Modèle d'Est Conservatif

Benjamin Védrine [1]

Sorbonne Université

21 septembre 2020

[1] Travail effectué sous la supervision d'Oriane Blondel à l'Université Claude Bernard Lyon 1.

Les modèles à contraintes cinétiques

Pour tout modèles à contraintes cinétiques modélisant un gaz (KCLG) sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, toute configuration $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ et tout couple $e = (x, y)$ de sites voisins dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, on définit les contraintes $c_e(\eta) \in \{0,1\}$:

- $c_e(\eta)$ ne dépend que d'un nombre fini de voisins de x et de y,
- $c_e(\eta)$ ne dépend pas de $\eta(x)$ ou de $\eta(y)$,
- les contraintes sont invariantes par translation,
- si pour tout z, $\eta'(z) \leq \eta(z)$, alors $c_e(\eta) = 1 \implies c_e(\eta') = 1$.

Construction du processus

Définition (Générateur du modèle)

Pour toute fonction locale f sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} c_{x-1,x}(\eta)[f(\eta^{x-1,x}) - f(\eta)]$$

où

$$\eta^{y,x}(z) = \begin{cases} \eta(y), & \text{si } z = x \\ \eta(x), & \text{si } z = y \\ \eta(z), & \text{si } z \notin \{y,x\} \end{cases}, et \quad c_{x-1,x}(\eta) = 1 - \eta(x+1).$$

Réversibilité

On définit ν_ρ la mesure produit de Bernoulli de paramètre ρ.

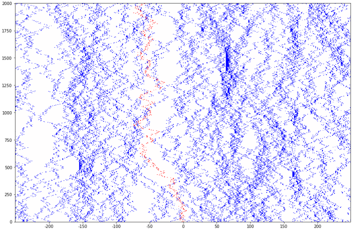
Définition (Réversibilité)

μ est dit réversible si pour toutes fonctions locales f et g:
$\int f\mathcal{L}gd\mu = \int g\mathcal{L}fd\mu$

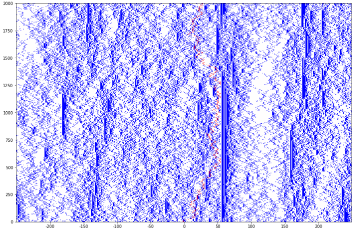
ν_ρ est réversible pour tout KCLG.

Simulations

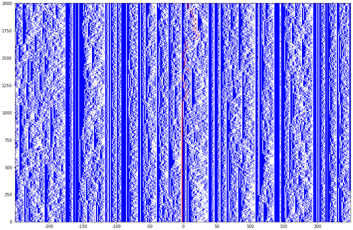
$\rho = 0.1$



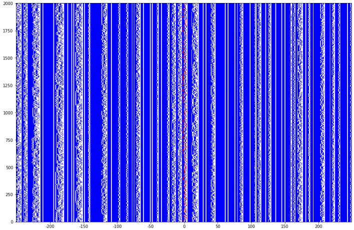
$\rho = 0.3$



$\rho = 0.5$



$\rho = 0.7$



Ergodicité

Définition (Ergodicité)

μ est dit ergodique si pour tout $f \in L^2(\mu)$ telle que $\mathcal{L}f = 0$ μ-p.s., alors f est constante μ-p.s.

$\rho_c := \sup\{\rho \in [0,1] : \nu_\rho \text{ est ergodique par rapport à } \mathcal{L}\}$

Ergodicité

Définition (Ergodicité)

μ est dit ergodique si pour tout $f \in L^2(\mu)$ telle que $\mathcal{L}f = 0$ μ-p.s., alors f est constante μ-p.s.

$\rho_c := \sup\{\rho \in [0,1] : \nu_\rho$ est ergodique par rapport à $\mathcal{L}\}$

Définition (Chemins et configurations écheangeables)

Un chemin de longueur n entre $\eta^{(1)}$ et $\eta^{(n)}$ est une suite de configurations $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, ..., \eta^{(n)})$ telle que pour tout $i = 1, ..., n-1$, il existe x tel que $\eta^{(i+1)} = (\eta^{(i)})^{x-1,x}$ et $c_x(\eta) = 1$.
On pose $\mathcal{E}_x := \{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$: il existe un chemin entre η et $\eta^{x-1,x}\}$

$\rho_{ex} := \sup\{\rho \in [0,1] : \ \nu_\rho(\cap_{x\in\mathbb{Z}}\mathcal{E}_x) = 1\}$

L'ergodicité vue selon l'échangeabilité

Proposition

ν_ρ est ergodique si et seulement si $\rho \leq \rho_{ex}$, en particulier $\rho_c = \rho_{ex}$.

L'ergodicité vue selon l'échangeabilité

Proposition

ν_ρ est ergodique si et seulement si $\rho \leq \rho_{ex}$, en particulier $\rho_c = \rho_{ex}$.

Lemme

$\nu_\rho(\mathcal{E}_0) = \nu_\rho(\{\eta : \exists\ i \geq 0,\ \sum_{x=1}^{2i+1} \eta(x) \leq i\})$.

L'ergodicité vue selon l'échangeabilité

Proposition

ν_ρ *est ergodique si et seulement si* $\rho \leq \rho_{ex}$*, en particulier* $\rho_c = \rho_{ex}$*.*

Lemme

$\nu_\rho(\mathcal{E}_0) = \nu_\rho(\{\eta : \exists\ i \geq 0,\ \sum_{x=1}^{2i+1} \eta(x) \leq i\})$.

Théorème

$\rho_c = \frac{1}{2}$.

