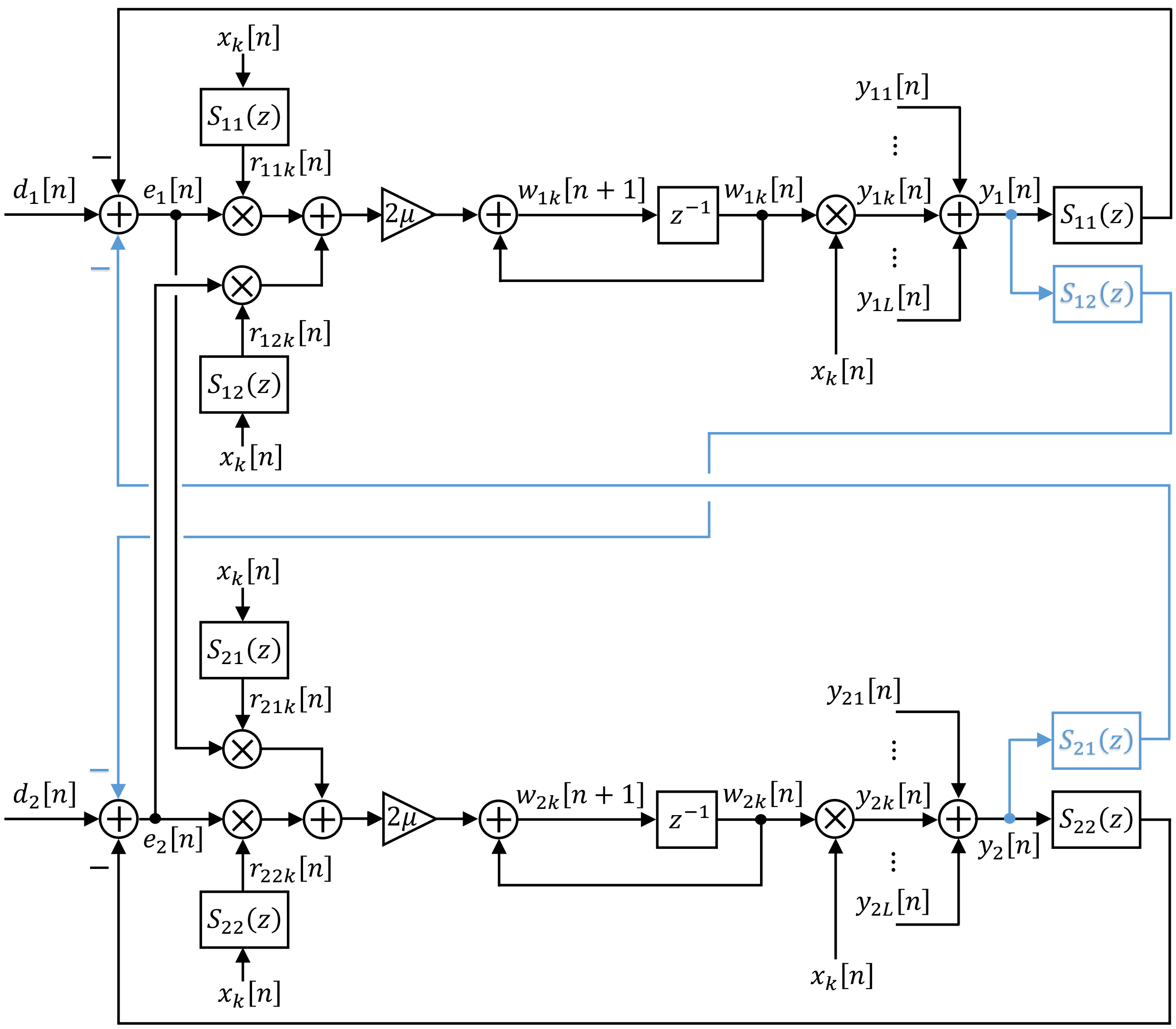
A kétcsatornás eset vázlata (megszorítások: hangszórók és mikrofonok párban, azonos L és μ):



Szinuszos referenciajelet feltételezve az $\mathbf{x}$ vektor k-adik elemének n-edik ütembeli értéke az alábbi módon fejezhető ki:

$$x_k[n] = C\cos(\omega_0 n + \varphi_k) = \frac{C}{2}e^{j\omega_0 n}e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\varphi_k}$$

