1. 함수 $f : R \to R$가 $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$을 만족한다고 하자. 그러면 $\lim_{x \to 0} (f(x))^2 = 1$임을 $\varepsilon - \delta$ 논법으로 증명하시오.

i) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$이므로 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $|x - 0| < \delta$이고 $|f(x) - 1| < \varepsilon$를 만족하는 δ가 존재한다.

ii) 답을 깔끔하게 만들기 위하여 ε를 적절하게 변형하여 δ들을 생성해 보자.

임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $|x - 0| < \delta_1$이고 $|f(x) - 1| < 1$를 만족하는 δ_1가 존재한다. → $0 < f(x) < 2$

임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $|x - 0| < \delta_2$이고 $|f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$를 만족하는 δ_2가 존재한다.

iii) $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$라고 잡으면

$|f(x)^2 - 1| = |f(x) + 1||f(x) - 1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$이다.

ii) $\lim_{x \to 0} (f(x))^2 = 1$임을 증명해보자.

임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $|x - 0| < \delta$이고 $|f(x)^2 - 1| < \varepsilon$를 만족하는 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$라고 잡으면 충분하다.

2. 다음 극한을 계산하시오.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(3n)!}{(2n)!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

i) 지수에 $\dfrac{1}{n}$이 있으므로 지수꼴로 변경해서 푸는게 생각난다.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(3n)!}{(2n)!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\frac{(3n)!}{(2n)!n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+2}{n}\right)\cdots\left(\frac{2n+n}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln(2+x)dx}=e^{\int_2^3\ln x\,dx}$

$=e^{x\ln x-x|_2^3}=e^{3\ln 3-2\ln 2-1}=\dfrac{27}{4e}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+7}\cos(\ln(x+7))-\sqrt{x+5}\cos(\ln(x+5))\right)$

i) 형태를 보면 $\dfrac{f(x+7)-f(x+5)}{(x+7)-(x+5)}=f'(c)\ \to\ f(x+7)-f(x+5)=2f'(c)$꼴이다.

시험장에서 위의 함수가 규칙성이 있게 생겼고 차가 일정해서 출제가 자주되는 평균값정리라고 생각함.

따라서 $f(x)=\sqrt{x}\cos(\ln x)$라고 하자.

ii) 또한 f는 구간 $[x+5,x+7]$에서 연속이고, 구간$(x+5,x+7)$ 위에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의해 $f(x+7)-f(x+5)=2f'(c)$를 만족하는 $c\in(x+5,x+7)$가 존재한다.

$f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}\cos(\ln c)-\dfrac{1}{\sqrt{c}}\sin(\ln c)=\sqrt{\dfrac{1}{4c}+\dfrac{1}{c}}\sin(\ln c+\alpha)=\sqrt{\dfrac{1}{5c}}\sin(\ln c+\alpha)$이므로

$-\sqrt{\dfrac{1}{5c}}\leq f'(c)\leq\sqrt{\dfrac{1}{5c}}$이다.

iii) $-\sqrt{\dfrac{1}{5(x+5)}}\leq\sqrt{x+7}\cos(\ln(x+7))-\sqrt{x+5}\cos(\ln(x+5))=f'(c)\leq\sqrt{\dfrac{1}{5(x+5)}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{5(x+5)}}=0$ & $\lim\limits_{x\to\infty}-\sqrt{\dfrac{1}{5(x+5)}}=0$이므로 조임정리에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+7}\cos(\ln(x+7))-\sqrt{x+5}\cos(\ln(x+5))\right)=0$이다.

