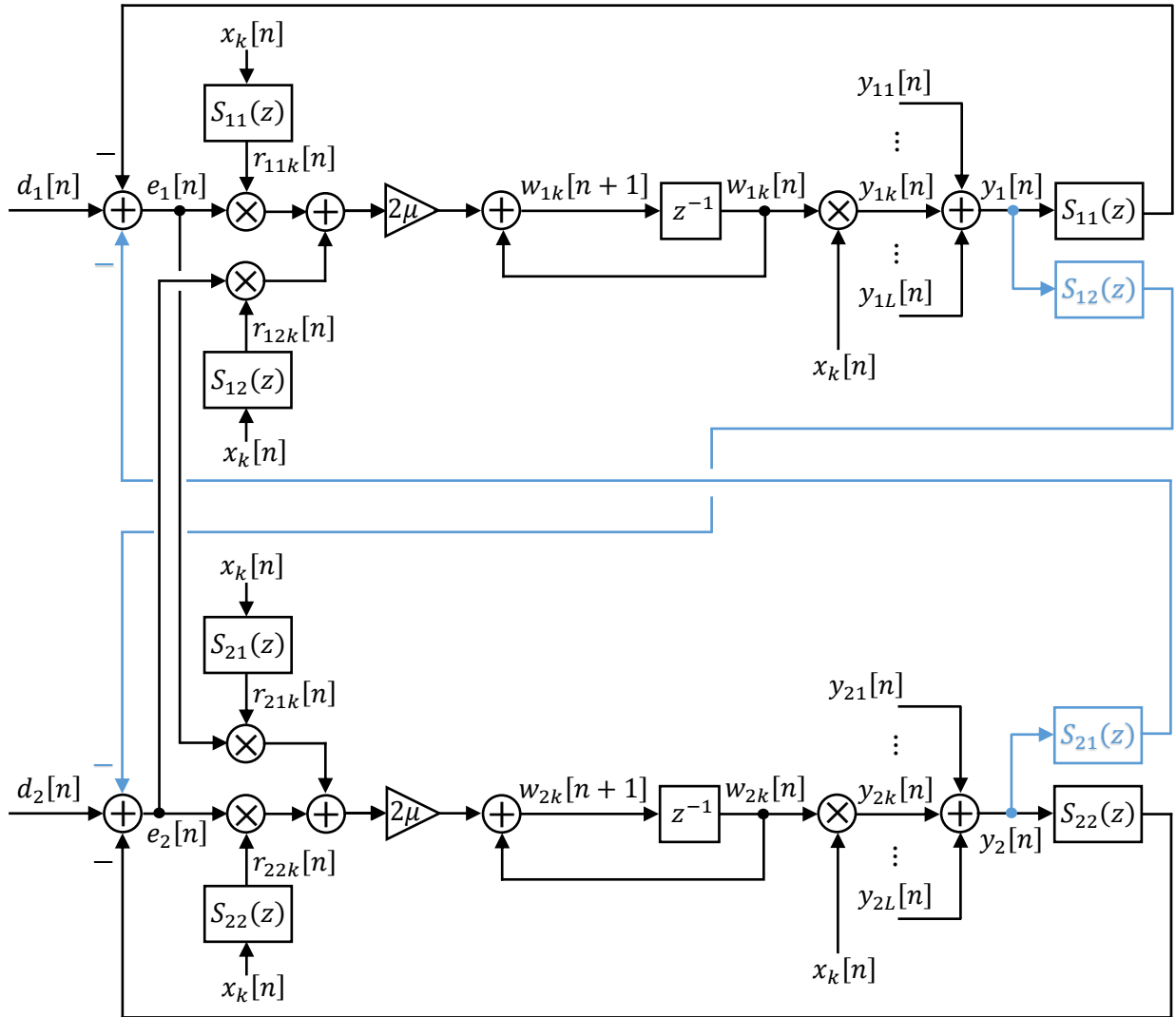


A kétcsatornás eset vázlata (megszorítások: hangszórók és mikrofonok párban, azonos L és μ):