Az $r_{ijk}[n]$ szűrt referenciajel úgy keletkezik, hogy az $S_{ij}(z)$ átvitellel megszűrjük a szinuszos $x_k[n]$ jelet:

$$r_{ijk}[n] = \frac{C}{2}e^{j\omega_0 n}S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2}e^{-j\omega_0 n}S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}$$

Érdemes még kifejezni az $e_j[n]r_{ijk}[n]$ szorzat z-transzformáltját is:

$$\mathbb{Z}\{e_j[n]r_{ijk}[n]\} = \mathbb{Z}\left\{\frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k}e^{j\omega_0 n}e_j[n] + \frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}e^{-j\omega_0 n}e_j[n]\right\}$$
$$= \frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k}E_j\left(ze^{-j\omega_0}\right) + \frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}E_j\left(ze^{j\omega_0}\right)$$

Az FxLMS algoritmus adaptációs szabálya az i-edik mote k-adik súlytényezőjére:

$$w_{ik}[n+1] = w_{ik}[n] + 2\mu\left(e_1[n]r_{i1k}[n] + e_2[n]r_{i2k}[n]\right)$$

Ugyanez z-tartományban:

$$zW_{ik}(z) = W_{ik}(z) + 2\mu\left(\frac{C}{2}S_{i1}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k}E_1\left(ze^{-j\omega_0}\right) + \frac{C}{2}S_{i1}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}E_1\left(ze^{j\omega_0}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{C}{2}S_{i2}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k}E_2\left(ze^{-j\omega_0}\right) + \frac{C}{2}S_{i2}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}E_2\left(ze^{j\omega_0}\right)\right)$$

A súlytényezőre rendezve:

$$W_{ik}(z) = \mu C U(z)\left(E_1\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k} + E_1\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}\right.$$
$$\left.+ E_2\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k} + E_2\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}\right)$$

ahol $U(z) = \frac{1}{z-1}$. A k-adik súly hozzájárulása az i-edik mote kimenetéhez:

$$Y_{ik}(z) = \mathbb{Z}\{x_k[n]w_{ik}[n]\} = \frac{C}{2}W_{ik}\left(ze^{-j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2}W_{ik}\left(ze^{j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}$$
$$= \frac{\mu C^2}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]E_1(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]E_2(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{j\omega_0}\right)E_1\left(ze^{-j2\omega_0}\right)e^{j2\varphi_k} + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{-j\omega_0}\right)E_1\left(ze^{j2\omega_0}\right)e^{-j2\varphi_k}\right.$$
$$\left.+ U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{j\omega_0}\right)E_2\left(ze^{-j2\omega_0}\right)e^{j2\varphi_k} + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{-j\omega_0}\right)E_2\left(ze^{j2\omega_0}\right)e^{-j2\varphi_k}\right]$$

Az i-edik mote hangszórója által kiadott jel:

$$Y_i(z) = \sum_{k=1}^{L} Y_{ik}(z)$$
$$= \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]E_1(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]E_2(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2}{2}\left[E_1\left(ze^{-j2\omega_0}\right)U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{j\omega_0}\right)\sum_{k=1}^{L} e^{j2\varphi_k} + E_1\left(ze^{j2\omega_0}\right)U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{-j\omega_0}\right)\sum_{k=1}^{L} e^{-j2\varphi_k}\right.$$
$$\left.+ E_2\left(ze^{-j2\omega_0}\right)U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{j\omega_0}\right)\sum_{k=1}^{L} e^{j2\varphi_k} + E_2\left(ze^{j2\omega_0}\right)U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{-j\omega_0}\right)\sum_{k=1}^{L} e^{-j2\varphi_k}\right]$$

A továbbiakban csak olyan eseteket vizsgálunk, amikor a kiadott jelek idővariáns része egzaktul vagy közelítőleg 0:

$$Y_i(z) = \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i1}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]E_1(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{i2}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]E_2(z)$$

