

Modèle d'Est Conservatif (Conservative East Model)

Benjamin Védérine [†]

21 septembre 2020

Abstract

This thesis focuses on the conservative east model. The conservative east model is a one-dimensional, non-attractive interacting particle system with Kawasaki dynamics, in which the exchange rate between the value on the site x with the value on its left site $x - 1$ is equal to one if and only if the right neighbour site $x + 1$ is empty, and zero otherwise. This model belongs to the class of kinetically constrained lattice gases (KCLG), which have been introduced in physics literature to model glassy dynamics.

Firstly, we define the process and present a graphic representation that assures that the model is well defined.

Secondly, we prove that like any other KCLG, the process is reversible with respect to the product i.i.d Bernoulli measure at any particule density.

We establish a threshold at density $1/2$ under which the system is ergodic, and above which the system is not ergodic.

Finally, when ergodicity holds, I studied the path of a tagged particle. I have proven that for any equilibrium particle density, under diffusive rescaling the motion of the tracer converges to the Brownian motion. I simulated the self-diffusion coefficient for different densities. Then I simulated the probability of a particle starting from zero to be in zero at time t .

[†]Travail effectué sous la supervision d'Oriane Blondel, Chargée de recherches CNRS à l'institut Camille Jordan (ICJ) de l'Université Claude Bernard Lyon 1.

Sommaire

1	Introduction	3
1.1	Représentation graphique	4
1.2	Résumé détaillé	4
2	Propriétés du modèle	6
2.1	Description approfondie du modèle	6
2.2	Ergodicité	7
3	Décroissance des corrélations	11
3.1	Trou spectral	11
3.2	Le processus d'exclusion symétrique simple	11
3.2.1	Dualité pour le processus d'exclusion symétrique simple	12
3.3	Diffusion d'une particule marquée dans le modèle d'Est Conservatif	13
3.3.1	Borne inférieure sur la covariance dans le modèle d'Est Conservatif	19
4	Simulations	20
4.1	Simulation du processus d'Est Conservatif	20
4.2	Approximation du coeficient de diffusion D d'une particule marquée dans le cas où deux particules sont autorisées à s'échanger	20
4.3	Probabilité de retour en l'origine d'une particule marquée	21
A	Quelques résultats	23
A.1	Probabilité d'absorption d'une chaîne de Markov	23
A.2	Une version locale du théorème central limite	23
A.3	Théorème central limite pour les fonctions additives de processus de Markov	23

1 Introduction

Le modèle d'Est Conservatif est un processus stochastique de particules en interaction qui fait partie des modèles à contraintes cinétiques (Kinetically Constrained Models (KCM)). La plupart des KCM étudiés sont des processus stochastiques définis sur un graphe sur lequel chaque noeud peut prendre deux valeurs différentes (0 si le noeud est vide, et 1 si le noeud est occupé par une particule).

Ces modèles ont été introduits dans la littérature physique pour étudier la transition liquide/verre, et plus généralement la dynamique des systèmes vitreux. Les verres sont des matériaux amorphes (ou non cristalin): ils possèdent les propriétés mécaniques d'un solide, mais qui tout comme les liquides, ne représentent pas de régularité microscopique (cf. [10] pour description physique du phénomène et un aperçu des différentes approches théoriques permettant de comprendre la transition vitreuse). De ce fait, il n'existe pas de température critique triviale séparant l'état liquide de l'état vitreux. Il est majoritairement accepté que la transition vitreuse est un phénomène dynamique. Afin de comprendre cette dynamique, les KCM se basent sur des contraintes cinétiques sur les transitions autorisées. De cette façon, les KCM miment le fait que les molécules se déplaçant dans un liquide dense peuvent être entravées par des contraintes géométriques générées par les molécules voisines (cf. [11] pour une revue de l'utilisation des KCM pour la compréhension de la transition vitreuse).

Ces modèles peuvent être regroupés en deux catégories: les processus modélisant un gaz sur un réseau à contraintes cinétiques (Kinetically Constrained Lattice Gases (KCLG)) et les processus modélisant des spins sur un réseau à contraintes cinétiques (Kinetically Constrained Spin Models (KCSM)).

Pour tout KCSM sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, toute configuration $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit les contraintes sur les sites:

- la contrainte en x , $c_x(\eta)$ ne dépend que d'un nombre fini de voisins de x ,
- la contrainte en x ne dépend pas de la configuration au site x ($c_x(\eta)$ ne dépend pas de $\eta(x)$),
- les contraintes sont invariantes par translation,
- si pour tout z , $\eta(z) \leq \eta'(z)$ et que la contrainte est vérifiée en x pour η' , elle l'est également pour η .

Les KCSM (ou 0-1 KCSM) ont une dynamique non conservatrice (ou de Glauber, i.e. les transitions sont des créations ou destructions de particules): chaque site attend un temps aléatoire selon une loi exponentielle de paramètre 1, puis si la contrainte locale sur le site est satisfaite, celui-ci change de valeur selon une loi donnée.

Dans le cas des KCLG, on a les propriétés analogues sur les couples $e = (x, y)$, avec $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$:

- $c_e(\eta)$ ne dépend que d'un nombre fini de voisins de x et de y ,
- $c_e(\eta)$ ne dépend pas de $\eta(x)$ ou de $\eta(y)$,
- les contraintes sont invariantes par translation,
- si pour tout z , $\eta(z) \leq \eta'(z)$ et que la contrainte en e est vérifiée pour η' , elle l'est également pour η .

Les KCLG (ou 0-1 KCLG) possèdent une dynamique conservatrice (ou de Kawasaki, i.e. les transitions sont des sauts de particules sans destruction ni création de particules): le taux d'échange entre la valeur de deux sites voisins sur un graphe vaut 1 lorsque la contrainte locale sur les deux sites est satisfaite et 0 sinon.

Le modèle d'Est Conservatif est un KCLG à une dimension, défini sur \mathbb{Z} , avec pour espace de configurations $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Les zéros et uns correspondent respectivement aux sites vides et occupés. Dans le cas du modèle d'Est Conservatif, la contrainte impose que le site situé à droite des deux sites échangés soit vide. Le nom fait référence au modèle d'Est (East model) présent dans la littérature [9] qui est l'analogue non-conservatif avec les mêmes contraintes. L'évolution du modèle d'Est Conservatif est donnée par un processus de Markov continu et peut donc être défini à partir du générateur:

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} c_x(\eta) [f(\eta^{x-1, x}) - f(\eta)], \quad \text{pour toute fonction locale } f \text{ sur } \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \quad (1.1)$$

où

$$\eta^{y, x}(z) = \begin{cases} \eta(y), & \text{si } z = x \\ \eta(x), & \text{si } z = y \\ \eta(z), & \text{si } z \notin \{y, x\} \end{cases},$$

et

$$c_x(\eta) = 1 - \eta(x + 1).$$

1.1 Représentation graphique

Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel, pour chaque arête $e = (x-1, x) \in E := \{(k-1, k), k \in \mathbb{Z}\}$, indépendamment des autres arêtes, on associe un processus de Poisson de paramètre 1 que l'on nommera horloge (de Poisson) en e . On notera \mathcal{T}_e l'ensemble des occurrences du processus de Poisson associé à e , et $\mathcal{N}_e = \sum_{t \in \mathcal{T}_e} \delta_t$ le processus ponctuel de Poisson. Remarquons que les occurrences $\{\mathcal{T}_e\}_{e \in E}$ sont toutes presque sûrement disjointes.

On part d'une configuration $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Si l'horloge en e sonne au temps t , on regarde la contrainte $c_e = c_x$:

-Si la contrainte en x au temps t est satisfaite: $c_x(\eta_t) := 1 - \eta_t(x+1) = 1$, alors les valeurs des sites x et $x-1$ sont échangées. On dira que la sonnerie est légale;

-Si la contrainte n'est pas satisfaite: $c_x(\eta_t) = 0$, le système reste inchangé.

On peut également définir l'horloge sur les sites, et non les arêtes, comme ceci est précisé dans la définition des KCM.

La valeur de chaque site au temps $t > 0$ est potentiellement influencée par la valeur de tous les autres sites à tout moment $0 < s < t$. De plus, si η possède un nombre infini de sites vides, une infinité d'échanges a lieu sur tout intervalle de temps $(0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Ainsi, il est nécessaire de connaître dans quel état est le système à chaque moment où l'horloge sonne. C'est à dire, connaître le premier temps de sonnerie, afin de pouvoir mettre le système à jour, puis de connaître le second temps de sonnerie, etc... Puisque les temps de première sonnerie sur chaque site forment une famille infinie de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle, ce premier temps n'existe pas.

Cependant, on peut résoudre ce problème par l'argument de percolation de Harris (cf. [?]) (valable également en dimension $d \geq 1$). Par la propriété de Markov, il nous suffit de montrer que le processus est bien défini jusqu'à un temps $t > 0$. Pour $t > 0$ arbitraire, presque sûrement, l'ensemble des sites voisins pour lesquels l'horloge a sonné avant t ne percole pas, au sens qu'autour de l'origine (et de manière similaire en tout point de \mathbb{Z}), il existe $i < 0 < j$ tels que les sites i et j restent inchangés sur l'intervalle $(0, t]$. Ainsi, on peut partitionner \mathbb{Z} en intervalles bornés disjoints tels que la frontière de chaque intervalle reste fixe jusqu'au temps t . Pour chaque paire de sites voisins, l'horloge a sonné avant t avec probabilité $1 - e^{-t}$ de telle façon que le système est bien défini sur chacun de ces intervalles, et par juxtaposition sur tout \mathbb{Z} .

Remarquons que puisque la distribution du temps d'attente est continue, avec probabilité 1, l'échange entre les sites x et $x-1$ et l'échange entre les sites $x-1$ et $x-2$ ont lieu en des temps différents.

La construction graphique nous assure que le modèle est bien défini sur \mathbb{Z} . A partir de cette construction graphique, on peut définir un processus sur $\{0, 1\}^{\Lambda}$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ pour lequel on pensera à bien définir les conditions aux bords.

1.2 Résumé détaillé

Nous montrons que pour ce processus la mesure produit de Bernoulli ν_ρ est une mesure réversible, où ρ est la densité de particules. Une question naturelle à se poser, est de savoir si le processus est ergodique pour ν_ρ . La dynamique du système devient lente lorsque ρ devient grand, de sorte qu'il existe un seuil ρ_c tel que le processus est ergodique pour tout $\rho < \rho_c$ et non ergodique pour tout $\rho > \rho_c$.

On identifie la partie de $(0, 1)$ pour lequel le processus est ergodique en établissant une équivalence avec le seuil d'échangeabilité qui définit le taux limite pour lequel avec probabilité 1, pour deux sites x, y quelconques, il existe $t > 0$ telle que la configuration au temps t est la configuration de départ dont les valeurs de x et de y ont été échangées.

Pour montrer que le seuil d'échangeabilité vaut $1/2$, j'ai posé un algorithme qui s'arrête si et seulement si les sites -1 et 0 sont échangeables. Dans le cas où $\rho < 1/2$, j'ai calculé la probabilité que l'algorithme s'arrête après n étapes et lorsque $\rho = 1/2$, la probabilité que l'algorithme s'arrête.

Dans la région d'ergodicité, on essaye de comprendre le comportement en temps long du système partant de la mesure d'équilibre ν_ρ , et plus particulièrement d'étudier la corrélation $\text{Cov}_{\nu_\rho}(\eta(0), \eta_t(0))$.

On a tout d'abord essayé, en s'appuyant sur la construction graphique, d'étudier la trajectoire d'un marcheur $(X_{t-s}^y)_{s \in [0, t]} \in \mathbb{Z}$ qui part du site $X_0^y = y$ au temps t et qui remonte le temps jusqu'au temps 0 , et ainsi de créer un processus A_t dual à η_t (cf. définition 6). Contrairement au processus d'exclusion simple, pour lequel, en partant de la configuration au temps t , pour tout site, on peut remonter le temps et construire

les chemins des particules de façon à créer une bijection entre la configuration en 0 et la configuration au temps t , et établir la relation $\eta_t(y) = \eta_0(X_t^y)$ (cf. [4]). Cette technique n'est pas évidente à appliquer au modèle d'Est Conservatif, pour lequel le processus $(X_s^y)_{s \in [0, t]}$ est décrit par un processus de branchement. En effet, pour connaître la position d'une certaine particule X_s^y au temps $s \in (0, t]$, il est nécessaire, de savoir si les contraintes sur la particule y étaient satisfaites aux différentes sonneries de l'horloge entre 0 et s . Le processus dual A_t remontant le temps doit garder en mémoire les échanges effectués.