Szinuszos referenciajelet feltételezve az \mathbf{x} vektor k -adik elemének n -edik ütembeli értéke az alábbi módon fejezhető ki:

$$x_k[n] = C \cos(\omega_0 n + \varphi_k) = \frac{C}{2} e^{j\omega_0 n} e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\varphi_k}$$

Az $r_{ijk}[n]$ szűrt referenciajel úgy keletkezik, hogy az $S_{ij}(z)$ átvitelrel megszűrjük a szinuszos $x_k[n]$ jelet:

$$r_{ijk}[n] = \frac{C}{2} e^{j\omega_0 n} S_{ij}(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2} e^{-j\omega_0 n} S_{ij}(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi_k}$$

Érdemes még kifejezni az $e_j[n]r_{ijk}[n]$ szorzat z -transzformáltját is:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\{e_j[n]r_{ijk}[n]\} &= \mathbb{Z}\left\{\frac{C}{2} S_{ij}(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi_k} e^{j\omega_0 n} e_j[n] + \frac{C}{2} S_{ij}(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi_k} e^{-j\omega_0 n} e_j[n]\right\} \\ &= \frac{C}{2} S_{ij}(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi_k} E_j(ze^{-j\omega_0}) + \frac{C}{2} S_{ij}(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi_k} E_j(ze^{j\omega_0}) \end{aligned}$$

Az FxLMS algoritmus adaptációs szabálya az i -edik mote k -adik súlytényezőjére:

$$w_{ik}[n+1] = w_{ik}[n] + 2\mu(e_1[n]r_{i1k}[n] + e_2[n]r_{i2k}[n])$$

Ugyanez z -tartományban:

$$zW_{ik}(z) = W_{ik}(z) + 2\mu\left(\frac{C}{2}S_{i1}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k}E_1(ze^{-j\omega_0}) + \frac{C}{2}S_{i1}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k}E_1(ze^{j\omega_0}) + \frac{C}{2}S_{i2}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k}E_2(ze^{-j\omega_0}) + \frac{C}{2}S_{i2}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k}E_2(ze^{j\omega_0})\right)$$

A súlytényezőre rendezve:

$$W_{ik}(z) = \mu CU(z)(E_1(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k} + E_1(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k} + E_2(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k} + E_2(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k})$$

ahol $U(z) = \frac{1}{z-1}$. A k -adik súly hozzájárulása az i -edik mote kimenetéhez:

$$\begin{aligned} Y_{ik}(z) &= \mathbb{Z}\{x_k[n]w_{ik}[n]\} = \frac{C}{2}W_{ik}(ze^{-j\omega_0})e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2}W_{ik}(ze^{j\omega_0})e^{-j\varphi_k} \\ &= \frac{\mu C^2}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})]E_1(z) \\ &\quad + \frac{\mu C^2}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})]E_2(z) \\ &\quad + \frac{\mu C^2}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})E_1(ze^{-j2\omega_0})e^{j2\varphi_k} + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0})E_1(ze^{j2\omega_0})e^{-j2\varphi_k} \\ &\quad + U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})E_2(ze^{-j2\omega_0})e^{j2\varphi_k} + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0})E_2(ze^{j2\omega_0})e^{-j2\varphi_k}] \end{aligned}$$

Az i -edik mote hangszórója által kiadott jel:

$$\begin{aligned} Y_i(z) &= \sum_{k=1}^L Y_{ik}(z) \\ &= \frac{\mu C^2 L}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})]E_1(z) \\ &\quad + \frac{\mu C^2 L}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})]E_2(z) \\ &\quad + \frac{\mu C^2}{2}\left[E_1(ze^{-j2\omega_0})U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})\sum_{k=1}^L e^{j2\varphi_k} + E_1(ze^{j2\omega_0})U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0})\sum_{k=1}^L e^{-j2\varphi_k} \right. \\ &\quad \left. + E_2(ze^{-j2\omega_0})U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})\sum_{k=1}^L e^{j2\varphi_k} + E_2(ze^{j2\omega_0})U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0})\sum_{k=1}^L e^{-j2\varphi_k}\right] \end{aligned}$$