A visszacsatolt rendszer átviteli függvényeinek meghatározásához vezessük be az alábbi jelölést:

$$\alpha_{ij} = \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]$$

Ezzel a jelöléssel az i-edik mote kimenete így írható:

$$Y_i(z) = \alpha_{i1} E_1(z) + \alpha_{i2} E_2(z)$$

Algebrai átalakításokkal az α_{ij} tényezőket hasznosabb alakra hozhatjuk. Legyen $S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right) = A_{ij} e^{j\Phi_{\mathrm{ij}}}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} = {} & \frac{\mu C^2 L}{2}\left[\frac{S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)}{ze^{-j\omega_0}-1}+\frac{S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)}{ze^{j\omega_0}-1}\right] = \frac{\mu C^2 L A_{ij}}{2}\left[\frac{e^{-j\Phi_{ij}}}{ze^{-j\omega_0}-1}+\frac{e^{j\Phi_{ij}}}{ze^{j\omega_0}-1}\right] \\
= {} & \frac{\mu C^2 L A_{ij}}{2}\cdot\frac{z\left(e^{j(\omega_0-\Phi_{ij})}+e^{-j(\omega_0-\Phi_{ij})}\right)-\left(e^{j\Phi_{ij}}+e^{-j\Phi_{ij}}\right)}{z^2-\left(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0}\right)+1} \\
= {} & \mu C^2 L A_{ij}\frac{\cos\left(\omega_0-\Phi_{ij}\right)z-\cos\Phi_{ij}}{z^2-2\cos(\omega_0)\,z+1}
\end{aligned}$$

A hibajelek kifejezése könnyen leolvasható az ábráról:

$$\begin{aligned}
E_i(z) &= D_i(z) - Y_1(z)S_{1i}(z) - Y_2(z)S_{2i}(z) \\
&= D_i(z) - \left(\alpha_{11}E_1(z)+\alpha_{12}E_2(z)\right)S_{1i}(z) - \left(\alpha_{21}E_1(z)+\alpha_{22}E_2(z)\right)S_{2i}(z)
\end{aligned}$$

A zavarásokra rendezve és mátrixalakban írva:

$$\begin{bmatrix} D_1(z) \\ D_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha_{11}S_{11}(z)+\alpha_{21}S_{21}(z) & \alpha_{12}S_{11}(z)+\alpha_{22}S_{21}(z) \\ \alpha_{11}S_{12}(z)+\alpha_{21}S_{22}(z) & 1+\alpha_{12}S_{12}(z)+\alpha_{22}S_{22}(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix}$$

A mátrix invertálása után a MIMO rendszer átviteli függvényei:

$$\begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{P}\cdot\begin{bmatrix} 1+\alpha_{12}S_{12}(z)+\alpha_{22}S_{22}(z) & -\alpha_{12}S_{11}(z)-\alpha_{22}S_{21}(z) \\ -\alpha_{11}S_{12}(z)-\alpha_{21}S_{22}(z) & 1+\alpha_{11}S_{11}(z)+\alpha_{21}S_{21}(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1(z) \\ D_2(z) \end{bmatrix}$$

ahol a determináns:

$$\begin{aligned}
P &= \left(1+\alpha_{11}S_{11}(z)+\alpha_{21}S_{21}(z)\right)\left(1+\alpha_{12}S_{12}(z)+\alpha_{22}S_{22}(z)\right) \\
&- \left(\alpha_{12}S_{11}(z)+\alpha_{22}S_{21}(z)\right)\left(\alpha_{11}S_{12}(z)+\alpha_{21}S_{22}(z)\right) \\
&= 1+\alpha_{11}S_{11}(z)+\alpha_{12}S_{12}(z)+\alpha_{21}S_{21}(z)+\alpha_{22}S_{22}(z)+\left(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}\right)\left(S_{11}(z)S_{22}(z)-S_{12}(z)S_{21}(z)\right)
\end{aligned}$$

A következőkben feltesszük, hogy a másodlagos utak $S_{ij}(z) = A_{ij} z^{-\Delta_{ij}}$ alakúak. Ekkor $\Phi_{ij} = -\omega_0 \Delta_{ij}$. Legyen továbbá $K = \mu C^2 L$ és $N = z^2 - 2\cos(\omega_0)z + 1$. Ezeket behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
P &= 1 + KA_{11}^2\frac{\cos[(\Delta_{11}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{11})}{N}z^{-\Delta_{11}} + KA_{12}^2\frac{\cos[(\Delta_{12}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{12})}{N}z^{-\Delta_{12}} \\
&+ KA_{21}^2\frac{\cos[(\Delta_{21}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{21})}{N}z^{-\Delta_{21}} + KA_{22}^2\frac{\cos[(\Delta_{22}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{22})}{N}z^{-\Delta_{22}} \\
&+ K^2\frac{A_{11}A_{22}[\cos[(\Delta_{11}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{11})][\cos[(\Delta_{22}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{22})] - A_{12}A_{21}[\cos[(\Delta_{12}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{12})][\cos[(\Delta_{21}+1)\omega_0]z-\cos(\omega_0\Delta_{21})]}{N^2} \\
&\cdot\left(A_{11}A_{22}z^{-(\Delta_{11}+\Delta_{22})} - A_{12}A_{21}z^{-(\Delta_{12}+\Delta_{21})}\right)
\end{aligned}$$

