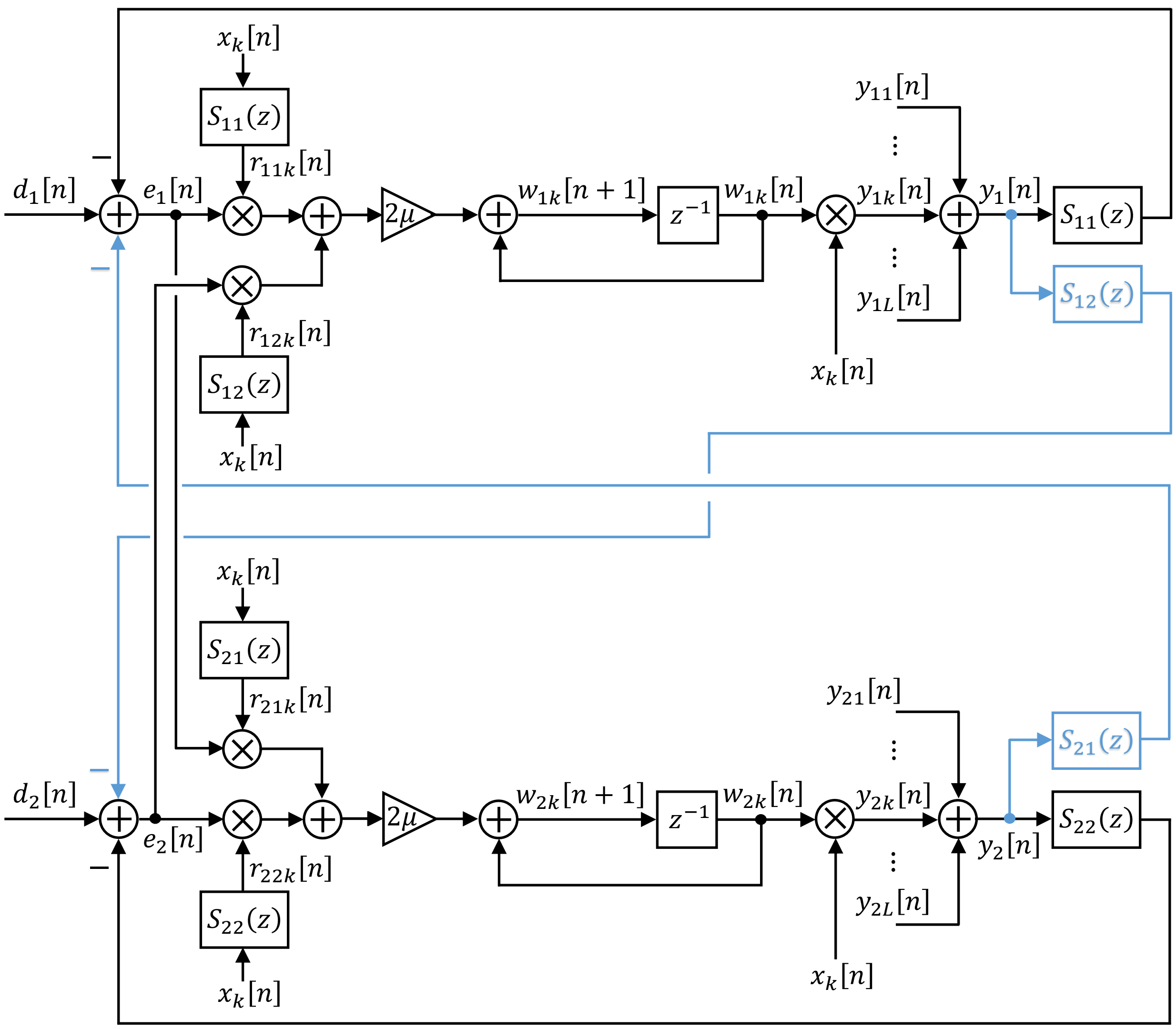
A kétcsatornás eset vázlata (megszorítások: hangszórók és mikrofonok párban, azonos L és μ):



Szinuszos referenciajelet feltételezve az $\mathbf{x}$ vektor k-adik elemének n-edik ütembeli értéke az alábbi módon fejezhető ki:

$$x_k[n] = C\cos(\omega_0 n + \varphi_k) = \frac{C}{2}e^{j\omega_0 n}e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\varphi_k}$$

Az $r_{ijk}[n]$ szűrt referenciajel úgy keletkezik, hogy az $S_{ij}(z)$ átvitellel megszűrjük a szinuszos $x_k[n]$ jelet:

$$r_{ijk}[n] = \frac{C}{2}e^{j\omega_0 n}S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2}e^{-j\omega_0 n}S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}$$