A továbbiakban csak olyan eseteket vizsgálunk, amikor a kiadott jelek idővariáns része egzaktul vagy közelítőleg 0:

$$\begin{aligned} Y_i(z) &= \frac{\mu C^2 L}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})]E_1(z) \\ &\quad + \frac{\mu C^2 L}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})]E_2(z) \end{aligned}$$

A visszacsatolt rendszer átviteli függvényeinek meghatározásához vezessük be az alábbi jelölést:

$$\alpha_{ij} = \frac{\mu C^2 L}{2}[U(ze^{-j\omega_0})S_{ij}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{ij}(e^{j\omega_0})]$$

Ezzel a jelöléssel az i -edik mote kimenete így írható:

$$Y_i(z) = \alpha_{i1}E_1(z) + \alpha_{i2}E_2(z)$$

Algebrai átalakításokkal az α_{ij} tényezőket hasznosabb alakra hozhatjuk. Legyen $S_{ij}(e^{j\omega_0}) = A_{ij}e^{j\Phi_{ij}}$.

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \frac{\mu C^2 L}{2} \left[\frac{S_{ij}(e^{-j\omega_0})}{ze^{-j\omega_0} - 1} + \frac{S_{ij}(e^{j\omega_0})}{ze^{j\omega_0} - 1} \right] = \frac{\mu C^2 L A_{ij}}{2} \left[\frac{e^{-j\Phi_{ij}}}{ze^{-j\omega_0} - 1} + \frac{e^{j\Phi_{ij}}}{ze^{j\omega_0} - 1} \right] \\ &= \frac{\mu C^2 L A_{ij}}{2} \cdot \frac{z(e^{j(\omega_0 - \Phi_{ij})} + e^{-j(\omega_0 - \Phi_{ij})}) - (e^{j\Phi_{ij}} + e^{-j\Phi_{ij}})}{z^2 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) + 1} \\ &= \mu C^2 L A_{ij} \frac{\cos(\omega_0 - \Phi_{ij})z - \cos \Phi_{ij}}{z^2 - 2 \cos(\omega_0)z + 1}\end{aligned}$$

A hibajelek kifejezése könnyen leolvasható az ábráról:

$$\begin{aligned}E_i(z) &= D_i(z) - Y_1(z)S_{1i}(z) - Y_2(z)S_{2i}(z) \\ &= D_i(z) - (\alpha_{11}E_1(z) + \alpha_{12}E_2(z))S_{1i}(z) - (\alpha_{21}E_1(z) + \alpha_{22}E_2(z))S_{2i}(z)\end{aligned}$$

A zavarásokra rendezve és mátrixalakban írva:

$$\begin{bmatrix} D_1(z) \\ D_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) & \alpha_{12}S_{11}(z) + \alpha_{22}S_{21}(z) \\ \alpha_{11}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{22}(z) & 1 + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix}$$

A mátrix invertálása után a MIMO rendszer átviteli függvényei:

$$\begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{P} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) & -\alpha_{12}S_{11}(z) - \alpha_{22}S_{21}(z) \\ -\alpha_{11}S_{12}(z) - \alpha_{21}S_{22}(z) & 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) \\ D_2(z) \end{bmatrix}$$

ahol a determináns:

$$\begin{aligned}P &= (1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z))(1 + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z)) \\ &\quad - (\alpha_{12}S_{11}(z) + \alpha_{22}S_{21}(z))(\alpha_{11}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{22}(z)) \\ &= 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})(S_{11}(z)S_{22}(z) - S_{12}(z)S_{21}(z))\end{aligned}$$

A következőkben feltesszük, hogy a másodlagos utak $S_{ij}(z) = A_{ij}z^{-\Delta_{ij}}$ alakúak. Ekkor $\Phi_{ij} = -\omega_0\Delta_{ij}$. Legyen továbbá $K = \mu C^2 L$ és $N = z^2 - 2 \cos(\omega_0)z + 1$. Ezeket behelyettesítve:

$$\begin{aligned}P &= 1 + KA_{11}^2 \frac{\cos[(\Delta_{11} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{11})}{N} z^{-\Delta_{11}} + KA_{12}^2 \frac{\cos[(\Delta_{12} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{12})}{N} z^{-\Delta_{12}} \\ &\quad + KA_{21}^2 \frac{\cos[(\Delta_{21} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{21})}{N} z^{-\Delta_{21}} + KA_{22}^2 \frac{\cos[(\Delta_{22} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{22})}{N} z^{-\Delta_{22}} \\ &\quad + K^2 \frac{A_{11}A_{22}[\cos[(\Delta_{11} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{11})][\cos[(\Delta_{22} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{22})] - A_{12}A_{21}[\cos[(\Delta_{12} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{12})][\cos[(\Delta_{21} + 1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{21})]}{N^2} \\ &\quad \cdot (A_{11}A_{22}z^{-(\Delta_{11} + \Delta_{22})} - A_{12}A_{21}z^{-(\Delta_{12} + \Delta_{21})})\end{aligned}$$

A rendszer $\omega_0 \rightarrow 0$ esetén attól válik labilissá, hogy az egyik pólus $z = 1$ -nél elhagyja az egységkört, $\omega_0 \rightarrow \pi$ esetén pedig $z = -1$ -nél. Nézzük az előbbi (az egyes tagok határértékei a L'Hospital-szabály és trigonometriai azonosságok felhasználásával egyszerűen számíthatók, itt nem részletezem):

$$\begin{aligned}\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} P(z=1) &= 1 + KA_{11}^2 \left(-\Delta_{11} - \frac{1}{2}\right) + KA_{12}^2 \left(-\Delta_{12} - \frac{1}{2}\right) + KA_{21}^2 \left(-\Delta_{21} - \frac{1}{2}\right) + KA_{22}^2 \left(-\Delta_{22} - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + K^2 \left(A_{11}A_{22} \frac{1}{4} (1 + 2\Delta_{11})(1 + 2\Delta_{22}) - A_{12}A_{21} \frac{1}{4} (1 + 2\Delta_{12})(1 + 2\Delta_{21}) \right) (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\ &= K^2 \left(A_{11}A_{22} \left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{11} + \Delta_{22}}{2} + \Delta_{11}\Delta_{22} \right) - A_{12}A_{21} \left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{12} + \Delta_{21}}{2} + \Delta_{12}\Delta_{21} \right) \right) (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\ &\quad - K \left(A_{11}^2\Delta_{11} + A_{12}^2\Delta_{12} + A_{21}^2\Delta_{21} + A_{22}^2\Delta_{22} + \frac{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2}{2} \right) + 1\end{aligned}$$

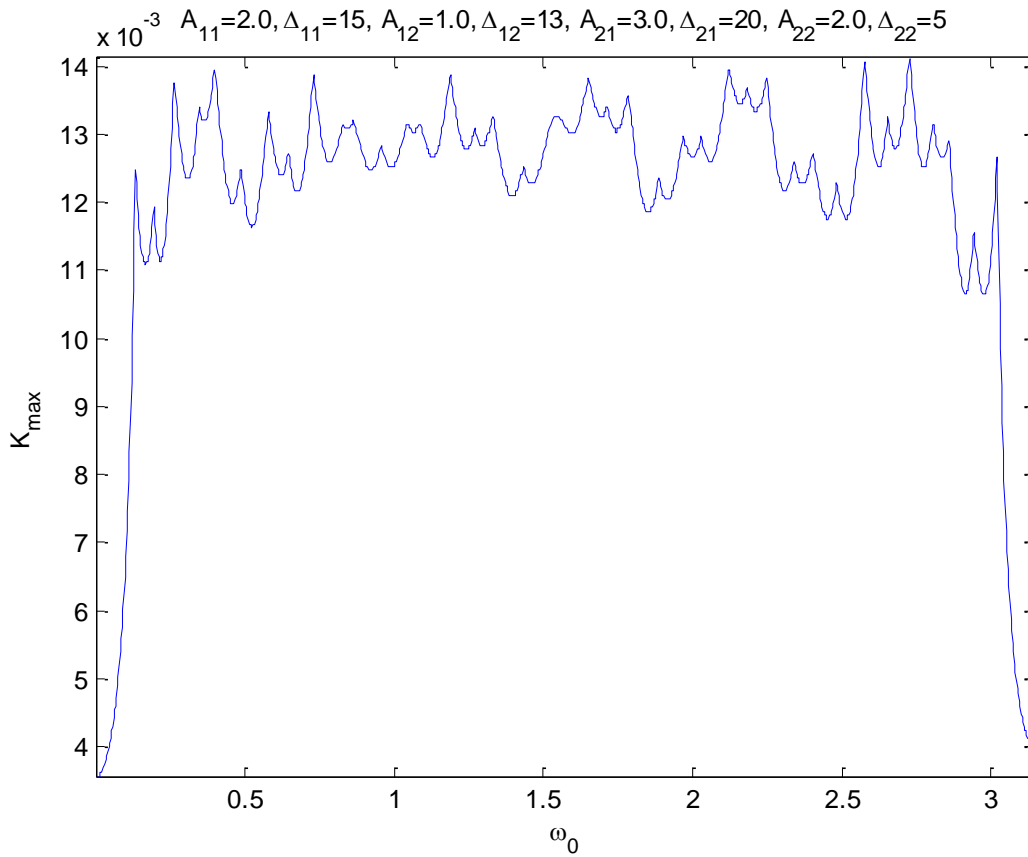
Ennek a polinomnak a legkisebb pozitív gyöke a $K_{max}(0)$!

