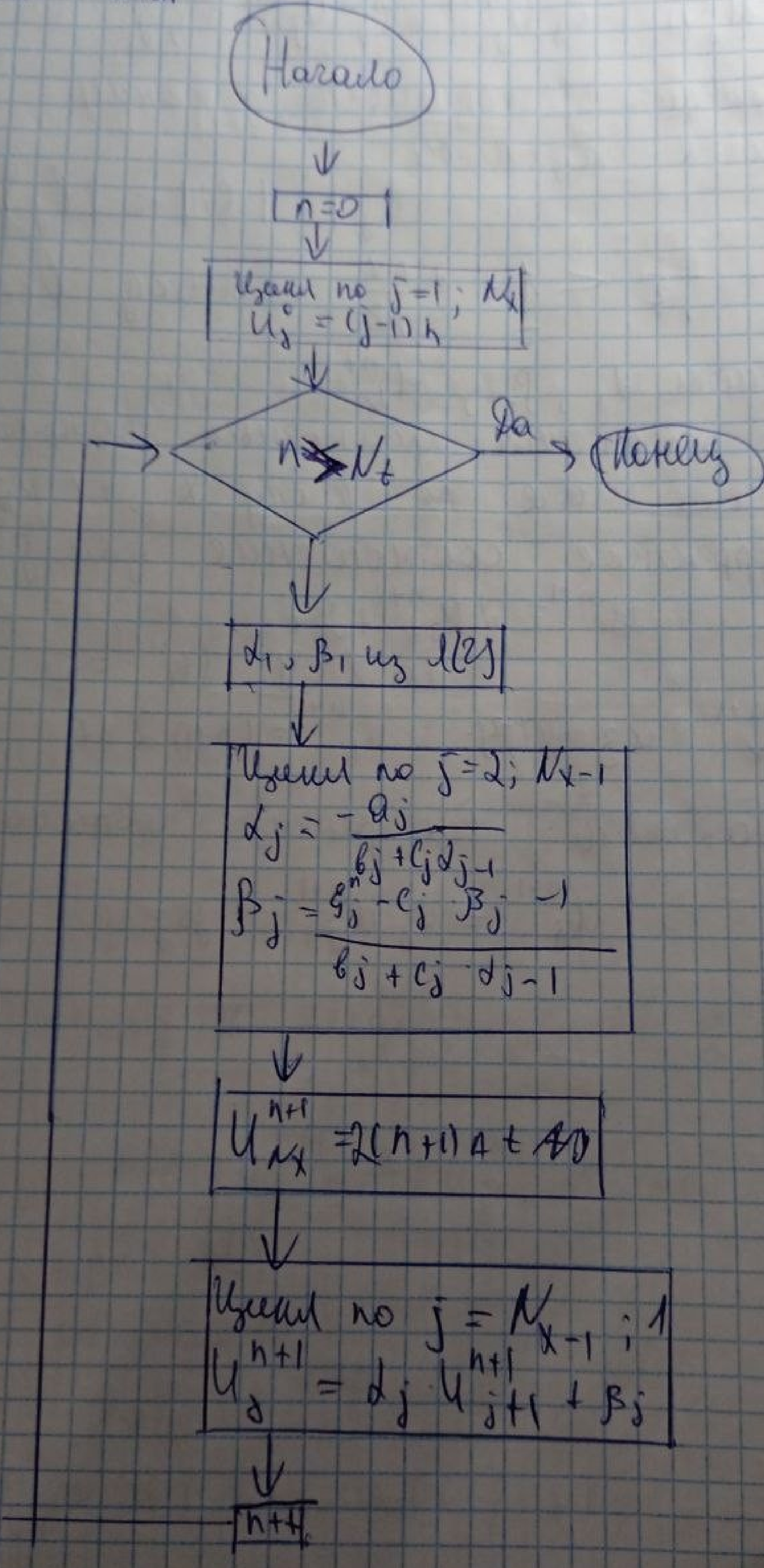
из ЛГУ: $u_1^{n+1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$

u_N^{n+1} из ПГУ: $u_N^{n+1} = (n+1) \cdot 2\Delta t$.