3. 라그랑주 승수법을 사용해서 $x+y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=11$일 때 $f(x,y,z)=2x+2y+z^2$의 최댓값을 구하시오.

i) $f(x,y,z)=2x+2y+z^2$
$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$
$h(x,y,z)=x+y+z$

ii) 식이 3개고 변수가 3개이므로 행렬로 쉽게 풀자.

$$\begin{vmatrix} \nabla f \\ \nabla g \\ \nabla h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2z \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4y+4xz+4z-4yz-4z-4x=0$$

$\rightarrow$ $y+xz-yz-x=y(1-z)-x(1-z)=(1-z)(y-x)=0$

$\rightarrow$ $z=1$, $y=x$일때 극대 or 극소

iii) 최댓값 찾기

(1) $z=1 \rightarrow h=x+y=2$이므로 $f(x,y,z)=2x+2y+z^2=5$

(2) $y=x \rightarrow h=2x+z=3 \rightarrow \underline{z=3-2x}$

$$g=2x^2+z^2=11 \quad \rightarrow \quad 2x^2+(3-2x)^2=11 \rightarrow 3x^2-6x-1=0 \rightarrow x=\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $(x,y,z)=\begin{cases} \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right) \\ \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$

이때 이것을 f에 대입할 것인데 무작정 넣을것인가? NONO 적절하게 준식을 변형하여 계산실수를 방지하자.

$$f(x,y,z)=2x+2y+z^2=4x+z^2=z^2-2z+6=(z-1)^2+5=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+5=\frac{16}{3}+5=\frac{31}{3}$$

$\therefore f_{\max}=\frac{31}{3}$

$h=2x+z=3$
$2x=3-z$를 대입

4.

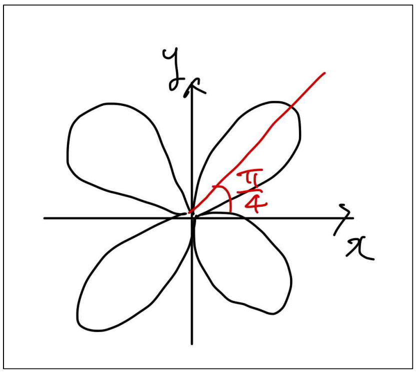
(a) 좌표평면 위에서 방정식 $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$이 나타내는 그래프를 그리고 극좌표를 표현하시오.

i) 극좌표라는 얘기가 있으므로 우리는 자연스럽게 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$를 대입하면 된다.

$(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2 \;\rightarrow\; r^6 = 4r^4\sin^2\theta\cos^2\theta \;\rightarrow\; r^2 = \sin^2 2\theta \;\rightarrow\; r = \pm\sin 2\theta$이다.

그런데 $r = -\sin 2\theta$는 $r = \sin 2\theta$의 x축 대칭이므로 $r = \sin 2\theta$만 그리면 된다.

ii) $r = \sin 2\theta$는 잎이 4개, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$에서 최대이다. 이것을 그래프로 그려보면



(b) (a)에 주어진 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\,d\theta = [\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}]]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

5. 자연수 n에 대하여 $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$일 때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 절대수렴하는지 판정하시오.

i) 절대수렴하냐고 물어봤으니까 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$을 판정해야 한다.

ii) a_n 분석하기(구간에 따라 피적분함수가 변하므로 n에 대해서 쪼개줘서 생각해 보자.)

n이 짝수 : $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \geqq 0$ 이다.

n이 홀수 : $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leqq 0$ 이다.

$\therefore\ (-1)^n a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = |a_n|$이 성립한다.

iii) $|a_n| = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \geqq (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{(n+1)\pi} dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\pi} [\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi}$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\pi} ((-1)^{n+1} - (-1)^n) = \frac{2}{(n+1)\pi}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$ 에서 우변은 p급수 판정법에 의하여 발산하므로 비교판정법에 의하여 발산한다.

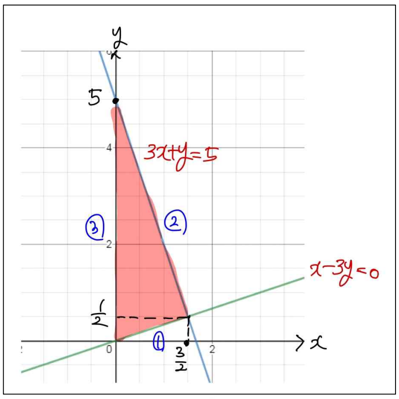
6. 다음 적분을 계산하시오.

