

מיס' מחברת:

---

---

מספר זהות:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|



סמסטר : א' תשע"ה, מועד : א'

תאריך: יומם ב' 2.02.2015

שעה: 14:00

## **משך הבדיקה : שלוש שעות**

אסור שימוש בכל חומר עזר

**פתרונות חלקו לבחינה בקורס: "חישוביות"**

## **מראות: ד"ר שרון שוחט בוכבינדר**

שלומית אריאן

## מדבקית ברקוד

**שאלה 1 (24 נק')**

בשאלה זו עלייכם להזכיר ביעיגול את התשובות הנכונות. אין צורך בנימוק.

א. בסעיף זה נדון בבעיה  $\text{HALT}_{all} = \{p \in \text{WHILE-prog} \mid \forall d \in \mathbb{D} \llbracket p \rrbracket d \downarrow\}$

לכל אחת מהטענות הבאות סמן האם היא נכונה או לא. שווי כל תת-סעיף 3 נק'.

.1. מקיים את תנאי משפט ריסס.

**לא נכון** / **נכון**

$\text{HALT}_{all} \in NP$  .2

**לא נכון** / **נכון**

$\text{HALT}_{all} \in NP-hard$  .3

**לא נכון** / **נכון**

$PRIME \leq_p \text{HALT}_{all}$  .4

**לא נכון** / **נכון**

ב. תהי  $L$  שפה ותהי  $\mathbb{D} \rightarrow f:L\text{-prog}$  פונקציה חלקית (כלומר: האיברים בתחום של  $f$  הם

תוכניות בשפה  $L$ ). נניח ש-  $f$  מקיים את תנאי הלבסו.

לכל אחת מהטענות הבאות סמן האם היא נכונה או לא. שווי כל תת-סעיף 3 נק'.

.1. אם  $L$  מלאה-סבירה אזי בהכרח  $f$  אינה חשיבה-ב- $L$ .

**לא נכון** / **נכון**

.2. אם  $L$  אינה מלאה-סבירה אזי בהכרח  $f$  אינה חשיבה-ב- $L$ .

**לא נכון** / **נכון**

.3.  $f$  היא בהכרח פונקציה חלקית ממש.

**לא נכון** / **נכון**

$\forall p \in L\text{-prog} \exists d \in \mathbb{D}: f(d) \neq \llbracket p \rrbracket d$  .4

**לא נכון** / **נכון**

**שאלה 2 (25 נק')**

בשאלה זו נדונו במקבע ל-  $F^{1\text{param}}$  הכתוב ב-  $F^{1\text{param}}$  מוגדרת כמו  $F$  פרט לכך שלפונקציית העזר יש פרמטר אחד בלבד.

א. (5 נק') רשמו את המשוואה הסמנטית של מקבע fix ל-  $F$ -הכתוב ב-  $F$ .

בנסיבות הבאים תדרשו למשתמש במקבע ל-  $F^{1\text{param}}$  הכתוב ב-  $F^{1\text{param}}$ .

ענו על הסעיפים הבאים **בהתאם למקבע שאותם מציעים**.

ב. (5 נק') תהיו  $d$  התכנית הבאה (בשפת  $F^{1\text{param}}$  בתחריב קונקרטי) :

```
p = ( (if (var nil)
        (hd (var nil))
        (call (tl (var nil))) )
      (hd (var nil1)) )
      .(p.d) .d = (nil.nil)
```

```
( (if (quote (nil.nil))
      (hd (quote (nil.nil))))
      (call (tl (quote (nil.nil)))) )
      (hd (var nil1)) )
```

ג. (15 נק') ממשו את המקבע בשפת  $F^{1\text{param}}$ .

i. תארו את רעיון המימוש בקצרה.