7. Записать рекуррентное соотношение

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_{j+1}^{n+1} + \beta_j$$

8. Блок-схема


Начало
n=0
Цикл по j=1; Nx
U_j^0 = (j-1)h
n ≥ Nt
Да
Конец
α1, β1 из (2)
Цикл по j=2; Nx-1
α_j = -a_j / (b_j + c_j α_{j-1})
β_j = (g_j^n - c_j β_{j-1}) / (b_j + c_j α_{j-1})
U_{Nx}^{n+1} = 2(n+1)Δt + 10
Цикл по j = Nx-1; 1
U_j^{n+1} = α_j U_{j+1}^{n+1} + β_j
n+1

Лабораторная работа № 3
Вариант 17

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 6 \qquad x \in [0;1] \quad t \in [0;1] \qquad U(t=0,x) = 3x, \quad U(t, x=0) = 3t, \quad U(t, x=1) = 3t+3$$

1) Записать неявную разн. схему $\quad U_1^{n+1} = 3\Delta t(n+1)$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h} = 6 \qquad U_N^{n+1} = 3\Delta t(n+1) + 3$$

2) Определить порядок аппроксимации разн. схемы

$$U_j^{n+1} = U_j + \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_j^n (\Delta t)^3 + \dots$$

$$U_{j+1}^{n+1} = U_j + \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n (\Delta t)^2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n h^2 + \dots$$

Подставим это в нашу схему:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n \Delta t + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_j^n (\Delta t)^2 + \dots - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n h + \dots\right) = 6$$

$$O(\Delta t; h)$$

3) Методом гармоник д-ть абс. уст.

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\alpha j} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha j} - \lambda^n e^{i\alpha j}}{\Delta t} + \qquad e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

$$+ \frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - \lambda^{n+1} e^{i\alpha j}}{h} = 0 \quad \Big| : \lambda^n e^{i\alpha j}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + \frac{\lambda e^{i\alpha} - \lambda}{h} = 0. \quad \Big| \cdot \Delta t$$

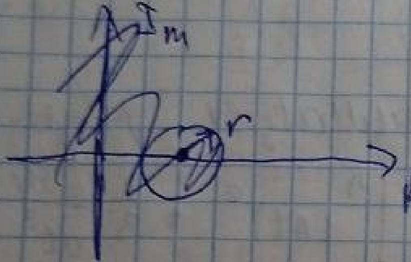
$$\lambda - 1 = -\frac{(\lambda e^{i\alpha} - \lambda)\Delta t}{h} \qquad \lambda + \frac{(\lambda e^{i\alpha} - \lambda)\Delta t}{h} = 1;$$

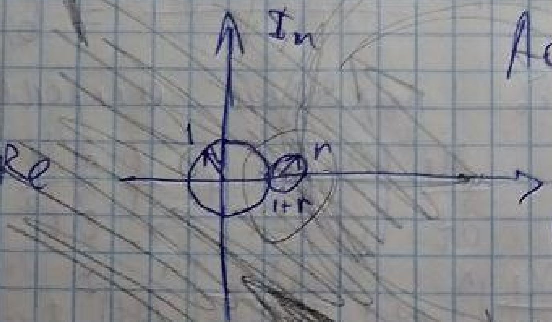
$$\lambda\left(1 + \frac{e^{i\alpha}\Delta t}{h} - \frac{\Delta t}{h}\right) = 1$$

$\lambda - 1 = -\frac{(\lambda e^{i\alpha} - \lambda)\Delta t}{h}$ $\quad |:\lambda \Rightarrow 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{e^{i\alpha}}{h}\Delta t - \frac{\Delta t}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{\Delta t}{h} - \frac{e^{i\alpha}\Delta t}{h} = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad \frac{\Delta t}{h} = r > 0$

$\frac{1}{\lambda} = 1 + r - e^{i\alpha}\cdot r$ $\qquad \lambda = \frac{1}{1 + r - e^{i\alpha}\cdot r} = 1$