A másik határérték:

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega_0 \rightarrow \pi} P(z = -1) &= 1 + KA_{11}^2 \left(-\Delta_{11} - \frac{1}{2} \right) + KA_{12}^2 \left(-\Delta_{12} - \frac{1}{2} \right) + KA_{21}^2 \left(-\Delta_{21} - \frac{1}{2} \right) + KA_{22}^2 \left(-\Delta_{22} - \frac{1}{2} \right) \\
&+ K^2 \left(\frac{1}{4} (1 + 2\Delta_{11})(1 + 2\Delta_{22})(-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}} - \frac{1}{4} (1 + 2\Delta_{12})(1 + 2\Delta_{21})(-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}} \right) ((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}} A_{11}A_{22} - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}} A_{12}A_{21}) \\
&= K^2 \left((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}} A_{11}A_{22} \left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{11} + \Delta_{22}}{2} + \Delta_{11}\Delta_{22} \right) - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}} A_{12}A_{21} \left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{12} + \Delta_{21}}{2} + \Delta_{12}\Delta_{21} \right) \right) ((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}} A_{11}A_{22} - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}} A_{12}A_{21}) \\
&- K \left(A_{11}^2 \Delta_{11} + A_{12}^2 \Delta_{12} + A_{21}^2 \Delta_{21} + A_{22}^2 \Delta_{22} + \frac{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2}{2} \right) + 1
\end{aligned}$$

Ennek a polinomnak a legkisebb pozitív gyöke a $K_{max}(\pi)$!

Ebben a kétcsatornás esetben előfordulhat, hogy a $K_{max}(\omega_0)$ grafikon nem szimmetrikus, vagyis eltérő K_{max} tartozik az $\omega_0 = \epsilon$ és $\omega_0 = \pi - \epsilon$ frekvenciákhoz. Ez az egycsatornás esetben nem fordulhatott volna elő.



Nézzük meg a 0 frekvenciához tartozó polinomot arra a speciális esetre, amikor Δ_{11} nagy és $\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta_{22} = 0$:

$$K^2 \left(A_{11}A_{22} \left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{11}}{2} \right) - \frac{A_{12}A_{21}}{4} \right) (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) - K \left(A_{11}^2\Delta_{11} + \frac{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2}{2} \right) + 1$$

Ha Δ_{11} elegendően nagy, akkor a többi tagot hozzá képest elhanyagolhatjuk:

$$K^2 A_{11}A_{22} \frac{\Delta_{11}}{2} (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) - K A_{11}^2\Delta_{11} + 1$$

Ennek a polinomnak a gyökei:

$$\begin{aligned} K_{1,2} &= \frac{A_{11}^2\Delta_{11} \pm \sqrt{A_{11}^4\Delta_{11}^2 - 2A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}}{A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} \\ &= \frac{A_{11}^2\Delta_{11}}{A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11}^4\Delta_{11}^2}} \right) \end{aligned}$$