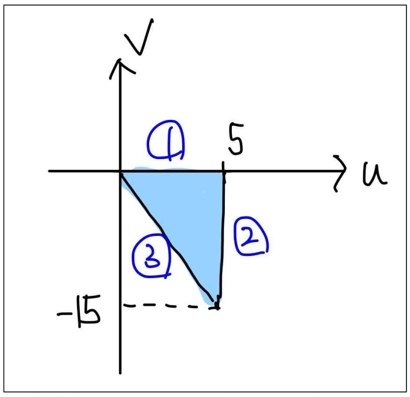
(a) $\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{3y} e^{\frac{x-3y}{3x+y}}dxdy+\int_{\frac{1}{2}}^{5}\int_0^{\frac{5-y}{3}} e^{\frac{x-3y}{3x+y}}dxdy$

i) $e^{\frac{x-3y}{3x+y}}$를 보면 너무 더러워서 적분을 할 수 없으므로 $\begin{cases}3x+y=u\\x-3y=v\end{cases}$ 로 치환하자.

ii) $J(x,y)=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & -3\end{vmatrix}=|-10|=10 \rightarrow J(u,v)=\frac{1}{10}$

iii) 적분구간 찾기(튜터 TIP : 꼭짓점 찾고 직선 찍!)



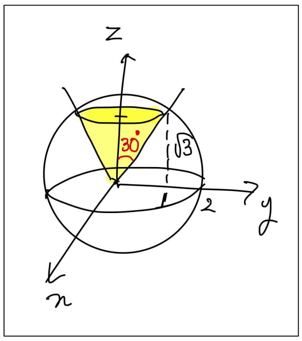


좌표변환
① $(0,5)\rightarrow(5,-15)$
② $(0,0)\rightarrow(0,0)$
③ $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\rightarrow(5,0)$

iv) $\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{3y} e^{\frac{x-3y}{3x+y}}dxdy+\int_{\frac{1}{2}}^{5}\int_0^{\frac{5-y}{3}} e^{\frac{x-3y}{3x+y}}dxdy=\frac{1}{10}\int_0^5\int_{-3u}^{0}e^{\frac{v}{u}}dvdu=\frac{1-e^{-3}}{10}\int_0^5 udu=\frac{5(1-e^{-3})}{4}$

(b) $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$

i) 적분구간을 보면 구이므로 구면좌표계를 사용하자.



ii) 그래프 그리기

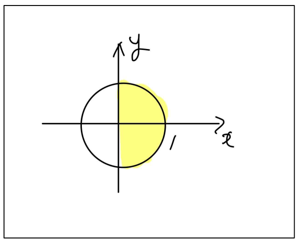
$z=\sqrt{4-x^2-y^2} \rightarrow x^2+y^2+z^2=4 \rightarrow$ 양의 구

$z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \rightarrow z^2=3(x^2+y^2) \rightarrow$ 양의 원뿔

양의 구의 z^2에 대입하면 $x^2+y^2=1$이 튀어나온다. 따라서 교점은 $z=\sqrt{3}$이다.

iii) 정사영 면적 분석

절반만 적분해야겠다라고 생각해야함



iv) $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^2\rho^3\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$

$=\pi[\frac{\rho^4}{4}]_0^2[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{6}}=(4-2\sqrt{3})\pi$

7. 벡터장 $F(x,y,z) = \ <2e^{2x}(y^3+\cos z), 3e^{2x}y^2, -e^{2x}\sin z>$와 곡선 $C: r(t) = \ <\cos t, \sin t, t>$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) F가 보존장임을 증명하시오.

$$curlF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 2e^{2x}(y^3+\cos z) & 3e^{2x}y^2 & -e^{2x}\sin z \end{vmatrix} = 0$$이므로 보존장이다.

(b) 선적분 $\int_C 2e^{2x}(y^3+\cos z)dx + 3e^{2x}y^2dy - e^{2x}\sin z dz$의 값을 구하시오.

i) 우선 (a)에서 F가 보존장인것을 알게되었으므로 포텐셜함수가 존재한다.