Ade yes

$\lambda \leq 1$

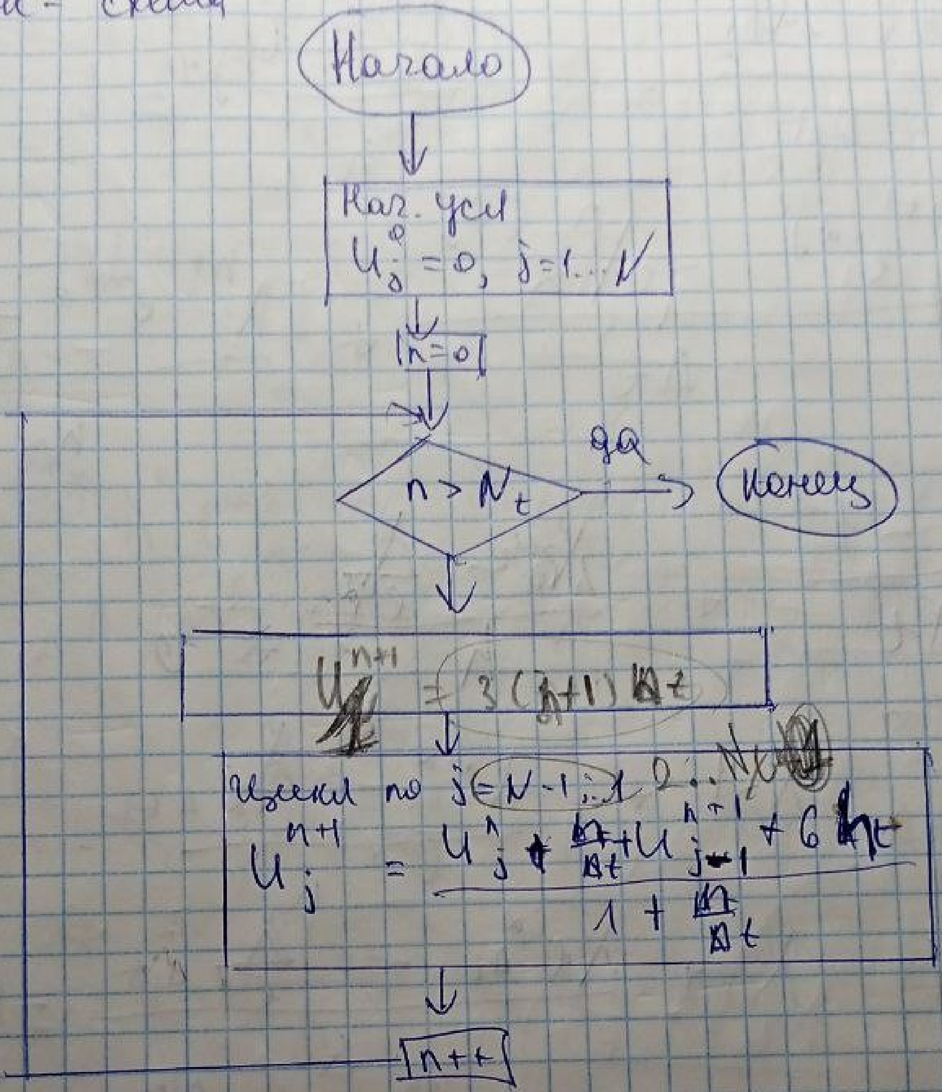
$\frac{1}{\lambda} \geq 1$

4. $u_j^{n+1} = u_j^n +$

$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} + u_{j+1}^{n+1} + 6\Delta t}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta t}}$

5. ~~$u_n^{n+1} = 3(n+1)\Delta t$~~ $\quad u_n^{n+1} = 3(j+1)\Delta t$

6. Блок-схема



$$u_j^{n+1} = \frac{u_j^n \cdot \frac{h}{\Delta t} + u_{j-1}^{n+1} + 6h}{\frac{h}{\Delta t} + 1}$$

Лабораторная работа №4

Вариант 07

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - 1 \qquad \begin{cases} u(x=0) = 1 \\ u(x=1) = 4{,}7 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + 2x - 1$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} - 1 +$$
$$+ 2(j-1)h$$

$$u_j^{n+1} = \lambda_{xx}^n \Delta t - \Delta t + 2(j-1)h \cdot \Delta t - \lambda_x^n \Delta t + u_j^n$$

$$u_j^{n+1} = \Delta t\left(\lambda_{xx}^n - 1 + 2(j-1)h - \lambda_x^n\right) + u_j^n$$

