0. Komplexe Zahlen

$i^n = \begin{cases} 1, & R_4(n)=0 \\ i, & R_4(n)=1 \\ -1, & R_4(n)=2 \\ -i, & R_4(n)=3 \end{cases}$

$i := \sqrt{-1} \quad \therefore i^2 = -1$

$z = a + bi \in \mathbb{C}$

$\overline{z} = a - bi$

$z \cdot \overline{z} = Re^2(z) + Im^2(z) \geq 0$

$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

$z \pm w = (a+bi) \pm (x+yi) = (a \pm x) + i(b \pm y)$

$z \cdot w = (a+bi) \cdot (x+yi) = ax + i(ay+bx) - by$

$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{z\overline{w}}{Re^2(w) + Im^2(w)}$

$\frac{a+bi}{c} = a/c + b/c \, i$

Polarkoordinaten

$z(r, \varphi) = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\varphi = \arg(z) = \operatorname{atan}(b/a)$, Falls $a=0$ $\begin{cases} -\frac{1}{2}\pi & b<0 \\ - & b=0 \\ \frac{1}{2}\pi & b>0 \end{cases}$

$a = r \cdot \cos(\varphi)$; $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Eulerform

$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$; $w = s \cdot e^{i\alpha}$

$z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{i(\varphi + \alpha)}$

$|z \cdot w| = |z|\,|w| = r \cdot s$

Absolutbetrag

$|z+w| \leq |z| + |w|$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Unitär: A, B

A^{-1} unitär

1. Matrizen

$A^{m \times n} = m \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ n

Spezielle Matrizen:

Quadratisch: $m = n$

Spaltenvektor: $A^{m \cdot 1}$

$\underline{a_i} = A \cdot \vec{e}_i$

Zeilenvektor: $A^{1 \cdot n}$

$\underline{a_j} = \underline{e_i} \cdot A$

Nullmatrix: $(A)_{ij} = 0$

Matlab: zeros(m,n)

Einheitsmatrix: $I_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) = \mathbb{1}_n$

Matlab: eye(m,n)

Diagonalmatrix: $n = m \wedge a_{ij} = 0 : i \neq j$

Matlab: v=[1,2,3]; diag(v)

Einheitsspaltenvektor: $\vec{e}_i$ (i-te Spalte)

Matlab: (1:d==i)' | d = Dimension, i = number of row

Rechte (upper) Dreiecksmatrix: $(A)_{ij} = 0 : i > j$

Linke (lower) Dreiecksmatrix: $(A)_{ij} = 0 : i < j$

Matrixmultiplikation:

$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} \mid (A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il} (B)_{lj}$

Reihe/Spalten Separation: $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1\ 6] + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} [0\ 1] = \sum_i \overline{a_i} \cdot \underline{b_i}$

Spaltenmultiplikation: $\overline{C_j} = A \cdot \overline{B_j} = \sum_{l=1}^{n} [b_{lj} \cdot \overline{A_l}] = \sum_{l=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1l} \cdot b_{lj} \\ \vdots \\ a_{ml} \cdot b_{lj} \end{bmatrix}$

Reihenmultiplikation: $\underline{C_i} = \underline{A_i} \cdot B = \sum_{l=1}^{n} [a_{il} \cdot \underline{B_l}] = \sum_{l=1}^{n} [a_{il} \cdot b_{l1} \cdots a_{il} b_{lp}]$

Mögliche Eigenschaften

symmetrisch: $A = A^T$

hermitesch: $A = A^H$

Schiefsymmetrisch: $A = -A^T$

$\operatorname{diag}(A) \overset{!}{=} 0$

orthogonal: $A^T \cdot A = I_n = A \cdot A^T$ $\Rightarrow A^T = A^{-1}$

$d_{ii} \in \{1, -1\}$ orthonormale Spalten!!

unitär: $A^H \cdot A = I_n = A \cdot A^H$

$|d_{ii}| = 1$

positiv definit $\forall x : x^H A x > 0$

($x \neq 0$ A sym./hermitesch

positiv semidefinit $\forall x : x^H A x \geq 0$

normal $A^T \cdot A = A \cdot A^T$

diagonalisierbar unitär sym. $A^T A$

Diag. orthog: $d_{ii} \in \{0, 1\}$

Diag. unitär: $|d_{ii}| = 1$

Matrizenregel Satz 2.1

(2.6) $(\alpha \cdot B) \cdot A = \alpha (B A)$

(2.7) $(\alpha A) \cdot B = \alpha (A B) = A (\alpha B)$

(2.8) $(\alpha + B) A = (\alpha A) + (B A)$

(2.9) $\alpha (A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$

(2.10) $A + B = B + A$ (Add. Komm.)

(2.11) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(2.12) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(2.13) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

(2.14) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

Transponierte

$A^H := (A)^T = \overline{A^T}$

Zeilen & Spalten vertauschen

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 3+i & 1+i \end{pmatrix}$

2.6

(i) $(A^T)^T = A$ | $(A^H)^H = A$

(ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ | $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$

(iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ | $(A+B)^H = A^H + B^H$

(iv) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ | $(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H$

Lineare Gleichungssysteme

$A \cdot x = b$; Lösung: $x = A^{-1} \cdot b$; Matlab: $x = A \backslash b$

m $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1$

$\vdots$

$a_{m1} x + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m$

m Gleichungen

n Unbekannte

$A^{m \times n}$; $x^{1 \times n}$, $b^{1 \times n}$

Rang (rank): # von Pivotelementen. Pivotspalten/zeilen linear unabhängig!

Homogen: $A \cdot x = 0$

Inhomogen: $A \cdot x = b \neq 0$

Reguläre Matrix ($m = n = r$)

(siehe auch invertierbar)

$\equiv$ Nicht-nulldiagonale auf LR

$\equiv A$ invertierbar

$\equiv \det(A) \neq 0$

$\equiv A \cdot x = 0$ nur triviale Lösung

$\equiv \operatorname{Rang}(A) = n$ unbekannte

$\equiv A \cdot x = b$ eindeutig (b) lösbar

$\equiv \{0\} = \ker(A) \equiv \mathcal{N}(A)$

$\equiv$ Spalten/Zeilen Linear unabhängig

$\equiv \dim(\ker(A)) = 0$

A, B regulär $\Rightarrow A \cdot B$ regulär | Ansonsten singulär

$\equiv \mathbb{E}^n = \operatorname{im}(A) \equiv \mathcal{R}(A)$

Regulär $\Rightarrow$ Quadratisch

$\equiv \dim(\operatorname{im}(A)) = n$

$RREF(A) = I$

$\equiv A : \mathbb{E}^n \mapsto \mathbb{E}^n$ Automorph

Singuläre Matrix

$\equiv \neg$ regulär

$\equiv \det(A) = 0 \rightarrow$ nicht invertierbar

$\equiv \exists \lambda_i = 0$

$\equiv \operatorname{rang}(A) < n$

Lösungen von linearen Gleichungssystemen

$Ax = b$ hat genau 1 Lösung $\Leftrightarrow \begin{cases} r = n = m \\ r = n < m \ \& \ C_{p+1} = \cdots = 0 \end{cases}$

$Ax = b$ hat für jedes b mind. 1 Lösung $\Leftrightarrow r = m$

$Ax = b$ hat für jedes b genau eine Lösung $\Leftrightarrow r = m = n$ (regulär)

Keine Lösung

$r < m \wedge$ Verträglichkeitsbedingung nicht erfüllt.

∞-Lösung

$\min(m, n) - r$ Parameter

$r < n \Rightarrow \exists \infty$ Lösungen

Genau 1 Lösung

$r = n \wedge$ Verträglichkeit erfüllt

Elementare Reihenoperationen (Elementarmatrizen)

Permutationsmatrix Reihe i mit j vertauschen $P_{ij} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \end{bmatrix}$

Addition von $\lambda \cdot$ Reihe i zu Reihe j. $E_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \downarrow i$

$E_{ij}(\lambda) = I + \lambda \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^T$

Multiplikation von Zeile i mit $\lambda \neq 0$ $S_i(\lambda) = i \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \ 1 \end{bmatrix}$

Inverse der Matrix

Eig. Testen!

A^{-1} inverse genau dann wenn $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow$ testen!

A regulär $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ A invertierbar

$P^{-1} = P^T$

$(A^{-1})^T \neq (A^n)^{-1}$

(i) A invertierbar/regulär $\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

(ii) A, B invertierbar/regulär $\Leftrightarrow B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$

(iii) A^{H} invertierbar $\Leftrightarrow A^T$ invertierbar $\Leftrightarrow (A^H)^{-1} = (A^{-1})^H \Leftrightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

2.7 $A^T \cdot A$ invertierbar $(PD)^{-1} = P^{-1} D^{-1}$

Berechnen von Inversen:

Allgemein: $[A : I_n] \xrightarrow{\text{Gauss}} [\ddots : \ ] \xrightarrow[\text{Zeilenaddition}]{} [I_n : A^{-1}]$

Diagonalmatrizen: $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \ldots \frac{1}{d_n}\right)$

2D-Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

7.3 $A_{m \times n}$ Matrix mit $\operatorname{rank}(A) = n \ (\leq m) \Rightarrow A^H \cdot A$ regulär

$A^H A x = 0 \Rightarrow x^H A^H A x = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = 0 \Rightarrow Ax = 0$

$(Ax)^H (Ax)$

Weil $\operatorname{rank}(A) = n \wedge \ker(A) = \{0\} \Rightarrow A^H \cdot A$ regulär

LR-Zerlegung | $(A,R) \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $(P,L) \in \mathbb{E}^{m\times m}$

(i) $(P)\cdot A = L\cdot R$ bzw. $(P)\cdot A x = L\cdot R\cdot x$

P, L und R lassen sich mit Gauss-El. von R berechnen

P tauscht Spalten, L schreibt Koeffizienten und tauscht vorherige Koeffizienten.

