Comenzado el	Thursday, 29 de June de 2023, 21:33
Estado	Finalizado
Finalizado en	Thursday, 29 de June de 2023, 22:49
Tiempo empleado	1 hora 16 minutos
Calificación	**10,00** de 10,00 (**100**%)

Pregunta **1**

Correcta

Se puntúa 10,00 sobre 10,00

La previsión de tiempo en las ciudades de una provincia se modeliza usando un modelo simple que determina si lloverá, estará nublado o hará sol, solamente teniendo en cuenta el tiempo del día anterior. En este caso, el modelo nos dice que:

- un día soleado tiene una probabilidad del 80 % de que siga siendo soleado el día siguiente
- un día lluvioso tiene una probabilidad del 70 % de que siga lloviendo el día siguiente
- los días soleados y lluviosos no pueden ser consecutivos
- la probabilidad que un día nublado siga siendo nublado coincide con la distancia normalizada de la ciudad a un centro de referencia. Esta probabilidad la denotamos por r
- finalmente, la probabilidad de que un día nublado pase a ser lluvioso o soleado es la misma.

En este caso, sabemos que la matriz de transición de la cadena de Markov asociada al modelo meteorológico es una matriz irreductible y primitiva, de forma que se verifica la Proposición 5.1.2. de "Introducción a la teoría de matrices positivas. Aplicaciones" (página 96).

1. Escribir la matriz de transición A (en función del parámetro r)

A=

$$\begin{array}{l} \text{lluvioso} \\ \text{nublado} \\ \text{soleado} \end{array} \begin{bmatrix} 7/10 & -1/2*r+1/2 & 0 \\ 3/10 & r & 2/10 \\ 0 & -1/2*r+1/2 & 8/10 \end{bmatrix}$$

NOTA: en este caso, la notación para la matriz de transición es la que se detalla en el módulo "Modelos matriciales: cadenas de Markov. Problemas para la ciencia de datos". Es decir, la suma de los elementos de cada columna debe ser 1.

2. Sabemos que en una ciudad hoy es un día nublado y que la predicción para mañana es de: 14 % lluvioso, 72 % nublado y 14 % soleado. ¿Cuál es la distancia normalizada de esta ciudad al punto de referencia?

r = 18/25

3. Sabemos que en otra ciudad su estado estacionario es: $\frac{1400}{47}$ % de días lluviosos, $\frac{1200}{47}$ % de días nublados y $\frac{2100}{47}$ % de días soleados. ¿Cuál es la distancia normalizada de esta ciudad al punto de referencia?

r = 3/10

4. Sabemos que si una matriz de transición de una cadena de Markov es irreductible y primitiva, su distribución estacionaria es independiente de la distribución de probabilidad inicial. En este caso

$$A_{est} = \lim_{k \to +\infty} A^k$$

es una matriz de columnas constantes dada por el vector propio de valor propio 1 normalizado. Considerad la matriz A asociada a una ciudad con distancia normalizada al punto de referencia r=$\frac{1}{2}$. Calculad en este caso la matriz A_{est}.

A_{est}=

$$\begin{bmatrix} 10/37 & 10/37 & 10/37 \\ 12/37 & 12/37 & 12/37 \\ 15/37 & 15/37 & 15/37 \end{bmatrix}$$

Comprobar que si calculáis A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 ... obtenemos en el límite una matriz de columnas constantes, donde las columnas coinciden con el vector propio de valor propio 1 normalizado.

FORMATO DE LAS RESPUESTAS: Todas las respuestas se tienen que dar expresadas de forma exacta en formato de fracción. Si la respuesta es un número escribiremos, por ejemplo 5/12. Si la respuesta depende del parámetro r, escribiremos por ejemplo 4-2*r/3.

Apartado 1

La matriz de transición asociada a la predicción meteorológica es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & r & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Apartado 2

Un día nublado está asociado al vector (0,1,0), con lo que la predicción para el día siguiente se obtiene mediante:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & r & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} \\ r \\ -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para hallar el parámetro r debemos resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con una incógnita (multiplicando por 100 para comparar tantos por ciento)

$$-50\cdot r+50=14 \quad , \quad 100\cdot r=72 \quad , \quad -50\cdot r+50=14$$

con lo que r = $\frac{18}{25}$.