Dans un second temps, afin de pouvoir estimer la décroissance des corrélations, je me suis intéressé au comportement en temps long d'une particule marquée. Deux cas apparaissent qui n'étaient pas décrits par la dynamique du système: soit on autorise deux particules à s'échanger, soit on considère seulement les sauts de particules sur des sites vides (i.e. seuls les échanges entre un site vide et un site plein sont autorisés). En s'appuyant sur un théorème central limite, on montre que la particule marquée a un comportement diffusif (i.e. $t^{-1/2}X_t$ converge en loi vers une loi gaussienne). Dans le cas où l'on ne considère que les sauts de particules sur les sites vides, le coefficient de diffusion est nul. Dans le cas où les échanges de particules sont autorisés, j'ai effectué des simulations de la probabilité de retour en 0 de la particule marquée.

2 Propriétés du modèle

2.1 Description approfondie du modèle

On note ν_ρ la mesure produit de Bernoulli sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de densité $\rho \in (0, 1)$.

Aucun site occupé n'est ajouté ou retiré entre η et $\eta^{x-1, x}$, donc pour tout $f \in L^1(\nu_\rho)$, $\mathbb{E}_{\nu_\rho}[f(\eta^{x-1, x})] = \mathbb{E}_{\nu_\rho}[f(\eta)]$. De plus, pour chaque site x , la contrainte $c_x(\eta) := 1 - \eta(x+1)$ ne dépend ni de $\eta(x)$ ou de $\eta(x-1)$, on a $c_x(\eta) = c_x(\eta^{x-1, x})$ donc $\int c_x(\eta)[f(\eta^{x-1, x}) - f(\eta)]\nu_\rho(d\eta) = 0$.

Ainsi, pour f et g deux fonctions continues sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, on a $\int c_x(\eta)f(\eta)g(\eta^{x-1, x})\nu_\rho(d\eta) = \int c_x(\eta)g(\eta)f(\eta^{x-1, x})\nu_\rho(d\eta)$ ou de manière équivalente $\int c_x(\eta)f(\eta)[g(\eta^{x-1, x}) - g(\eta)]\nu_\rho(d\eta) = \int c_x(\eta)g(\eta)[f(\eta^{x-1, x}) - f(\eta)]\nu_\rho(d\eta)$. En sommant sur tous les x , on obtient: $\int f(\eta)\mathcal{L}g(\eta)\nu_\rho(d\eta) = \int g(\eta)\mathcal{L}f(\eta)\nu_\rho(d\eta)$.

Remarque 1. Par le théorème de Hille-Yosida (cf. [2] Chapitre I: Théorème 2.9 p16), pour tout $f \in C(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}})$, et $t \geq 0$: si $\lim_{n \rightarrow \infty} (Id - \frac{t}{n}\mathcal{L})^{-n}f$ existe, alors on dit que f appartient au domaine de définition de \mathcal{L} que l'on note $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ et $P_tf := e^{t\mathcal{L}}f = \lim_{n \rightarrow \infty} (Id - \frac{t}{n}\mathcal{L})^{-n}f$ est le semi-groupe généré par \mathcal{L} , de plus $\mathcal{L} = \lim_{n \downarrow 0} \frac{P_tf - f}{t}$.

Proposition 2.1. Il y a équivalence entre:

- i) μ est une mesure réversible (i.e. pour toutes fonctions f et g continues sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$: $\int f(\eta)P_tf(\eta)\mu(d\eta) = \int g(\eta)P_tg(\eta)\mu(d\eta)$ où $P_tf(\eta) = \mathbb{E}_\eta[f(\eta_t)]$),
- ii) pour toutes fonctions f et g dans le domaine de définition de \mathcal{L} : $\int f\mathcal{L}gd\mu = \int g\mathcal{L}fd\mu$.

Démonstration. (cf. [2] Chapitre II: Proposition 5.3 p91)

Soient f et g deux fonctions continues sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Si μ est une mesure réversible par rapport au semi-groupe P_t , alors on a immédiatement $\int f\frac{P_tg - g}{t}d\mu = \int g\frac{P_tf - f}{t}d\mu$. Par le théorème de Hille-Yoshida rappelé dans la remarque 1, on a: $\forall f, g \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$: $\int f\mathcal{L}gd\mu = \int g\mathcal{L}fd\mu$.

Inversement, soit $\lambda \geq 0$ et $f, g \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$: $\int f(g - \lambda\mathcal{L}g)d\mu = \int g(f - \lambda\mathcal{L}f)d\mu$. L'image de $(Id - \lambda\mathcal{L})$ est $C(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}})$ (cf. [2] Chapitre I: Proposition 2.8 p15), donc en remplaçant f et g par $(Id - \lambda\mathcal{L})^{-1}f$ et $(Id - \lambda\mathcal{L})^{-1}g$, on obtient: $\forall f, g \in C(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}})$, $\int [(Id - \lambda\mathcal{L})^{-1}f]gd\mu = \int [(Id - \lambda\mathcal{L})^{-1}g]fd\mu$. Par itération, pour tout $n \geq 1$, $\int [(Id - \lambda\mathcal{L})^{-n}f]gd\mu = \int [(Id - \lambda\mathcal{L})^{-n}g]fd\mu$. En posant $\lambda = \frac{t}{n}$, on obtient par le théorème de Hille-Yosida: $\int fP_tgd\mu = \int gP_tfd\mu$. \square

Le bilan détaillé est vérifié par rapport à ν_ρ et ν_ρ est une mesure réversible.

Remarque 2. Ce résultat peut être généralisé à tout KCLG défini sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. En effet, une des propriétés de la contrainte est qu'elle ne dépend pas de la valeur des deux sites échangés, de sorte que la mesure produit de Bernoulli sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ est une mesure invariante. De plus, contrairement au modèle d'exclusion symétrique (qui correspond à l'absence de contrainte, soit $c_e(\eta) = 1$ pour toute arête $e = (x, y)$), les KCLG possèdent des configurations pour lesquelles il n'existe pas d'échange autorisé qui modifie l'état du système, et donc il existe d'autres mesures invariantes.

Définition 1. Un modèle à contrainte cinétique est non-coopératif si ses contraintes sont telles qu'il est possible de construire un ensemble fini de sites vides, que l'on nomme cluster mobile, et qui possède les deux propriétés suivantes:

- (i) pour toute configuration, il est possible de déplacer le cluster mobile vers n'importe quelle autre position sur le graphe sur lequel est défini le processus par une suite d'échanges autorisés;
- (ii) tout échange est autorisé si le cluster mobile est situé dans un voisinage approprié.

Tous modèle qui n'est pas non-coopératif est coopératif.

Ce modèle est coopératif, car s'il n'y a qu'un nombre fini de sites vides, tout site situé à droite du site vide le plus à droite ne remplira jamais la contrainte et restera toujours plein.

2.2 Ergodicité

Définition 2. μ est ergodique pour le processus de Markov généré par \mathcal{L} si pour $f \in L^2(\mu)$ invariant pour la dynamique: $\mathcal{L}f = 0$ μ -p.s. (i.e. pour tout $t \geq 0$, $\mu(f(\eta)) = \mu(P_t f(\eta))$), alors f est constante μ -p.s.

Remarque 3. Pour toute fonction constante f , $\mathcal{L}f = 0$ μ -p.s, donc 0 est une valeur propre. Ainsi μ est ergodique si et seulement si 0 est une valeur propre simple.

Théorème 2.2. On a équivalence entre:

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f = \int f d\mu$ dans $L^2(\mu)$ pour tout $f \in L^2(\mu)$ (i.e. $\text{Var}_\mu(P_t f(\eta)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$)
- (ii) 0 est une valeur propre simple pour \mathcal{L} .

Démonstration. (cf. [2] Chapitre IV: Théorème 4.13 p209)

$-\mathcal{L}$ est un opérateur auto-adjoint semi-défini positif (cf. [2] Chapitre IV: Proposition 4.1 p205 et Lemme 4.3 p206). Par le théorème spectral: $-\mathcal{L} = \int_{[0, \infty)} \lambda dG_\lambda$ où $G_\lambda = \mathbb{1}_{[0, \lambda]}(\mathcal{L})$ est une résolution de l'identité.

Autrement dit, si on pose $\{G_\lambda, \lambda \geq 0\}$ une famille de projections sur $L^2(\mu)$ telle que $G_{\lambda_1} G_{\lambda_2} = G_{\lambda_1 \wedge \lambda_2}$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_\lambda f = f$ et $\lim_{\gamma \downarrow \lambda} G_\gamma f = G_\lambda f$.

Alors, $P_t = G_0 + \int_{(0, \infty)} e^{-\lambda t} dG_\lambda$ avec G_0 la projection sur l'espace propre associé à la valeur propre 0. On a la convergence dans $L^2(\mu)$: $P_t f \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} G_0 f$.

Ainsi, (i) est équivalent à $G_0 f = \int f d\mu \quad \forall f \in L^2(\mu)$, autrement dit, 0 est une valeur propre simple de \mathcal{L} . \square

Soit la densité critique $\rho_c := \sup\{\rho \in [0, 1] : 0 \text{ est une valeur propre simple de } \mathcal{L}\}$.

Définition 3. (Chemins, configurations connectées et configurations échangeables)

Soient $\eta, \sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, une suite de configurations $P_{\eta \rightarrow \sigma} = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(n)})$ telle que $\eta^{(1)} = \eta$ et $\eta^{(n)} = \sigma$. $P_{\eta \rightarrow \sigma}$ est un chemin entre η et σ dans \mathbb{Z} si pour tout $i = 1, \dots, n-1$, il existe x tel que $\eta^{(i+1)} = (\eta^{(i)})^{x-1, x}$ et $c_x(\eta) = 1$.

Deux configurations η et σ sont connectées s'il existe au moins un chemin $P_{\eta \rightarrow \sigma}$.

On dira que η est $\{x-1, x\}$ -échangeable si η et $\eta^{x-1, x}$ sont connectés, et on pose \mathcal{E}_x l'ensemble des configurations $\{x-1, x\}$ -échangeables.

On peut ainsi définir:

$$\rho_{ex} := \sup\{\rho \in [0, 1] : \nu_\rho(\cap_{x \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_x) = 1\}$$

Puisque les taux c_x sont des fonctions croissantes de η (avec $\eta \leq \eta'$ si et seulement si $\eta(x) \leq \eta'(x) \quad \forall x \in \{0, 1\}$), on remarque que pour tout $\rho < \rho_{ex}$: $\nu_\rho(\cap_{x \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_x) = 1$.

Définition 4. On définit la forme de Dirichlet \mathcal{D}_μ associée à \mathcal{L} par rapport à μ :

$$\mathcal{D}_\mu(f) := -\mu(f \cdot \mathcal{L}f) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu(c_x |\nabla_{x-1, x} f|^2), \quad \forall f \in L^2(\mu),$$

avec $\nabla_{x-1, x} f(\eta) = f(\eta^{x-1, x}) - f(\eta)$.

Proposition 2.3. ν_ρ est ergodique si et seulement si $\rho \leq \rho_{ex}$, en particulier $\rho_c = \rho_{ex}$.

Démonstration. Supposons que $\rho > \rho_{ex}$ et que f soit l'indicatrice de l'ensemble des configurations $\{x-1, x\}$ -échangeable pour chaque x . Par construction, $\text{Var}_{\nu_\rho}(f) \neq 0$ et puisque f est invariante par la dynamique, $\mathcal{L}f = 0$ ν_ρ -p.s. Ainsi 0 n'est pas une valeur propre simple de \mathcal{L} et $\rho \geq \rho_c$.

Supposons maintenant que $\rho < \rho_{ex}$. Soit $f \in L^2(\nu_\rho)$ telle que $\mathcal{L}f = 0$, ou bien de manière équivalente que $\mathcal{D}_{\nu_\rho}(f) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \nu_\rho(c_x |\nabla_{x-1, x} f|^2) = 0$. Montrons que f est constante ν_ρ -p.s. Remarquons qu'il suffit de montrer que $\sum_x \nu_\rho(|\nabla_{x-1, x} f|^2) = 0$. En effet, le Processus d'Exclusion Symétrique Simple (cf. section 3.2 pour une définition formelle) a la forme de Dirichlet $\mathcal{D}_{\nu_\rho}^{SEPP}(f) = \sum_x \nu_\rho(|\nabla_{x-1, x} f|^2)$ et est ergodique pour toute densité ρ (cf. [2] Chapitre VIII: théorème 1.44 p377 ou théorème 1.12 p369), ce qui implique aussitôt que f est constante ν_ρ -p.s.