Bsp. mit Max-Pivotstrategie

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&\\ 0&0&1&0&\\ 0&0&0&1& \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&2&1&\\ 0&1&2&1&\\ 2&1&1&1&\\ 0&0&0&2& \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&\\ 1&0&0&0&\\ 0&0&0&1& \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 2&1&1&1&\\ 0&1&2&1&\\ 1&2&2&1&\\ 0&0&0&2& \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1/2\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 2&1&1&1&\\ 0&1&2&1&\\ 0&3/2&0&1/2&\\ 0&0&0&2& \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1/2\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 2&1&1&1&\\ 0&3/2&0&1/2&\\ 0&1&2&1&\\ 0&0&0&1& \end{array}\right]$$

(ii) Löse: $L\,c = (P)\cdot b$

(iii) Löse: $R\,x = c$

$P A = L\cdot R \Rightarrow P^{-1}(PA) = P^{-1}(L\cdot R)$

$\Rightarrow (P^{-1}\cdot P)\cdot A = P^{-1}(L\cdot R)$

$\Rightarrow A = P^{-1}(L\cdot R)$

Laufzeit: (Bitte inkl. Zeilenvert.)

$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + O(n)$ Add. $\frac{1}{3}n^3 + O(n)$ Mult. $\frac{1}{3}n^3 + O(n)$ Divis

Vektorräume $\mathbb{E}(:= \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$

Ein Vektorraum V über Körper $\mathbb{K}$ (mit $\oplus, 0, 1$) ist eine nicht leere Menge auf der eine Addition (+) und eine skalare Multiplikation def. sind.

$+: V\times V \mapsto V$ $\quad \cdot: \mathbb{E}\times V \mapsto V$

(1.) $x+y = y+x$

(2.) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(3.) $\exists 0 \in V\ \forall x \in V\ (x+0 = x)$ Nullvektor

(4.) $\forall x \in V\ \exists (-x) \in V\ (x+(-x) = 0)$ Inverse

(5.) $\alpha\cdot(x+y) = (\alpha\cdot x)+(\alpha\cdot y)$

(6.) $(\alpha\oplus\beta)\cdot x = (\alpha\cdot x)+(\beta\cdot y)$

(7.) $(\alpha\odot\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)$

(8.) $\exists 1 \in \mathbb{K}\ (1\cdot x = x)$ Neutr. mult. Element

$(V;+)$ ist eine abelsche Gruppe, $(V;\cdot)$ ist nicht abelsch.

$(\mathbb{R}\setminus\{0\};\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

Untervektorräume (linearer Teilraum)

U ist ein Untervektorraum von V (notiert $U \subseteq V$) falls:

1. $\alpha\cdot x \in U$ 2. $x+y \in U$

Triviale Untervektorräume: Nullvektor $\{0\}$ $\quad \dim\{0\}=0$, $\mathrm{span}\{0\}=\emptyset$

Vektorraum V selber.

$\boxed{\mathrm{span}(a_1,\dots,a_\ell) \subset V}$

Die Lösungsmenge von $Ax=0$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ (collinear und geht durch 0) $\leftarrow N(A), R(A), N(A^T), R(A^T)$

Jede Polynomgruppe ist Untervektorraum von Polynom höheren Grades.

Widerlegtechnik: Zeige, dass 0 nicht im Untervr.raum ist!

Eine Linearkombination der Vektoren $(a_1, a_2, \dots a_\ell)$

$\gamma_1\cdot a_1 + \gamma_2\cdot a_2 + \dots + \gamma_\ell\cdot a_\ell = q$

$A = (\overline{a_1}\,|\,\overline{a_2}\,|\dots|\,\overline{a_\ell})$ ↳ Koeffizientenmatrix.

$Q\cdot X = (Q x_1 | Q x_2 | \dots | Q x_\ell)$

$Y = \begin{pmatrix} \underline{y_1} \\ \underline{y_2} \\ \vdots \\ \underline{y_\ell} \end{pmatrix}$ $\quad Y\cdot Q = \begin{pmatrix} \underline{y_1}\,Q \\ \underline{y_2}\,Q \\ \vdots \\ \underline{y_\ell}\,Q \end{pmatrix}$

Matrixdarstellung:

$Ax = [a_1, a_2 \dots a_\ell]\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{bmatrix}$

Lineare Hülle: $\mathrm{span}(a_1,\dots,a_\ell)$ = Menge aller möglichen Linearkombinationen.

Erzeugenden System: $\mathrm{span}(a_1,\dots,a_\ell) = V$

(i) Zeige, dass jeder Vektor einer Basis als LK von $(a_1,\dots,a_\ell)$ ...

(ii) $\ell < \dim(V) \Rightarrow$ NICHT erzeugend

Lineare (Un-)Abhängigkeit von A

$a_1\gamma_1 + \dots + a_\ell\gamma_\ell = 0$ hat nur triviale Lösung $\Leftrightarrow$ linear unabhängig

bzw. $Ax = 0$

Linear abhängig: $(\exists k)\ a_k = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\ell} \frac{\gamma_i}{\gamma_k} a_i$

(i) $\ell = \dim(V) \wedge$ jeder Vektor einer Basis LK ausdrücken $\Leftrightarrow$ Basis (→ Basiswechsel, lin. unabh.)

(ii) $\ell > \dim(V) \Rightarrow$ Linear abhängig

Basis = Linear unabhängige Vektoren mit $\mathrm{span}(B) = V$

Jeder Vektor kann exakt 1-mal ausgedrückt werden.

Dimension $\hat{=}$ Kard. von $|B|$. Eindeutig!

$V = P_n = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_0\}$; $B = \{1, t, \dots, t^n\}$; $\dim(P_n) = n+1$

$V = \mathbb{E}^{m\times n}$, $B = m\times n$ Nullmatrizen mit 1 an der Stelle ij; $\dim(\mathbb{E}^{m\times n}) = m\cdot n$

Reduktion: LK von Basis $B = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_m b_m$

$n\,(>\dim(V))$ Vektoren müssen linear abhängig sein. Man kann also immer ein Vektor entfernen.

$\underline{q} := \sum_{k=1}^{\ell} \xi_k a_k = \sum_{k=1}^{\ell} \xi_k \left(\sum_{i=1}^{\dim(V)} \gamma_{ik} b_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{\dim(V)} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{\ell} \xi_k\cdot\gamma_{ik}\right]}_{=0(\gamma_i)} \cdot b_i = 0.$ $\quad (a_1,\dots,a_\ell)$ = lin abhäi. wenn

Basisauswahlsatz: Aus jedem Erzeugenden system kann man eine Basis wählen!

Basisergänzungssatz: Linear unabhängige Vektoren lassen sich zu einer Basis ergänzen.

Techniken für $\mathbb{E}^n$; $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$

$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{pmatrix}$!!! ODER $\begin{pmatrix} [v_1]_B^T \\ [v_2]_B^T \end{pmatrix}$

(vi) Vektoren der Pivotzeile sind linear unabhängig. ⇒ können reduzieren! in der Matrix.

(i) $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{span}(v_1,\dots,v_k))$

(ii) $\mathrm{Rang}(A) = k \Rightarrow (v_1, v_2, \dots v_k)$ linear unabhängig

(iii) $\mathrm{Rang}(A) < k \Rightarrow (v_1, v_2, \dots v_k)$ linear abhängig

(iv) $\mathrm{Rang}(A) = \dim(V) \Rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_k)$ erzeugend

(v) $\mathrm{Rang}(A) = \dim(V) = k \Rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_k)$ sind eine Basis.

Koordinatenabbildung $K_V: V \mapsto \mathbb{E}^n$

Jeder Vektor eines Vektorraums lässt sich eindeutig durch Koordinaten

$Bx = v \in V$.

$x = \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{bmatrix} = [v]_B = K_B(v)$ $\quad$ B kanonisch, wenn $[v_i]_B = e_i$

(lineare Abbildung)

$[1, t, \dots, t^n]\cdot A$

Koordinatentransformation / Basiswechsel

Basiswechsel = Koordinatentransformation von Basis B nach B'.

$T_B^{B'} = \left[[b_1']_B \quad [b_2']_B \cdots [b_n']_B\right]$ $\quad$ Falls B kanonisch: $T = [b_1'\ b_2' \cdots b_n']$

$T v' = v$; $T^{-1} v = v'$; $(B\cdot T = B')$; $B'\cdot T = B$

Berechnen mit Gauss (C = kanonisch)

$\left[[b_1]_C \cdots [b_n]_C \,|\, [b_1']_C \cdots [b_n']_C\right] \Rightarrow [I_n | T]$

Falls $V = \mathbb{E}^n$

$[B|A] \rightsquigarrow [I_n | T^{\hat{B}}]$ $\quad T^{\hat{B}}: A \to B = T^{-1}$

$F: V \mapsto W$

Injektiv: $\forall v, v' \in V$: $v \neq v' \Rightarrow F(v) \neq F(v')$ (eineindeutig)

(a) F injektiv $\Leftrightarrow \ker F = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker F) = 0 \wedge F$ linear

(ii) Zeige das: $\forall v, v'\ (F(v) = F(v') \Rightarrow v = v')$

(iii) $F: X \mapsto Y$ injektiv $\Leftrightarrow$ Rang $(F) = \dim(X)$

(iv) $F(v_1, \dots v_\ell)$ linear unabh. $\Leftrightarrow (v_1, \dots v_\ell)$ linear unabh. $\wedge$ F injektiv $\wedge$ F linear

Surjektiv: $\forall w \in W\ \exists v \in V\ (f(v) = w)$

(i) F surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(W) \wedge F_{\text{linear}}$

Bijektiv: $\forall y \in W\ \exists! v \in V\ (f(v) = w)$

(i) F injektiv $\wedge$ F linear $\wedge \dim(F) < \infty \Rightarrow$ F bijektiv

(ii) F bijektiv $\Rightarrow \dim(V) = \dim(W)$

Homomorphismus (Linear be: $\mathbb{E}^n$) falls:

1. $F(v+w) = F(v) + F(w)$ 2. $F(\lambda v) = \lambda F(v)$

Isomorphismus $(V \cong W) \Leftrightarrow F_{\text{bijektiv}} \wedge F_{\text{Homomorphismus}}$

(i) F isomorph $\Leftrightarrow$ Rang $(F) = \dim(X) = \dim(Y)$

(ii) F isomorph $\Leftrightarrow F^{-1}$ isomorph

Endomorphismus $\Leftrightarrow V = W \wedge F_{\text{Homomorphismus}}$

↳ (Selbstabbildung)

Automorphismus $\Leftrightarrow V = W \wedge F_{\text{Isomorphismus}}$

(i) Rang $(F) = \dim(V) = \dim(W)$

(ii) $id: X \to X$ ist ein Basiswechsel (F).