Apartado 3

El estado estacionario en este caso, como la matriz de transición es una matriz irreductible y primitiva, viene dado por el vector propio de valor propio 1. Por lo tanto, en este caso sabemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & r & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2}\cdot r+\frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\frac{1400}{47}}{100} \\ \frac{\frac{1200}{47}}{100} \\ \frac{\frac{2100}{47}}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1400}{47}}{100} \\ \frac{\frac{1200}{47}}{100} \\ \frac{\frac{2100}{47}}{100} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{6}{47}\cdot r+\frac{79}{235} \\ \frac{12}{47}\cdot r+\frac{42}{235} \\ -\frac{6}{47}\cdot r+\frac{114}{235} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{47} \\ \frac{12}{47} \\ \frac{21}{47} \end{pmatrix}$$

con lo que $r=\frac{3}{10}$.

Apartado 4

Para calcular la matriz A_{est} necesitamos calcular el vector propio de valor propio 1. En este caso

$$A=\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

El vector propio de valor propio 1 lo hallamos resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e imponiendo $x_1+x_2+x_3=1$, de donde obtenemos $x_1=\frac{10}{37}$, $x_2=\frac{12}{37}$, $x_3=\frac{15}{37}$.

Por lo tanto $A_{est}=\begin{pmatrix} \frac{10}{37} & \frac{10}{37} & \frac{10}{37} \\ \frac{12}{37} & \frac{12}{37} & \frac{12}{37} \\ \frac{15}{37} & \frac{15}{37} & \frac{15}{37} \end{pmatrix}$.

Para comprobar la teoría calculamos

$$A^2=\begin{pmatrix} 0.565 & 0.3 & 0.05 \\ 0.36 & 0.375 & 0.26 \\ 0.075 & 0.325 & 0.69 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0.4855 & 0.30375 & 0.1 \\ 0.3645 & 0.3425 & 0.283 \\ 0.15 & 0.35375 & 0.617 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 0.430975 & 0.29825 & 0.14075 \\ 0.3579 & 0.333125 & 0.2949 \\ 0.211125 & 0.368625 & 0.56435 \end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix} 0.3911575 & 0.29205625 & 0.17225 \\ 0.3504675 & 0.3297625 & 0.302545 \\ 0.258375 & 0.37818125 & 0.525205 \end{pmatrix}$$

$$A^6=\begin{pmatrix} 0.361427125 & 0.28688 & 0.19621125 \\ 0.344256 & 0.328134375 & 0.3079885 \\ 0.294316875 & 0.384985625 & 0.49580025 \end{pmatrix}$$

...

$$A^{10}=\begin{pmatrix} 0.299865507353125 & 0.2756909120625 & 0.24620359878125 \\ 0.330829094475 & 0.325516376484375 & 0.3190341691625 \\ 0.369305398171875 & 0.398792711453125 & 0.43476223205625 \end{pmatrix}$$

$$A^{20}=\begin{pmatrix} 0.272050215372029 & 0.270596302670017 & 0.268822814282634 \\ 0.32471556320402 & 0.324395987518649 & 0.324006167849067 \\ 0.403234221423951 & 0.405007709811334 & 0.407171017868299 \end{pmatrix}$$

$$A^{30}=\begin{pmatrix} 0.270377322104997 & 0.270289878946159 & 0.270183215439742 \\ 0.324347854735391 & 0.324328634387812 & 0.324305189332824 \\ 0.405274823159612 & 0.40538148666603 & 0.405511595227435 \end{pmatrix}$$

...

$$A^{100}=\begin{pmatrix} 0.270270270270575 & 0.270270270270326 & 0.270270270270023 \\ 0.324324324324391 & 0.324324324324337 & 0.32432432432427 \\ 0.405405405405034 & 0.405405405405337 & 0.405405405405708 \end{pmatrix}$$

donde vemos que las potencias de A tienden a

$$A_{est} = \begin{pmatrix} 0.27027027027027 & 0.27027027027027 & 0.27027027027027 \\ 0.324324324324324 & 0.324324324324324 & 0.324324324324324 \\ 0.405405405405406 & 0.405405405405406 & 0.405405405405406 \end{pmatrix}.$$

◄ RETO 4 - Tabla resumen de la Práctica 1

Ir a...

RETO 5 - Tabla resumen de la Práctica 2 ►