Supposons que $\sum_x \nu_\rho(|\nabla_{x-1, x} f|^2) \neq 0$, alors il existe x tel que $\nu_\rho(|\nabla_{x-1, x} f|^2) > 0$. Pour tout $\eta \in \mathcal{E}_x$,

choisissons un chemin $P_{\eta \rightarrow \eta^{x-1,x}}$ et pour tout $n > 1$, posons $A_{n,x} = \{\eta \in \mathcal{E}_x : |P_{\eta \rightarrow \eta^{x-1,x}}| = n\}$. Puisque $\rho < \rho_{ex}$, $\nu_\rho(\mathcal{E}_x) = 1$. Donc $\nu_\rho(\cup_{n=2}^\infty A_{n,x}) = 1$ et

$$\nu_\rho(|\nabla_{x-1,x} f|^2) = \sum_{n=2}^\infty \int_{A_{n,x}} |f(\eta^{x-1,x}) - f(\eta)|^2 \nu_\rho(d\eta).$$

Pour tout $n > 2$, et $P_{\eta \rightarrow \sigma} = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(n)})$, avec $\eta^{(1)} = \eta$ et $\eta^{(n)} = \sigma$, on a par Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |f(\eta^{x-1,x}) - f(\eta)|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(\eta^{(i+1)}) - f(\eta^{(i)}) \right)^2 \\ &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \left(f(\eta^{(i+1)}) - f(\eta^{(i)}) \right)^2 \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} c_x(\eta^{(i)}) \left(f(\eta^{(i+1)}) - f(\eta^{(i)}) \right)^2 \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité, les contraintes sont toujours satisfaites car le chemin est autorisé.

Ainsi

$$\int_{A_{n,x}} |f(\eta^{x-1,x}) - f(\eta)|^2 \nu_\rho(d\eta) \leq C(n) \sum_{y: d(y,x) \leq n+1} \nu(c_y |\nabla_{y-1,y} f|^2)$$

où

$$C(n) = \max_{\sigma} \max_{y: d(y,x) \leq n+1} |\{\eta : (\sigma, \sigma^{y-1,y}) \in P_{\eta, \eta^{x-1,x}}\}|$$

prend en compte le nombre de choix de configurations possibles η telles que le chemin $P_{\eta \rightarrow \eta^{x-1,x}}$ traverse un couple donné $(\sigma, \sigma^{y-1,y})$. Par hypothèse, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \nu_\rho(c_x |\nabla_{x-1,x} f|^2) = 0$, donc $\int c_y(\sigma) [f(\sigma^{y-1,y}) - f(\sigma)]^2 \nu_\rho(d\sigma) = 0$ pour tout y . Ainsi, $\nu_\rho(|\nabla_{x-1,x} f|^2) = 0$ et $\sum_{x \in \mathbb{Z}} \nu_\rho(|\nabla_{x-1,x} f|^2) = 0$. \square

Savoir si ν_ρ est ergodique revient à savoir si pour tout x , η est $\{x-1, x\}$ -échangeable ν_ρ -p.s. Puisque les contraintes sont invariantes par translation, et que ν_ρ est un produit de mesures i.i.d., tous les sites jouent le même rôle, on peut regarder uniquement le site 0. Ainsi $\rho_{ex} = \sup\{\rho : \nu_\rho(\mathcal{E}_0) = 1\}$.

Lemme 2.4. $\nu_\rho(\mathcal{E}_0) = \nu_\rho(\{\eta : \exists i \geq 0, \sum_{x=1}^{2i+1} \eta(x) \leq i\})$.

Démonstration. Pour une configuration η fixée, η est $\{-1, 0\}$ -échangeable si et seulement si:

1. si la contrainte c_0 est vérifiée, alors η est évidemment $\{-1, 0\}$ -échangeable,
2. sinon, on regarde les contraintes c_1 et c_2 :
 - si c_1 et c_2 sont vérifiées, alors η est $\{1, 2\}$ -échangeable. La configuration $\eta^{1,2}$ ainsi obtenue a la contrainte $c_0(\eta^{1,2})$ vérifiée et est donc $\{-1, 0\}$ -échangeable. L'échange effectué, la configuration $(\eta^{1,2})^{-1,0}$ est encore $\{1, 2\}$ -échangeable. On a un chemin entre ξ et $\xi^{-1,0}$.
 - si au moins l'une des configurations c_1 et c_2 n'est pas vérifiée, on regarde les contraintes c_3 et c_4 , si celles-ci sont vérifiées, la configuration η est $\{2, 3\}$ -échangeable, et $c_2(\eta^{2,3}) = 1$ alors on reprend à l'étape 2 en partant de la configuration $\eta^{2,3}$. Si au moins l'une des contraintes c_3 et c_4 n'est pas vérifiée, alors on regarde les contraintes c_5 et c_6 , et ainsi de suite.

Autrement dit, on définit l'algorithme suivant:

Pour une configuration η :

- Si $c_0(\eta) = 1$, alors η est $\{-1, 0\}$ -échangeable.
- Sinon, soit $k = 1$.
- Tant que $k > 0$:

Etape k : Si $c_k(\eta) = 1$ et $c_{k+1}(\eta) = c_{k+2}(\eta) = 1$, on pose $\eta = \eta^{k,k+1}$, et on reprend l'algorithme à l'étape $k-1$. Sinon, on passe à l'étape $k+1$.

L'algorithme se termine si et seulement si η est $\{-1, 0\}$ -échangeable. \square

On définit $\mathcal{F}_n = \sigma(\{\eta(x); x \leq 2n+1\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration sur l'espace probabilisé $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}), \nu_\rho)$. On pose $\tau := \inf\{i \geq 0 : \sum_{x=1}^{2i+1} \frac{\eta(x)}{2i+1} < \frac{1}{2}\}$. τ est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, et on a $\nu_\rho(\mathcal{E}_0) = \nu_\rho(\tau < \infty)$.

Proposition 2.5. $\rho_c = \frac{1}{2}$.

Démonstration. Soit pour tout $k \geq 1$: $X_k := 2\eta(k) - 1$. $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. telle que $\nu_\rho(X_1 = 1) = 1 - \nu_\rho(X_1 = -1) = \rho$. Pour $S_0^a = a \in \mathbb{Z}$, on pose $S_n^a := S_{n-1}^a + X_n = a + \sum_{j=1}^n X_j$. $(S_n^a)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire issue de a .

On définit le temps d'arrêt $T^a := \inf\{k \geq 1 : S_k^a \leq 0\}$, le premier temps d'atteinte d'une valeur négative par la marche aléatoire $(S_n^a)_{n \geq 0}$.

On a $\nu_\rho(\mathcal{E}_0) = \nu_\rho(\tau < \infty) = \nu_\rho(T^1 < \infty)$. On pose $h_i := \nu_\rho(T^i < \infty)$ la probabilité que la marche aléatoire partant de i atteigne 0 en un temps fini.

Par la proposition A.1 page 23, $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est la solution minimale positive du système:

$$\begin{cases} h_i = \rho h_{i+1} + (1-\rho)h_{i-1} & \text{si } i \geq 1 \\ h_i = 1 & \text{si } i \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi pour tout $i \geq 1$: $h_{i+1} - h_i = (\frac{1-\rho}{\rho})(h_i - h_{i-1}) = (\frac{1-\rho}{\rho})^i (h_1 - h_0)$, et $h_{i+1} = \sum_{k=0}^i (\frac{1-\rho}{\rho})^k (h_1 - h_0) + h_0$.

Si $\rho = \frac{1}{2}$, $h_i = h_0 + (i+1)(h_1 - h_0)$, or $0 \leq h_i \leq 1$, donc $h_1 = h_0$ et puisque $h_0 = 1$, $h_i = 1 \forall i \geq 1$.

Si $\rho \neq \frac{1}{2}$, $h_i = \sum_{k=0}^i (\frac{1-\rho}{\rho})^k (h_1 - h_0) + h_0 = \frac{(1 - (\frac{1-\rho}{\rho})^{i+1})}{1 - (\frac{1-\rho}{\rho})} (h_1 - h_0) + h_0 = A(\frac{1-\rho}{\rho})^i + 1 - A$ avec $A = \frac{(1-h_1)}{(1-\frac{1-\rho}{\rho})}$.

- Pour $\rho > \frac{1}{2}$: $h_i = A((\frac{1-\rho}{\rho})^i - 1) + 1$, avec $1 \geq A \geq 0$. h_i est la solution minimale, donc $A = 1$ et $h_i = (\frac{1-\rho}{\rho})^i$.

- Pour $\rho < \frac{1}{2}$: si $A > 0$, $h_i \rightarrow \infty$ pour $i \rightarrow \infty$, ce qui est impossible car $0 \leq h_i \leq 1$, donc $A = 0$ et $h_i = 1 \forall i \geq 1$.

Finalement $\rho_c = \frac{1}{2}$.

□

La proposition suivante indique qu'après n étapes, la probabilité que l'algorithme s'arrête décroît exponentiellement vite.

Proposition 2.6. Si $\rho > \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_\rho(\tau < \infty \mid \tau \geq n+1) = O\left((2(1-\rho))^{2n+1}\right)$$

Si $\rho = \frac{1}{2}$:

$$\nu_\rho(n < \tau < \infty) \lesssim \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}},$$

où $f(n) \lesssim g(n) \iff \exists h, \forall n, f(n) \leq h(n)$ et $h(n) \sim g(n)$,

et $h(n) \sim g(n) \iff \forall \varepsilon, \exists n_0, \forall n > n_0 : \left| \frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right| < \varepsilon$.

Démonstration. Soit $T_0^1 = \inf\{k \geq 0 : S_k^1 = 0\}$, avec $(S_k^1)_{k \geq 0}$ la marche aléatoire issue de $S_0^1 = 1$, de sauts $(X_k)_{k \geq 1}$ i.i.d. de loi défini par $\nu_\rho(X_1 = 1) = 1 - \nu_\rho(X_1 = -1) = \rho$. On a $\nu_\rho(\tau < n) = \nu_\rho(T_0^1 < 2n+1)$.

Remarquons que $\forall n \geq 0 : \nu_\rho(S_{2n+1}^1 = 0) = \binom{2n+1}{n} \rho^n (1-\rho)^{n+1}$ et $\nu_\rho(S_{2n}^1 = 0) = 0$.

Soit $k > 0$, le nombre total de marches de longueur $2n+1$ qui vont de 1 à $2k$ vaut $\binom{2n+1}{n+k}$. Le nombre de marche de longueur $2n+1$ allant de 1 à $2k$ et qui passent par 0 est par réflexion égal au nombre de marches de longueur $2n+1$ allant de -1 à $2k$, soit $\binom{2n+1}{n+k+1}$. Donc, le nombre de marches allant de 1 à $2k$ de longueur $2n+1$ sans passer par l'axe vaut $\binom{2n+1}{n+k} - \binom{2n+1}{n+1+k}$.