Lineares Funktional $\Leftrightarrow W = \mathbb{E} \wedge F_{\text{Homomorph}}$

Dualer Vektorraum (Menge aller linearen Funktionale:

$V^* := \{F: V \to \mathbb{E} \mid F_{\text{linear}}\}$

Menge der Urbilder (Preimage): $F^{-1}(Z) = \{v \in V : F(v) \in Z\}$

↳ wobei Z Urbildmenge

Lineare Abbildungen auf Vektorräumen

$F: V \mapsto W \quad F(x+y) = F(x) + F(y) \wedge F(\lambda x) = \lambda F(x)$

Wertebereich (range)

$\mathrm{Bild}(F) = \mathrm{Im}(F) :\equiv F(V) = \{F(v) \mid v \in V\} \subset W$ (Unterrichtterraum) $= \mathcal{R}(A)$

$\ker(F) :\equiv F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\} \subset V$ (Unterrichtterraum) $= \mathcal{N}(A)$

Beispiele: C^n mind. n ableitbar | Operator def.:

Ableitungsoperator $D: C^1[a,b] \mapsto C[a,b]; D(f) = Df = f'$

Proof: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

Differentialoperator $L: C^m \mapsto C; f \mapsto c_m f^{(m)} + \dots + c_0 f$

Evaluationsabbildung $E_t: C[a,b] \mapsto \mathbb{R}; f \mapsto f(t)$

Proof: $(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta f(t)$

Multiplikationsoperator $M: C \mapsto C, f \mapsto g; g(t) :\equiv t \cdot f(t)$

$E_t(M(f)) = t \cdot f(t)$

Koordinatenabbildung: Ist eine lineare Abbildung.

Abbildungsmatrix (Darstellungsmatrix)

$F: X \mapsto Y$ lineare Abb. $\wedge\ X = \mathrm{span}(B) \wedge Y = \mathrm{span}(C)$

Abbildung bezüglich Basis B von Y.

$M^A_B \cdot [x]_A = [y]_B$

$M(F, A, B) = M^A_B = A = \begin{bmatrix} [F(a_1)]_C & \cdots & [F(a_n)]_C \end{bmatrix}$

Falls B = kanonische Basis $M^A_{B_e} = [F(a_1) \quad \cdots \quad F(a_n)]$

$M^A_B = \left[[F(a_1)]_B \cdots [F(a_n)]_B \right] = \left[T^{B_e}_B [F(a_1)]_{B_e} \cdots T^{B_e}_B [F(a_n)]_{B_e} \right]$

$= \left[T^{-1} [F(a_1)]_{B_e} \cdots T^{-1} [F(a_n)]_{B_e} \right]$

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F", "\text{Lineare Transformation}"'] \arrow[d, shift right, "K_{A_e}(x)"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "K_{B_e}(y)"'] \\
{[x]_{A_e} = \xi(x) \in \mathbb{E}^n} \arrow[r, "M^{A_e}_{B_e} = [F(a_1) \dots]", "A_1"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] \arrow[u, shift right, "K^{-1}_{A_e}(x)"'] & {[y]_{B_e} = \eta(y) \in \mathbb{E}^n} \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \arrow[u, shift right, "K^{-1}_{B_e}(y)"'] \\
{[x]_A = \xi'(x) \in \mathbb{E}^n} \arrow[r, "M^A_B(F)", "A_2"'] \arrow[u, shift right, "T^A_{A_e}"'] & {[y]_B = \eta'(y) \in \mathbb{E}^n} \arrow[u, shift right, "S^B_{B_e}"']
\end{tikzcd}$$

$M^A_{B_e} = [F(a_1) \cdots]$

$A_2 = M^A_B(F) = S^{-1} M^{A_e}_{B_e} T^A_{A_e} = S^{-1} M^A_{B_e}$

Wenn $S = T$, dann sind M^A_B & $M^{A_e}_{B_e}$ ähnlich (sind äquivalent)

$\mathrm{rang}(F) = \mathrm{rang}(A_1) = \mathrm{rang}(A_2)$

Proof of reduction transformation:

$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_e\} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_e\}$

$a_k = \sum_{k=1}^{e} [a_k]_{B_i} \cdot b_i = \sum_{k=1}^{e} \gamma_{ik} \cdot b_i$

$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \xi_k = 0$ homogenes LGS, ohne triviale Lösung da $e > n$

$q :\equiv \sum_{k=1}^{e} \xi a_k = \sum_{k=1}^{e} \xi_k \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ik} b_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{e} \gamma_{ik} \xi_k \right)}_{0 \ (\forall i)} \cdot b_i = 0$

ξ sind somit nicht-null Koordinaten, was a_i linear abhängig macht

Kompositionseigenschaften linearer Abbildungen:

$F: V \to W; \quad G: W \to U; \quad G \circ F: V \to U$

$M(F) \cdot v = w; \quad M(G) \cdot w = u; \quad M(G \circ F) = M(G) \cdot M(F)$

5.14(i) $\mathrm{rang}(G \circ F) = \mathrm{rang}(M(G \circ F)) \le \min(\mathrm{rang}(G), \mathrm{rang}(F))$

(ii) G injektiv $\Rightarrow \mathrm{rang}(G \circ F) = \mathrm{rang}(F)$

(iii) F surjektiv $\Rightarrow \mathrm{rang}(G \circ F) = \mathrm{rang}(G)$

Falls F Isomorph und G Homomorph:

$M(F) \cdot M(G) = M(G) \cdot M(F) = I_{\dim(V)} \Leftrightarrow M(F) = (M(G))^{-1}$

$\mathrm{rang}(F) :\equiv \dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$

$F: V \mapsto W$ (linear) — Zeilenrang = Spaltenrang

(i) $F(0) = 0$

(ii) F surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(W)$

(iii) F injektiv $\Leftrightarrow \ker(F) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

(iv) F Isomorphismus $\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W) = \mathrm{rang}(F)$

Dimensionsformel:

$\boxed{\dim(V) = \dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))}$

$= m \times n$ — # freie Parameter $= n - r$ (Dimension von $\mathcal{L}_0$) — $= \mathrm{rang}(F)$

$\dim(W) = m \times n$ — $= \mathrm{rang}(M(F))$ = Zeilenrang = Spalten/Kolonnenrang

$F(x) = 0 \iff M(F)x = 0$

Nullraum: $\mathcal{N}(M(F)) = \ker(F) = \mathcal{L}_0$

Kolonenraum/Wertebereich: $\mathcal{R}(M(F)) = \mathrm{Im}(F) = \mathrm{span}\{\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n\}$

$\tilde{M} :\equiv$ Pivotkolonnen von $M = \tilde{M}$; $\mathcal{R}(M) = \mathrm{span}\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \dots, \tilde{M}_r\}$

Ex: $\mathrm{rank}(M) = 3$

5.14 $\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(M^T) = \mathrm{rang}(M^H)$ — $M_{10 \times 6}$, $M^T_{6 \times 10}$, $\mathcal{N}(M^T) = 10 - 3$

5.8(i) $F: X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(M(F)) = \dim X$

$\Leftrightarrow \ker(F) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\ker(F)) = 0$

(ii) $F: X \to Y$ surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = W \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(W)$

(iii) $F: X \to Y$ bij. Isomorph $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(F) = \dim X = \dim Y$

(iv) $F: X \to X$ bij. Automorph $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(F) = \dim X$

$\Leftrightarrow \ker(F) = \{0\}$

$\mathcal{N}(C \cdot D) = \mathcal{N}(C^{-1} \cdot D) = \mathcal{N}(D)$

Affiner Teilraum ist Unterraum U von V und

Bem.: Muss aber nicht Unterraum sein!

$u_0 + U :\equiv \{u_0 + u \mid u \in U\} \quad u_0 \in V$

Affine Abbildung: $F: X \to Y$ und $y_0 \in Y$

$X \to y_0 + Y, \quad x \mapsto y_0 + F(x)$

(i) $H = y_0 + Y$ ist affiner Teilraum.

(ii) Es sei: x_0 eine beliebige Lösung von $M(F) \cdot x = b$.

$\mathcal{L}_0$ sind alle Lösungen von $M(F)x = 0$.

Alle Lösungen $\mathcal{L}_b$ von $M(F)x = b$: $\mathcal{L}_b = x_0 + \mathcal{L}_0$

$\mathcal{L}_0 = \ker(F) = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \mathcal{L}_b = x_0 + a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + \dots$

Kolonenraum:

$\mathrm{span}(\mathcal{R}(A)) = \mathrm{span}$ (Pivotkolonnen in Originalmatrix)

Zeilenraum:

$\mathrm{span}(\mathcal{R}(A^T)) = \mathrm{span}$ (Nicht-null RREF Zeilen (Resultiert in Zeilenrichter))

$A \cdot B \cdot x = 0 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot x = A^{-1} \cdot 0 \Rightarrow B \cdot x = 0$

$\mathrm{Span}(\ker(F)) = \mathrm{span}(\mathcal{N}(A))$: $A \cdot x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{reduced row echelon form}]{\text{make pivot columns } I_n} \begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array} \begin{array}{cccc} & b & & d \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \end{array}$$

$x_3 + 2d = 0$

$x_3 = -2d$

$x_1 = -2b + 2d$

$$\mathcal{N}(A) = \begin{bmatrix} -2b + 2d \\ b \\ -2d \\ d \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

If only 1 free variable, set it to 1, solve and scale the sol.

School method: Put each of the free variables 1 and the rest 0. Now you have $n - r$ basis vectors spanning $\mathcal{N}(A)$.

