

Discrétisation d'une équation différentielle

projet 2A rattrapage SI8

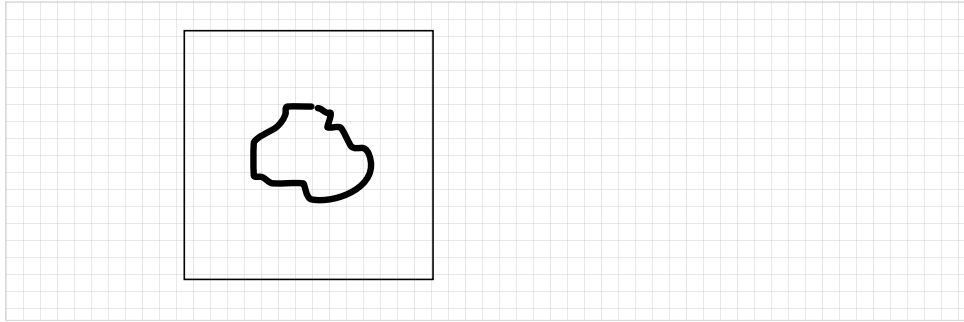
Benoit Valiron

Considérons l'équation d'onde

$$\nabla^2 u - \kappa^2 u = f$$

On s'intéresse au cas 2D, quand u est une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et quand f est constante.

L'objectif de l'étude est de réaliser une discrétisation de cette équation à l'aide de la méthode aux éléments finis, dans le cas où l'onde se diffuse dans une région carrée contenant un obstacle:



On considérera 5 cas possibles pour l'obstacle:

- pas d'obstacle
- un carré centré au milieu
- un carré décentré
- un disque centré au milieu
- un disque décentré

Il nous faut un maillage. Nous considérons deux cas possibles : un maillage carré et un maillage triangulaire. Dans les deux cas, le maillage est parfaitement uniforme.

On s'autorise une erreur (à paramétrer) pour la forme de l'obstacle quand il s'agit d'un disque. Par exemple, le disque pourra être considéré comme un polygone.

Objectif

De façon générale, l'objectif est de décrire et d'étudier les matrices obtenues. Plus précisément, on veut:

1. La forme algébrique de ces matrices en fonction de la taille du maillage et des autres paramètres. Dans l'idéal, la matrice doit être fournie comme une fonction qui à chaque indice i, j associe un polynôme (ou autre fonction "simple", éventuellement définie par morceaux).

En particulier, dans les choix à faire au niveau de l'obstacle et du maillage, on privilégiera une approche simplifiant au maximum la structure de la fonction décrivant la matrice.

2. Une analyse numérique de la précision de la solution obtenue en fonction de la taille du maillage. Comme étalon, on utilisera un outil existant (à trouver) de résolution de systèmes différentiels. Celui-ci produira probablement un maillage optimisé ad-hoc : il faudra donc proposer une méthode pour comparer les solutions obtenues (par exemple, en regardant les solutions proposées par chacune des approches comme des fonctions définies par morceaux).