Érdemes még kifejezni az $e_j[n]r_{ijk}[n]$ szorzat z-transzformáltját is:

$$\mathbb{Z}\{e_j[n]r_{ijk}[n]\} = \mathbb{Z}\left\{\frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k}e^{j\omega_0 n}e_j[n] + \frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}e^{-j\omega_0 n}e_j[n]\right\}$$
$$= \frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\varphi_k}E_j\left(ze^{-j\omega_0}\right) + \frac{C}{2}S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\varphi_k}E_j\left(ze^{j\omega_0}\right)$$

Az FxLMS algoritmus adaptációs szabálya az i-edik mote k-adik súlytényezőjére:

$$w_{ik}[n+1] = w_{ik}[n] + 2\mu(e_1[n]r_{i1k}[n] + e_2[n]r_{i2k}[n])$$

Ugyanez z-tartományban:

$$zW_{ik}(z) = W_{ik}(z) + 2\mu\left(\frac{C}{2}S_{i1}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k}E_1(ze^{-j\omega_0}) + \frac{C}{2}S_{i1}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k}E_1(ze^{j\omega_0})\right.$$
$$\left. + \frac{C}{2}S_{i2}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k}E_2(ze^{-j\omega_0}) + \frac{C}{2}S_{i2}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k}E_2(ze^{j\omega_0})\right)$$

A súlytényezőre rendezve:

$$W_{ik}(z) = \mu CU(z)\big(E_1(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k} + E_1(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k}$$
$$+ E_2(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})e^{j\varphi_k} + E_2(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0})e^{-j\varphi_k}\big)$$

ahol $U(z) = \frac{1}{z-1}$. A k-adik súly hozzájárulása az i-edik mote kimenetéhez:

$$Y_{ik}(z) = \mathbb{Z}\{x_k[n]w_{ik}[n]\} = \frac{C}{2}W_{ik}(ze^{-j\omega_0})e^{j\varphi_k} + \frac{C}{2}W_{ik}(ze^{j\omega_0})e^{-j\varphi_k}$$
$$= \frac{\mu C^2}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})\right]E_1(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})\right]E_2(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})E_1(ze^{-j2\omega_0})e^{j2\varphi_k} + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0})E_1(ze^{j2\omega_0})e^{-j2\varphi_k}\right.$$
$$\left. + U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})E_2(ze^{-j2\omega_0})e^{j2\varphi_k} + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0})E_2(ze^{j2\omega_0})e^{-j2\varphi_k}\right]$$

Az i-edik mote hangszórója által kiadott jel:

$$Y_i(z) = \sum_{k=1}^{L} Y_{ik}(z)$$
$$= \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})\right]E_1(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})\right]E_2(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2}{2}\left[E_1(ze^{-j2\omega_0})U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})\sum_{k=1}^{L} e^{j2\varphi_k} + E_1(ze^{j2\omega_0})U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0})\sum_{k=1}^{L} e^{-j2\varphi_k}\right.$$
$$\left. + E_2(ze^{-j2\omega_0})U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})\sum_{k=1}^{L} e^{j2\varphi_k} + E_2(ze^{j2\omega_0})U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0})\sum_{k=1}^{L} e^{-j2\varphi_k}\right]$$

A továbbiakban csak olyan eseteket vizsgálunk, amikor a kiadott jelek idővariáns része egzaktul vagy közelítőleg 0:

$$Y_i(z) = \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{i1}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i1}(e^{j\omega_0})\right]E_1(z)$$
$$+ \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{i2}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{i2}(e^{j\omega_0})\right]E_2(z)$$

A visszacsatolt rendszer átviteli függvényeinek meghatározásához vezessük be az alábbi jelölést:

$$\alpha_{ij} = \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})S_{ij}(e^{-j\omega_0}) + U(ze^{j\omega_0})S_{ij}(e^{j\omega_0})\right]$$

Ezzel a jelöléssel az i-edik mote kimenete így írható:

$$Y_i(z) = \alpha_{i1}E_1(z) + \alpha_{i2}E_2(z)$$

Algebrai átalakításokkal az α_{ij} tényezőket hasznosabb alakra hozhatjuk. Legyen $S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right) = A_{ij}e^{j\Phi_{\text{ij}}}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \frac{\mu C^2 L}{2}\left[\frac{S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)}{ze^{-j\omega_0}-1} + \frac{S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)}{ze^{j\omega_0}-1}\right] = \frac{\mu C^2 L A_{ij}}{2}\left[\frac{e^{-j\Phi_{ij}}}{ze^{-j\omega_0}-1} + \frac{e^{j\Phi_{ij}}}{ze^{j\omega_0}-1}\right] \\
&= \frac{\mu C^2 L A_{ij}}{2} \cdot \frac{z\left(e^{j(\omega_0-\Phi_{ij})} + e^{-j(\omega_0-\Phi_{ij})}\right) - \left(e^{j\Phi_{ij}} + e^{-j\Phi_{ij}}\right)}{z^2 - \left(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}\right) + 1} \\
&= \mu C^2 L A_{ij}\frac{\cos\left(\omega_0 - \Phi_{ij}\right)z - \cos\Phi_{ij}}{z^2 - 2\cos(\omega_0)\,z + 1}
\end{aligned}$$

A hibajelek kifejezése könnyen leolvasható az ábráról:

$$\begin{aligned}
E_i(z) &= D_i(z) - Y_1(z)S_{1i}(z) - Y_2(z)S_{2i}(z) \\
&= D_i(z) - (\alpha_{11}E_1(z) + \alpha_{12}E_2(z))S_{1i}(z) - (\alpha_{21}E_1(z) + \alpha_{22}E_2(z))S_{2i}(z)
\end{aligned}$$

A zavarásokra rendezve és mátrixalakban írva:

$$\begin{bmatrix} D_1(z) \\ D_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) & \alpha_{12}S_{11}(z) + \alpha_{22}S_{21}(z) \\ \alpha_{11}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{22}(z) & 1 + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix}$$

A mátrix invertálása után a MIMO rendszer átviteli függvényei:

$$\begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{P} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) & -\alpha_{12}S_{11}(z) - \alpha_{22}S_{21}(z) \\ -\alpha_{11}S_{12}(z) - \alpha_{21}S_{22}(z) & 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) \\ D_2(z) \end{bmatrix}$$

ahol a determináns:

$$\begin{aligned}
P &= \left(1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z)\right)\left(1 + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z)\right) \\
&- \left(\alpha_{12}S_{11}(z) + \alpha_{22}S_{21}(z)\right)\left(\alpha_{11}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{22}(z)\right) \\
&= 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\left(S_{11}(z)S_{22}(z) - S_{12}(z)S_{21}(z)\right)
\end{aligned}$$

A következőkben feltesszük, hogy a másodlagos utak $S_{ij}(z) = A_{ij}z^{-\Delta_{ij}}$ alakúak. Ekkor $\Phi_{ij} = -\omega_0\Delta_{ij}$. Legyen továbbá $K = \mu C^2 L$ és $N = z^2 - 2\cos(\omega_0)z + 1$. Ezeket behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
P &= 1 + KA_{11}^2\frac{\cos[(\Delta_{11}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{11})}{N}z^{-\Delta_{11}} + KA_{12}^2\frac{\cos[(\Delta_{12}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{12})}{N}z^{-\Delta_{12}} \\
&+ KA_{21}^2\frac{\cos[(\Delta_{21}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{21})}{N}z^{-\Delta_{21}} + KA_{22}^2\frac{\cos[(\Delta_{22}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{22})}{N}z^{-\Delta_{22}} \\
&+ K^2\frac{A_{11}A_{22}[\cos[(\Delta_{11}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{11})][\cos[(\Delta_{22}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{22})] - A_{12}A_{21}[\cos[(\Delta_{12}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{12})][\cos[(\Delta_{21}+1)\omega_0]z - \cos(\omega_0\Delta_{21})]}{N^2} \\
&\cdot \left(A_{11}A_{22}z^{-(\Delta_{11}+\Delta_{22})} - A_{12}A_{21}z^{-(\Delta_{12}+\Delta_{21})}\right)
\end{aligned}$$

A rendszer $\omega_0 \to 0$ esetén attól válik labilissá, hogy az egyik pólus $z = 1$-nél elhagyja az egységkört, $\omega_0 \to \pi$ esetén pedig $z = -1$-nél. Nézzük az előbbit (az egyes tagok határértékei a L'Hospital-szabály és trigonometriai azonosságok felhasználásával egyszerűen számíthatók, itt nem részletezem):