Preimage (solution set) - $A \cdot x = b$. Setze alle freien Var. auf 0. Löse das System:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{Solution} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ So } \mathcal{L}_b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normierte Vektorräume = Vektorräume mit einer Norm

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$

(N1) positiv definit $(\forall x \in V)$: gut zum widerlegen $\|x\|=0 \wedge x \neq 0$

$\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) Dem Betrage nach homogen (absolute Homogenität)

$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F})$

(N3) Dreiecksungleichung gilt: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\cdot \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \overset{\text{Schw.}}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Skalarprodukt ($\mathbb{C}$ unitärer Vektorraum)

$\langle \cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{F}, \quad (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$

(S1) Linear im 2.ten Faktor:

$\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

$\langle x, \alpha x\rangle = \alpha \langle x,y\rangle$

$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x,z\rangle$

(S2) Symmetrisch bzw. hermitesch

$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

Euklidischer Vektorraum / Unitärer Vektorraum falls $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$

(S3) Positiv definit

$\langle x,x\rangle \geq 0$

$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(i) Bilinearität bzw. Sesquilinearität

$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \overline{\alpha}\langle x,z\rangle + \overline{\beta}\langle y,z\rangle$

Beweis: $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \overline{\langle z, \alpha x + \beta y\rangle} = \overline{\langle z, \alpha x\rangle} + \overline{\langle z, \beta y\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle z,x\rangle} + \overline{\beta}\,\overline{\langle z,y\rangle} = \overline{\alpha}\langle x,z\rangle + \overline{\beta}\langle y,z\rangle$

(6.1) Schwarzsche Ungleichung $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ oder $\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$

Beweis: $0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle + \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle$

$x=0$ stimmt, sonst: $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$ → Dann Multiplizieren mit $\langle x,x\rangle$

$0 \leq |\langle x,y\rangle|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 + \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

2-Norm (Länge): $\|x\| = \sqrt[2]{\langle x,x\rangle}$ für 2-D $\sqrt{x^2+y^2}$

Euklidisches Skalarprodukt: $x^H y = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} \cdot y_k = \langle x,y\rangle$ (Innere Produkt)

p-Norm $(p \geq 1)$: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ Beweis 1-Norm

Dreiecksungleichung: $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ $\quad |a+b| \leq |a| + |b|$

Homogen: $\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha||x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|_1$

Positivdefinit: $|x_i| \geq 0 \Leftrightarrow (\forall i) \Rightarrow \sum |x_i| \geq 0$

Max-Norm (∞-Norm) Tschebyschew Norm: $\|x\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$

Gewichtsfunktion: $\langle f,g\rangle := \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$ im $C[A,B]$

L_p-Norm: $\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}$

Winkel: $\varphi := \arccos \frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Orthogonalität: $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \perp y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$

Teilmengenorthogonal: $M \perp N \Leftrightarrow \forall x \in M \forall y \in N (\langle x,y\rangle = 0)$

(6.2) Pythagoras: $x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Proof: $\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y, x \pm y\rangle = \langle x,x\rangle \pm \langle x,y\rangle \pm \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Da orthogonal $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = 0$)

$\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha)$

Orthonormalbasen

Basis B orthogonal $\Leftrightarrow \langle b_k, b_l\rangle = 0 \quad \forall k \neq l$

Basis B B orthonormal $\Leftrightarrow \langle b_k, b_l\rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$

↳ Vektoren stehen aufeinander und haben Länge 1!

Orthonormalbasis B: $[v]_B = \begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \langle b_2, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$

(6.5) Parcevalsche Formel:

$\langle x,y\rangle_W := \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle b_i, x\rangle} \cdot \langle b_i, y\rangle = [x]_B^H \cdot [y]_B = \langle [x]_B, [y]_B\rangle$ ← std

$\|x\| = \|[x]_B\|$

$\measuredangle(x,y) = \measuredangle([x]_B, [y]_B)$

↳ $x \perp y \Leftrightarrow [x]_B \perp [y]_B$

Proof: $\langle x,y\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k, \sum_{l=1}^{n} \eta_l b_l\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{\xi_k}\eta_l \underbrace{\langle b_k, b_l\rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k}\eta_k$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren ⇒ unik bis auf Vorzeichen von Spalten

Basis $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ → orthonormale Basis $B = \{b_1, b_2, \dots\}$

$b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \tilde{b}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} [\langle b_j, a_k\rangle \cdot b_j]$

$b_k := \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|}$ $\quad \mathrm{span}(A) = \mathrm{span}(B) \Rightarrow$ Auch für nicht Basen!

∃ Orthonormalbasis!

$b_k = \frac{a_k}{\|a_k\|}$ falls a_k orthogonal

Komplement (gegeben 2 linear unabhängige Mengen M, N sind Komplement)

$U := \mathrm{span}(M) = \mathrm{span}(b_1, \dots, b_\ell)$

$U' := \mathrm{span}(N) = \mathrm{span}(b_\ell, \dots, b_n)$

Direkte Summe von U, U': $V = U \oplus U'$

Falls $U' = U^\perp$ orthogonal zu U.

$U^\perp := \{x \in U; x \perp U\}$

(i) $\dim V = \dim U^\perp + \dim U$

(ii) $(U^\perp)^\perp = U$

(6.9) (i) $M \in \mathbb{F}^{m \times n}$; $Mx = 0 \Leftrightarrow x \in N(M) \Leftrightarrow x \perp R(M^H)$ $\quad M \in \mathbb{F}^{m \times n}$

$\Leftrightarrow x \in (R(M^H))^\perp$

$\ker(F) = N(M) := (R(M^H))^\perp$ bzw. $N(M^H) = (R(M))^\perp$

$N(M) \oplus R(M^H) = \mathbb{F}^n; \; N(M^H) \oplus R(M) = \mathbb{F}^m$

$\dim(R(M)) = r = \dim(R(M^H)); \; \dim(N(M)) = n-r; \; \dim(N(M^H)) = m-r$

Fundamentale Unterräume: $N(M), R(M), N(M^H), R(M^H)$

Orthonormierter Basiswechsel Standard Skalarprodukt!

Basis $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ → Basis $B' = \{b_1', b_2', \dots, b_n'\}$ orthogonal!

$I = T^H \cdot T; \quad T^{-1} = T^H; \quad B = B'T^H; \quad B' = BT$

Proof: $\delta_{kl} = \langle b_k', b_l'\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} b_i, \sum_{j=1}^{n} \tau_{jl} b_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\tau_{ik}} \sum_{j=1}^{n} \tau_{jl} \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\delta_{ij}}$

$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\tau_{ik}} \tau_{il} \Rightarrow I = T^H T$

$[v]_B = T \cdot [v]_{B'}, \quad [v]_{B'} = T^H [v]_B \quad (Tv' = v; T^{-1}v = v')$

(6.12) $\langle [v]_B, [w]_C\rangle = \langle [v]_{B'}, [w]_{C'}\rangle$, wo C' und B' orthog.

$\|v\| = \|[v]_B\| = \|[v]_{B'}\|$

$\measuredangle(v,w) = \measuredangle([v]_B, [w]_C) = \measuredangle([v]_{B'}, [w]_{C'})$

↳ $v \perp w = [v]_B \perp [w]_C = [v]_{B'} \perp [w]_{C'}$

Proof

Orthogonale & Unitäre Abbildungen

X, Y unitäre Vektorräume. $F: X \to Y$ unitär falls: $(v,w) \in X$

$X, Y \in \mathbb{F}^{m \times n}$

$\langle v,w\rangle_X = \langle F(v), F(w)\rangle_Y$

(S 6.13) Proof: $\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^H Ay = x^H A^H A y = x^H y = \langle x,y\rangle$

Falls $x = y$: $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$

(i) $\|F(v)\|_Y = \|v\|_X$ (längentreu) → winkeltreu: $\measuredangle(x,y) = \measuredangle(F(x), F(y))$

(ii) $v \perp w \Leftrightarrow F(x) \perp F(y)$

(iii) F ist immer injektiv $\wedge \ker(F) = \{0\} \Leftrightarrow \langle v,v\rangle_X \Leftrightarrow v = 0$ → Beweis: $F(v) = 0 \Leftrightarrow \langle F(v), F(v)\rangle_Y$

Falls F isomorph. (also $\dim X = \dim Y$)

(iv) $\{b_1, \dots, b_n\}$ orthonormale Basis $\Rightarrow \{F(b_1), \dots, F(b_n)\}$ orthonormale Basis

(v) F^{-1} unitäre Abbildung

(L 6.16) Im $\mathbb{C}^{n \times n}$: A unitär $\Leftrightarrow F$ unitär

Proof: $(A^H A)e_k = e_k^H A^H A e_k = (Ae_k)^H (Ae_k) = \langle Ae_k, Ae_k\rangle = \langle e_k, e_k\rangle = \delta_{kk}$

(L 6.15) X unitär $\Rightarrow K_X$ unitärer Isomorphismus

$F: X \to Y$ ist beschränkt (bounded) wenn:

$\exists \gamma_F \in X (\forall x \in X (\|F(x)\|_Y \leq \gamma_F \|x\|_X))$

Die Menge aller beschränkten Abbildungen $:= \mathcal{L}(X, Y)$ ist VR!