Pour $k \geq 1$:

$$\nu_\rho(S_{2n+1}^1 = 2k, \forall 0 \leq i \leq k : S_i^1 > 0) = \rho^{n+k}(1-\rho)^{n+1-k} \left(\binom{2n+1}{n+k} - \binom{2n+1}{n+1+k} \right)$$

$$\begin{aligned} \nu_\rho(2n+1 \leq T_0^1 < \infty) &= \sum_{k=0}^n \nu_\rho(S_{2n+1} = 2k, \forall 0 \leq i \leq k : S_i^1 > 0) \nu_\rho(T_0^{2k} < \infty) \\ &= \sum_{k=0}^n \rho^{n+k}(1-\rho)^{n+1-k} \left(\binom{2n+1}{n+k} - \binom{2n+1}{n+1+k} \right) \cdot \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^{2k} \\ &= \rho^n (1-\rho)^{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^k \frac{2k(2n+1)!}{(n+k+1)!(n-k+1)!} \\ &\leq \rho^n (1-\rho)^{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^k \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}. \end{aligned}$$

Par la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$): $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, donc:

$$\begin{aligned} \nu_\rho(2n+1 \leq T_0^1 < \infty) &\lesssim \rho^n (1-\rho)^{n+1} \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi(n+1)}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^k \\ &= \frac{2 \cdot (2(1-\rho))^{2n+1}}{(2\rho+1)\sqrt{\pi(n+1)}}. \end{aligned}$$

Si $\rho = \frac{1}{2}$:

$$\nu_\rho(2n+1 \leq T_0^1 < \infty) \lesssim \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}}.$$

Si $\rho > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \nu_\rho(\tau < \infty \mid \tau \geq n+1) &= \nu_\rho(T_0^1 < \infty \mid T_0^1 \geq 2n+1) \\ &= \frac{\nu_\rho(2n+1 \leq T_0^1 < \infty)}{\nu_\rho(T_0^1 \geq 2n+1)} \\ &= \frac{\nu_\rho(2n+1 \leq T_0^1 < \infty)}{1 - (\nu_\rho(T_0^1 < \infty) - \nu_\rho(2n+1 \leq T_0^1 < \infty))} \\ &\leq \frac{\nu_\rho(2n+1 \leq T_0^1 < \infty)}{1 - \frac{1-\rho}{\rho}}. \end{aligned}$$

□

3 Décroissance des corrélations

3.1 Trou spectral

Pour étudier la décroissance des corrélations, il peut être intéressant d'introduire le trou spectral qui permet d'obtenir une borne supérieure aux corrélations. Le trou spectral de \mathcal{L} est la plus petite valeur propre non nulle de $-\mathcal{L}$.

Définition 5. On définit le trou spectral associé au générateur \mathcal{L} par rapport à une mesure réversible μ :

$$\text{gap}_\mu := \inf_{\substack{f \neq \text{const} \\ f \in L^2(\mu)}} \frac{\mathcal{D}_\mu(f)}{\text{Var}_\mu(f)}$$

où \mathcal{D}_μ est la forme de Dirichlet associée à \mathcal{L} par rapport à μ (cf. 4),
et

$$\text{Var}_\mu(f) = \int_{\{0,1\}^\mathbb{Z}} f^2(\eta) \mu(d\eta) - \left(\int_{\{0,1\}^\mathbb{Z}} f(\eta) \mu(d\eta) \right)^2.$$

Le trou spectral est la meilleure constante telle que :

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq \text{Var}_\mu(f) e^{-2t \cdot \text{gap}_\mu}, \quad \forall f \in L^2(\mu),$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|\text{Cov}_\mu(f(\eta), g(\eta_t))| \leq \sqrt{\text{Var}_\mu(f) \text{Var}_\mu(g)} e^{-t \cdot \text{gap}_\mu}, \quad \forall f, g \in L^2(\mu).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{Z}$:

$$|\text{Cov}_\mu(\eta(x), \eta_t(x))| \leq \rho(1 - \rho) e^{-t \cdot \text{gap}_\mu}.$$

En particulier, si le trou spectral est positif, les corrélations décroissent exponentiellement vite. Cependant, on peut remarquer que puisque le système est Conservatif, le trou spectral est nul par rapport à ν_ρ .

En effet, pour $f_n(\eta) = \sum_{x=-n}^n \eta(x)$:

$$\text{Var}_{\nu_\rho}(f_n(\eta)) = \sum_{x=-n}^n \text{Var}_{\nu_\rho}(\eta(x)) = (2n+1)\rho(1-\rho) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathcal{D}_{\nu_\rho}(f_n) &= \nu_\rho(c_{-n}(\eta) |f_n(\eta^{-n-1, -n}) - f_n(\eta)|^2) + \nu_\rho(c_{n+1}(\eta) |f_n(\eta^{n, n+1}) - f_n(\eta)|^2) \\ &= \nu_\rho(\eta_{-n+1} = 0, \eta(-n-1) \neq \eta(-n)) + \nu_\rho(\eta_{n+2} = 0, \eta(n) \neq \eta(n+1)) = 4(1-\rho)^2 \rho \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \text{gap}_{\nu_\rho} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{\nu_\rho}(f_n)}{\text{Var}_{\nu_\rho}(f_n)} = 0.$$

3.2 Le processus d'exclusion symétrique simple

On définit le processus d'Exclusion Symétrique Simple (Simple Symmetric Exclusion Process, SSEP) en dimension 1 par le générateur:

$$\mathcal{L}_{SSEP} f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} [f(\eta^{x-1, x}) - f(\eta)], \quad \text{pour toute fonction locale } f \text{ sur } \{0, 1\}^\mathbb{Z}.$$

Le processus SSEP correspond au modèle d'Est Conservatif sans contrainte ($\forall \eta \in \{0, 1\}^\mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z} : c_{\{x-1, x\}}(\eta) = c_x(\eta) = 1$).

3.2.1 Dualité pour le processus d'exclusion symétrique simple

On reprend la construction graphique définie en 1.1 qui reste valable pour ce processus. Partant d'une configuration initiale η , on peut créer une bijection entre η et η_t .

On pose l'axe vertical des temps $\{x\} \times [0, \infty)$ pour $x \in \mathbb{Z}$. Soit une réalisation de processus de Poisson $\{\mathcal{T}_e\}_{e \in E}$ indépendants d'intensité 1. A chaque instant $t \in \mathcal{T}_{(x-1, x)}$, on connecte les points de l'espace-temps (x, t) et (y, t) par une arête horizontale. Il existe un chemin entre $(x, 0)$ et (y, t) sur le graphe de l'espace-temps s'il existe une suite de temps $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1}$ et les sites $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ telle que:

- il n'y a pas d'arête sur le segment vertical $\{x_i\} \times (s_i, s_{i+1})$
- $\forall 0 \leq i \leq k-1, \{(x_i, s_{i+1}), (x_{i+1}, s_{i+1})\}$ est une arête horizontale.

De cette manière, partant de $(x, 0)$, il existe un unique chemin reliant $(x, 0)$ à $\mathbb{Z} \times \{t\}$, et le point (y, t) du segment en t est unique. De la même manière, on peut traverser le chemin dans le sens inverse du temps, de (y, t) vers $(x, 0)$. Ces chemins forment une application bijective entre $\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z} \times \{t\}$.

Pour construire notre processus η_s avec $0 \leq s \leq t$, on place $A = \{x \in \mathbb{Z} : \eta(x) = 1\}$ sur $\mathbb{Z} \times \{0\}$, et on laisse les particules suivre les chemins jusqu'en $\mathbb{Z} \times \{t\}$.

On pose $X_s^y \in \mathbb{Z}$ la position après un temps s d'un marcheur qui a démarré en (y, t) et qui remonte le temps vers $\mathbb{Z} \times \{0\}$ en passant par les arêtes horizontales. Sa position sur le graphe de l'espace-temps est $(X_s^y, t-s)$ pour $0 \leq s \leq t$. On a ainsi la relation,

$$\eta_t(y) = \eta_0(X_t^y).$$

Définition 6. Deux processus de Markov η_t et A_t sont duals par rapport à une fonction mesurable bornée H si:

$$\mathbb{E}^\eta[H(\eta_t, A)] = \mathbb{E}^A[H(\eta, A_t)]$$

Proposition 3.1. $\mathcal{L}H(\cdot, A)(\eta) = \mathcal{G}H(\eta, \cdot)(A)$ où \mathcal{G} est le générateur du processus A_t .

Démonstration.

$$\mathcal{L}H(\cdot, A)(\eta) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^\eta[H(\eta_t, A)] - H(\eta, A)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^A[H(\eta, A_t)] - H(\eta, A)}{t} = \mathcal{G}H(\eta, \cdot)(A).$$

□

Deux processus η_t et A_t sont dit auto-duals s'il existe une fonction H telle que $\mathcal{L}H(\cdot, A)(\eta) = \mathcal{L}H(\eta, \cdot)(A)$.

On note \mathcal{X} l'ensemble des configurations disposant d'un nombre fini de particules (i.e. $\sum_x \eta(x) < \infty$) et \mathcal{Y} l'ensemble des parties finies de \mathbb{Z} .

Théorème 3.2. Le processus d'exclusion symétrique simple est auto-dual, et pour tout $\eta \in \mathcal{X}$ et tout $A \in \mathcal{Y}$:

$$P^\eta\{\eta_t(x) = 1 \ \forall x \in A\} = P^A\{\eta(x) = 1 \ \forall x \in A_t\}.$$

Démonstration. Soit $\eta \in \mathcal{X}$ et $A \in \mathcal{Y}$. Pour une réalisation des horloges poissonniennes $\{\mathcal{T}_{\{x, y\}}\}$ sur un intervalle de temps $[0, t]$. On peut construire η_t par $\eta_t(x) = \eta(X_t^x)$. Si on pose $A_t = \{X_t^x : x \in A\}$, alors:

$$\eta_t(x) = 1 \ \forall x \in A \iff \eta(X_t^x) = 1 \ \forall x \in A \iff \eta(x) = 1 \ \forall x \in A_t$$

□

La dualité nous permet d'exprimer l'état du système au temps t par un ensemble de marches aléatoires, et ainsi d'estimer la corrélation par le théorème suivant:

Théorème 3.3. Pour toute densité ρ , et tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$\text{Cov}_{\nu_\rho}(\eta(x), \eta_t(x)) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}},$$

où $f \asymp g \iff \exists k_1, k_2 > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0, k_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq k_2 \cdot g(n)$.

Démonstration. Par définition du processus d'exclusion symétrique simple, tous les sites jouent le même rôle, ainsi il nous suffit de montrer la propriété pour $x = 0$. On note X_t^0 la marche aléatoire partant de 0 au temps t et remontant le temps, et définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P})$ (cf. section 1.1),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\nu_\rho}(\eta(0)\eta_t(0)) &= \nu_\rho(\eta(0)\mathbb{E}_\eta[\eta_t(0)]) \\ &= \nu_\rho(\eta(0)\mathbb{P}(\eta(X_t^0) = 1)) \\ &= \sum_x \mathbb{P}(X_t^0 = x)\nu_\rho(\eta(0)\eta(x)) \\ &= \rho^2 \sum_{x \neq 0} \mathbb{P}(X_t^0 = x) + \mathbb{P}(X_t^0 = 0)\rho\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Cov}_{\nu_\rho}(\eta(0), \eta_t(0)) = \mathbb{E}_{\nu_\rho}(\eta(0)\eta_t(0)) - \rho^2 = \mathbb{P}(X_t^0 = 0)(\rho - \rho^2). \quad (3.1)$$

Si on note \mathcal{N}_+ le processus de Poisson représentant le nombre de sauts positifs, et \mathcal{N}_- le processus de Poisson représentant le nombre de sauts négatifs de la marche aléatoire,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t^0 = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{N}_+((0, t]) = \mathcal{N}_-((0, t]) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{N}_+((0, t]) = k) \mathbb{P}(\mathcal{N}_-((0, t]) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t} t^k}{k!} \right)^2.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(X_1^0 = 0) \geq (e^{-1})^2 = e^{-2}$ et $\mathbb{P}(X_1^0 = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2}}{k!(k+1)!} \geq e^{-2}$.

On souhaite utiliser le théorème A.2 page 23 dont on vérifie les hypothèses. On pose X_i l'incrément de la marche aléatoire entre les temps $i-1$ et i , et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Chaque incrément peut être écrit comme différence de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1, et les incréments sont i.i.d. Par le théorème central limite, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$. De plus, $\forall i \geq 1 : \max_k \left(\mathbb{P}(X_i = k) \wedge \mathbb{P}(X_i = k+1) \right) = \mathbb{P}(X_i = 0) \wedge \mathbb{P}(X_i = 1) \geq e^{-2}$.

Ainsi, par le théorème A.2, $\sup_k \left| \sqrt{n} \mathbb{P}(S_n = k) - \phi\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En particulier,

$$\left| \sqrt{n} \mathbb{P}(S_n = 0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Et,

$$\mathbb{P}(X_t = 0) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}},$$

Finalement, $\text{Cov}_{\nu_\rho}(\eta(0), \eta_t(0)) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}}$. □

3.3 Diffusion d'une particule marquée dans le modèle d'Est Conservatif

Afin d'estimer la vitesse de décroissance des corrélations, on étudie le comportement d'une particule marquée (ou particule test). Si on a une particule marquée dans le système, on peut décrire le système vu depuis la position de la particule marquée. On note X_t la position de la particule marquée au temps t , et on pose $(\xi_t)_{t \geq 0} := (\tau_{X_t} \eta_t)_{t \geq 0}$, avec $(\tau_x \eta)(y) = \eta(x+y)$. Ainsi:

$$\xi_t(u) = \eta_t(X_t + u) \text{ pour } u \neq 0.$$

La définition du générateur du processus 1.1 ne tient pas en compte de la valeur en chaque site, et en particulier, pas de la trajectoire d'une particule donnée qui saute soit à sa droite, soit à sa gauche. On peut donc considérer deux cas, selon que l'on autorise deux particules à s'échanger ou non. Dans un premier temps, nous autorisons deux particules à échanger de place.