Használjuk ki, hogy kis abszolút értékű x esetén $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$:

$$K_{1,2} \approx \frac{A_{11}}{A_{22}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} \left(1 \pm \left(1 - \frac{A_{22}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11}^3\Delta_{11}} \right) \right)$$

Ebből a két gyök:

$$K_1 \approx \frac{2A_{11}}{A_{11}A_{22}^2 - A_{12}A_{21}A_{22}} - \frac{1}{A_{11}^2\Delta_{11}} \quad \text{és} \quad K_2 \approx \frac{1}{A_{11}^2\Delta_{11}}$$

Multiszinuszos referenciajel

A referenciajel most az alábbi alakú:

$$x[n] = \sum_{m=1}^M C_m \cos(\omega_m n + \varphi_m)$$

Az \mathbf{x} vektor k -adik elemének n -edik ütembeli értéke az alábbi módon fejezhető ki:

$$x_k[n] = \sum_{m=1}^M C_m \cos(\omega_m(n-k) + \varphi_m) = \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} e^{j\omega_m(n-k)} e^{j\varphi_m} + \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} e^{-j\omega_m(n-k)} e^{-j\varphi_m}$$

Az $r_{ijk}[n]$ szűrt referenciajel úgy keletkezik, hogy az $S_{ij}(z)$ átvitelrel megsűrjük az $x_k[n]$ jelet:

$$r_{ijk}[n] = \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} e^{j\omega_m(n-k)} S_{ij}(e^{j\omega_m}) e^{j\varphi_m} + \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} e^{-j\omega_m(n-k)} S_{ij}(e^{-j\omega_m}) e^{-j\varphi_m}$$

Érdemes még kifejezni az $e_j[n]r_{ijk}[n]$ szorzat z-transzformáltját is:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\{e_j[n]r_{ijk}[n]\} &= \mathbb{Z}\left\{\sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} e^{j\omega_m(n-k)} S_{ij}(e^{j\omega_m}) e^{j\varphi_m} e_j[n] + \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} e^{-j\omega_m(n-k)} S_{ij}(e^{-j\omega_m}) e^{-j\varphi_m} e_j[n]\right\} \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} S_{ij}(e^{j\omega_m}) e^{j\varphi_m} E_j(ze^{-j\omega_m}) + \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} S_{ij}(e^{-j\omega_m}) e^{-j\varphi_m} E_j(ze^{j\omega_m}) \end{aligned}$$

Az FxLMS algoritmus adaptációs szabálya az i -edik mote k -adik súlytényezőjére:

$$w_{ik}[n+1] = w_{ik}[n] + 2\mu(e_1[n]r_{i1k}[n] + e_2[n]r_{i2k}[n])$$

Ugyanez z-tartományban:

$$\begin{aligned} zW_{ik}(z) &= W_{ik}(z) + 2\mu\left(\sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} S_{i1}(e^{j\omega_m}) e^{j\varphi_m} E_1(ze^{-j\omega_m}) + \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} S_{i1}(e^{-j\omega_m}) e^{-j\varphi_m} E_1(ze^{j\omega_m})\right) \\ &+ \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} S_{i2}(e^{j\omega_m}) e^{j\varphi_m} E_2(ze^{-j\omega_m}) + \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} S_{i2}(e^{-j\omega_m}) e^{-j\varphi_m} E_2(ze^{j\omega_m}) \end{aligned}$$

A súlytényezőre rendezve:

$$\begin{aligned} W_{ik}(z) &= \mu U(z) \sum_{m=1}^M C_m [E_1(ze^{-j\omega_m}) S_{i1}(e^{j\omega_m}) e^{j\varphi_m} + E_1(ze^{j\omega_m}) S_{i1}(e^{-j\omega_m}) e^{-j\varphi_m} \\ &+ E_2(ze^{-j\omega_m}) S_{i2}(e^{j\omega_m}) e^{j\varphi_m} + E_2(ze^{j\omega_m}) S_{i2}(e^{-j\omega_m}) e^{-j\varphi_m}] \end{aligned}$$

ahol $U(z) = \frac{1}{z-1}$.