$(F+G)(x) := F(x) + G(x)$

$(\alpha F)(x) := \alpha F(x)$

Induzierte Operatornorm, wenn $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ Normen sind:

$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|F(x)\|_Y$

Für $F: \mathbb{F}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}: F(x) = Ax$

$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ = Matrixnorm

Spektralnorm ist Matrixnorm:

für Diagonalmatrix $(d_{11}, \dots, d_{nn})$

$\|D\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|D \cdot x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{1 \leq k \leq n} |d_{kk}|$

Eigenschaften → Für unitäre/orthogonale: $\|A\| = 1$

Induzierte Operatornorm Eigenschaften: $\sup_N = \sup_{\|x\|_X=1}$

(SaG.18)

(Op N1) Positiv definit: → Ist offensichtlich

(Op N2) Homogenität: $\|\alpha F(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} |\alpha| \, \|F(x)\|_Y = |\alpha| \, \|F\|$

(Op N3) Dreiecksungleichung: $\|F+G\| = \sup_N \|(F+G)(x)\|_Y = \sup_N \|F(x)+G(x)\|_Y \leq$
$\dots \leq \sup_N (\|F(x)\|_Y + \|G(x)\|_Y) \leq \sup_N \|F(x)\|_Y + \sup_N \|G(x)\|_Y = \|F\| + \|G\|$

(Op N5) Kompatibel mit Vektornormen:

$$\|F(\tilde{x})\|_Y \leq \|F\| \cdot \|\tilde{x}\|_X \quad (\forall F \in L(X,Y), \forall x \in X)$$

Proof für festes $\tilde{x} = x$: $\frac{\|F(\tilde{x})\|_Y}{\|\tilde{x}\|_X} \leq \sup_N \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \|F\|$

(Op N4) $\|G \circ F\| \leq \|G\| \cdot \|F\|$

Proof: $\|G(F(x))\|_Z \overset{N5}{\leq} \|G\|_Z \|F(x)\|_Y \overset{N5}{\leq} \|G\|_Z \|F\|_Y \underbrace{\|x\|_X}_{=1}$

Matrizennorm: $\|M\|$ erfüllt (OP N1–4) (v Vektornorm, M Matrizennorm)

Matrixnorm kompatibel $\Leftrightarrow \|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$ mit v

z.B. Frobenius-Norm:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2} \quad \left(= \sqrt{tr(A \cdot A)}\right) \quad (tr(A) = \text{diag sum})$$

(OP4) $\|A \cdot B\|_F \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_F$

Proof: $\|AB\|^2 = \sum\sum |a_i b_j|^2 \leq \sum\sum (\|a_i\|_2 \|b_j\|_2)^2 = \|A\|_F^2 \cdot \|B\|_F^2$

(OP5) $\|A \cdot x\|_2 \leq \|A\|_F \cdot \|x\|$

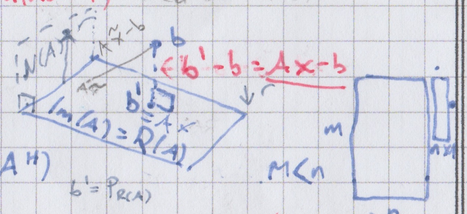
Proof: $\|Ax\|_2^2 = \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j)^2 \underset{Cauchy}{\leq} \sum_i (\sum_j a_{ij}^2 \cdot \sum_j x_j^2) = \sum_j x_j^2 \cdot \sum_i (\sum_j a_{ij}^2) = \|x\|_2^2 \cdot \|A\|_F^2$

$Ax - b$

Konditionszahl

$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ (Spektralnorm) (Rechenfehler max. Fehler)

Kleinste Quadrate



$\forall y: \langle Ax - b, Ay \rangle = 0 \Rightarrow$
$(Ax - b) \perp R(A)$
$(Ax - b) \in R(A)^\perp \overset{6.9}{=} N(A^H)$
$\Rightarrow A^H(Ax - b) = 0$

Residuenvektor / Residuum / Fehler

Normalengleichung:

$$\boxed{\underbrace{A^H \cdot A}_{n \times n} \cdot x = A^H \cdot b} \qquad r := b - \underbrace{Ax}_{b'} \qquad \|r\|^2$$

$x = \underbrace{(A^H \cdot A)^{-1} \cdot A^H}_{} \cdot b = P_b$ $\quad r_{QR} := b - \sum f_j \langle f_j, b \rangle = b - Q^H Q b$

Pseudoinverse: $A^+ = (A^H \cdot A)^{-1} \cdot A^H$ $\quad \boxed{A^+ \cdot A = I_n} \; \boxed{A \cdot A^+ \neq I_n}$

Beweis: $b' = \underset{b' \in Bild(A)}{\arg\min} \underbrace{\|b' - b\|_2}_{\|Ax - b\|_2^2} \Leftrightarrow (Ax - b) \perp R(A)$

$\langle Ax - b, A\tilde{x} - Ax \rangle = \langle \underbrace{Ax - b}_{\perp R(A)}, \underbrace{A(\tilde{x} - x)}_{\in R(A)} \rangle = 0$

$\|(Ax - b) + (A\tilde{x} - Ax)\|^2 = \|Ax - b\|^2 + \|Ax' - Ax\|^2$
$\|A\tilde{x} - b\|^2 = \|A\tilde{x} - b\|^2 + \underbrace{\|A\tilde{x} - Ax\|^2}_{\geq 0}$

$(\forall \tilde{x}) \; \|Ax - b\|^2 \leq \|A\tilde{x} - b\|^2$

$\boxed{\kappa(A^H \cdot A) = \|A\|_2^2 \cdot \|A^{-1}\|_2^2 = (\kappa(A))^2 \; !!}$

$a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot \cos(t) = f(t)$ Ges.: $(t_1, f(t_1)), (t_2, f(t_2)), (t_3, f(t_3))$

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cos(t_1) \\ 1 & t_2 & \cos(t_2) \\ 1 & t_3 & \cos(t_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \end{pmatrix}$$

$\sum |f(x_i) - x_i|^2$ minimal ist.

QR-Zerlegung

$f_1 := a_1 / \|a_1\|$

$\tilde{f}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} f_j \cdot \underbrace{\langle f_j, a_k \rangle}_{f_j^H \cdot a_k}$ $\Rightarrow a_1 = f_1 \cdot \|a_1\|$

$f_k := \tilde{f}_k / \|\tilde{f}_k\|$ $\Rightarrow a_k = f_k \|\tilde{f}_k\| + \sum_{j=1}^{k-1} f_j \langle f_j, a_k \rangle$

$$R := \begin{pmatrix} \|a_1\| & \langle f_1, a_2 \rangle & \langle f_1, a_3 \rangle \\ 0 & \|\tilde{f}_2\| & \langle f_2, a_3 \rangle \\ 0 & 0 & \|\tilde{f}_3\| \end{pmatrix} \qquad r_{11} := \|a_1\|, \; r_{jk} := f_j^H a_k, \; r_{kk} := \|\tilde{f}_k\|$$

$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$

A ∥ gem.

$Ax = \sum q_j \langle f_j, b \rangle$

$$Q := \underset{m \times m}{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}$$ Orthonormalspalten

$\tilde{Q} = (Q | Q^\perp)$ → orthogonal matrix.

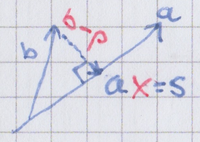
Für $\langle x, y \rangle_W = x^T W y$

$QRx = Ax = b' = QQ^T W b$

$\underbrace{Q^T W Q}_{I_n} R x = Q^T W Q Q^T W b$

$Rx = Q^T W b$

Orthogonalprojektion: $\ker P \perp \operatorname{im} P$



$\langle a, b - xa \rangle = 0$ (Da perp ⊥)

$a^T(b - xa) = 0$

$x = \frac{a^T b}{a^T a}$ (→ scalar) $\Leftarrow x a^T a = a^T b \Rightarrow s = a \cdot \frac{a^T b}{a^T a}$

$proj(p) = Pb = \frac{a a^T}{a^T a} \cdot b$ $\quad (rank(P) = 1)$

↳ N-dim: $Pb = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_{A^+} b$

(i) $P^H = P$

(ii) $P^2 = P$

(iii) $im(1 - P) = ker(P)$; $ker(1 - P) = im(P)$

Jede Permutation lässt sich als Verkettung von Transpositionen darstellen. (vertauscht 2 benachbarte Elemente)

V = Minimale Anzahl Transpositionen.

$$sign(p) = sgn(p) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } v \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} sign(p) \cdot a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

→ Diagonale jeder Zeilenpermutation.

$\begin{vmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ Obere/Untere Dreiecksmatrix

Intuition: Nur ein Weg ohne null von oben nach unten.

Wähle Spalte mit vielen nullen!

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \rightsquigarrow a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ohne k-te Zeile/j-te Spalte

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det(A_{[k,j]})$ – Entwicklung nach k-ter Zeile

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{jl} \cdot \det(A_{[j,l]})$ – Entwicklung nach l-ter Spalte.

8.3 (i)

$$\det\begin{pmatrix} — a_1 — \\ \vdots \\ — \alpha u_i + \beta v_i — \\ \vdots \\ — a_n — \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det\begin{pmatrix} — a_1 — \\ \vdots \\ — u_i — \\ \vdots \\ — a_n — \end{pmatrix} + \beta \cdot \det\begin{pmatrix} — a_1 — \\ \vdots \\ — v_i — \\ \vdots \\ — a_n — \end{pmatrix}$$

Beweis: $\sum_{p \in S_n} sign(p) \, a_{1p(1)} \cdots (\alpha u_{ip(i)} + \beta (u_{ip(i)}) \cdots = \alpha \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} \cdots u_{ip(i)} \cdots + \beta \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} \cdots v_{ip(i)}$

(ii)

$$\det\begin{pmatrix} — a_i — \\ \vdots \\ — a_j — \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} — a_j — \\ \vdots \\ — a_i — \end{pmatrix}$$ oder Kollone!!!

Beweis: sign(p) ändert um 1, Abstand −1, was immer ungerade!

(iii) $\det(I_n) = 1$

8.4

(iv) $\det\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix} = 0$ $\quad \det\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} = 0$ (Eigenschaft ii)

(v) $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$ (Kollonengeht auch!)

(vi) Gleiche Zeile/Kollone ⇒ $\det(A) = 0$ (Eigenschaft ii)

(vii) Addiert man ein Vielfaches $\neq 0$, ändert det nicht. (Eig. ii, iv)
Vielfaches Zeile/Kollone!

(viii) Obere/Untere Dreiecksmatrix: $\prod_{i=1}^{n} r_{ii}$ (Folgt aus vii und Rückwärtsgrundsatz)

8.5 Gauss Algorithmus. $\det(A) = (-1)^v \prod_{i=1}^{n} r_{kk}$

v = # Vertauschungen.

Multiplizieren mit Faktor: $|a_i| \rightsquigarrow \frac{1}{\alpha} |\alpha \cdot a_i|$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow Rang(A) = n \Leftrightarrow A$ regulär ↗ Falls $r_{ii} = 0$, dann wäre $\det(A) = 0$.

