

Équation d'onde discrétisée par éléments finis

Gabriel Abenhaim

Juin-Juillet 2025

Table des matières

I	Étude théorique	2
1	Présentation du problème	2
1.1	Domaine géométrique	2
1.2	Équation aux dérivées partielles	2
1.3	Conditions aux limites	2
2	Formulation variationnelle	2
2.1	Espace fonctionnel	2
2.2	Dérivation de la formulation variationnelle	2
2.3	Existence et unicité	3
2.3.1	Propriétés des formes bilinéaire et linéaire	3
2.3.2	Théorème d'existence et unicité	4
3	Discrétisation par éléments finis	4
3.1	Maillage et espace d'approximation	4
3.2	Fonctions de base et formulation discrète	5
3.3	Assemblage, matrices et résolution	5
II	Calculs des matrices et assemblage	6
4	Maillage carré uniforme	6
4.1	Description du maillage	6
4.2	Matrices locales	7
4.3	Assemblage global	7
4.3.1	Analyse du stencil	7
4.4	Vecteur second membre	8
4.5	Traitement de l'obstacle carré	9
5	Maillage triangulaire équilatéral	9
5.1	Description du maillage	9
5.2	Matrices locales	10
5.3	Assemblage global	11
5.4	Vecteur second membre	12
5.5	Traitement de l'obstacle disque	13
6	Algorithme d'assemblage	13

Première partie

Étude théorique

1 Présentation du problème

1.1 Domaine géométrique

Le domaine de travail est le carré unité $\Omega = (0, 1)^2$ privé d'un obstacle intérieur \mathcal{O} . Plus précisément, on étudie l'équation sur le domaine ouvert $\mathcal{U} = \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ où :

- $\Omega = (0, 1)^2$ est le carré unité ouvert
- \mathcal{O} est un obstacle intérieur fermé (carré centré, carré décentré, ou disque centré selon les cas)
- Dans le cas sans obstacle, $\mathcal{O} = \emptyset$ et $\mathcal{U} = \Omega$

On a alors : $\partial\mathcal{U} = \partial\Omega \cup \partial\mathcal{O}$.

1.2 Équation aux dérivées partielles

On cherche à résoudre le problème aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta u - \kappa^2 u = f & \text{dans } \mathcal{U} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{U} \end{cases}$$

où :

- $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue
- $\kappa > 0$ est le nombre d'onde
- $f \in L^2(\mathcal{U})$ est le terme source donné (qui sera supposé constant par la suite).
- $\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est l'opérateur laplacien

1.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites de Dirichlet homogènes s'appliquent sur :

- $\partial\Omega$: le bord du carré unité
- $\partial\mathcal{O}$: le bord de l'obstacle intérieur (lorsqu'il existe)

Cette condition traduit le fait que la solution s'annule sur tous les bords du domaine de définition.

2 Formulation variationnelle

2.1 Espace fonctionnel

On introduit l'espace de Sobolev :

Définition 1. *L'espace fonctionnel associé au problème est :*

$$V := H_0^1(\mathcal{U}) = \{v \in H^1(\mathcal{U}) : v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{U}\}$$

Cet espace est muni de la norme : $\|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})} = \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})}$

2.2 Dérivation de la formulation variationnelle

Proposition 1 (Formulation variationnelle). *Le problème (\mathcal{P}) admet la formulation variationnelle suivante :*

Trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

où les formes bilinéaire et linéaire sont définies par :

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{U}} (\nabla u \cdot \nabla v + \kappa^2 uv) dx \quad (1)$$

$$L(v) = - \int_{\mathcal{U}} f v dx \quad (2)$$

Démonstration. Soit $v \in V$ une fonction test. On multiplie l'équation $\nabla^2 u - \kappa^2 u = f$ par v et on intègre sur \mathcal{U} :

$$\int_{\mathcal{U}} (\nabla^2 u - \kappa^2 u) v dx = \int_{\mathcal{U}} f v dx$$

On applique la formule d'intégration par parties au terme $\int_{\mathcal{U}} \nabla^2 u \cdot v dx$:

$$\int_{\mathcal{U}} \nabla^2 u \cdot v dx = - \int_{\mathcal{U}} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial u}{\partial n} v ds$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée normale sortante sur $\partial \mathcal{U} = \partial \mathcal{U}$.