Premier cas: On définit le processus joint $(X_t, \xi_t)_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ par le générateur:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}f(X, \xi) &= \sum_{z \sim 0} c_{0,z}(\xi)[f(X + z, \tau_z \xi) - f(X, \xi)] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ u \sim v}} c_{u,v}(\xi)[f(X, \xi^{u,v}) - f(X, \xi)] \\ &= \sum_{y \sim X} c_{X,y}(\eta)[f(y, \eta^{X,y}) - f(X, \eta)] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z} \setminus \{X\} \\ z \sim y}} c_{y,z}(\eta)[f(X, \eta^{y,z}) - f(X, \eta)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$c_{x,y}(\eta) = \begin{cases} c_x(\eta) = 1 - \eta(x+1), & \text{si } y = x-1 \\ c_y(\eta) = 1 - \eta(x+2), & \text{si } y = x+1 \end{cases},$$

Ainsi, $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est également un processus de Markov avec le générateur:

$$\mathcal{L}_0 f(\xi) = \mathcal{L}_1 f(\xi) + \mathcal{L}_2 f(\xi) \quad (3.3)$$

où

$$\mathcal{L}_1 f(\xi) := \sum_{y \sim 0} c_{0,y}(\xi)[f(\tau_y \xi^{0,y}) - f(\xi)], \text{ et } \mathcal{L}_2 f(\xi) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ z \sim y}} c_{y,z}(\xi)[f(\xi^{y,z}) - f(\xi)].$$

On pose $\nu_\rho^* = \nu_\rho(\cdot | \eta(0) = 1)$ et $\Omega_0 = \{\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : \eta(0) = 1\}$.

Lemme 3.4. *Pour tout $\rho < \frac{1}{2}$, le processus ξ_t est réversible et ergodique par rapport à ν_ρ^* .*

Démonstration. Pour montrer la réversibilité, il nous suffit de vérifier que

$$\int f \mathcal{L}_0 g d\nu_\rho^* = \int g \mathcal{L}_0 f d\nu_\rho^*$$

avec $f(\xi) = \prod_{u \in A} \xi(u)$, $g(\xi) = \prod_{u \in B} \xi(u)$ et $A, B \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En effet, toute fonction locale peut être exprimée comme somme de fonctions $h_n = \alpha_n \cdot \prod_{u \in A_n} \xi(u)$, avec $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $A_n \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Par la décomposition du générateur 3.3, pour montrer la réversibilité de ν_ρ^* par rapport à \mathcal{L}_0 , il nous suffit de vérifier que $\forall y, z \in \mathbb{Z}^*$:

$$\int c_{y,z}(\xi) f(\xi^{y,z}) g(\xi) \nu_\rho^*(d\xi) = \int c_{y,z}(\xi) g(\xi^{y,z}) f(\xi) \nu_\rho^*(d\xi), \quad (3.4)$$

$$\text{et } \int c_{0,z}(\xi) f(\xi) g(\tau_z \xi) \nu_\rho^*(d\xi) = \int c_{0,-z}(\xi) g(\xi) f(\tau_{-z} \xi) \nu_\rho^*(d\xi). \quad (3.5)$$

L'équation (3.4) provient de l'invariance de ν_ρ^* par l'application $\xi \rightarrow \xi^{y,z}$. En effet, aucun site occupé n'est ajouté ou retiré entre ξ et $\xi^{y,z}$, donc pour tout $f \in L^1(\nu_\rho^*)$, $\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[f(\xi^{y,z})] = \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[f(\xi)]$. De plus, $c_{y,z}(\xi)$ ne dépend ni de $\xi(y)$ ou de $\xi(z)$, et $c_{y,z}(\xi) = c_{y,z}(\xi^{y,z})$ donc $\int c_{y,z}(\xi)[f(\xi^{y,z}) - f(\xi)] \nu_\rho^*(d\xi) = 0$. Ainsi, pour f et g deux fonctions continues sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, on a $\int c_{y,z}(\xi) f(\xi) g(\xi^{y,z}) \nu_\rho^*(d\xi) = \int c_{y,z}(\xi) g(\xi) f(\xi^{y,z}) \nu_\rho^*(d\xi)$.

On peut remarquer que $c_{0,z}(\xi) = c_{0,-z}(\tau_z \xi)$, et l'équation (3.5) est vérifiée.

Pour $\xi, \sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ tels que $\xi(0) = \sigma(0) = 1$, on dit qu'une suite de configuration $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)})$ est un $*$ -chemin de longueur n si pour tout $i = 1, \dots, n-1$, il existe, soit $x \neq 0, 1$ tel que $\xi^{(i+1)} = (\xi^{(i)})^{x-1,x}$, soit $e = \pm 1$ tel que $\xi^{(i+1)} = (\tau_e \xi^{(i)})^{0,e}$. On définit pour tout $x \neq 0, 1$:

$$\mathcal{E}_x^* := \{\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \text{ avec } \xi(0) = 1, \text{ et tel qu'il existe un } * \text{-chemin entre } \xi \text{ et } \xi^{x-1,x}\}.$$

Pour montrer l'ergodicité de ν_ρ^* pour \mathcal{L}_0 , par la proposition 2.3, il suffit de montrer que $\nu_\rho^*(\cap_{x \neq 0, 1} \mathcal{E}_x^*) = 1$ autrement dit, que pour tout $y, z \in \mathbb{Z}$, il existe presque sûrement un $*$ -chemin entre ξ et $\xi^{y,z}$. De manière équivalente, on montre qu'il existe presque sûrement un $*$ -chemin entre ξ et $\xi^{x,x+1}$ pour tout $x \neq -1, 0$.

Pour $x \geq 1$, la contrainte $c_{x,x+1}$ ne dépend que des sites à droite de $x+1$, en particulier, la contrainte ne dépend pas de $\xi(0)$. Donc, il existe un chemin entre ξ et $\xi^{x,x+1}$ si et seulement si il existe un $*$ -chemin entre ξ et $\xi^{x,x+1}$. Ainsi, $\nu_\rho^*(\mathcal{E}_{x+1}^*) = \nu_\rho(\mathcal{E}_{x+1}^*) = \nu_\rho(\mathcal{E}_{x+1})$. Puisque $\rho < \frac{1}{2}$, $\nu_\rho^*(\mathcal{E}_{x-1}^*) = 1$.

On souhaite maintenant créer un $*$ -chemin entre ξ et $\xi^{-x-1,-x}$ pour $x \geq 1$. Soit $(y_i)_{1 \leq i \leq x}$ les x premiers sites vides situés à droite de l'origine et rangés dans l'ordre croissant. On pose $\xi = \xi^{(1)}$ et $y_0 = 0$. Pour $1 \leq i \leq x$, on pose $\xi^{(i+1)} = (\xi^{(i)})^{i, y_i}$ et pour tout $k \geq 1$: $X_k^{(i)} := 2\tau_{y_{i-1}}\xi^{(i)}(k) - 1$. $(X_k^{(i)})_{k \geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. telle que $\nu_\rho^*(X_1^{(i)} = 1) = 1 - \nu_\rho^*(X_1^{(i)} = -1) = \rho$. On pose $S_0^{(i)} = i$, et $S_n^{(i)} := S_{n-1}^{(i)} + X_n^{(i)} = i + \sum_{k=1}^n X_k^{(i)}$. $(S_n^{(i)})_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire issue de i . On définit le temps d'arrêt $T^{(i)} := \inf\{k \geq 1 : S_k^{(i)} \leq 0\}$. Remarquons que puisque $\rho < \frac{1}{2}$, par la loi des grands nombres, $\nu_\rho(T^{(i-1)} < \infty) = 1$.

Pour tout $i \geq 2$, si $\nu_\rho(T^{(i-1)} < \infty) = 1$,

$$\begin{aligned} \nu_\rho^* \left\{ \text{il existe un } * \text{-chemin entre } \xi^{(i)} \text{ et } \xi^{(i+1)} = (\xi^{(i)})^{i, y_i} \right\} &\geq \nu_\rho^* \left(\xi^{(i)} \in \bigcap_{i-1 \leq z \leq y_i} \mathcal{E}_z \right) \\ &= \nu_\rho^* \left(\xi^{(i)} \in \bigcap_{i-1 \leq z \leq y_i} \mathcal{E}_z \right) \\ &= \nu_\rho(T^{(i)} < \infty) \\ &= \nu_\rho \left(\exists n \in \mathbb{Z} : \sum_{k=1}^n X_k^{(i)} \leq -i \right) = 1. \end{aligned}$$

On a construit un $*$ -chemin entre ξ et $\xi^{(x+1)}$, avec $\xi^{(x+1)}(y) = 0$ pour tout $1 \leq y \leq x$.

Pour tout $1 \leq j \leq x$, on pose $\xi^{(x+1+j)} = \tau_1(\xi^{(x+j)})^{0,1}$. Il existe clairement un $*$ -chemin entre $\xi^{(x+1)}$ et $\xi^{(2x+1)}$.

On a $\xi^{(2x+1)}(-2x) = \xi(-x)$, $\xi^{(2x+1)}(-2x-1) = \xi(-x-1)$, et $\sum_{y=1}^{2x-1} \tau_{-2x-1}\xi^{(2x+1)}(y) \leq x-1$, donc par le lemme 2.4: $\nu_\rho^*(\xi^{(2x+1)} \in \mathcal{E}_{-2x}^*) = 1$. Ainsi, on peut poser $\xi^{(2x+2)} = (\xi^{(2x+1)})^{-2x-1, -2x}$.

Par réversibilité, on peut remonter dans le sens inverse la suite des échanges effectués dans le $*$ -chemin entre ξ et $\xi^{(2x+1)}$ pour obtenir un $*$ -chemin entre $\xi^{(2x+2)}$ et $\xi^{(2x+3)} = \xi^{x-1, x}$. \square

Pour $\tilde{f}(X, \xi) = X$, on pose $j(\xi) = \tilde{\mathcal{L}}\tilde{f}(X, \xi) = c_{0,1}(\xi) - c_{-1,0}(\xi)$.

$M_t = X_t - \int_0^t j(\xi_s) ds$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_s : 0 \leq s \leq t)$ (cf. [2] Chapitre 1 section 5 et 6).

Sa variation quadratique vaut:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}(M_t^2) &= t(\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{0,1}(\xi)] + \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{-1,0}(\xi)]) = 2t(1 - \rho) \\ &= \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[\left(X_t - \int_0^t j(\xi_s) ds \right)^2 \right] = \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[X_t^2 + \left(\int_0^t j(\xi_s) ds \right)^2 - 2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[X_t \int_0^t j(\xi_s) ds \right] \right]. \end{aligned}$$

Par la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[\left(\int_0^t j(\xi_s) ds \right)^2 \right] &= \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[\int_0^t j(\xi_s) ds \int_0^t j(\xi_{s'}) ds' \right] \\ &= \int_{[0,t]^2} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [j(\xi_s) j(\xi_{s'})] ds ds' \\ &= \int_{[0,t]^2} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [j(\xi_0) j(\xi_{|s'-s|})] ds ds' \\ &= \int_{[0,t]^2} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [j(\xi_0) e^{\mathcal{L}_0 |s'-s|} j(\xi_0)] ds ds' \\ &= 2 \int_0^t (t-u) \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [j(\xi_0) e^{\mathcal{L}_0 u} j(\xi_0)] du. \end{aligned}$$

Par réversibilité, pour tout $t > 0$, les trajectoires de ξ , et de $\tilde{\xi} = \xi_t$, ont même loi sur $[0, t]$, et pour tout $s \in [0, t]$, $\tilde{X}_s = -X_s$, avec \tilde{X}_s la position de la particule marquée au temps s dans $(\tilde{\xi}_s)_{s \in [0, t]}$.