8.6 Determinante Bt unit (i, ii, iii)

8.7 $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ → A, B regulär:

$f(A) := \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$, $f(A)$ erfüllt i, ii, iii

(iii) $f(I) = \det(I \cdot B) / \det(B) = \det(B) / \det(B) = 1$

(ii) $f(A) \rightsquigarrow \left(\frac{a_1 B}{a_2 B}\right) / \det(B)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} — a_1 B — \\ — a_2 B — \\ \vdots \\ — a_n B — \end{pmatrix}$$

$\det(S^{-1} A S) = \det(A)$ = Basiswechselunabhängig

8.8 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ $\quad$ von (8.7): $\det(A A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$

8.9 $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$ $\quad \det(A^T) = \det(R^T) \cdot \det(L^T) \det(P) = \det(P^T) \det(L) \det(R) = \det(A)$
$A^H = \det(\overline{A^T}) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$

Unitär $U^H \cdot U = I \Rightarrow \det(U^H \cdot U) = 1 \Rightarrow |\det(U)|^2 = 1$
$a^2 + b^2 = 1$

Orthogonal $U^T \cdot U = I \Rightarrow \det(U) = \pm 1$

Schiefsym. & n = ungerade $0 = \det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = -\det(A)$

8.13

$$\det\begin{pmatrix} \underset{m \times m}{A} & B \\ 0 & \underset{(m-n) \times (m-n)}{D} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$$

$$\sum_{\substack{p_A \in S_m \\ p_D \in S_{n-m}}} sign(p_A) \cdot sign(p_D) \cdot a_{1p_A(1)} \cdots a_{mp_A(m)} \times \overset{\text{jede Permutation}}{d_{1p_D(1)} \cdots d_{n-m\,p_D(n-m)}}$$

$$= \sum_{p_A \in S_m} sign(p_A) a_{1p_A(1)} \cdots a_{mp_A(m)} \times \sum_{p_D \in S_{n-m}} sign(p_D) \cdot d_{1p_D(1)} \cdots d_{n-m\,p_D(n-m)}$$

$= \det(A) \cdot \det(D)$

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A - B) \cdot \det(A + B)$$

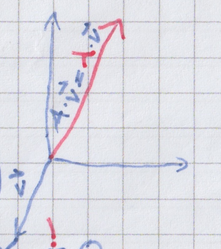
$n \times n$ $\quad n \times n$

Eigenwerte / Eigenvektore

kann 0 sein — $\neq 0$

$A x = \lambda x$ $\quad F: X \to Y$, wobei $A = M(F)$

$= (A - \lambda I)\cdot x = 0$ $\quad$ EV: $\vec{v} \in \ker(A - \lambda I)$ ausser 0 $\quad \vec{v}$



$\Rightarrow A - \lambda I$ quadratisch singulär $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = \chi_A \overset{!}{=} 0$

$\chi_A = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} tr(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$ $\quad \hookrightarrow \chi_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$

$\chi_2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A)$

$\chi_3 := -\lambda^3 + trace(A)\cdot\lambda^2 - (\det(A_{11}) + \det(A_{22}) + \det(A_{33}))\lambda + \det(A)$ $\quad tr(A)^2 - tr(A^2)$

$\hookrightarrow \cdot(-1)$ bei Ausw.

Algebraische Vielfachheit $alg_A(\lambda) = \#(x - \lambda) \mid \chi_A$ $\quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$: λ_i: Faktoren von letztem Term geteilt durch $\hookrightarrow$ Heisst Abspalten.

Eigenraum: $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ $\quad$ Unterraum, da $F(\alpha v + \beta w) = \alpha \cdot F(v) + \beta F(w) = \alpha\lambda v + \beta\lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w) \in E_\lambda$

Geometrische Vielfachheit $geom(\lambda) = \dim E_\lambda = n - rang(A - \lambda I)$

9.13 $1 \leq geom_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda) \leq n$ $\quad x \in V \xrightarrow[\text{lin. Abb.}]{F} y \in V$

Halbeinfach: $geom_A = alg_A$; Einfach: $1 = geom_A = alg_A$

9.6 A singulär $\Leftrightarrow \lambda_i = 0$ ist E.W. $\quad K_V \downarrow \uparrow K_V^{-1}$

$B = T^{-1} A T$, $A = T B T^{-1}$ $\quad [x]_B = \xi \in E^n \xrightarrow{A} [y]_B = \eta \in E^n$

A & B heissen ähnlich. $\quad T^{-1} \downarrow \uparrow T$

A $\mapsto$ B heisst Abbildungstransformation. $\quad [x]_{B'} = \xi' \in E^n \xrightarrow{B, \Lambda} [y]_{B'} = \eta' \in E^n$

9.7 $\chi_A = \chi_B$, $\det(A) = \det(B)$, $trace(A) = trace(B)$, λ_i bleibt gleich

$\chi_B(\lambda) = \det(B - I\lambda) = \det(T^{-1} A T - I\lambda) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)) = \det(T^{-1}) \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\chi_A} \det(T)$

$\hookrightarrow$ Dumas fährt Rest.

9.8 $F: V \mapsto V$, $M(F)_B$ ist diagonal $\Leftrightarrow B$ Eigenbasis $\quad Q$ invertible

wobei: $M = \Lambda$ und $B = W$ $\quad EW(PQ) = EW(QP)$

Spektrum: $\equiv$ Menge aller Eigenwerte $\sigma(A)$ $\quad$ Proof: $Q^{-1}(PQ)Q^{-1} = QP$

9.11 Eigenvektore zu versch. EW sind linear unabhängig $\rightarrow$ Bilden schliesslich Basis von Hom.

9.12 Die Eigenbasis = span aller Eigenvektore. $\exists$ wenn $\dim V = n$

$\Rightarrow M(F)_B$ in dieser Basis ist diagonal.

Beweis: $K_V(\vec{v}_j) = e_j$ | $A = K_V \circ F \circ K_V^{-1} \Rightarrow K_V A = K_V F \Rightarrow K_V F(v_j) = K_V(\lambda v_j)$

$= \lambda K_V(\vec{v}_j) = \lambda e_j$. Konstruktiver Beweis!

$\hookrightarrow Ae_j$

$\# 0$ Eigenwerte $= n - rank(A)$

Beweis 9.11 Induktionswiderspruch:

$m = 1$: einzelner $\vec{v}$ ist unabhängig!

IH: v_{m+1} ist EV mit λ_{m+1} und liegt im $span(v_1, \dots, v_m) \Rightarrow v_{m+1} = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \vec{v}_j$

$\Rightarrow \lambda_{m+1} v_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j v_j \overset{1.\,\&\,2.}{\Rightarrow} \lambda_{m+1} \sum \alpha_j \vec{v}_j = \sum \alpha_j \lambda_j v_j$

$\Rightarrow \sum \alpha_j (\lambda_{m+1} - \lambda_j) v_j = 0$ $\quad \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j\ 1 \dots m \Rightarrow v_{m+1} = 0$ Widerspruch

$\neq 0$ Annahme: verschieden! $\quad$ Da EV $\neq 0$

$\prod_{i=0}^{n} \lambda_i = \det(A)$ * Alg. Vicl.	E.W. von Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$	$\sum_{i=n}^{n} \lambda_i = tr(A)$ Alg. Vicl.

Spezielle Matrizen:

Skalierung: $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \alpha_k \end{pmatrix}$ $\quad \alpha_i$ Eigenwert mit EV $A \cdot e_i = \alpha_i \cdot e_i$

Rotation 2D $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_{1/2} = \cos(\alpha) \pm \sin(\alpha) \cdot i$

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	x	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	x

$\rightarrow$ EW $1, \cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \cos(\varphi) - \sin(\varphi)$

$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{pmatrix}$ $\quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{pmatrix}$ $\quad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = \tan^{-1}(V_2/V_1)$ $\quad \varphi = \cos^{-1}(V_3/|v|)$ $\quad D(\Theta) = R_z(\lambda) \cdot R_y(\varphi) \cdot R_z(\Theta) \cdot R_y(-\Theta) \cdot R_z(-\lambda)$

EV ist $\vec{v}$ und EW ist 1.

Spiegelung 2D-Gerade: Ursprung: $f(x) = mx$. $\varphi = \tan^{-1}(m)$ $\quad \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$

Scherung parallel zu x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & \neq \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y-Achse parallel zu: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \neq & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ EV = Achse. EW = 1 $\quad$ EW = 1, −1; EV = $\vec{v}$, $\perp\vec{v}$

Projektion $\quad$ EV: $\vec{v}$ und $\perp\vec{v}$ $\rightsquigarrow$ mit x prod. $\quad$ 2D: $\perp\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

EW: 1 und 0 $\quad$ allgemein $\perp\vec{v} \in N(P)$

Hauptsätze affiner Abbildungen:

$B = \begin{pmatrix} b_1' - a_1' & c_1' - a_1' & a_1' \\ b_2' - a_2' & c_2' - a_2' & a_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma = B^{-1} \cdot \alpha$

Spektralzerlegung / Eigenwertzerlegung

Eigenbasis $\quad c \cdot W = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ $\quad$ A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A skalierung um Vektorachsen

$\Leftrightarrow$ A halbeinfach $\forall \lambda_i$ $geom_A(\lambda_i) = alg_A(\lambda_i)$

A in Eigenbasis $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = W^{-1} \cdot A \cdot W$ (ähnlich zu A) $\quad W^{-1} \begin{pmatrix} - w_1^T - \\ - w_2^T - \\ \vdots \\ - w_n^T - \end{pmatrix}$

Spektralzerlegung: $A = W \Lambda W^{-1} \overset{9.10}{=} \sum_{k=1}^{n} v_k \lambda_k w_k^T$ $\quad A v_k = v_k \lambda$, $w_k^T A = \lambda_k w_k^T$

$A\vec{v} = \overline{A\vec{v}} = \overline{(Av)} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$: Imaginäre EW!

9.13 A diagonalisierbar $\overset{9.14}{\Leftrightarrow} \exists$ Eigenbasis in $\mathbb{C}^n \overset{9.12}{\Leftrightarrow} \dim V = n$

$\Leftrightarrow$ A halbeinfach $\forall \lambda_i$ $geom_A(\lambda_i) = alg_A(\lambda_i)$ $\quad$ Hinreichend: $A \cdot A^H = A^H A$ Sym.