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega_0\to 0} P\,(z=1) &= 1 + KA_{11}^2\left(-\Delta_{11} - \frac{1}{2}\right) + KA_{12}^2\left(-\Delta_{12} - \frac{1}{2}\right) + KA_{21}^2\left(-\Delta_{21} - \frac{1}{2}\right) + KA_{22}^2\left(-\Delta_{22} - \frac{1}{2}\right) \\
&+ K^2\left(A_{11}A_{22}\frac{1}{4}(1+2\Delta_{11})(1+2\Delta_{22}) - A_{12}A_{21}\frac{1}{4}(1+2\Delta_{12})(1+2\Delta_{21})\right)(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\
&= K^2\left(A_{11}A_{22}\left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{11}+\Delta_{22}}{2} + \Delta_{11}\Delta_{22}\right) - A_{12}A_{21}\left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta_{12}+\Delta_{21}}{2} + \Delta_{12}\Delta_{21}\right)\right)(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\
&- K\left(A_{11}^2\Delta_{11} + A_{12}^2\Delta_{12} + A_{21}^2\Delta_{21} + A_{22}^2\Delta_{22} + \frac{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2}{2}\right) + 1
\end{aligned}$$

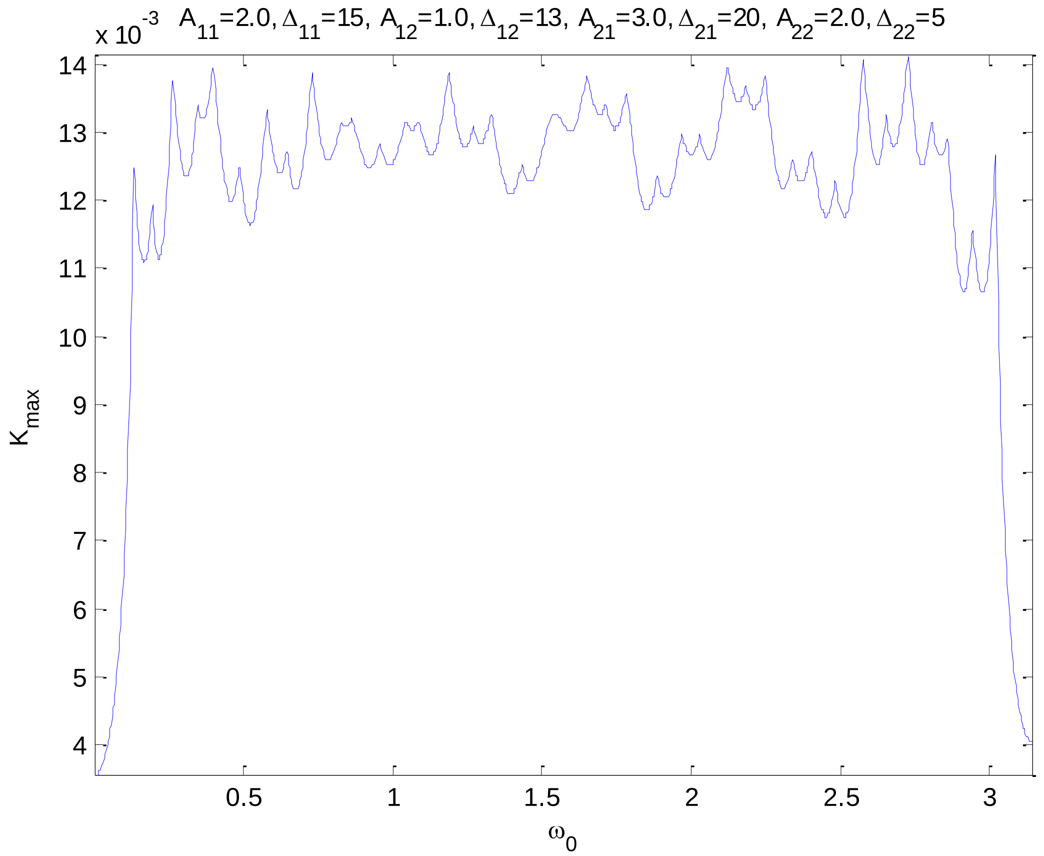
Ennek a polinomnak a legkisebb pozitív gyöke a $K_{max}(0)$!

A másik határérték:

$$\lim_{\omega_0\to\pi} P\,(z=-1) = 1 + KA_{11}^2\left(-\Delta_{11}-\frac{1}{2}\right) + KA_{12}^2\left(-\Delta_{12}-\frac{1}{2}\right) + KA_{21}^2\left(-\Delta_{21}-\frac{1}{2}\right) + KA_{22}^2\left(-\Delta_{22}-\frac{1}{2}\right)$$
$$+ K^2\left(\frac{1}{4}(1+2\Delta_{11})(1+2\Delta_{22})(-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}} - \frac{1}{4}(1+2\Delta_{12})(1+2\Delta_{21})(-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}\right)\left((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}}A_{11}A_{22} - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}A_{12}A_{21}\right)$$
$$= K^2\left((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}}A_{11}A_{22}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Delta_{11}+\Delta_{22}}{2}+\Delta_{11}\Delta_{22}\right) - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}A_{12}A_{21}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Delta_{12}+\Delta_{21}}{2}+\Delta_{12}\Delta_{21}\right)\right)\left((-1)^{\Delta_{11}+\Delta_{22}}A_{11}A_{22} - (-1)^{\Delta_{12}+\Delta_{21}}A_{12}A_{21}\right)$$
$$- K\left(A_{11}^2\Delta_{11} + A_{12}^2\Delta_{12} + A_{21}^2\Delta_{21} + A_{22}^2\Delta_{22} + \frac{A_{11}^2+A_{12}^2+A_{21}^2+A_{22}^2}{2}\right) + 1$$