Puisque $v \in V = H_0^1(\mathcal{U})$, on a $v = 0$ sur $\partial \mathcal{U}$. Par conséquent : $\int_{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = 0$

En substituant dans l'équation originale :

$$- \int_{\mathcal{U}} \nabla u \cdot \nabla v dx - \kappa^2 \int_{\mathcal{U}} uv dx = \int_{\mathcal{U}} f v dx$$

On multiplie l'égalité par -1 pour rendre la forme bilinéaire coercive :

$$\int_{\mathcal{U}} \nabla u \cdot \nabla v dx + \kappa^2 \int_{\mathcal{U}} uv dx = - \int_{\mathcal{U}} f v dx$$

Ce qui donne la formulation variationnelle annoncée. □

2.3 Existence et unicité

2.3.1 Propriétés des formes bilinéaire et linéaire

Lemme 1 (Continuité de la forme bilinéaire). *La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times V$. Plus précisément :*

$$\forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq M \|u\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})}$$

avec $M = 1 + \kappa^2 C_{\mathcal{U}}^2$ où $C_{\mathcal{U}}$ est la constante de Poincaré sur \mathcal{U} .

Démonstration. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\mathcal{U}} (\nabla u \cdot \nabla v + \kappa^2 uv) dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{U})} \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})} + \kappa^2 \|u\|_{L^2(\mathcal{U})} \|v\|_{L^2(\mathcal{U})}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et la définition de $\|\cdot\|_{H_0^1(\mathcal{U})}$:

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{U})} \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})} + \kappa^2 C_{\mathcal{U}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{U})} C_{\mathcal{U}} \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq (1 + \kappa^2 C_{\mathcal{U}}^2) \|u\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})}$$

□

Lemme 2 (Coercivité de la forme bilinéaire). *La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V . Il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2$$

Démonstration. Pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\mathcal{U}} (|\nabla v|^2 + \kappa^2 v^2) dx = \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 + \kappa^2 \|v\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 \\ &\geq \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})}^2 = \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $\alpha = 1 > 0$, on obtient la coercivité : $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})}^2$ \square

Lemme 3 (Continuité de la forme linéaire). *La forme linéaire $L(\cdot)$ est continue sur V . Plus précisément : $\forall v \in V$, $|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\mathcal{U})} C_{\mathcal{U}} \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})}$*

Démonstration. Par Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\mathcal{U}} f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\mathcal{U})} \|v\|_{L^2(\mathcal{U})} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathcal{U})} C_{\mathcal{U}} \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})} = \|f\|_{L^2(\mathcal{U})} C_{\mathcal{U}} \|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})} \end{aligned}$$

\square

2.3.2 Théorème d'existence et unicité

Théorème 1 (Lax-Milgram). *Sous les hypothèses précédentes, le problème variationnel admet une solution unique $u \in V$.*

Démonstration. Les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites :

1. $V = H_0^1(\mathcal{U})$ est un espace de Hilbert avec la norme $\|v\|_{H_0^1(\mathcal{U})} = \|\nabla v\|_{L^2(\mathcal{U})}$
2. $a(\cdot, \cdot)$ est continue (Lemme 1)
3. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (Lemme 2)
4. $L(\cdot)$ est continue (Lemme 3)

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u \in V$ telle que :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

\square

Remarque 1. *L'existence d'une solution au problème variationnel implique l'existence d'une solution au sens des distributions du problème aux dérivées partielles original.*

3 Discrétisation par éléments finis

3.1 Maillage et espace d'approximation

Définition 2 (Maillage). *Soit \mathcal{T}_h un maillage conforme de \mathcal{U} (triangles ou quadrilatères) tel que*

$$\overline{\mathcal{U}} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K}, \quad K_i \cap K_j \in \{\emptyset, \text{sommet}, \text{arête}\},$$

et de pas maximal $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$.