$\int f_x dx = e^{2x}(y^3+\cos z)$

$\int f_y dy = e^{2x}y^3$

$\int f_z dz = e^{2x}\cos z$

$\rightarrow \ f(x,y,z) = e^{2x}(y^3+\cos z)$

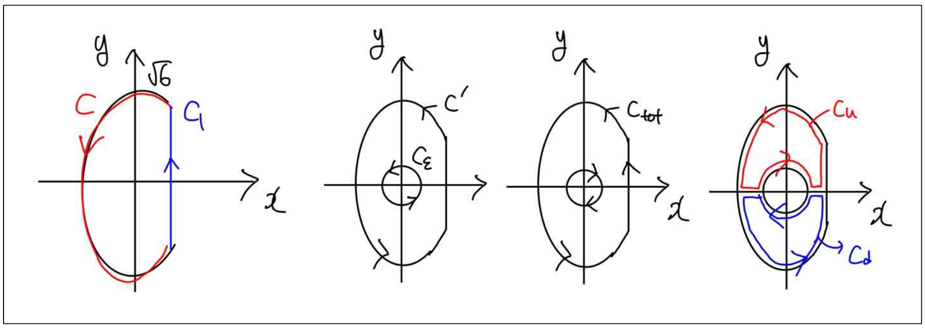
ii) $r(t=0) = (1,0,0)$

$r(t=\pi) = (-1,0,\pi)$

iii) $\int_C 2e^{2x}(y^3+\cos z)dx + 3e^{2x}y^2dy - e^{2x}\sin z dz = \int_C F \bullet \ dr = f(-1,0,\pi) - f(1,0,0) = -e^2 - e^{-2}$

8. 곡선 C는 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$을 따라서 $(1,\sqrt{3})$에서 $(1,-\sqrt{3})$까지 반시계방향으로 이동하는 단순 곡선이다.

벡터장 $F(x,y)=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$에 대하여 선적분 $\int_C F\cdot dr$의 값을 구하시오.



[그림 1]

우선 타원을 그린뒤 곡선 C의 궤적과 점 $(1,\sqrt{3})$에서 $(1,-\sqrt{3})$을 y축으로 이동하는 곡선 C_1을 상상해보자.

그러면 $C_1=(1,t)$, $(-\sqrt{3}\leq t\leq\sqrt{3})$ 라고 정의할 수 있다.

[그림 2]

$C'=C+C_1$라고 해보자. → $\int_{C'}F\cdot dr$ 은 벡터장 F가 원점에서 분모가 0이되기 때문에 불연속이 된다.

따라서 원점을 뚫어줘야한다.

[그림 3]

$C_{tot}=C'-C_\varepsilon$라 하면 F는 연속이 되므로 선적분이 가능해진다.

(단, $C_\varepsilon : r_\varepsilon(t)=(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)$) ($r$보다 ε이 작은 수를 의미하기 때문에 적당할 것 같다.)

[그림4]

i) 반시계방향으로 회전하는 원점을 뚫고 위를 반시계로 회전하는 곡선을 C_u라고 하자.

반시계방향으로 회전하는 원점을 뚫고 아래를 반시계로 회전하는 곡선을 C_u라고 하자.

ii) $\int_{C_{tot}}F\cdot dr=\int_{C'}F\cdot dr-\int_{C_\varepsilon}F\cdot dr=\int_{C_u}F\cdot dr+\int_{C_d}F\cdot dr$

iii) C_d는 폐곡면이므로 그린정리에 의하여 $\int_{C_d}F\cdot dr=\iint_S N_x-M_y dA=0$

ii)에 의하여 $\int_{C_{tot}}F\cdot dr=\int_{C'}F\cdot dr-\int_{C_\varepsilon}F\cdot dr=0$

$$\int_{C'}F\cdot dr=\int_{C\cup C_1}F\cdot dr=\int_{C_\varepsilon}F\cdot dr=\int_0^{2\pi}\frac{(-\varepsilon\sin t,\varepsilon\cos t)}{\varepsilon^2}\cdot(-\varepsilon\sin t,\varepsilon\cos t)dt=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi$$

v) $\int_C F\cdot dr=2\pi-\int_{C_1}F\cdot dr=2\pi-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{(-t,1)\cdot(0,1)}{1+t^2}dt=2\pi-2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt=2\pi-[2\tan^{-1}t]|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{3}$

(단, $C_1=(1,t)$, $(-\sqrt{3}\leq t\leq\sqrt{3})$)