Donc $2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [X_t \int_0^t j(\xi_s) ds] = \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [\tilde{X}_t \int_0^t j(\tilde{\xi}_s) ds] - \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [X_t \int_0^t j(\xi_s) ds] = 0$.

Ainsi, par convergence monotone:

$$D := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[X_t^2]}{2t} = \frac{1}{2} \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{0,e}(\xi)] - \int_0^\infty \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[j e^{\mathcal{L}_0 u} j] du. \quad (3.6)$$

On souhaite montrer que X_t converge vers un mouvement brownien, pour cela, on va s'appuyer sur le théorème A.3 dont on vérifie les hypothèses:

Pour toute fonction locale f ,

$$\begin{aligned}
\left| \int j(\xi) f(\xi) \nu_\rho^*(d\xi) \right| &= \left| \int [c_{0,1}(\xi) - c_{-1,0}(\xi)] f(\xi) \nu_\rho^*(d\xi) \right| \\
&\leq \left| \int [1 - \xi(2) - (1 - \xi(1))] f(\xi) \nu_\rho^*(d\xi) \right| \\
&= \left| \int (1 - \xi(2)) [f(\tau_1 \xi) - f(\xi)] \nu_\rho^*(d\xi) \right| \\
&\leq \left(\int c_{0,1}(\xi) [f(\tau_1 \xi) - f(\xi)]^2 \nu_\rho^*(d\xi) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(- \int f(\xi) \mathcal{L}_1 f(\xi) \nu_\rho^*(d\xi) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(- \int f(\xi) \mathcal{L}_0 f(\xi) \nu_\rho^*(d\xi) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Par le théorème A.3:

$$\int_0^t j(\xi_s) ds = N_t + \epsilon_t,$$

avec N_t une autre martingale et ϵ_t un processus négligeable.

On a $X_t = M_t + N_t + \epsilon_t$. Par le corollaire A.4, pour D définit par 3.6:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_{\lambda t} = (2D)^{1/2} B_t \quad (3.7)$$

au sens faible sur l'espace $D([0, \infty), \mathbb{R})$ des fonction càdlàg de $[0, \infty)$ vers \mathbb{R} , avec B_t le mouvement brownien standard.

Remarque 4. (cf. [7]) Le raisonnement effectué jusqu'à présent reste valable si pour tout ξ , on redéfinit la contrainte sur les échanges entre 0 et $e = \pm 1$ par $c_{0,e}(\xi) = \hat{c}_{0,e}(\xi) \geq 0$, avec $\hat{c}_{0,e}(\xi) > 0$ si $\xi(0) \neq \xi(e)$, et telle que \hat{c} vérifie le bilan détaillé:

$$\hat{c}_{0,e}(\xi) = \hat{c}_{0,-e}(\tau_{-e} \xi^{0,-e}) \times \exp \left(- \left[\sum_{x,y \in \mathbb{Z}: |x-y|=1} \xi^{0,-e}(x) \xi^{0,-e}(y) - \sum_{x,y \in \mathbb{Z}: |x-y|=1} \xi(x) \xi(y) \right] \right).$$

Dans ce cas, on redéfinit le coefficient de diffusion $\hat{D} := \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{c}_{0,e}(\xi)] - \int_0^\infty \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} e^{\hat{\mathcal{L}}_0 u} \hat{j}] du$, avec $\hat{j}(\xi) = \hat{c}_{0,1}(\xi) - \hat{c}_{-1,0}(\xi)$, et $\hat{\mathcal{L}}_0 = \hat{\mathcal{L}}_1 + \mathcal{L}_2$, où $\hat{\mathcal{L}}_1 f(\xi) := \sum_{y \sim 0} \hat{c}_{0,y}(\xi) [f(\tau_y \xi^{0,y}) - f(\xi)]$.

On souhaiterait montrer que si l'on autorise deux particules à s'échanger, alors la covariance limite D de $M_t + N_t$ est strictement positive. ξ_t étant un processus réversible, on peut également exprimer le coefficient de diffusion D par une formule variationnelle:

Proposition 3.5. (cf. [7] Proposition 2) Soit le processus de Markov ξ , défini par le générateur $\hat{\mathcal{L}}_0$ (cf. remarque 4), alors:

$$\hat{D} = \inf_{f \text{ fonction locale sur } \Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{c}_{e,0}(\xi) [e + f(\tau_e \xi^{e,0}) - f(\xi)]^2] + \frac{1}{4} \sum_{\substack{u \sim v \\ u \neq 0 \neq v}} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{u,v}(\xi) [f(\xi^{u,v}) - f(\xi)]^2] \right\}. \quad (3.8)$$

Démonstration. Pour toute fonction locale f , on définit l'application $f \mapsto \int f \hat{j} d\nu_\rho^* \leq (-\int f \mathcal{L}_0 f d\nu_\rho^*)^{1/2} < \infty$. Donc, pour tout $\lambda > 0$, on peut définir les normes d'opérateur:

$$\|\hat{j}\|_{-1} = \sup_{f \text{ locale}} \left\{ \frac{\int f \hat{j} d\nu_\rho^*}{(-\int f \mathcal{L}_0 f d\nu_\rho^*)^{1/2}} \right\}, \text{ et } \|\hat{j}\|_{-1,\lambda} = \sup_{f \text{ locale}} \left\{ \frac{\int f \hat{j} d\nu_\rho^*}{(\int f(\lambda - \mathcal{L}_0) f d\nu_\rho^*)^{1/2}} \right\}.$$

Par le théorème spectral, $\|\hat{j}\|_{-1,\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[j e^{t\hat{\mathcal{L}}_0} j] dt$. De plus, $e^{t\hat{\mathcal{L}}_0}$ est un opérateur auto-adjoint, donc $\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} e^{t\hat{\mathcal{L}}_0} \hat{j}] \geq 0$, et par convergence monotone:

$$\|\hat{j}\|_{-1} \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} \|\hat{j}\|_{-1,\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} e^{t\hat{\mathcal{L}}_0} \hat{j}] dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} e^{t\hat{\mathcal{L}}_0} \hat{j}] dt < \infty.$$

Ainsi,

$$-\|\hat{j}\|_{-1}^2 = \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} \hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j}] = \inf_{f \text{ locale}} \{ -2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} f] - \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[f \hat{\mathcal{L}}_0 f] \}. \quad (3.9)$$

Le minimum est atteint pour $f = -\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j}$, et si on pose $f = -\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j} + h$ pour $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} f] - \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[f \hat{\mathcal{L}}_0 f] &= -2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} (-\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j} + h)] - \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[(-\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j} + h) \hat{\mathcal{L}}_0 (-\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j} + h)] \\ &= 2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} \hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j}] - 2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} h] - \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} \hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j}] + \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} \hat{j} \hat{\mathcal{L}}_0 h] + \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[h \hat{j}] - \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[h \hat{\mathcal{L}}_0 h]. \end{aligned}$$

En remarquant que $-\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[h \hat{\mathcal{L}}_0 h] \geq 0$, on obtient 3.9.

On a les formes de Dirichlet suivantes:

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[f \hat{\mathcal{L}}_1 f] &= \frac{1}{2} \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{c}_{e,0}(\xi) [f(\tau_e \xi^{e,0}) - f(\xi)]^2], \\ -\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[f \mathcal{L}_2 f] &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{u \sim v \\ u \neq 0 \neq v}} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{u,v}(\xi) [f(\xi^{u,v}) - f(\xi)]^2]. \end{aligned}$$

Par réversibilité:

$$-2\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{j} f] = -2 \sum_{e=\pm 1} e \cdot \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{c}_{0,e}(\xi) f(\xi)] = \sum_{e=\pm 1} e \cdot \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[\hat{c}_{0,e}(\xi) [f(\tau_e \xi^{0,e}) - f(\xi)]].$$

En utilisant les trois dernières équations dans l'équation 3.9, et en y ajoutant le premier terme de 3.6, on obtient 3.8. \square

Par la proposition 3.5, on a

$$D = \inf_{f \text{ fonction locale sur } \Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{e,0}(\xi) [e + f(\tau_e \xi^{e,0}) - f(\xi)]^2] + \frac{1}{4} \sum_{\substack{u \sim v \\ u \neq 0 \neq v}} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[c_{u,v}(\xi) [f(\xi^{u,v}) - f(\xi)]^2] \right\}.$$

Une conséquence immédiate de cette formule variationnelle est qu'on remarque que D est croissant en fonction de la contrainte c .

Même s'il semble tout à fait raisonnable de penser que $D > 0$, ce n'est pas évident à prouver. Contrairement à la preuve présente dans [7], où l'on peut ignorer ce qui se passe en dehors des 3 sites autour de l'origine, afin que les contraintes permettant à la particule marquée d'effectuer soit un pas vers la gauche, soit un pas vers la droite soient satisfaites, on doit avoir soit un zéro sur le site 1, soit un zéro sur le site 2. Si ce n'est pas le cas, l'algorithme nous dit bien que presque sûrement, il existe deux sites vides à droite de l'origine qui peuvent s'échanger avec les particules au site 1, et au site 2, seulement on n'a aucun contrôle sur la probabilité que ces échanges aient lieu.

Cependant, par la formule 3.7, $D = \frac{\mathbb{E}_{\nu_\rho^*}[X_t^2]}{2t}$. En effectuant une simulation de Monte-Carlo sur 5000 configurations, avec 8000 sites considérés jusqu'au temps $T = 2000$, on obtient les approximations de D suivantes:

ρ	0	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45	0.5
D	1.02537	0.897719	0.788611	0.572369	0.344821	0.167174	0.102664	0.0552233

Le cas $\rho = 0$ peut sembler inintéressant, mais correspond à une marche aléatoire symétrique avec sauts poissonniens de paramètre 2 de la particule marquée.

Afin de mettre en évidence la trajectoire de $D = D(\rho)$ selon différentes valeurs de ρ , les précédentes simulations sont présentes sous forme de graphique dans la figure 2. Au vu du faible nombre de simulations, et d'un écart non négligeable entre les deux courbes, il est prématuré de conjecturer $D = 2 \cdot (1/2 - \rho)$. On peut cependant justifier les écarts entre la droite 0 et $D(\rho)$ en 0 par une simulation effectuée sur un temps trop court pour mettre en évidence l'apparition de clusters qui bloquent la trajectoire de X_t .

Second cas: Dans le cas où l'on n'autorise pas deux particules à s'échanger, on peut montrer que le coefficient de diffusion de la particule marquée est nul. Comme pour le système d'exclusion simple, on peut supposer qu'une particule ne peut sauter que sur un site vide, ou de manière équivalente, que l'on n'autorise pas deux particules à s'échanger. On redéfinit le générateur du processus ayant une particule marquée en 0: pour toute fonction locale f à valeurs sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$,

$$\mathcal{L}'_0 f(\xi) = \mathcal{L}'_1 f(\xi) + \mathcal{L}_2 f(\xi),$$

où

$$\mathcal{L}'_1 f(\xi) := \sum_{e=\pm 1} c_{0,e}(\xi)(1 - \xi(e))[f(\tau_e \xi^{0,e}) - f(\xi)], \text{ et } \mathcal{L}_2 f(\xi) = \sum_{y \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}} c_{y-1,y}(\xi)[f(\xi^{y-1,y}) - f(\xi)].$$

De la même façon que précédemment, on peut définir le coefficient de diffusion d'une particule marquée:

$$D' := \frac{1}{2} \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [c'_{0,e}] - \int_0^\infty \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [j' e^{\mathcal{L}'_0 u} j'] du$$

avec $c'_{0,e}(\xi) = c_{0,e}(\xi)(1 - \xi(e))$, et $j'(\xi) = c'_{0,1}(\xi) - c'_{-1,0}(\xi)$.

Par la proposition 3.5:

$$D' = \inf_{f \text{ fonction locale sur } \Omega_0} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [c_{e,0}(\xi)(1 - \xi(e))[e + f(\tau_e \xi^{e,0}) - f(\xi)]^2] + \sum_{u \neq -1,0} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} [c_{u,u+1}(\xi)[f(\xi^{u,u+1}) - f(\xi)]^2] \right\}.$$

Proposition 3.6. (cf. [7] Proposition 6) $D' = 0$.