Définition 3 (\mathbb{P}_1 et espace fini). *Pour chaque élément K , on définit :*

$$\mathbb{P}_1(K) = \{p(x, y) = a + bx + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

L'espace d'approximation est

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\mathcal{U}}) \mid \forall K, v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \text{ et } v_h = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{U}\}.$$

Proposition 2. *On a l'inclusion $V_h \subset H_0^1(\mathcal{U})$.*

3.2 Fonctions de base et formulation discrète

Définition 4 (Base nodale). Soit $\{a_i\}_{i=1}^N$ l'ensemble des nœuds intérieurs. La fonction $\varphi_i \in V_h$ est définie par

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Proposition 3. Toute $v_h \in V_h$ s'écrit de façon unique

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x), \quad v_i = v_h(a_i).$$

Définition 5 (Formulation discrète). Le problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\mathcal{U}),$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{U}} (\nabla u \cdot \nabla v + \kappa^2 u v) dx, \quad L(v) = - \int_{\mathcal{U}} f v dx,$$

se restreint à V_h :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Théorème 2 (Existence et unicité). Par Lax–Milgram appliqué à V_h , il existe une unique solution u_h .

3.3 Assemblage, matrices et résolution

Définition 6 (Matrices élémentaires). Sur chaque $K \in \mathcal{T}_h$, on définit

$$S_{ij}^K = \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx, \quad M_{ij}^K = \int_K \varphi_j \varphi_i dx, \quad b_i^K = - \int_K f \varphi_i dx.$$

Définition 7 (Matrices globales). Les contributions élémentaires s'assemblent en

$$S_{ij} = \sum_K S_{ij}^K, \quad M_{ij} = \sum_K M_{ij}^K, \quad b_i = \sum_K b_i^K,$$

et la matrice de rigidité complète est

$$A = S + \kappa^2 M,$$

le système à résoudre étant

$$A u = b, \quad u = (u_1, \dots, u_N)^T.$$

Deuxième partie

Calculs des matrices et assemblage

4 Maillage carré uniforme

4.1 Description du maillage

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = 1/N$. Le domaine $(0, 1)^2$ est découpé en N^2 carrés de côté h . Chaque carré est de la forme :

$$K = [ih, (i+1)h] \times [jh, (j+1)h]$$

Puis on divise chaque carré en deux triangles par sa diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit :

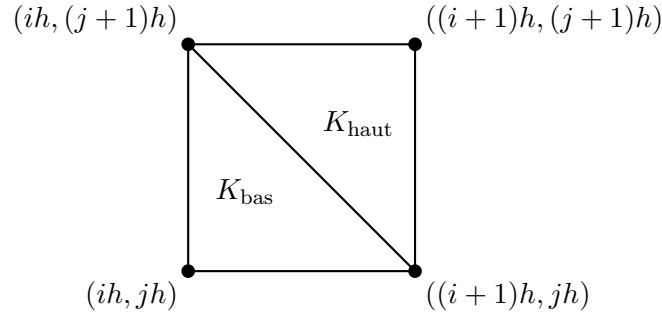


FIGURE 1 – Division d'un carré élémentaire en deux triangles

Ainsi :

- $K_{\text{bas}} = \{(ih, jh), ((i+1)h, jh), (ih, (j+1)h)\}$
- $K_{\text{haut}} = \{((i+1)h, jh), ((i+1)h, (j+1)h), (ih, (j+1)h)\}$

Les nœuds *intérieurs* sont indexés par

$$\mathcal{N}_h = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq N-1\} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{O}},$$

où $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}$ désigne l'ensemble des nœuds situés strictement à l'intérieur de l'obstacle \mathcal{O} (aucun degré de liberté n'y est conservé).