A rendszer $\omega_0 \to 0$ esetén attól válik labilissá, hogy az egyik pólus $z = 1$-nél elhagyja az egységkört, $\omega_0 \to \pi$ esetén pedig $z = -1$-nél. Nézzük az előbbit (az egyes tagok határértékei a L'Hospital-szabály és trigonometriai azonosságok felhasználásával egyszerűen számíthatók, itt nem részletezem):

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega_0\to 0} P\,(z=1) &= 1 + KA_{11}^2\left(-\Delta_{11}-\frac{1}{2}\right) + KA_{12}^2\left(-\Delta_{12}-\frac{1}{2}\right) + KA_{21}^2\left(-\Delta_{21}-\frac{1}{2}\right) + KA_{22}^2\left(-\Delta_{22}-\frac{1}{2}\right) \\
&+ K^2\left(A_{11}A_{22}\frac{1}{4}(1+2\Delta_{11})(1+2\Delta_{22}) - A_{12}A_{21}\frac{1}{4}(1+2\Delta_{12})(1+2\Delta_{21})\right)\left(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\right) \\
&= K^2\left(A_{11}A_{22}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Delta_{11}+\Delta_{22}}{2}+\Delta_{11}\Delta_{22}\right) - A_{12}A_{21}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Delta_{12}+\Delta_{21}}{2}+\Delta_{12}\Delta_{21}\right)\right)\left(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\right) \\
&- K\left(A_{11}^2\Delta_{11}+A_{12}^2\Delta_{12}+A_{21}^2\Delta_{21}+A_{22}^2\Delta_{22}+\frac{A_{11}^2+A_{12}^2+A_{21}^2+A_{22}^2}{2}\right)+1
\end{aligned}$$

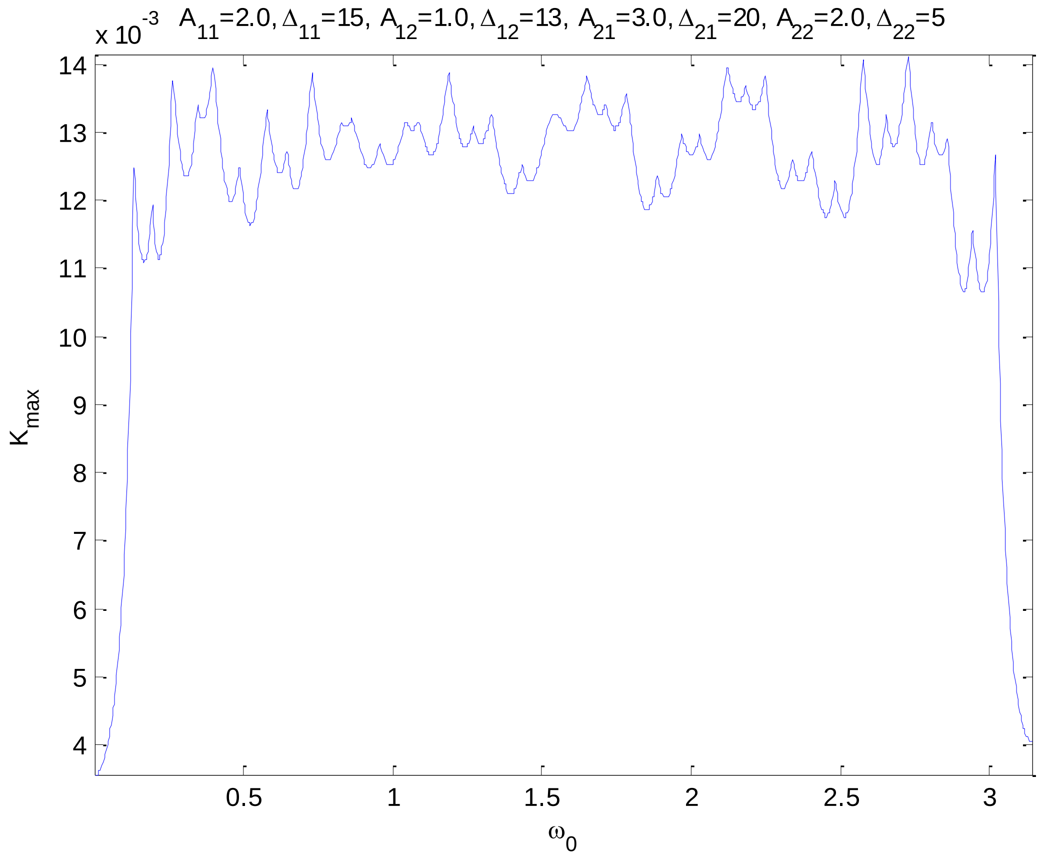
Ennek a polinomnak a legkisebb pozitív gyöke a $K_{max}(0)$!