Ennek a polinomnak a legkisebb pozitív gyöke a $K_{max}(\pi)$!

Ebben a kétcsatornás esetben előfordulhat, hogy a $K_{max}(\omega_0)$ grafikon nem szimmetrikus, vagyis eltérő K_{max} tartozik az $\omega_0 = \epsilon$ és $\omega_0 = \pi - \epsilon$ frekvenciákhoz. Ez az egycsatornás esetben nem fordulhatott volna elő.



Nézzük meg a 0 frekvenciához tartozó polinomot arra a speciális esetre, amikor Δ_{11} nagy és $\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta_{22} = 0$:

$$K^2\left(A_{11}A_{22}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Delta_{11}}{2}\right)-\frac{A_{12}A_{21}}{4}\right)(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})-K\left(A_{11}^2\Delta_{11}+\frac{A_{11}^2+A_{12}^2+A_{21}^2+A_{22}^2}{2}\right)+1$$

Ha Δ_{11} elegendően nagy, akkor a többi tagot hozzá képest elhanyagolhatjuk:

$$K^2A_{11}A_{22}\frac{\Delta_{11}}{2}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})-KA_{11}^2\Delta_{11}+1$$

Ennek a polinomnak a gyökei:

$$K_{1,2}=\frac{A_{11}^2\Delta_{11}\pm\sqrt{A_{11}^4\Delta_{11}^2-2A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}}{A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}$$
$$=\frac{A_{11}^2\Delta_{11}}{A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2A_{11}A_{22}\Delta_{11}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}{A_{11}^4\Delta_{11}^2}}\right)$$

Használjuk ki, hogy kis abszolút értékű x esetén $\sqrt{1-x}\approx 1-\frac{x}{2}$:

$$K_{1,2}\approx\frac{A_{11}}{A_{22}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}\left(1\pm\left(1-\frac{A_{22}(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})}{A_{11}^3\Delta_{11}}\right)\right)$$

Ebből a két gyök:

$$K_1\approx\frac{2A_{11}}{A_{11}A_{22}^2-A_{12}A_{21}A_{22}}-\frac{1}{A_{11}^2\Delta_{11}}\quad \text{és}\quad K_2\approx\frac{1}{A_{11}^2\Delta_{11}}$$

Multiszinuszos referenciajel

A referenciajel most az alábbi alakú:

$$x[n] = \sum_{m=1}^{M} C_m \cos(\omega_m n + \varphi_m)$$

Az $\mathbf{x}$ vektor k-adik elemének n-edik ütembeli értéke az alábbi módon fejezhető ki:

$$x_k[n] = \sum_{m=1}^{M} C_m \cos(\omega_m(n-k) + \varphi_m) = \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} e^{j\omega_m(n-k)} e^{j\varphi_m} + \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} e^{-j\omega_m(n-k)} e^{-j\varphi_m}$$

Az $r_{ijk}[n]$ szűrt referenciajel úgy keletkezik, hogy az $S_{ij}(z)$ átvitellel megszűrjük az $x_k[n]$ jelet:

$$r_{ijk}[n] = \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} e^{j\omega_m(n-k)} S_{ij}\left(e^{j\omega_m}\right) e^{j\varphi_m} + \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} e^{-j\omega_m(n-k)} S_{ij}\left(e^{-j\omega_m}\right) e^{-j\varphi_m}$$

Érdemes még kifejezni az $e_j[n]r_{ijk}[n]$ szorzat z-transzformáltját is:

$$\mathbb{Z}\{e_j[n]r_{ijk}[n]\} = \mathbb{Z}\left\{\sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} e^{j\omega_m(n-k)} S_{ij}\left(e^{j\omega_m}\right) e^{j\varphi_m} e_j[n] + \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} e^{-j\omega_m(n-k)} S_{ij}\left(e^{-j\omega_m}\right) e^{-j\varphi_m} e_j[n]\right\}$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} S_{ij}\left(e^{j\omega_m}\right) e^{j\varphi_m} E_j\left(ze^{-j\omega_m}\right) + \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} S_{ij}\left(e^{-j\omega_m}\right) e^{-j\varphi_m} E_j\left(ze^{j\omega_m}\right)$$