Triangle de référence :

Le triangle de référence est $\hat{K} = \{(0, 0), (h, 0), (0, h)\}$ avec les fonctions de base affines :

$$\hat{\varphi}_1(x, y) = 1 - \frac{x+y}{h}, \quad \hat{\varphi}_2(x, y) = \frac{x}{h}, \quad \hat{\varphi}_3(x, y) = \frac{y}{h}$$

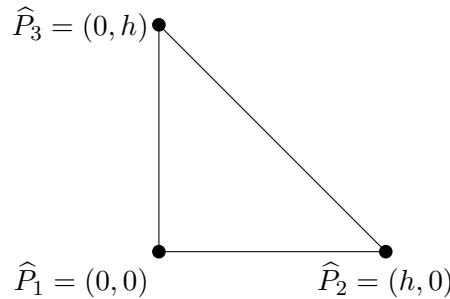


FIGURE 2 – Triangle de référence \hat{K} et numérotation des nœuds locaux.

4.2 Matrices locales

Lemme 4 (Matrice de raideur locale). *Pour le triangle de référence \hat{K} :*

$$\hat{S}_{ij} = \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\varphi}_i \cdot \nabla \hat{\varphi}_j \, dx \, dy = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{ij}$$

Démonstration. Les gradients des fonctions de base sont constants :

$$\nabla \hat{\varphi}_1 = \left(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right), \quad \nabla \hat{\varphi}_2 = \left(\frac{1}{h}, 0\right), \quad \nabla \hat{\varphi}_3 = \left(0, \frac{1}{h}\right)$$

L'aire du triangle est $|\hat{K}| = \frac{h^2}{2}$. Les coefficients se calculent :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{11} &= |\hat{K}| \cdot |\nabla \hat{\varphi}_1|^2 = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{h^2} = 1 \\ \hat{S}_{12} &= |\hat{K}| \cdot \nabla \hat{\varphi}_1 \cdot \nabla \hat{\varphi}_2 = \frac{h^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Les autres coefficients s'obtiennent par symétrie ou calcul direct. □

Lemme 5 (Matrice de masse locale). *Pour le triangle de référence \hat{K} :*

$$\hat{M}_{ij} = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j \, dx \, dy = \frac{h^2}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{ij}$$

Démonstration. Par intégration directe :

$$\hat{M}_{11} = \int_0^h \int_0^{h-x} \left(1 - \frac{x+y}{h}\right)^2 \, dy \, dx = \frac{h^2}{12}$$

Les termes non diagonaux valent $\hat{M}_{ij} = \frac{h^2}{24}$ pour $i \neq j$. □

4.3 Assemblage global

L'assemblage global consiste à sommer les contributions élémentaires de chaque triangle sur les degrés de liberté communs. Pour un maillage régulier de $(0,1)^2$ avec $N \times N$ nœuds, on obtient une matrice creuse structurée.

4.3.1 Analyse du stencil

Un nœud intérieur (i, j) apparaît dans 6 triangles provenant de 4 carrés adjacents :

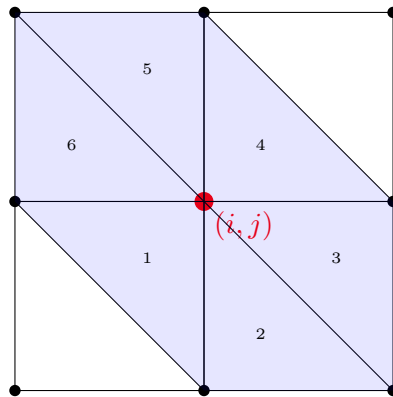


FIGURE 3 – Les 6 triangles contenant le nœud (i, j)

Théorème 3 (Stencil du maillage carré). *Pour un nœud intérieur (i, j) , la matrice globale $A = K + \kappa^2 M$ présente le stencil suivant :*

$$A_{(i,j),(i',j')} = \begin{cases} 4 + \frac{\kappa^2 h^2}{2}, & \Delta i = \Delta j = 0, \\ -1 + \frac{\kappa^2 h^2}{12}, & |\Delta i| + |\Delta j| = 1, \\ \frac{\kappa^2 h^2}{12}, & (\Delta i, \Delta j) = (1, -1) \text{ ou } (-1, 1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Le nœud (i, j) apparaît dans 6 triangles :

- 2 fois à l'angle droit (triangles 1 et 4)
- 4 fois sur l'hypoténuse (triangles 2, 3, 5, 6)

Coefficient diagonal :

$$S_{(i,j),(i,j)} = 2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$M_{(i,j),(i,j)} = 6 \times \frac{h^2}{24} \times 2 = \frac{h^2}{2}$$