Décroissance des corrélations

L'argument de la dualité pour le processus d'exclusion symétrique

Décroissance des corrélations

L'argument de la dualité pour le processus d'exclusion symétrique

Pour toute fonction locale f sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$,

$$\mathcal{L}_{SSEP} f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} [f(\eta^{x-1,x}) - f(\eta)].$$

Théorème

Pour toute densité ρ, et tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Cov}_{\nu_\rho}(\eta(x), \eta_t(x)) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}},$$

où $f \asymp g \iff \exists k_1, k_2 > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0, k_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq k_2 \cdot g(n)$.

Le processus vu depuis la particule marquée

On pose $\nu_\rho^* = \nu_\rho(\cdot|\eta(0) = 1)$ et on note X_t la position au temps t de la particule marquée partie de l'origine.
On pose $(\xi_t)_{t\geq 0} := (\tau_{X_t}\eta_t)_{t\geq 0}$, avec $(\tau_x\eta)(y) = \eta(x+y)$. Ainsi:

$$\xi_t(u) = \eta_t(X_t + u) \text{ pour } u \neq 0.$$

Deux cas si l'on autorise deux particules à s'échanger ou non.

1er cas: Deux sites échangent de valeurs

$(\xi_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov défini par le générateur:

$$\mathcal{L}_0 f(\xi) = \sum_{y\sim 0} c_{0,y}(\xi)[f(\tau_y \xi^{0,y}) - f(\xi)] + \sum_{y\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} c_{y-1,y}(\xi)[f(\xi^{y-1,y}) - f(\xi)].$$

1er cas: Deux sites échangent de valeurs

$(\xi_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov défini par le générateur:

$$\mathcal{L}_0 f(\xi) = \sum_{y\sim 0} c_{0,y}(\xi)[f(\tau_y \xi^{0,y}) - f(\xi)] + \sum_{y\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} c_{y-1,y}(\xi)[f(\xi^{y-1,y}) - f(\xi)].$$

Lemme

Pour tout $\rho < \frac{1}{2}$, le processus ξ_t est réversible et ergodique par rapport à ν^*_ρ.

Coefficient de diffusion de la particule marquée

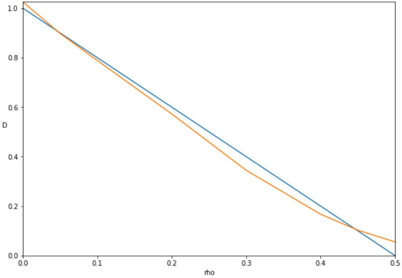
$$D := \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[X_t^2]}{2t} = \frac{1}{2}\sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{0,e}(\xi)] - \int_0^\infty \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[j(\xi_0)j(\xi_u)]du$$

où $j(\xi) = c_{0,1}(\xi) - c_{-1,0}(\xi)$.

Coefficient de diffusion de la particule marquée

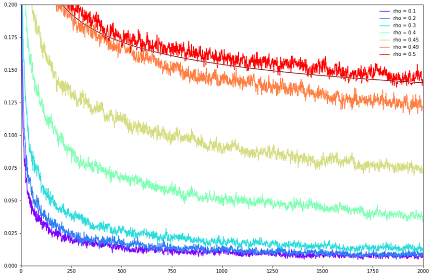
$$D := \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[X_t^2]}{2t} = \frac{1}{2}\sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{0,e}(\xi)] - \int_0^\infty \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[j(\xi_0)j(\xi_u)]du$$

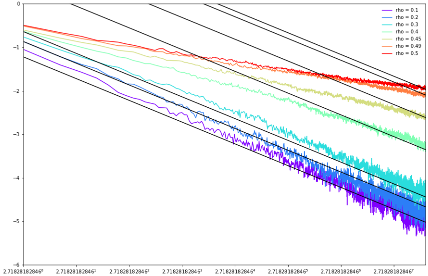
où $j(\xi) = c_{0,1}(\xi) - c_{-1,0}(\xi)$.



Approximation de D obtenue par simulation pour $\rho \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45, 0.5\}$ comprenant chacune 5000 configurations, avec 8000 sites considérés jusqu'au temps $T = 2000$. La droite étant la fonction $2 \cdot (1/2 - \rho)$.

Probabilité de retour en l'origine d'une particule marquée





Les simulations semblent indiquer que $\frac{1}{\sqrt{t}} \lesssim \nu_\rho^*(X_t = 0) \lesssim \frac{1}{\ln(t)}$ pour tout $\rho \leq \frac{1}{2}$, et que $\nu_{1/2}^*(X_t = 0) \sim \frac{1}{\ln(t)}$.

2ème cas: les particules sautent sur des sites vides

$$\mathcal{L}'_0 f(\xi') = \sum_{e=\pm 1} c_{0,e}(\xi')\big(1 - \xi'(e)\big)[f(\tau_e \xi'^{0,e}) - f(\xi')] + \sum_{y \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}} c_{y-1,y}(\xi')[f(\xi'^{y-1,y}) - f(\xi')].$$

Remarque

Pour tout $\rho < \frac{1}{2}$, le processus ξ'_t est réversible et ergodique par rapport à ν^*_ρ.

$$D' := \frac{1}{2}\sum_{e=\pm 1}\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}\left[c_{0,e}\big(1-\xi'(e)\big)\right] - \int_0^\infty \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[j'(\xi_0)j'(\xi_u)]du$$

où $j'(\xi') = c_{0,1}(\xi')\big(1-\xi'(1)\big) - c_{-1,0}(\xi')\big(1-\xi'(-1)\big)$.

Proposition

$D' = 0$.