A másik határérték:

$$\lim_{\omega_0\to\pi} P\,(z=-1) = 1 + KA_{11}^2\left(-\Delta_{11}-\frac{1}{2}\right) + KA_{12}^2\left(-\Delta_{12}-\frac{1}{2}\right) + KA_{21}^2\left(-\Delta_{21}-\frac{1}{2}\right) + KA_{22}^2\left(-\Delta_{22}-\frac{1}{2}\right)$$
$$+ K^2\left(\frac{1}{4}(1+2\Delta_{11})(1+2\Delta_{22})(-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}} - \frac{1}{4}(1+2\Delta_{12})(1+2\Delta_{21})(-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}\right)\left((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}}A_{11}A_{22} - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}A_{12}A_{21}\right)$$
$$= K^2\left((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}}A_{11}A_{22}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Delta_{11}+\Delta_{22}}{2}+\Delta_{11}\Delta_{22}\right) - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}A_{12}A_{21}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Delta_{12}+\Delta_{21}}{2}+\Delta_{12}\Delta_{21}\right)\right)\left((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}}A_{11}A_{22} - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}A_{12}A_{21}\right)$$
$$- K\left(A_{11}^2\Delta_{11} + A_{12}^2\Delta_{12} + A_{21}^2\Delta_{21} + A_{22}^2\Delta_{22} + \frac{A_{11}^2+A_{12}^2+A_{21}^2+A_{22}^2}{2}\right) + 1$$

Ennek a polinomnak a legkisebb pozitív gyöke a $K_{max}(\pi)$!

Ebben a kétcsatornás esetben előfordulhat, hogy a $K_{max}(\omega_0)$ grafikon nem szimmetrikus, vagyis eltérő K_{max} tartozik az $\omega_0 = \epsilon$ és $\omega_0 = \pi - \epsilon$ frekvenciákhoz. Ez az egycsatornás esetben nem fordulhatott volna elő.



Nézzük meg a 0 frekvenciához tartozó polinomot arra a speciális esetre, amikor Δ_{11} nagy és $\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta_{22} = 0$:

$$K^2 \left(A_{11}A_{22}\left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{11}}{2}\right) - \frac{A_{12}A_{21}}{4}\right)(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) - K\left(A_{11}^2\Delta_{11} + \frac{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2}{2}\right) + 1$$

Ha Δ_{11} elegendően nagy, akkor a többi tagot hozzá képest elhanyagolhatjuk:

$$K^2 A_{11}A_{22}\frac{\Delta_{11}}{2}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) - KA_{11}^2\Delta_{11} + 1$$

Ennek a polinomnak a gyökei:

$$K_{1,2} = \frac{A_{11}^2\Delta_{11} \pm \sqrt{A_{11}^4\Delta_{11}^2 - 2A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}}{A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}$$
$$= \frac{A_{11}^2\Delta_{11}}{A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11}^4\Delta_{11}^2}}\right)$$

Használjuk ki, hogy kis abszolút értékű x esetén $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$:

$$K_{1,2} \approx \frac{A_{11}}{A_{22}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}\left(1 \pm \left(1 - \frac{A_{22}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11}^3\Delta_{11}}\right)\right)$$

Ebből a két gyök:

$$K_1 \approx \frac{2A_{11}}{A_{11}A_{22}^2 - A_{12}A_{21}A_{22}} - \frac{1}{A_{11}^2\Delta_{11}} \quad \text{és} \quad K_2 \approx \frac{1}{A_{11}^2\Delta_{11}}$$