Voisins horizontaux/verticaux : (i, j) et $(i+1, j)$ partagent 2 triangles avec une arête commune (pas l'hypoténuse) :

$$S_{(i,j),(i+1,j)} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$M_{(i,j),(i+1,j)} = 2 \times \frac{h^2}{24} = \frac{h^2}{12}$$

Voisins diagonaux : Seuls $(i-1, j+1)$ et $(i+1, j-1)$ partagent un triangle avec (i, j) . □

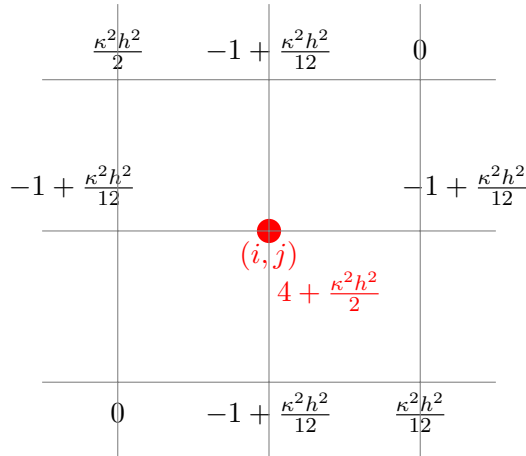


FIGURE 4 – Stencil à 9 points pour le maillage carré (vue schématique)

4.4 Vecteur second membre

Lemme 6 (Second membre local). *Pour le triangle de référence \hat{K} et f constante sur \mathcal{U} :*

$$\hat{b}_i = - \int_{\hat{K}} f \hat{\varphi}_i dx dy = -f \cdot \frac{h^2}{6}, \quad i = 1, 2, 3$$

Démonstration. Puisque f est constante, on a :

$$\widehat{b}_i = -f \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_i dx dy$$

Pour calculer $\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_i dx dy$, remarquons que c'est l'intégrale de la fonction de base sur le triangle. Par symétrie des fonctions de base affines et le fait que $\sum_{i=1}^3 \widehat{\varphi}_i = 1$ sur \widehat{K} :

$$\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_i dx dy = \frac{1}{3} \int_{\widehat{K}} 1 dx dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{6}$$

D'où $\widehat{b}_i = -f \cdot \frac{h^2}{6}$ pour $i = 1, 2, 3$. □

Théorème 4 (Assemblage du second membre). *Pour un nœud intérieur (i, j) du maillage carré, la composante du vecteur second membre global est :*

$$b_{(i,j)} = -f \cdot h^2$$

Démonstration. Le nœud (i, j) apparaît dans 6 triangles. Pour chaque triangle K contenant ce nœud : - La contribution élémentaire est $b^K = -f \cdot \frac{h^2}{6}$ - L'assemblage global somme les contributions : $b_{(i,j)} = \sum_{K \ni (i,j)} b^K$
Donc :

$$b_{(i,j)} = 6 \times \left(-f \cdot \frac{h^2}{6} \right) = -f \cdot h^2$$

□

Remarque 2. *Cette formule simple résulte de la régularité du maillage et du fait que f est constante. Pour un nœud au bord du domaine ou adjacent à l'obstacle, le nombre de triangles contributeurs peut être inférieur à 6, modifiant la valeur assemblée.*

4.5 Traitement de l'obstacle carré

Soit un obstacle carré aligné sur la grille :

$$\mathcal{O} = [x_0, x_0 + mh] \times [y_0, y_0 + mh], \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Proposition 4 (Assemblage avec obstacle). *Les nœuds situés dans $\overline{\mathcal{O}}$ sont exclus du système. La matrice globale est obtenue en :*

1. *Supprimant les lignes et colonnes correspondant aux nœuds dans $\overline{\mathcal{O}}$*
2. *Conservant les mêmes formules pour les coefficients entre nœuds restants*

5 Maillage triangulaire équilatéral

5.1 Description du maillage

Le maillage triangulaire équilatéral est construit ligne par ligne avec un pas horizontal $h = 1/N$. La hauteur entre les lignes est $h_y = \frac{\sqrt{3}}{2}h$. Les nœuds sont positionnés selon :

$$P_{i,j} = \left(ih + \frac{j \bmod 2}{2}h, jh_y \right)$$

où les lignes paires et impaires sont décalées d'un demi-pas.