Az FxLMS algoritmus adaptációs szabálya az i-edik mote k-adik súlytényezőjére:

$$w_{ik}[n+1] = w_{ik}[n] + 2\mu(e_1[n]r_{i1k}[n] + e_2[n]r_{i2k}[n])$$

Ugyanez z-tartományban:

$$zW_{ik}(z) = W_{ik}(z) + 2\mu\left(\sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} S_{i1}\left(e^{j\omega_m}\right) e^{j\varphi_m} E_1\left(ze^{-j\omega_m}\right) + \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} S_{i1}\left(e^{-j\omega_m}\right) e^{-j\varphi_m} E_1\left(ze^{j\omega_m}\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} S_{i2}\left(e^{j\omega_m}\right) e^{j\varphi_m} E_2\left(ze^{-j\omega_m}\right) + \sum_{m=1}^{M} \frac{C_m}{2} S_{i2}\left(e^{-j\omega_m}\right) e^{-j\varphi_m} E_2\left(ze^{j\omega_m}\right)\right)$$

A súlytényezőre rendezve:

$$W_{ik}(z) = \mu U(z) \sum_{m=1}^{M} C_m\left[E_1\left(ze^{-j\omega_m}\right) S_{i1}\left(e^{j\omega_m}\right) e^{j\varphi_m} + E_1\left(ze^{j\omega_m}\right) S_{i1}\left(e^{-j\omega_m}\right) e^{-j\varphi_m}\right.$$
$$\left. + E_2\left(ze^{-j\omega_m}\right) S_{i2}\left(e^{j\omega_m}\right) e^{j\varphi_m} + E_2\left(ze^{j\omega_m}\right) S_{i2}\left(e^{-j\omega_m}\right) e^{-j\varphi_m}\right]$$

ahol $U(z) = \frac{1}{z-1}$.

A k-adik súly hozzájárulása az i-edik mote kimenetéhez:

$$\begin{aligned}
Y_{ik}(z) &= \mathbb{Z}\{x_k[n]w_{ik}[n]\} = \sum_{m=1}^{M}\frac{C_m}{2}W_{ik}(ze^{-j\omega_m})e^{j\varphi_m} + \sum_{m=1}^{M}\frac{C_m}{2}W_{ik}(ze^{j\omega_m})e^{-j\varphi_m} \\
&= \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{M}\frac{\mu C_m C_p}{2}U(ze^{-j\omega_m})\big[E_1\big(ze^{-j(\omega_m+\omega_p)}\big)S_{i1}\big(e^{j\omega_p}\big)e^{j(\omega_m+\omega_p)} + E_1\big(ze^{-j(\omega_m-\omega_p)}\big)S_{i1}\big(e^{-j\omega_p}\big)e^{j(\omega_m-\omega_p)} \\
&+ E_2\big(ze^{-j(\omega_m+\omega_p)}\big)S_{i2}\big(e^{j\omega_p}\big)e^{j(\omega_m+\omega_p)} + E_2\big(ze^{-j(\omega_m-\omega_p)}\big)S_{i2}\big(e^{-j\omega_p}\big)e^{j(\omega_m-\omega_p)}\big] \\
&+ \sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{M}\frac{\mu C_m C_p}{2}U(ze^{j\omega_m})\big[E_1\big(ze^{j(\omega_m-\omega_p)}\big)S_{i1}\big(e^{j\omega_p}\big)e^{-j(\omega_m-\omega_p)} + E_1\big(ze^{j(\omega_m+\omega_p)}\big)S_{i1}\big(e^{-j\omega_p}\big)e^{-j(\omega_m+\omega_p)} \\
&+ E_2\big(ze^{j(\omega_m-\omega_p)}\big)S_{i2}\big(e^{j\omega_p}\big)e^{-j(\omega_m-\omega_p)} + E_2\big(ze^{j(\omega_m+\omega_p)}\big)S_{i2}\big(e^{-j\omega_p}\big)e^{-j(\omega_m+\omega_p)}\big]
\end{aligned}$$