A k -adik súly hozzájárulása az i -edik mote kimenetéhez:

$$\begin{aligned}
Y_{ik}(z) &= \mathbb{Z}\{x_k[n]w_{ik}[n]\} = \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} W_{ik}(ze^{-j\omega_m}) e^{j\varphi_m} + \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{2} W_{ik}(ze^{j\omega_m}) e^{-j\varphi_m} \\
&= \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^M \frac{\mu C_m C_p}{2} U(ze^{-j\omega_m}) [E_1(ze^{-j(\omega_m+\omega_p)}) S_{i1}(e^{j\omega_p}) e^{j(\omega_m+\omega_p)} + E_1(ze^{-j(\omega_m-\omega_p)}) S_{i1}(e^{-j\omega_p}) e^{j(\omega_m-\omega_p)} \\
&\quad + E_2(ze^{-j(\omega_m+\omega_p)}) S_{i2}(e^{j\omega_p}) e^{j(\omega_m+\omega_p)} + E_2(ze^{-j(\omega_m-\omega_p)}) S_{i2}(e^{-j\omega_p}) e^{j(\omega_m-\omega_p)}] \\
&\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^M \frac{\mu C_m C_p}{2} U(ze^{j\omega_m}) [E_1(ze^{j(\omega_m-\omega_p)}) S_{i1}(e^{j\omega_p}) e^{-j(\omega_m-\omega_p)} + E_1(ze^{j(\omega_m+\omega_p)}) S_{i1}(e^{-j\omega_p}) e^{-j(\omega_m+\omega_p)} \\
&\quad + E_2(ze^{j(\omega_m-\omega_p)}) S_{i2}(e^{j\omega_p}) e^{-j(\omega_m-\omega_p)} + E_2(ze^{j(\omega_m+\omega_p)}) S_{i2}(e^{-j\omega_p}) e^{-j(\omega_m+\omega_p)}]
\end{aligned}$$

A továbbiakban az átvitel idővariáns tagjait elhanyagoljuk. A kifejezésben csak akkor fordulnak elő időinvariáns tagok, amikor a szummákban $p = m$:

$$\begin{aligned}
Y_{ik}(z) &= \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2}{2} U(ze^{-j\omega_m}) [E_1(ze^{-j2\omega_m}) S_{i1}(e^{j\omega_m}) e^{j2\omega_m} + E_1(z) S_{i1}(e^{-j\omega_m}) \\
&\quad + E_2(ze^{-j2\omega_m}) S_{i2}(e^{j\omega_m}) e^{j2\omega_m} + E_2(z) S_{i2}(e^{-j\omega_m})] \\
&\quad + \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2}{2} U(ze^{j\omega_m}) [E_1(z) S_{i1}(e^{j\omega_m}) + E_1(ze^{j2\omega_m}) S_{i1}(e^{-j\omega_m}) e^{-j2\omega_m} \\
&\quad + E_2(z) S_{i2}(e^{j\omega_m}) + E_2(ze^{j2\omega_m}) S_{i2}(e^{-j\omega_m}) e^{-j2\omega_m}]
\end{aligned}$$

Csak az időinvariáns részt meghagyva:

$$\begin{aligned}
Y_{ik}(z) &= \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2}{2} U(ze^{-j\omega_m}) [E_1(z) S_{i1}(e^{-j\omega_m}) + E_2(z) S_{i2}(e^{-j\omega_m})] \\
&\quad + \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2}{2} U(ze^{j\omega_m}) [E_1(z) S_{i1}(e^{j\omega_m}) + E_2(z) S_{i2}(e^{j\omega_m})]
\end{aligned}$$

Az i -edik mote hangszórója által kiadott jel:

$$\begin{aligned}
Y_i(z) &= \sum_{k=1}^L Y_{ik}(z) = E_1(z) \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2 L}{2} [U(ze^{-j\omega_m}) S_{i1}(e^{-j\omega_m}) + U(ze^{j\omega_m}) S_{i1}(e^{j\omega_m})] \\
&\quad + E_2(z) \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2 L}{2} [U(ze^{-j\omega_m}) S_{i2}(e^{-j\omega_m}) + U(ze^{j\omega_m}) S_{i2}(e^{j\omega_m})]
\end{aligned}$$