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, soit $f(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} h(\varepsilon x) \xi(x)$, avec h une fonction à support compact sur \mathbb{R} , et lipschitzienne sur \mathbb{R}^* telle que $\rho(h(0_+) - h(0_-)) = -1$. Alors,

$$\begin{aligned} 2D' &\leq \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[c_{e,0}(\xi)(1 - \xi(e)) \left[e + \sum_x h(\varepsilon x) \tau_e \xi^{e,0}(x) - \sum_x h(\varepsilon x) \xi(x) \right]^2 \right] \\ &\quad + \sum_{u \neq -1,0} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[c_{u,u+1}(\xi) \left[\sum_x h(\varepsilon x) \xi^{u,u+1}(x) - \sum_x h(\varepsilon x) \xi(x) \right]^2 \right] \\ &= \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[c_{e,0}(\xi)(1 - \xi(e)) \left[e + \sum_x h(\varepsilon x - \varepsilon e) \xi^{e,0}(x) - h(\varepsilon x) \xi(x) \right]^2 \right] \\ &\quad + \sum_{u \neq -1,0} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[c_{u,u+1}(\xi) \left[h(\varepsilon u)(\xi(u+1) - \xi(u)) + h(\varepsilon(u+1))(\xi(u) - \xi(u+1)) \right]^2 \right] \\ &= \sum_{e=\pm 1} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[c_{e,0}(\xi)(1 - \xi(e)) \left[e + \sum_{x \neq 0,e} (h(\varepsilon x - \varepsilon e) - h(\varepsilon x)) \xi(x) \right]^2 \right] \\ &\quad + \sum_{u \neq -1,0} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[c_{u,u+1}(\xi) [h(\varepsilon u) - h(\varepsilon(u+1))]^2 [\xi(u) - \xi(u+1)]^2 \right]. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, puisque $\nu_\rho^*(\xi(x)) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \rho$, si on écrit h comme limite de fonction en escalier, alors par la loi des grands nombres:

$$\sum_{x \neq 0, e} (h(\varepsilon x - \varepsilon e) - h(\varepsilon x)) \xi(x) = -e \sum_{x \neq 0, e} (h(\varepsilon x - \varepsilon) - h(\varepsilon x)) \xi(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\rho} \cdot \rho = -1.$$

Pour le second terme, h est à support compact, alors il existe $C > 0$ tel que h est nul en dehors de $[-C, C]$. $h(\varepsilon u) - h(\varepsilon u + \varepsilon) = 0$ dès que $|u| > \frac{C}{\varepsilon+1}$, ainsi, h étant lipschitzienne:

$$\sum_{u \neq -1, 0} \mathbb{E}_{\nu_\rho^*} \left[c_{u, u+1}(\xi) [h(\varepsilon u) - h(\varepsilon u + \varepsilon)]^2 [\xi(u) - \xi(u+1)]^2 \right] \leq \frac{2C}{\varepsilon+1} \cdot C' \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

pour une certaine constante C' . □

3.3.1 Borne inférieure sur la covariance dans le modèle d'Est Conservatif

La convergence 3.7 montre que la particule marqué a un comportement gaussien. Il n'est pas évident d'estimer la probabilité $\nu_\rho^*(X_t = 0)$ que la particule marquée partie de 0 arrive en 0 au temps t . Toutefois, le graphique 3, page 21 semble simuler que dans le premier cas, où deux particules peuvent être échangées, que $\frac{1}{\sqrt{t}} \lesssim \nu_\rho^*(X_t = 0) \lesssim \frac{1}{\ln(t)}$ pour tout $\rho \leq \frac{1}{2}$, et que $\nu_{1/2}^*(X_t = 0) \sim \frac{1}{\ln(t)}$.

4 Simulations

4.1 Simulation du processus d'Est Conservatif

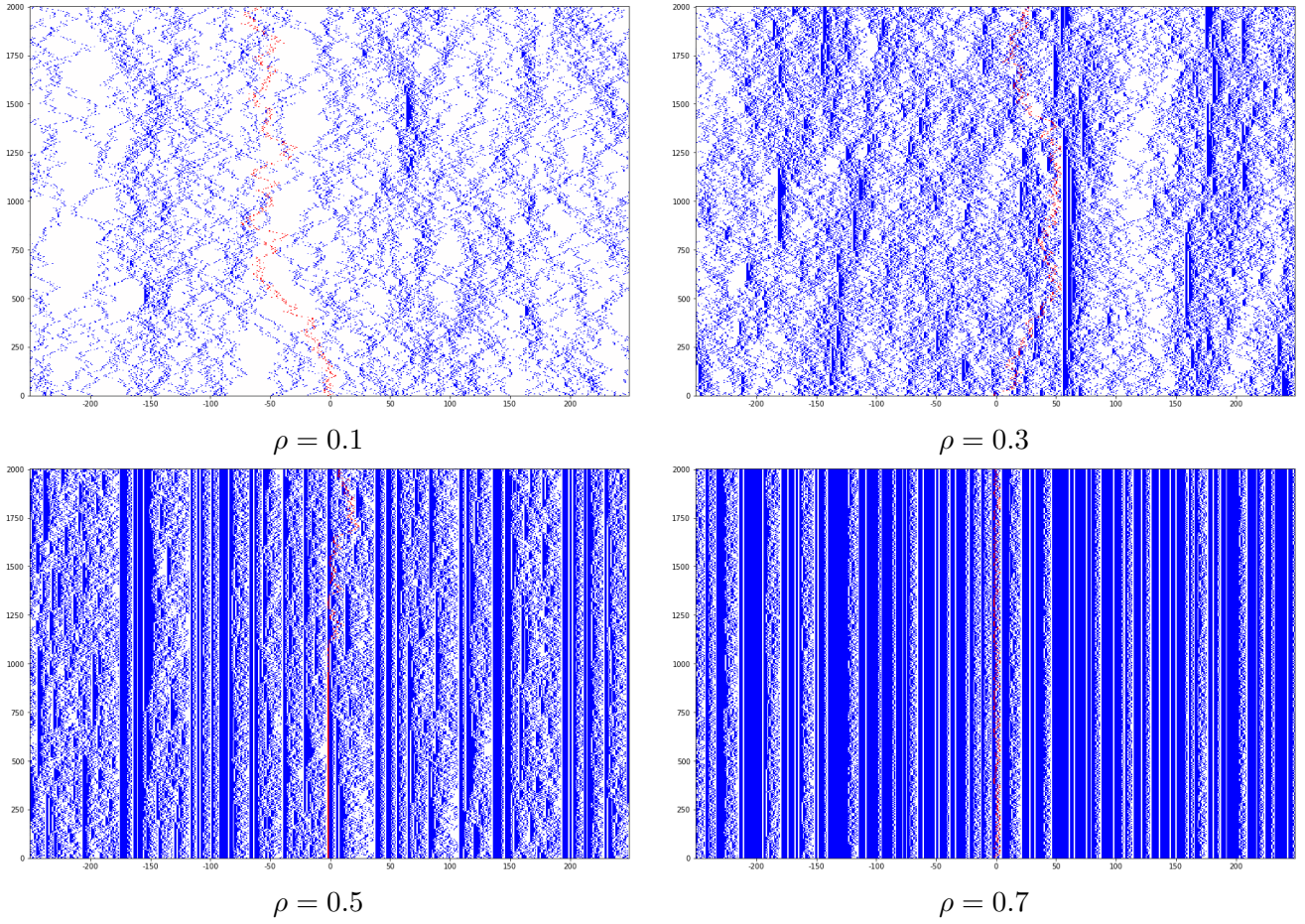


Figure 1: L'espace \mathbb{Z} est représenté horizontalement et le temps verticalement. Les sites occupés sont en bleu, et le chemin d'une particule marquée partant de 0 est de couleur rouge. La simulation comprend 8000 sites, mais seuls 500 sites sont représentés jusqu'au temps $T=2000$.

4.2 Approximation du coefficient de diffusion D d'une particule marquée dans le cas où deux particules sont autorisées à s'échanger

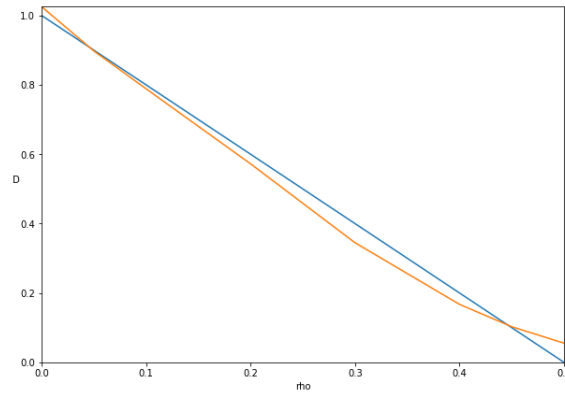


Figure 2: Approximation de D obtenue par simulation pour $\rho \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45, 0.5\}$ comprenant chacune 5000 configurations, avec 8000 sites considérés jusqu'au temps $T = 2000$. La droite étant la fonction $2 \cdot (1/2 - \rho)$.

4.3 Probabilité de retour en l'origine d'une particule marquée

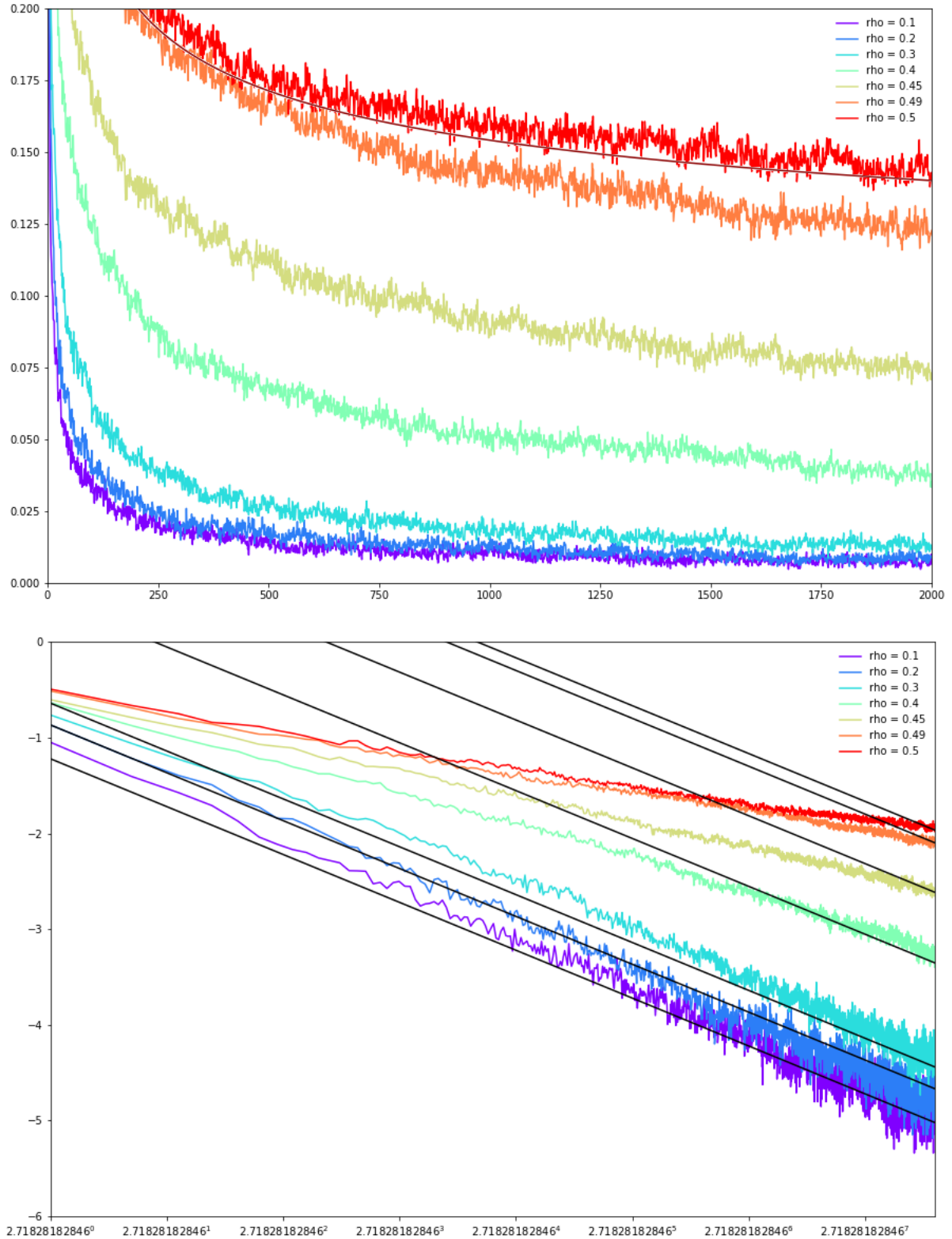


Figure 3: Le temps est représenté sur l'axe des abscisses et la probabilité $\nu_\rho^*(X_t = 0)$ que la particule marquée X_t partant de 0 soit en 0 au temps $t \in [1, 2000]$ pour la mesure produit de Bernoulli ν_ρ conditionné à avoir une particule en 0 est représentée sur l'axe des ordonnées. La courbe rouge foncé représente la fonction $\frac{c}{\ln(t)}$ avec $c = \nu_{1/2}^*(X_{2000} = 0) \cdot \ln(2000)$. Chacune des approximations porte sur 8000 sites et 5000 réalisations. Le second graphique possède une échelle logarithmique, et les droites noires représentent les fonctions $t \mapsto c/\sqrt{t}$ pour différentes valeurs de c .