A továbbiakban az átvitel idővariáns tagjait elhanyagoljuk. A kifejezésben csak akkor fordulnak elő időinvariáns tagok, amikor a szummákban $p = m$:

$$\begin{aligned}
Y_{ik}(z) = \sum_{m=1}^{M}&\frac{\mu C_m^2}{2}U\big(ze^{-j\omega_m}\big)\big[E_1\big(ze^{-j2\omega_m}\big)S_{i1}\big(e^{j\omega_m}\big)e^{j2\omega_m} + E_1(z)S_{i1}\big(e^{-j\omega_m}\big) \\
&+ E_2\big(ze^{-j2\omega_m}\big)S_{i2}\big(e^{j\omega_m}\big)e^{j2\omega_m} + E_2(z)S_{i2}\big(e^{-j\omega_m}\big)\big] \\
&+ \sum_{m=1}^{M}\frac{\mu C_m^2}{2}U\big(ze^{j\omega_m}\big)\big[E_1(z)S_{i1}\big(e^{j\omega_m}\big) + E_1\big(ze^{j2\omega_m}\big)S_{i1}\big(e^{-j\omega_m}\big)e^{-j2\omega_m} \\
&+ E_2(z)S_{i2}\big(e^{j\omega_m}\big) + E_2\big(ze^{j2\omega_m}\big)S_{i2}\big(e^{-j\omega_m}\big)e^{-j2\omega_m}\big]
\end{aligned}$$

Csak az időinvariáns részt meghagyva:

$$\begin{aligned}
Y_{ik}(z) = &\sum_{m=1}^{M}\frac{\mu C_m^2}{2}U\big(ze^{-j\omega_m}\big)\big[E_1(z)S_{i1}\big(e^{-j\omega_m}\big) + E_2(z)S_{i2}\big(e^{-j\omega_m}\big)\big] \\
&+ \sum_{m=1}^{M}\frac{\mu C_m^2}{2}U\big(ze^{j\omega_m}\big)\big[E_1(z)S_{i1}\big(e^{j\omega_m}\big) + E_2(z)S_{i2}\big(e^{j\omega_m}\big)\big]
\end{aligned}$$

Az i-edik mote hangszórója által kiadott jel:

$$\begin{aligned}
Y_i(z) = \sum_{k=1}^{L}Y_{ik}(z) = E_1(z)&\sum_{m=1}^{M}\frac{\mu C_m^2 L}{2}\big[U\big(ze^{-j\omega_m}\big)S_{i1}\big(e^{-j\omega_m}\big) + U\big(ze^{j\omega_m}\big)S_{i1}\big(e^{j\omega_m}\big)\big] \\
+ E_2(z)&\sum_{m=1}^{M}\frac{\mu C_m^2 L}{2}\big[U\big(ze^{-j\omega_m}\big)S_{i2}\big(e^{-j\omega_m}\big) + U\big(ze^{j\omega_m}\big)S_{i2}\big(e^{j\omega_m}\big)\big]
\end{aligned}$$

A visszacsatolt rendszer átviteli függvényeinek meghatározásához vezessük be az alábbi jelölést:

$$\alpha_{ij} = \sum_{m=1}^{M}\frac{\mu C_m^2 L}{2}\big[U\big(ze^{-j\omega_m}\big)S_{ij}\big(e^{-j\omega_m}\big) + U\big(ze^{j\omega_m}\big)S_{ij}\big(e^{j\omega_m}\big)\big]$$

Ezzel a jelöléssel az i-edik mote kimenete így írható:

$$Y_i(z) = \alpha_{i1}E_1(z) + \alpha_{i2}E_2(z)$$

Végezzük el most is az α_{ij} tényezők átalakítását! Legyen $S_{ij}\left(e^{j\omega_m}\right) = A_{ijm}e^{j\Phi_{ijm}}$.

$$\alpha_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\mu C_m^2 L}{2}\left[\frac{S_{ij}\left(e^{-j\omega_m}\right)}{ze^{-j\omega_m}-1} + \frac{S_{ij}\left(e^{j\omega_m}\right)}{ze^{j\omega_m}-1}\right] = \sum_{m=1}^{M} \frac{\mu C_m^2 L A_{ijm}}{2}\left[\frac{e^{-j\Phi_{ijm}}}{ze^{-j\omega_m}-1} + \frac{e^{j\Phi_{ijm}}}{ze^{j\omega_m}-1}\right]$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \frac{\mu C_m^2 L A_{ijm}}{2} \cdot \frac{z\left(e^{j(\omega_m-\Phi_{ijm})} + e^{-j(\omega_m-\Phi_{ijm})}\right) - \left(e^{j\Phi_{ijm}} + e^{-j\Phi_{ijm}}\right)}{z^2 - \left(e^{j\omega_m} + e^{-j\omega_m}\right) + 1}$$
$$= \sum_{m=1}^{M} \mu C_m^2 L A_{ijm} \frac{\cos\left(\omega_m - \Phi_{ijm}\right)z - \cos\Phi_{ijm}}{z^2 - 2\cos(\omega_m)\, z + 1}$$