$y = A^k x$ $\quad$ 1. $\Lambda = T^{-1} A T$ 2. $A^n = T D^n T^{-1}$

Wenn A hermitesch: $\Lambda = U^H A U$ $\quad A^n = T D^n T^H$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$

Eigenwerte & Eigenvektoren Hermitescher Matrizen

$A^H = A$ $\quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ oder $A^T = A$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

9.15 & schiefhermitesch $\quad$ (normal: $A^H \cdot A = A \cdot A^H$)

i) Alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind reel.

ii) Eigenvektore mit unterschl. EW sind paarweise orthogonal $\langle x, y \rangle = 0$ (in $\mathbb{C}^n$)

iii) $\exists$ orthonormale Basis $U := \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ $\rightarrow$ ORTHONORMIEREN!

iv) $\Lambda = U^H A U$

Beweis: i) $\langle u, Av \rangle = u^H A v \overset{\text{da hermitesch}}{=} u^H A^H v = (Au)^H v = \langle Au, v \rangle$

$Au = \lambda u$, $Av = \mu v$; $\langle u, \mu v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle$

$\Rightarrow \mu \langle u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle \Rightarrow (\mu - \bar{\lambda}) \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow$ Wenn $\mu = v$: $(\lambda - \bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda$ reel.

Wenn $\lambda \neq \mu$ $(\mu - \bar{\lambda}) \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$ $\quad \neq 0$ $\quad \neq 0$

Normale Matrix: $\equiv A^H A = A A^H$

A normal $\Leftrightarrow$ A diagonalisierbar durch $\boxed{\text{unitäre}}$ Matrix

Laplace Matrix

A: ungerichtete Adjazenzmatrix $\quad D = diag(Grad(a_1), \dots, Grad(a_n))$

$L := D - A$ $\quad (L_{ij} = \begin{cases} d_j, & j = k \\ -1, & A_{jk} = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$ $\quad L = L^T$ gut testen!

$L \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, da jede Reihe auf 0 summiert

$\Rightarrow \lambda = 0$ ist EW mit #Komponenten lin. unabhängige EV

$V = V_1 \cap V_2 \dots \cap V_k$ $(V_i \cap V_j = \emptyset)$ falls $i \neq j$. $\rightsquigarrow$ ln Komponente

Wenn $(x_m)_j = \begin{cases} 1, & j \in V_m \\ 0, & sonst \end{cases}$ $\quad L x_m = 0 \ \forall m = 1, \dots, k$

Adjazenzmatrix = Nachbarschaftsmatrix

Page-Rank

p_k = Wahrsch. zufällig auf $v = \sum_{(j,k) \in E} \frac{1}{d_j} p_j \Leftrightarrow p := \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{j1}} & 0 & \frac{1}{d_{j3}} & \dots \\ 0 & \ddots & & \\ \frac{1}{d_{j1}} & \dots & & \end{pmatrix} p$

$p = \underbrace{(A^T D^{-1})}_{\text{Google-Matrix}} p \rightsquigarrow A^T$-gewichtete gerichtete Adjaz.

d_j = Outdegree von j. $\quad D = diag(d_1 \dots d_n)$

Falls $d_j = 0$, dann geht zu 0 Seite! Neuer Graph, Senkenknoten!

0 Spalte wird bei $t \to 1$ und d_j = #Webseiten inkl.

p = Eigenvektor zu $\lambda = 1 + \|p\|_1 = 1 \rightsquigarrow$ (Wahrsch. Verteilung)

Praxis $r \approx 0.85 \Rightarrow p_k = \frac{1-r}{N} + r \sum \frac{1}{d_j} p_j$

Eigenvektor iterativ bestimmen:

$p^{(0)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^T$

$p^{(k)} := M p^{(k-1)} \rightsquigarrow p^{(k)} = M^k p^{(0)} \rightsquigarrow$ konvergiert zu E.V.

Generell (dominierend $|\lambda_1| > |\lambda_i|$)

$a_k := \frac{A a_{k-1}}{\|A a_{k-1}\|}$ $\quad a_0$ = zufällig

Positiv definit ($x^H A x > 0$) — A ist immer symmetrisch
" semi " ≥ 0

(ia) A positiv definit $\Rightarrow$ alle EW von $A > 0$
(ib) A positiv semidefinit $\Rightarrow$ alle EW von $A \geq 0$
Proof: $A^T A x = \lambda x \Rightarrow x^T A^T A x = \lambda x^T x \Rightarrow \|Ax\|^2 = \lambda \|x\|^2$
A positiv definit $\Rightarrow \det(A) > 0$

(ii) $A^H \cdot A$ ist positiv semidefinit
$x^H (A^H A) x = (Ax)^H (Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

(iii) A pos. semidefinit $\Rightarrow$ A diagonalisierbar durch unitäres U.
$0 \leq x^H A x = x^H U \Lambda U^H x = (U^H x)^H \Lambda (U^H x) = y^H \Lambda y$
$\forall y \in \mathbb{C}^n: y^H \Lambda y = \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k \lambda_k y_k = \sum \lambda_k |y_k|^2 \geq 0$
Für jedes $e_j = (0, 1, \dots 0)^T \rightarrow 0 \leq e_j^H \Lambda e_j = \lambda_j \rightarrow \lambda_j \geq 0$!!!

(iv) Symmetrisch positiv definit $\Rightarrow \lambda > 0$, pivots > 0 (Gegensym)

Spektralnorm = Konditionszahl

$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max(\sqrt{w_i})}{\min(\sqrt{w_j})}$ w_i ist EW von $A^H \cdot A$

Falls $A^H = A$ $K_2(A) = \frac{\max(|\lambda_i|)}{\min(|\lambda_j|)}$ $K_2(x) \overset{!}{\geq} 1$

Falls A unitär $\|A\|_2 = 1$

Beweis: $\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|^2 = \sup (Ax)^H Ax = \sup x^H A^H A x = \sup x^H U \Lambda U^H x \overset{y = U^H x}{=} \sup y^H \Lambda y$
$\sup_{\|y\|_2=1} y^H \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} y = \sup (\Lambda^{1/2} y)^H \Lambda^{1/2} y = \sup \|\Lambda^{1/2} y\|_2^2 = \|\Lambda^{1/2}\|_2^2$ Dreieck: $= \max|\lambda|$

$\|A\|_2 = \max(|\lambda_i|)$ $\|A^{-1}\|_2 = \max(|\frac{1}{\lambda_i}|)$

Falls $K_2(A) \gg 1$, dann ist A schlecht konditioniert.

Falls A singulär $K_2(A) = \infty$

Bsp.: $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & \ddots & \\ & & & z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\max(a, \dots z)}{\min(a \dots z)}$. Falls $a = z = b \dots$ gut kondit.

11.5
Mit SVD, $A = U \Sigma V$

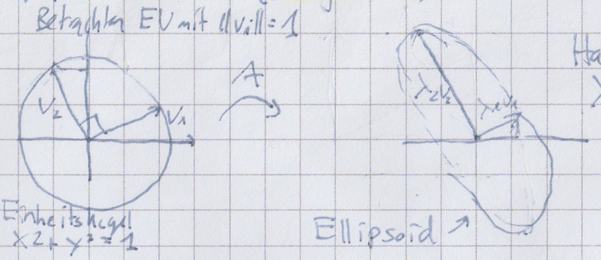
$K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}}$

größter EW von $A^H A = \|A\|_2^2 = \sigma_1^2 = \lambda_1$

$A^{-1} = (U \Sigma V^H)^{-1} = V \Sigma^{-1} U^H$
$(A^{-1})^H (A^{-1}) = (V \Sigma^{-1} U^H)^H V \Sigma^{-1} U^H = U \Sigma^{-1} V^H V \Sigma^{-1} U^H = U (\Sigma^{-1})^2 U^H$
größter EW von $(A^{-1})^H A^{-1} = 1/\sigma_n^2 \Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = 1/\sigma_n = 1/\sqrt{\lambda_n}$

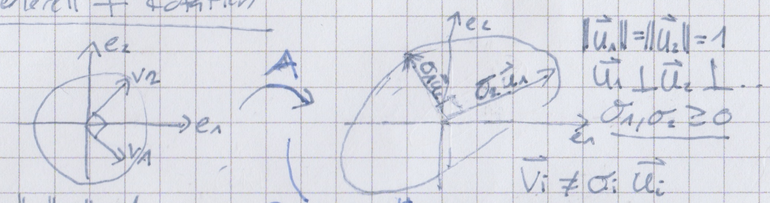
Singulärwertzerlegung

Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar $\Rightarrow$ A Skalierung der Eigenvektoren!
Falls A unitär (orthogonale EV)
Betrachte EV mit $\|v_i\| = 1$



Hauptachsen = $\lambda_i v_i$

Generell + Rotation



$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$
$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \perp \dots$
$\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$

$\|v_1\| = \|v_2\| = 1$
$v_i \neq$ Eigenvektor
$v_1 \perp v_2 \perp \dots$
$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots$ Urbilder von $\sigma_1 \vec{u}_1, \dots$

$\vec{v}_i \neq \sigma_i \vec{u}_i$

Rotation V^H, Skalierung, Rotation U

U normierte E.V. von $A^H \cdot A$
V normierte E.V. von $A \cdot A^H$

$A V = U \cdot \Sigma = \sum_{k=1}^{r} u_k \sigma_k v_k^H$
orthogonal, diagonal Skalierung

$\boxed{\vec{u}_i = A \vec{v}_i \frac{1}{\sigma_i}}$

$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{U} \cdot \underset{m \times n}{\Sigma} \cdot \underset{n \times n}{V^H}$ $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$

$r = \text{rang}(A^H \cdot A) = \text{rang}(A) \leq \min(m, n)$
$= \text{rang}(\Sigma)$

$\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_m\}$ linke Singulärw. $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ rechte SW

Falls A normal & positiv-definit $A^H \cdot A = A \cdot A^H$, $x^H A x > 0$ z.B. SVM Matrizen positiv.
$A = U \cdot \Sigma U^H = V \cdot \Sigma \cdot V^H$

1. Betrag E.W. bestimmen und absteigend sortieren.
Falls EW positiv!
2. Eigenvektoren bestimmen
(Ly) falls geo > 1 $\Rightarrow$ EV. wie Gram-Schmidt verwenden
sonst NUR orthonormieren $\vec{v} = \frac{\vec{v}_{old}}{\|\vec{v}_{old}\|}$

wenn normal: $\Sigma = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n| \end{pmatrix} = \|\Lambda\|$

Falls A hermitesch $\Sigma = \|\Lambda\|$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda^2 - (5+2)\lambda + (5 \cdot 2 - 2 \cdot 2)$ $\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = 6, 1$ sortiert

$\begin{pmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 2-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1/2 & 5 \\ 6 & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\underset{U}{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}} \underset{\Sigma}{\begin{pmatrix} 6 & \\ & 1 \end{pmatrix}} \underset{U^H}{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$

Fall $m \geq n$: $A^H A = (U \Sigma V^H)^H U \Sigma V^H$
$= V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H$
$= V \underbrace{\Sigma^H \Sigma}_{\text{diag}} V^H = V \Sigma^2 V^H$

1. $A^T A$ berechnen und EW dieser Matrix bestimmen. Sortiert!