நலிப் கல்மூடு விடையில் X என்ற பெயரில் மாறுவதை சொல்ல வேண்டும். அதைப் போன்று பொதுமாக மூடுவதை விடையில் கொடுவது வேண்டும்.

ii. כתבו את המקבע בתחביר מופשט של  $F^{1\text{param}}$  (ניתן להשתמש בממתקים תחביריים). שימו לב כי הקלט של המקבע כתוב בתחביר קונקרטי.

read PD; write list f(cons (hd hd PD) (tl PD)) (hd tl hd PD)

where  $f(ED) = \text{case } (hd ED) \text{ of}$

- (var nil) => list "quote" (tl ED)
- (quote X) => hd ED
- (hd E1) => list "hd" f(cons E1 (tl ED))
- (tl E1) => list "tl" f(cons E1 (tl ED))
- (cons E1 E2) => list "cons" f(cons E1 (tl ED))
  - f(cons E2 (tl ED))
- (if E E1 E2) => list "if" f(cons E (tl ED))
  - f(cons E1 (tl ED))
  - f(cons E2, (tl ED))
- (call E1) => list "call" f(cons E1 (tl ED))

הערה: אפשר גם לכתוב במקום השורה

(quote X) => hd ED

את השורה

X => X

כשורה אחרת (default)

**שאלה 3 (31 נק')**

תהי  $\mathbb{D} \subseteq S$  קבוצה של עצים. נגדיר את בעיית ההחלטה הבאה :

$$A_S = \{ p \in \text{WHILE-prog} \mid \forall d \in S : [[p]]d \downarrow \}$$

בכל אחד מהסעיפים קבעו מהי מחלוקת החישוביות הקטנה ביותר אליה שייכת  $A_S$  והוכחו תשובהכם.

א. (6 נק')  $S$  היא קבוצה ריקה.

**הקיימו את התשובה הנכונה:**

$$A_S \in \overline{RE \cup coRE}$$

$$A_S \in coRE \setminus R$$

$$A_S \in RE \setminus R$$

$$A_S \in R$$

**הוכחה:**

לכל תכנית  $p$  התנאי מתקיים באופן ריק, לכן  $A_S = \text{WHILE-prog}$  ולכן היא ב- $R$ .

שימוש לב שהעובדת  $S$ - $A_S$  היא קבוצה ריקה לא אומר ש- $A_S$  קבוצה ריקה !!!

ב. (15 נק') S היא קבוצה סופית אך לא ריקה.

**הקיפו את התשובה הנכונה:**

$$A_s \in \overline{RE} \cup co\overline{RE}$$

$$A_s \in coRE \setminus R$$

$$A_s \in RE \setminus R$$

$$A_s \in R$$

**הוכחה:**

**As ב-RE:**

נראת תכנית הכרעה חלקית:

על קלט מהצורה  $p$ , נרץ את  $p$  (בעזרת מפרש) על כל העצים ב-S בזיה אחר זה. אם כל הריצות הסתיימו נחזיר True. שימו לב שאין שום צורך בritchא לסרוגין, כיון שאם אפילו ריצה אחת לא הסתיימה, אנחנו מעוניינים שהתוכנית שלנו לא תעוצר. יש כמובן להוכיח את נכונות התכנית.

**As לא ב-R:**

משפט ריס (יש להוכיח כי מתקיימות כל הדרישות)

ג. (10 נק')  $S = \{d \mid \#d \geq 100\}$  היא הקבוצה הבאה:

**הקיפו את התשובה הנכונה:**

$$A_s \in \overline{RE} \cup co\overline{RE}$$

$$A_s \in coRE \setminus R$$

$$A_s \in RE \setminus R$$

$$A_s \in R$$

**הוכחה:**

ההוכחה מ-  
HALTall-  
ההוכחה 'p → p'  
כאשר 'p מוגדרת באופן הבא:

read X

X := tl ... tl X ; // 100 applications of tl

Cp

write Y

עיצירה – ברורה

תקיפות:

אם p ב-HALTall או גם 'p עוצרת לכל קלט ולבן בודאי גם עוצרת לכל הקלטים ב-S. לכן 'p נמצאת ב-As.