A visszacsatolt rendszer átviteli függvényeinek meghatározásához vezessük be az alábbi jelölést:

$$\alpha_{ij} = \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2 L}{2} [U(ze^{-j\omega_m}) S_{ij}(e^{-j\omega_m}) + U(ze^{j\omega_m}) S_{ij}(e^{j\omega_m})]$$

Ezzel a jelöléssel az i -edik mote kimenete így írható:

$$Y_i(z) = \alpha_{i1} E_1(z) + \alpha_{i2} E_2(z)$$

Végezzük el most is az α_{ij} tényezők átalakítását! Legyen $S_{ij}(e^{j\omega_m}) = A_{ijm}e^{j\Phi_{ijm}}$.

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2 L}{2} \left[\frac{S_{ij}(e^{-j\omega_m})}{ze^{-j\omega_m} - 1} + \frac{S_{ij}(e^{j\omega_m})}{ze^{j\omega_m} - 1} \right] = \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2 L A_{ijm}}{2} \left[\frac{e^{-j\Phi_{ijm}}}{ze^{-j\omega_m} - 1} + \frac{e^{j\Phi_{ijm}}}{ze^{j\omega_m} - 1} \right] \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{\mu C_m^2 L A_{ijm}}{2} \cdot \frac{z(e^{j(\omega_m - \Phi_{ijm})} + e^{-j(\omega_m - \Phi_{ijm})}) - (e^{j\Phi_{ijm}} + e^{-j\Phi_{ijm}})}{z^2 - (e^{j\omega_m} + e^{-j\omega_m}) + 1} \\ &= \sum_{m=1}^M \mu C_m^2 L A_{ijm} \frac{\cos(\omega_m - \Phi_{ijm})z - \cos \Phi_{ijm}}{z^2 - 2 \cos(\omega_m)z + 1}\end{aligned}$$

A következőkben feltesszük, hogy a másodlagos utak $S_{ij}(z) = A_{ij}z^{-\Delta_{ij}}$ alakúak. Ekkor $\Phi_{ijm} = -\omega_m \Delta_{ij}$.

$$\alpha_{ij} = \sum_{m=1}^M \mu C_m^2 L A_{ij} \frac{\cos((\Delta_{ij} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{ij})}{z^2 - 2 \cos(\omega_m)z + 1}$$

Tehát a tiszta szinuszos esethez képest az egyetlen különbség az α_{ij} együtthatók kifejezése. A kifejezéseket összevetve szépen látható a linearitás: a kimenet az egyes referenciajel-komponensekre adott válaszok összege.

A determináns most is:

$$P = 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})(S_{11}(z)S_{22}(z) - S_{12}(z)S_{21}(z))$$

Legyen $N_m = z^2 - 2 \cos(\omega_m)z + 1$. Behelyettesítve:

$$\begin{aligned}P &= 1 + \mu L A_{11}^2 z^{-\Delta_{11}} \sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{11} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{11})}{N_m} + \mu L A_{12}^2 z^{-\Delta_{12}} \sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{12} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{12})}{N_m} \\ &+ \mu L A_{21}^2 z^{-\Delta_{21}} \sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{21} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{21})}{N_m} + \mu L A_{22}^2 z^{-\Delta_{22}} \sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{22} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{22})}{N_m} \\ &+ \left(\mu^2 L^2 A_{11} A_{22} \left(\sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{11} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{11})}{N_m} \right) \left(\sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{22} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{22})}{N_m} \right) \right) \\ &- \mu^2 L^2 A_{12} A_{21} \left(\sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{12} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{12})}{N_m} \right) \left(\sum_{m=1}^M C_m^2 \frac{\cos((\Delta_{21} + 1)\omega_m)z - \cos(\omega_m \Delta_{21})}{N_m} \right) \\ &\cdot (A_{11} A_{22} z^{-(\Delta_{11} + \Delta_{22})} - A_{12} A_{21} z^{-(\Delta_{12} + \Delta_{21})})\end{aligned}$$