A következőkben feltesszük, hogy a másodlagos utak $S_{ij}(z) = A_{ij}z^{-\Delta_{ij}}$ alakúak. Ekkor $\Phi_{ijm} = -\omega_m\Delta_{ij}$.

$$\alpha_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \mu C_m^2 L A_{ij} \frac{\cos\left(\left(\Delta_{ij}+1\right)\omega_m\right) z - \cos\left(\omega_m\Delta_{ij}\right)}{z^2 - 2\cos(\omega_m)\, z + 1}$$

Tehát a tiszta szinuszos esethez képest az egyetlen különbség az α_{ij} együtthatók kifejezése. A kifejezéseket összevetve szépen látható a linearitás: a kimenet az egyes referenciajel-komponensekre adott válaszok összege.

A determináns most is:

$$P = 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \alpha_{12}S_{12}(z) + \alpha_{21}S_{21}(z) + \alpha_{22}S_{22}(z) + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\left(S_{11}(z)S_{22}(z) - S_{12}(z)S_{21}(z)\right)$$

Legyen $N_m = z^2 - 2\cos(\omega_m)z + 1$. Behelyettesítve:

$$P = 1 + \mu L A_{11}^2 z^{-\Delta_{11}} \sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{11}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{11})}{N_m} + \mu L A_{12}^2 z^{-\Delta_{12}} \sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{12}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{12})}{N_m}$$
$$+ \mu L A_{21}^2 z^{-\Delta_{21}} \sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{21}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{21})}{N_m} + \mu L A_{22}^2 z^{-\Delta_{22}} \sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{22}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{22})}{N_m}$$
$$+ \left(\mu^2 L^2 A_{11}A_{22}\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{11}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{11})}{N_m}\right)\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{22}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{22})}{N_m}\right)\right.$$
$$\left. - \mu^2 L^2 A_{12}A_{21}\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{12}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{12})}{N_m}\right)\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^2 \frac{\cos\left((\Delta_{21}+1)\omega_m\right)z - \cos(\omega_m\Delta_{21})}{N_m}\right)\right)$$
$$\cdot \left(A_{11}A_{22}z^{-(\Delta_{11}+\Delta_{22})} - A_{12}A_{21}z^{-(\Delta_{12}+\Delta_{21})}\right)$$

Általános csatornaszám, szinuszos eset

Az i-edik mote kimenetének időinvariáns része:

$$
\begin{aligned}
Y_i(z) &= \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)\sum_j S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right)E_j(z) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)\sum_j S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)E_j(z)\right] \\
&= \frac{\mu C^2 L}{2}\sum_j \left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)\right]E_j(z) \\
&= \sum_j \alpha_{ij}(z)E_j(z)
\end{aligned}
$$

Az α_{ij} együtthatók kifejezése változatlan:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{ij}(z) = {} & \frac{\mu C^2 L}{2}\left[U\left(ze^{-j\omega_0}\right)S_{ij}\left(e^{-j\omega_0}\right) + U\left(ze^{j\omega_0}\right)S_{ij}\left(e^{j\omega_0}\right)\right] \\
= {} & \mu C^2 L A_{ij}\frac{\cos\left(\omega_0 - \Phi_{ij}\right)z - \cos\Phi_{ij}}{z^2 - 2\cos(\omega_0)\,z + 1}
\end{aligned}
$$

A hibajelek kifejezése:

$$
E_m(z) = D_m(z) - \sum_i Y_i(z)S_{im}(z) = D_m(z) - \sum_i\sum_j \alpha_{ij}(z)S_{im}(z)E_j(z)
$$

A zavarásokra rendezve:

$$
D_n(z) = E_n(z) + \sum_i\sum_j \alpha_{ij}(z)S_{in}(z)E_j(z)
$$

Mátrixalakban írva:

$$
\begin{bmatrix} D_1(z) \\ \vdots \\ D_p(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11}S_{11}(z) + \cdots + \alpha_{p1}S_{p1}(z) & \cdots & \alpha_{1p}S_{11}(z) + \cdots + \alpha_{pp}S_{p1}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{11}S_{1p}(z) + \cdots + \alpha_{p1}S_{pp}(z) & \cdots & 1 + \alpha_{1p}S_{1p}(z) + \cdots + \alpha_{pp}S_{pp}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(z) \\ \vdots \\ E_p(z) \end{bmatrix}
$$

Az átvitelifüggvény-mátrix együtthatói:

$$
h_{nm} = \delta_{nm} + \sum_i \alpha_{im}(z)S_{in}(z)
$$

ahol δ_{nm} a Kronecker-delta.