Triangle de référence

On considère le triangle de référence équilatéral de côté h :

$$\hat{T} = \left\{ (0, 0), (h, 0), \left(\frac{h}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}h \right) \right\}.$$

d'aire $|\hat{T}| = \frac{\sqrt{3}}{4} h^2$. Les fonctions de base affines sont

$$\hat{\varphi}_1(x, y) = 1 - \frac{x}{h} - \frac{y}{\sqrt{3}h}, \quad \hat{\varphi}_2(x, y) = \frac{x}{h} - \frac{y}{\sqrt{3}h}, \quad \hat{\varphi}_3(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{3}h}.$$

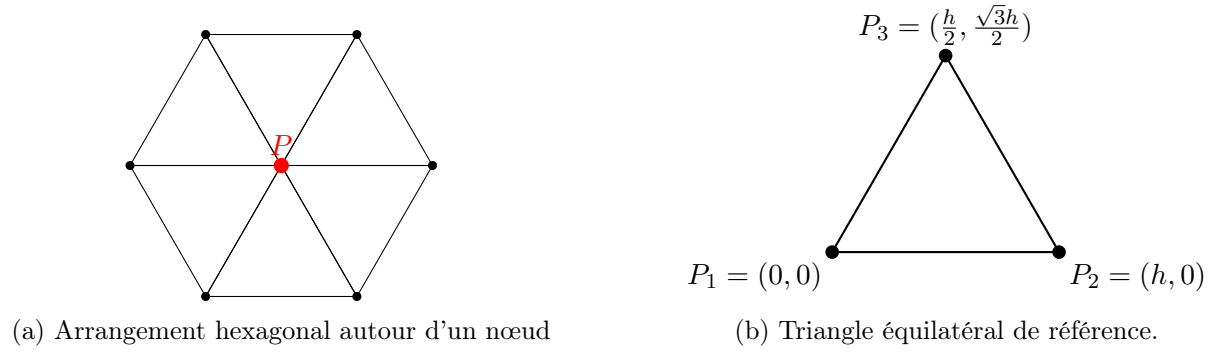


FIGURE 5 – Maillage triangulaire : arrangement hexagonal et triangle de référence.

5.2 Matrices locales

Lemme 7 (Matrice de raideur équilatérale). *Pour un triangle équilatéral d'arête h :*

$$\hat{S}_{ij} = \int_{\hat{T}} \nabla \hat{\varphi}_i \cdot \nabla \hat{\varphi}_j \, dx \, dy = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{ij}$$

Démonstration. Pour le triangle de référence \hat{T} :

Les gradients des fonctions de base sont :

$$\nabla \hat{\varphi}_1 = \left(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{\sqrt{3}h} \right), \quad \nabla \hat{\varphi}_2 = \left(\frac{1}{h}, -\frac{1}{\sqrt{3}h} \right), \quad \nabla \hat{\varphi}_3 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}h} \right)$$

L'aire est $|K| = \frac{\sqrt{3}h^2}{4}$. Par exemple :

$$\hat{S}_{11} = |K| \cdot |\nabla \hat{\varphi}_1|^2 = \frac{\sqrt{3}h^2}{4} \cdot \frac{4}{3h^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

□

Lemme 8. *On définit et calcule les intégrales suivantes :*

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\hat{T}} 1 \, dx \, dy = |\hat{T}|, & I_x &= \iint_{\hat{T}} x \, dx \, dy = \frac{|\hat{T}|}{3} h, \\ I_y &= \iint_{\hat{T}} y \, dx \, dy = \frac{|\hat{T}|}{6} \sqrt{3} h, & I_{xx} &= \iint_{\hat{T}} x^2 \, dx \, dy = \frac{|\hat{T}|}{6} h^2, \\ I_{yy} &= \iint_{\hat{T}} y^2 \, dx \, dy = \frac{|\hat{T}|}{12} h^2, & I_{xy} &= \iint_{\hat{T}} x y \, dx \, dy = \frac{|\hat{T}|}{12} h^2. \end{aligned}$$

Lemme 9 (Matrice de masse équilatérale). *Pour un triangle équilatéral d'arête h :*

$$\widehat{M}_{ij} = \int_{\widehat{T}} \widehat{\varphi}_i \widehat{\varphi}_j \, dx \, dy = \frac{\sqrt{3}h^2}{48} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{ij}$$

Démonstration.