Si l'on refait la simulation en regardant la trajectoire de $(X_t)_{t \geq 0}$, où X_0 est la variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre ρ en l'origine au temps 0, on obtient un résultat surprenant, il semblerait qu'il y ait un effet cutoff de la vitesse de décroissance de la probabilité $\nu_\rho(X_t = 0)$ en $\rho = 1/2$ et que la décroissance soit de l'ordre de $t^{-1/2}$ pour tout $\rho < 1/2$ (dans le cas où l'on suit la trajectoire d'une particule marquée, on peut tout à fait envisager que la décroissance soit de l'ordre de $t^{-1/2}$ pour tout $\rho < 1/2$, mais cela n'est pas clairement mis en évidence lorsque le temps étudié n'excède pas 2000, et il serait nécessaire de la simuler le système sur un temps plus long).

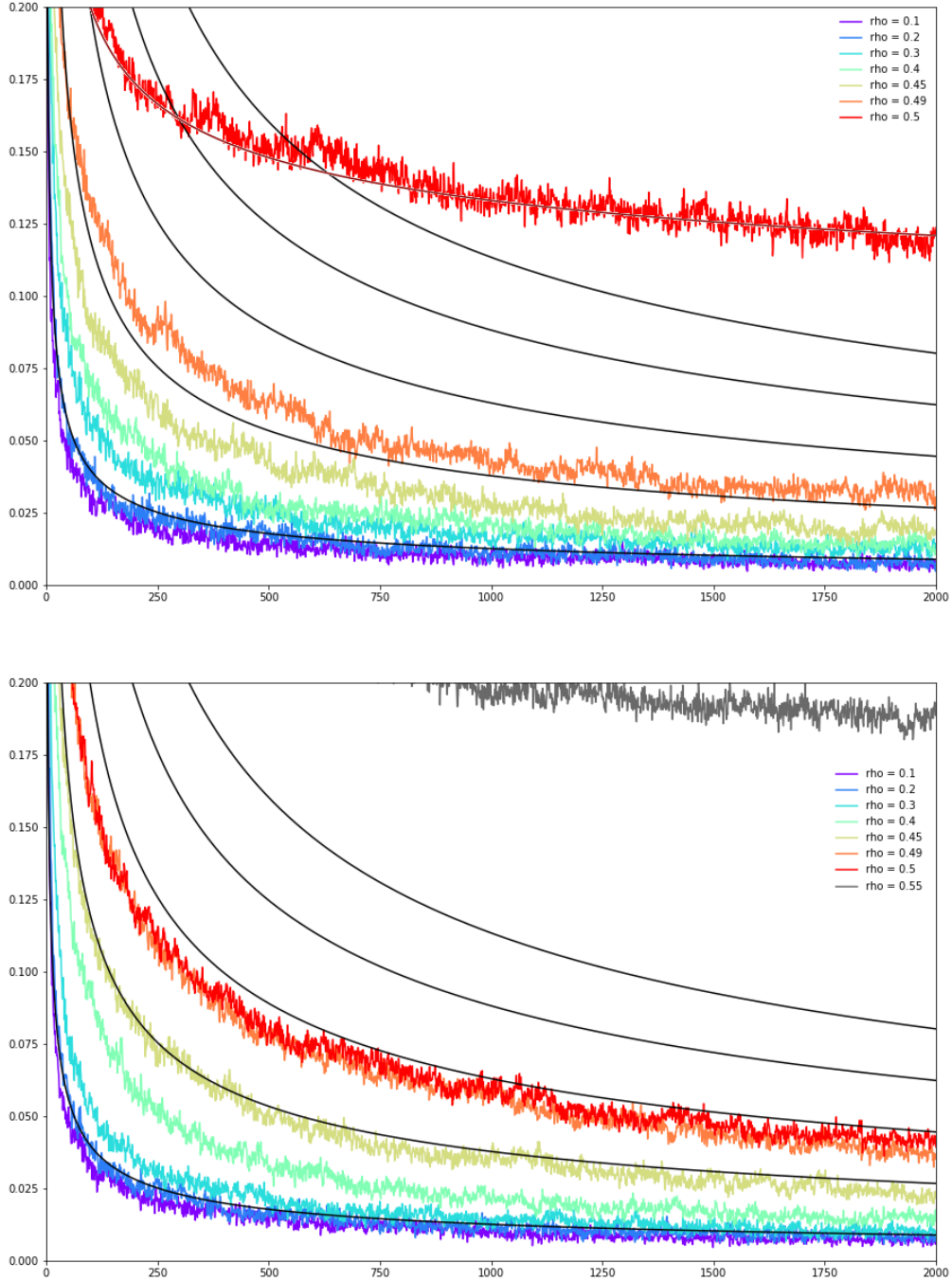


Figure 4: Le temps est représenté sur l'axe des abscisses. Le premier graphique représente la probabilité $\nu_\rho(X_t = 0)$, où X_t est la position au temps t de la variable aléatoire $\eta(0)$; et le second graphique représente la probabilité $\nu_\rho(X_t = 0 | \eta(0) = 0)$, où X_t est la position au temps t de $\eta(0)$ conditionné à $\eta(0) = 0$. Les courbes noires représentent les fonctions $t \mapsto c/\sqrt{t}$ pour différentes valeurs de c . La courbe rouge foncé représente la fonction $\frac{c}{\ln(t)}$ avec $c = \nu_{1/2}(X_{2000} = 0) \cdot \ln(2000)$. Chacune des approximations porte sur 8000 sites et 5000 réalisations.

A Quelques résultats

A.1 Probabilité d'absorption d'une chaîne de Markov

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace dénombrable I .

Pour tout $k \geq 0$: $p_{i,j} = \mathbb{P}(S_{k+1} = j \mid S_k = i)$.

Soit $A \subset I$, on pose $T := \inf\{k \geq 0 : S_k \in A\}$ et $h_i := \mathbb{P}^i(T < \infty) = \mathbb{P}(T < \infty \mid S_0 = i)$.

Proposition A.1. $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est la solution minimale positive (au sens où si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une autre solution, alors, $x_i \geq h_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$) du système:

$$\begin{cases} h_i = \sum_{j \in I} p_{i,j} h_j & \text{si } i \notin A \\ h_i = 1 & \text{si } i \in A \end{cases}$$

Démonstration. Si $X_0 = i \in A$, alors $T = 0$ et $h_i = 1$. Si $X_0 = i \notin A$, par la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} h_i &= \mathbb{P}^i(T < \infty) = \sum_{j \in I} \mathbb{P}^i(T < \infty, S_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} \mathbb{P}^i(T < \infty \mid S_1 = j) \mathbb{P}^i(S_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} p_{i,j} h_j \end{aligned}$$

Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une autre solution du système, alors, $x_i = 1 \forall i \in A$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in I} p_{i,j} x_j = \sum_{j \in A} p_{i,j} + \sum_{j \notin A} p_{i,j} x_j = \sum_{j \in A} p_{i,j} + \sum_{j \notin A} p_{i,j} \left(\sum_{k \in A} p_{j,k} + \sum_{k \notin A} p_{j,k} x_k \right) \\ &\vdots \\ &= \mathbb{P}^i(S_1 \in A) + \cdots + \mathbb{P}^i(S_1 \notin A, \dots, S_{n-1} \notin A, S_n \in A) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{n-1},j_n} x_{j_n} \\ &\geq \mathbb{P}^i(T \leq n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_i. \end{aligned}$$

□

A.2 Une version locale du théorème central limite

Soit Φ et ϕ la fonction de répartition et la densité de probabilité de la loi normale standard (i.e. $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$).

Théorème A.2. (cf. [5]) Soit $X_i, i \geq 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et un entier n_0 tels que $\forall n \geq n_0$: pour plus de αn entiers $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\max_k \left(\mathbb{P}(X_j = k) \wedge \mathbb{P}(X_j = k+1) \right) > \alpha$. Supposons également qu'il existe $a_n, b_n, n \geq 1$ tels que $c\sqrt{n} < b_n < C\sqrt{n}$, pour deux constantes positives c et C , et tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - a_n}{b_n} < t\right) = \Phi(t)$, $-\infty < t < \infty$. Alors,

$$\sup_k \left| b_n \mathbb{P}(S_n = k) - \phi\left(\frac{k - a_n}{b_n}\right) \right| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

A.3 Théorème central limite pour les fonctions additives de processus de Markov

Soit $(\xi_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov défini sur un espace d'état Ω , et réversible par rapport à une mesure π .

Théorème A.3. (cf. [8] Théorème 1.8) Supposons que π soit invariante et ergodique par rapport au générateur \mathcal{L}_0 du processus ξ_t . Soit j une fonction sur l'espace d'états telle que $\int j^2 d\nu_\rho^* < \infty$ et $\int j d\nu_\rho^* = 0$. Supposons de plus que j vérifie: pour toute fonction test $\phi \in L^2(\pi)$, il existe une constante c telle que

$$\left| \int j \phi d\pi \right| \leq c \left(\int -\phi \mathcal{L}_0 \phi d\pi \right)^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Alors, il existe une martingale M_t de carré intégrable par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_s : 0 \leq s \leq t)$ telle que M_t a des accroissements stationnaires et

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{|X_s - M_s|}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0, \text{ avec } X_0 = M_0 = 0, \quad X_t = \int_0^t j(\xi_s) ds$$

De plus, pour une telle martingale, on a

$$\frac{1}{t} \int |X_t - M_t|^2 d\mathbb{P} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Corollaire A.4. (cf. [8] Corollaire 1.9, et [7] Théorème 1)

Sous les mêmes hypothèses que le théorème A.3, et pour D défini par (3.6):

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_{\lambda t} = (2D)^{1/2} B_t$$

au sens faible sur l'espace $D([0, \infty), \mathbb{R})$ des fonction càdlàg de $[0, \infty)$ vers \mathbb{R} , avec B_t le mouvement brownien standard.

Références

- [1] C. Toninelli, N. Cancrini, F. Martinelli, C. Roberto. *Kinetically constrained lattice gases*. Communications in Mathematical Physics, Springer Verlag, 2010.
- [2] T. M. Liggett. *Interacting particle systems*. Reprint of the 1985 Edition. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [3] T. E. Harris. *Nearest-neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices*. Advances in Math., 1972
- [4] T. Seppäläinen. *Translation Invariant Exclusion Processes (Book in Progress)*. 2005
- [5] Davis, B., McDonald, D. *An elementary proof of the local central limit theorem*. J Theor Probab 8, 693–701 (1995). <https://doi.org/10.1007/BF02218051>
- [6] Arratia, R., *The motion of a tagged particle in the simple symmetric exclusion system in* Z. Ann. Probab. 11, 362-373 (1983)
- [7] Spohn, Herbert., *Tracer diffusion in lattice gases*. J. Statist. Phys. 59 (1990), no. 5-6, 1227–1239
- [8] Kipnis C., Varadhan S.R.S. : *Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions*. Comm. Math. Phys. 104 (1986), 1–19
- [9] A.Faggionato, F. Martinelli, C.Roberto, C. Toninelli. *The East model: recent results and new progresses*. Markov Processes and Related Fields, Vol. 19, Issue 3, 407-452 (2012); arXiv 1205.1607v1
- [10] L.Berthier, G.Biroli. *Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials*. Rev. Mod. Phys. 83, 587 (2011); arXiv: 1011.2578v2
- [11] F. Ritort, P. Sollich. *Glassy dynamics of kinetically constrained models*. Advances in Physics 52 (2003), no. 4, 219–342.