2. $\Sigma = m \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_i = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} & i \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
falls A NORMAL $A^H \cdot A = A^H A$ z.B. sym.

3. Eigenvektoren zu λ_i (sortiert) bestimmen. $V_r = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r)$
(Ly) falls geo > 1 $\Rightarrow$ EV wie Gram-Schmidt behandeln
sonst NUR orthonormieren $\vec{v} = \frac{\vec{v}_{old}}{\|\vec{v}_{old}\|}$
Falls A herm. positiv $U = V$

4. ökonomisch (reduzierte Form)
$A V_r^H = U_r \Sigma_r$ $U_r = A V_r \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \dots \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\right)$ Σ_r^{-1}

$\underset{m \times n}{A} \left(\underset{n \times r}{V_r} \,\middle|\, \underset{n \times n}{V^\perp} \right) = \left(\underset{m \times r}{U_r} \,\middle|\, \underset{m \times m}{U^\perp} \right) \left(\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right) \in \mathbb{R}^+$

$V^\perp = \begin{matrix} v_{r+1} \cdot v_1 = 0 \\ \vdots \\ v_{r+1} \cdot v_r = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} v_1^T \cdot v_{r+1} = 0 \\ \vdots \\ v_r^T \cdot v_{r+1} = 0 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ x = v_{r+1} \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
$r+1 \times n$ $n \times 1$ $r+1 \times 1$
$\hookrightarrow$ Gleiche für $U^\perp$ & Normieren.

Fall $m < n$: $A A^H = U \Sigma V^H \cdot (U \Sigma V^H)^H$
$= U \Sigma V^H \cdot V \Sigma^H U^H$
$= U \Sigma \cdot \Sigma^H \cdot U^H = U \cdot \Sigma^2 \cdot U^H$

1 & 2 gleich
3. Eigenvektoren σ_i (sortiert) bestimmen. $U_r = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_r)$
(Ly) falls geo > 1 $\Rightarrow$ EV mit Gram-Schmidt behandeln.
sonst NUR orthonormieren $\vec{v} = \frac{\vec{v}_{old}}{\|\vec{v}_{old}\|}$

4. $A V_r = U_r \Sigma_r$ $V_r = A^H U_r \Sigma_r$
$A V = U \Sigma \Rightarrow U^H A = \Sigma V^H \Rightarrow \Sigma^H U^H A = V^T \Rightarrow A^H U \Sigma = V$

11.6 $p \leq r = \text{rang}(A) = \text{rang}(A^H \cdot A)$

Die kleinsten $n - p$ werden auf 0 gesetzt. $\sigma_{p+1} = \dots = \sigma_n = 0$

A_p ist die beste Approximation von A mit Matr. von Rang p.

$A_p = U_p \Sigma_p V^H$
oder
$A \approx \underset{m \times n}{A_p} = \underset{m \times p}{U_p} \underset{p \times p}{\Sigma_k} \underset{p \times n}{V_k^H}$

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ ist eine orthonormale Basis von $R(A^H) = \text{im}(A^H)$
$\{\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ " $N(A) = \ker(A)$
$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ " $R(A) = \text{im}(A)$
$\{\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_m\}$ " $N(A^H) = \ker(A^H)$

Additional notes QR Factorization.

$1 = \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2$

x	-2	-2	-2	0	2
y	0	1	-1	3	1

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2}=\alpha \\ \frac{1}{b^2}=\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = \frac{1}{a^2}$ $\quad a = \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$

not sure

$$A^H A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -8 & 32 \end{pmatrix}$$

$$D_x^2(f(p_i)) = \frac{p_{i+1,x} + p_{i-1,x}}{2} - p_{i,x} = 0.5\,p_{i-1,x} - 1\,p_{i,x} + 0.5\,p_{i+1,x}$$

$$D_y^2(f(p_i)) = \frac{p_{i+1,y} + p_{i-1,y}}{2} - p_{i,y}$$

(loops around!)

2n Gleichungen müssen erfüllt sein:

$D^2(f(p_i)) = 0$ (maximal glatt auf Linie)

$p_i = \tilde{p}_i$ ($\tilde{p}_i$ geg. Punkte und Abstand sollten min.)

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & -1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{1x} \\ p_{2x} \\ p_{3x} \\ p_{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1x} \\ \tilde{p}_{2x} \\ \tilde{p}_{3x} \\ \tilde{p}_{4x} \end{pmatrix} = b$$

Understanding 3D Regression line:

t	1	2	3
$\tilde{a}\,\tilde{b}\,\tilde{c}$	(1,2,1)	(1,1,1)	(-1,2,8)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$$

unknowns

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3 Equations of form:

$x_0 + a t_i = x_i$

$y_0 + b t_i = y_i$

$z_0 + c t_i = z_i$

OR:

$x_0 + 0\cdot y_0 + 0\cdot z_0 + a\cdot t_i + b\cdot 0 + c\cdot 0 = x_i$

$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

$$[x\ y]\begin{pmatrix} a & .5b \\ .5b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$

$$[x\ y\ z]\begin{pmatrix} a & .5d & .5e \\ .5d & b & .5f \\ .5e & .5f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^T W x \text{ bzw. } x^T W y$$

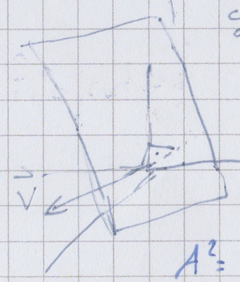
$\langle x, y\rangle_W$

Additional orthogonal matrices: $A^T\cdot A = I = A\cdot A^T$

$A^T = A^{-1}$

Givens-Jacobi Rotationen

$$U_{13}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_{13}^T(\phi) = U_{13}(-\phi)$$



Projektion: $A = vv^T$

P: Projektion Ebene orthogonal zu v: $I - vv^T$

H: Spiegelung " " " v: $I - 2vv^T$

Wenn v Einheitsvektor

$A^2 = v\underbrace{v^T v}_{1}v^T = vv^T = A \Rightarrow$ Projektion

$P^2 = (I - A)^2 = I - 2A + \underbrace{A^2}_{A} = I - A = P \Rightarrow$ Projektion

$H^2 = (I - 2A)^2 = I - 4A + 4\underbrace{A^2}_{A} = I \Rightarrow$ Householder = Transformation

Spalte x auf zu $x_\perp + x_\parallel$:

$Ax = v\underbrace{v^T x_\perp}_{0} + v\underbrace{v^T x_\parallel}_{c} = vc = x_\parallel$

$Px = (I - A)x = x_\perp + x_\parallel - x_\parallel = x_\perp$

$Hx = (I - 2A)x = x_\perp + x_\parallel - 2x_\parallel = x_\perp - x_\parallel$

Householder-Matrizen (Householder-Spiegelungen)

$I - 2vv^T$

Qu ist sym.

$H^T = (I - 2vv^T)^T = I^T - (2vv^T)^T = I - 2vv^T = H$

$H^T\cdot H = H\cdot H = I \Rightarrow H^2 = I$

F_H ist invertierbar (da reflexion)

Zweigenaufgabe

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/7 & & & & \\ 1/7 & 1 & & & \\ 1/7 & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ 1/7 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & & & \\ & 1/7 & & & \\ & 1/7 & \ddots & & \\ & 1/7 & & 1 & \\ & \vdots & & & 1 \\ & 1/7 & & & \end{pmatrix} \cdots$$

$A = T^{(7)}\cdot T^{(6)} \cdots T^{(1)}$ $\qquad Ax = x$

Eigenvect A = Eigenvect A^T = $T^{(1)T} T^{(2)T} \cdots T^{(7)T}$

$$T^{(7)T} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1/7 & 1/7 & \cdots & & 1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow T^{(i)T}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV: $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda = 1$. Da EW A^T = EW $A \Rightarrow \lambda = 1$ EW A

$\langle x, y\rangle_M$, wo M positiv definit! $\forall x\ x^T M x > 0$

$\langle x, y+z\rangle_M = x^T M(y+z) = x^T M y + x^T M z = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

$\langle x, \alpha y\rangle_M = x^T M \alpha y = \alpha x^T M y = \alpha\langle x, y\rangle_M$

$\langle x, y\rangle_M = \underbrace{x^T M y}_{1\times 1} = (x^T M y)^T = y^T \underbrace{M^T}_{\text{symmetrisch}} x = y^T M x$

$\langle x, x\rangle_M = x^T M y \geq 0$ per Definition M pos. semi-d.

$\langle 0, 0\rangle_M = 0$.

$E_{ij}(\lambda) = I + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^T$

$(\lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^T)(\lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^T) = \begin{cases} \lambda^2\vec{e}_i\vec{e}_j^T, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

$\vec{e}_m^T\cdot\vec{e}_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } m = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$i \neq l,\ j \neq k$

$E_{ij}(\lambda)E_{kl}(\alpha) = I^2 + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^T + \alpha\vec{e}_k\vec{e}_l^T + \lambda\alpha\underbrace{e_i^T e_k}_{0,\ \text{falls } j \neq k}\vec{e}_i\vec{e}_l^T$

$= I + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^T + \alpha\vec{e}_k\vec{e}_l$

$E_{kl}(\alpha)E_{ij}(\lambda) = I^2 + \lambda\vec{e}_i\vec{e}_j^T + \alpha\vec{e}_k\vec{e}_l^T + \alpha\lambda\underbrace{e_k e_l^T e_i}_{0,\ \text{falls } i \neq l}\vec{e}_j^T$