1. Calcul de \widehat{M}_{11} $= \iint_{\widehat{T}} \widehat{\varphi}_1^2$.

Écrivons

$$\widehat{\varphi}_1^2 = 1 - 2\frac{x}{h} - 2\frac{y}{\sqrt{3}h} + \frac{x^2}{h^2} + 2\frac{xy}{\sqrt{3}h^2} + \frac{y^2}{3h^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{11} &= I_1 - 2\frac{I_x}{h} - 2\frac{I_y}{\sqrt{3}h} + \frac{I_{xx}}{h^2} + 2\frac{I_{xy}}{\sqrt{3}h^2} + \frac{I_{yy}}{3h^2} \\ &= |\widehat{T}| \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) = \frac{|\widehat{T}|}{6} = \frac{\sqrt{3}h^2}{24}. \end{aligned}$$

2. Calcul de \widehat{M}_{12} $= \iint_{\widehat{T}} \widehat{\varphi}_1 \widehat{\varphi}_2$.

On a

$$\widehat{\varphi}_1 \widehat{\varphi}_2 = \left(1 - \frac{x}{h} - \frac{y}{\sqrt{3}h} \right) \left(\frac{x}{h} - \frac{y}{\sqrt{3}h} \right),$$

donc

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{12} &= \frac{I_x}{h} - \frac{I_{xx}}{h^2} - \frac{I_{xy}}{\sqrt{3}h^2} - \frac{I_y}{\sqrt{3}h} + \frac{I_{xy}}{\sqrt{3}h^2} + \frac{I_{yy}}{3h^2} \\ &= |\widehat{T}| \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) = \frac{|\widehat{T}|}{12} = \frac{\sqrt{3}h^2}{48}. \end{aligned}$$

3. Conclusion.

Par symétrie on obtient

$$\widehat{M}_{ij} = \begin{cases} \frac{|\widehat{T}|}{6}, & i = j, \\ \frac{|\widehat{T}|}{12}, & i \neq j, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \widehat{M} = \frac{\sqrt{3}h^2}{48} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

□

5.3 Assemblage global

Théorème 5 (Stencil hexagonal). *Pour un nœud intérieur P du maillage triangulaire équilatéral, la matrice globale présente un stencil à 7 points :*

$$\begin{aligned} \alpha_0(h, \kappa) &= 2\sqrt{3} + \frac{\kappa^2 \sqrt{3} h^2}{4} \quad (\text{coefficient diagonal}) \\ \alpha_1(h, \kappa) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\kappa^2 \sqrt{3} h^2}{24} \quad (\text{coefficients voisins}) \end{aligned}$$

autrement dit :

$$A_{(m,n),(m',n')} = \begin{cases} 2\sqrt{3} + \frac{\kappa^2 \sqrt{3}}{4} h^2, & (m', n') = (m, n), \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\kappa^2 \sqrt{3}}{24} h^2, & (m, n) \text{ et } (m', n') \text{ sont voisins,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Un nœud intérieur P est entouré de 6 triangles équilatéraux et possède 6 voisins.