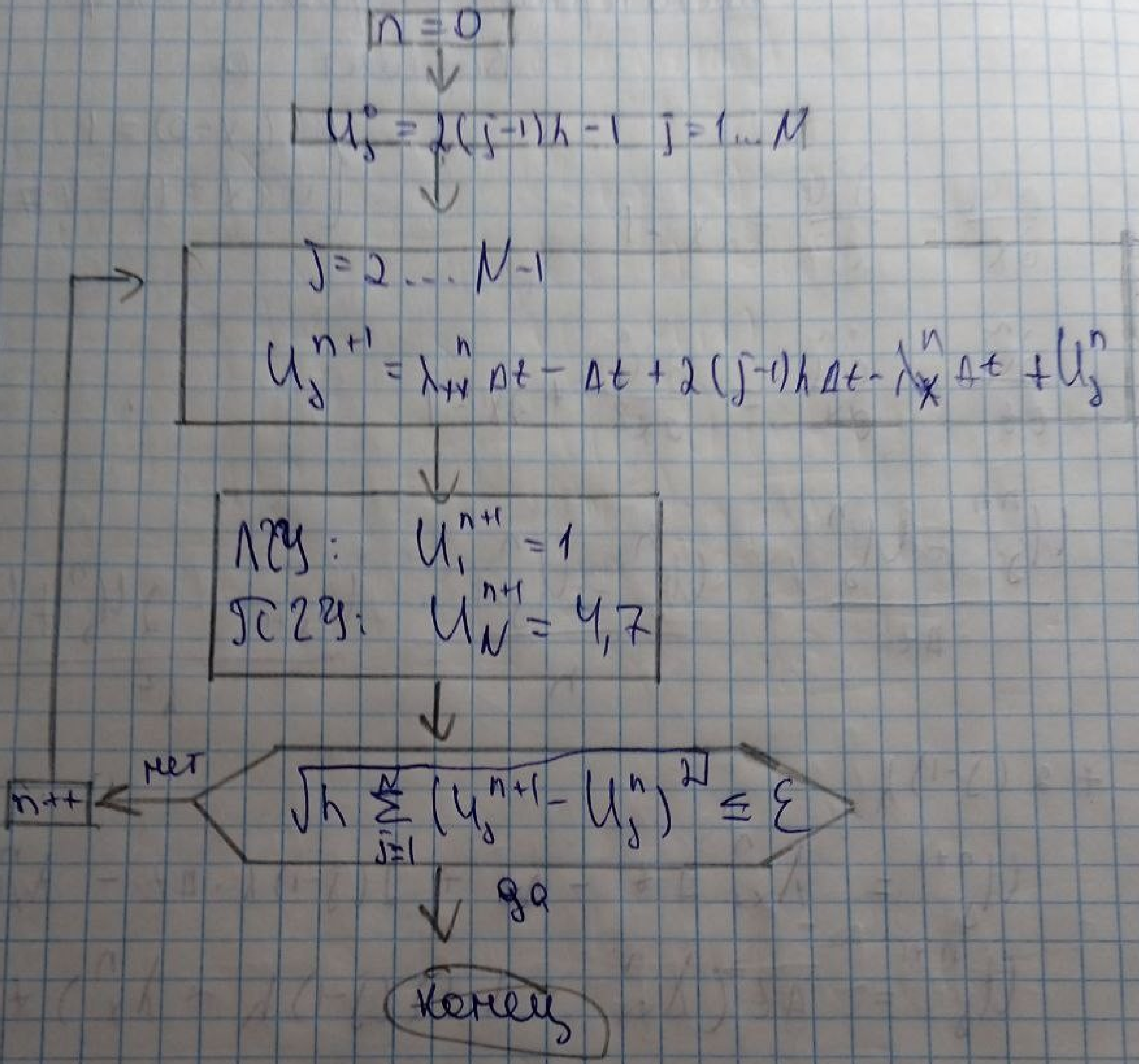
$$\Delta t \le \frac{h^2}{\vartheta h + 2\sigma} \Rightarrow \Delta t = \frac{h^2}{h+2}$$

$$u_1^{n+1} = 1 \qquad u_N^{n+1} = 4{,}7$$

$$u_j^0 = 2(j-1)h - 1$$

Блок-схема

на сл. странице



$n = 0$
$u_j^0 = 2(j-1)h - 1 \quad j = 1 \dots N$
$j = 2 \dots N-1$
$u_j^{n+1} = \lambda_{xx}^n \Delta t - \Delta t + 2(j-1)h\Delta t - \lambda_x^n \Delta t + u_j^n$
ЛГУ: $u_1^{n+1} = 1$
ПГУ: $u_N^{n+1} = 4,7$
$\sqrt{h \sum_{j=1}^{N} (u_j^{n+1} - u_j^n)^2} \le \varepsilon$
нет
$n{+}{+}$
да
конец