אם p לא ב-HALTall או קיים d ש-p לא עוצרת עליו. נסמן  $(d_1 \dots d_n) = d$ . נתבונן על  $(d' \dots d_n) = d'$  שבו 100 האיברים הראשונים הם nil. האורך של 'd' הוא לפחות 100 שכן הוא ב-S ובנוסף כ-sh-'p מקבלת את 'd' קלט היא מרים את p על d ולבן לא עוצרת. ככלומר קיים עץ ב-S ש-'p לא עוצרת עליו שכן 'p לא ב-As.

יש עוד רדוקציות אפשריות.

ובודאו שגם מבנים מדוע משפט ריס 2 לא תקף כאן !!!

**שאלה 4 (20 נק')**

תזכורת: מעגל פשוט בגרף הוא מעגל העובר בכל צומת פעם אחת לכל היותר.

נגידר את בעיית ההכרעה הבאה (כאשר  $G$  מצין גרף לא מכוון):

$$A = \{G \text{ ב } G \text{ יש מעגל פשוט העובר במחצית הצמתים לפחות} | G\}$$

א. (10 נק') הוכחו כי  $A \in NP$ .

נראה אלג' א"ד פול' לזיהוי  $A$ .

הניחסוש יכול 2 מרכיבים:

א. מספר הצמתים במעגל.

ב. קבוצה סדורה של קדוקדים שתציג את קדוקדי המעל לפי סדר הופעתם במעגל.

על קלט  $G$  בעל  $n$  צמתים:

1. נמספר את צמתים  $G$  ב-1 עד  $n$ .
2. נפעיל את  $guess(n)$  ונסמן את מספר האחדים ב- $k$ . (זהו מספר הצמתים במעגל).
3. אם  $k < n/2$  נחזיר `false`.
4. אחרת, עברו ? מ-1 עד  $k$ : נפעיל את  $guess(n)$  ונשмарו את מספר האחדים ב-[i].
5. נבדוק האם  $[A[1]...A[k]]$  כוללם חזות (או את הסירה 0). אם כן – נחזיר `true`.
6. נבדוק האם רישימת הצמתים  $A[1]...A[k]$  מהווה מעגל (כלומר האם בין כל זוג צמתים סמוכים יש קשת, כולל האחרון והראשון). אם כן – נחזיר `True`. אחרת – נחזיר `false`.

הערה: בחירת הקבוצה הסדורה של קדוקדי המעל (4) יכולה להתבצע גם באופן הבא:

עבור ? מ-1 עד  $k$ : נפעיל את  $n \log(n)$  guess( $n$ )  
במקרה זה הניחסוש מייצג את שם הקדוקוד.

וודאו שאתם מבינים מדוע ניחוש של קבוצת קדוקדים שאיינה סדורה לא מספיק כאן !!!

יש להוכיח נכונות ולנתח ייעילות.

ב. (10 נק') הוכיחו כי A היא NP-קשה.

נראה רדוקציה פולינומיאלית מ-HAMILTON:  
בහינתן גראף G נשכפל את G ונחזיר את התוצאה.

יש להוכיח כי זו אכן רדוקציה פולינומיאלית.

כיוון שראינו שהHAMILTON הינו NP-קשה, maka קיומו הרדוקציה נסיק שגם A היא NP-קשה.

## דף עזר: טבלאות תחביר

תחביר מופשט לשפת  $F^{1\text{param}}$ :

Program ::= read X ; write E where f(X<sub>1</sub>) = B

E, B, E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub> ∈ Expression ::= d

- | X
- | hd E
- | tl E
- | cons E<sub>1</sub> E<sub>2</sub>
- | if E then E<sub>1</sub> else E<sub>2</sub>
- | f (E<sub>1</sub>)

X, X<sub>1</sub> ∈ Parameter

d ∈ D

תחביר קונקרטי לשפת  $F^{1\text{param}}$ :

Program: read X ; write E

where f(X1) = B = ( E B )

Expressions: d = ( quote d )

X = ( var nil )

Xi = ( var nil<sup>i</sup> )

hd E = ( hd E )

tl E = ( tl E )

cons E1 E2 = ( cons E1 E2 )

if E then E1 else E2 = ( if E E1 E2 )

f(E1) = ( call E1 )