Coefficient diagonal : Contribution des 6 triangles :

$$K_{PP} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$M_{PP} = 6 \times \frac{\sqrt{3}h^2}{24} = \frac{\sqrt{3}h^2}{4}$$

Coefficient voisin : Deux voisins partagent 2 triangles :

$$K_{PQ} = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$M_{PQ} = 2 \times \frac{\sqrt{3}h^2}{48} = \frac{\sqrt{3}h^2}{24}$$

□

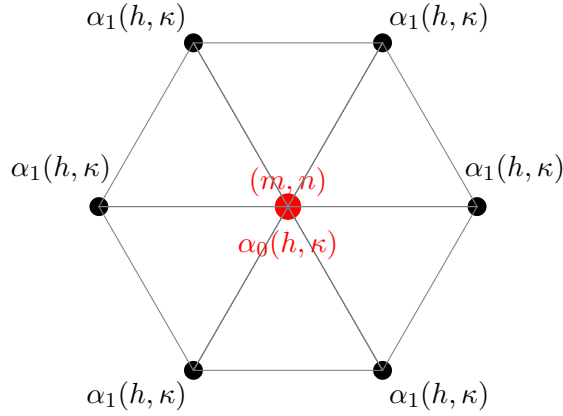


FIGURE 6 – Stencil hexagonal à 7 points pour le maillage triangulaire équilatéral.

5.4 Vecteur second membre

Proposition 5 (Second membre local équilatéral). *Pour le triangle équilatéral de référence \hat{T} et f constante :*

$$\hat{b}_i = - \int_{\hat{T}} f \hat{\varphi}_i dx dy = -f \cdot \frac{\sqrt{3}h^2}{12}, \quad i = 1, 2, 3$$

Démonstration. Avec f constante :

$$\hat{b}_i = -f \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_i dx dy$$

Pour un triangle équilatéral avec fonctions de base affines, par symétrie :

$$\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_i dx dy = \frac{1}{3} |\hat{T}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}h^2}{4} = \frac{\sqrt{3}h^2}{12}$$

Cette égalité découle du fait que les trois fonctions de base sont symétriques par rapport aux médianes du triangle et que leur somme vaut 1. □

Théorème 6 (Assemblage hexagonal du second membre). *Pour un nœud intérieur P du maillage triangulaire équilatéral, la composante du vecteur second membre global est :*

$$b_P = -f \cdot \frac{\sqrt{3}h^2}{2}$$

Démonstration. Un nœud intérieur est entouré de 6 triangles équilatéraux formant un hexagone régulier. L'assemblage donne :

$$b_P = \sum_{T \ni P} b_{\text{local}}^T = 6 \times \left(-f \cdot \frac{\sqrt{3}h^2}{12} \right) = -f \cdot \frac{\sqrt{3}h^2}{2}$$

□

5.5 Traitement de l'obstacle disque

Soit un obstacle circulaire centré :

$$\mathcal{O}_{\text{disk}} = \left\{ (x, y) \in (0, 1)^2 : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 < r^2 \right\}$$

Proposition 6 (Assemblage avec obstacle disque). *Les nœuds vérifiant $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq r^2$ sont marqués comme Dirichlet. L'assemblage procède comme pour l'obstacle carré en excluant ces nœuds du système.*

Remarque 3. Une tolérance ε sera utilisée pour capturer les nœuds proches du bord du disque.

6 Algorithme d'assemblage

Algorithm 1 Assemblage complet du système linéaire

```

1: Initialiser  $K = 0, M = 0, b = 0$ 
2: for chaque élément  $T \in \mathcal{T}_h$  do
3:   Calculer  $K^T, M^T$  (matrices élémentaires)
4:   Calculer  $b^T = -f \cdot |T|/3 \cdot \mathbf{1}$  où  $\mathbf{1} = (1, 1, 1)^T$ 
5:   for  $i, j = 1, 2, 3$  do
6:      $I \leftarrow$  indice global du nœud local  $i$ 
7:      $J \leftarrow$  indice global du nœud local  $j$ 
8:     if  $I \notin \mathcal{O}$  et  $J \notin \mathcal{O}$  then
9:        $K_{IJ} \leftarrow K_{IJ} + K_{ij}^T$ 
10:       $M_{IJ} \leftarrow M_{IJ} + M_{ij}^T$ 
11:     end if
12:     if  $I \notin \mathcal{O}$  then
13:        $b_I \leftarrow b_I + b_i^T$ 
14:     end if
15:   end for
16: end for
17: Former  $A = K + \kappa^2 M$ 
18: Résoudre  $Au = b$ 

```
