$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bilden geordneten Körper (kommutativer Ring)

$\mathbb{C}$ bildet ungeordneter Körper.

A i) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: x+(y+z)=(x+y)+z$ (Assoziativität)

A ii) $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: x+0=x$ (neutrales El. 0)

A iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x+y=0$ (inverses El. $-x$)

A iv) $\forall x,y \in \mathbb{R}: x+y=y+x$ (kommutativität)

M i) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

M ii) $\exists 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}: x\cdot 1=x$

M iii) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}: x\cdot y=1$

M iv) $\forall x,y \in \mathbb{R}: x\cdot y=y\cdot x$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Distributivgesetz: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

Ordnungsaxiome:

O i) $\forall x \in \mathbb{R}: x \le x$

O ii) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: x\le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z$

O iii) $\forall x,y \in \mathbb{R}: x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x=y$

O iv) $\forall x,y \in \mathbb{R}: x \le y \vee y \le x$

Die Ordnung ist konsistent mit + und *

K i) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: x \le y \Rightarrow x+z \le y+z$

K ii) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: x \le y \wedge 0 \le z \Rightarrow x\cdot z \le y \cdot z$

$\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig:

Für $A,B \subset \mathbb{R}: \forall a \in A\ \forall b \in B: a \le b\ \exists c \in \mathbb{R}: a \le c \le b$

$\Leftrightarrow A \subseteq \mathbb{R}: A \neq \emptyset \Rightarrow \exists c, \tilde{c} \in \mathbb{R}: c=\sup(A) \wedge \tilde{c}=\inf(A)$

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt:

$(-1)\cdot x=-x$	$x>0 \Rightarrow x^{-1}>0$	$z\le 0 \wedge x \le y \Rightarrow y\cdot z \le x \cdot z$
$(-1)\cdot(-1)=1$	$x,y\ge 0 \Rightarrow (x \le y \Leftrightarrow x^2 \le y^2)$	$x\le y \wedge u \le v \Rightarrow x+u \le y+v$
$x^2 \ge 0$	$x \le y \Rightarrow -y \le -x$	

$0 \le x \le y \wedge 0 \le u \le v \Rightarrow x\cdot u \le y \cdot v$

$\max(x,y) := \begin{cases} x, & \text{if } x \ge y \\ y, & \text{if } x \le y \end{cases} \quad \min(x,y) := \begin{cases} x, & \text{if } x \le y \\ y, & \text{if } x \ge y \end{cases}$

$|x| := \max(-x,x)$

$|x| \ge 0 \qquad |x\cdot y| = |x|\cdot|y|$

$x \le |x| \qquad |x+y| \le |x|+|y|$

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \qquad |x+y| \ge ||x|-|y||$

$c \in \mathbb{R}$ obere Schranke (Majorante) von $A \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall a \in A: a \le c$

$c \in \mathbb{R}$ untere Schranke von $A \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall a \in A: a \ge c$

$A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt falls obere Schranke existiert

$A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt falls untere Schranke existiert

$A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt falls sie sowohl nach unten & oben beschr.

$s \in \mathbb{R}$ Supremum $:\Leftrightarrow \forall a \in A: a \le s \wedge \forall \varepsilon>0: \exists a \in A: a > s-\varepsilon$

unbeschränkt nach oben: $\sup(A)=+\infty$

$s=\max(A) :\Leftrightarrow s \in A$

$i \in \mathbb{R}$ Infimum $:\Leftrightarrow \forall a \in A: i \le a \wedge \forall \varepsilon>0: \exists a \in A: a < i+\varepsilon$

unbeschränkt nach unten: $\inf(A)=-\infty$

$i=\min(A) :\Leftrightarrow i \in A$

✗ $\exists a \in A: \forall \varepsilon>0: a<i+\varepsilon$

✓ $\forall \varepsilon>0\ \exists a \in A: i \le a < i+\varepsilon$

- Young Ungleichung: $\forall x,y \in \mathbb{R}, \varepsilon>0: 2|x\cdot y| \le \varepsilon \cdot x^2 + \frac{1}{\varepsilon}\cdot y^2$

$c\cdot X := \{c\cdot x \mid x \in X\}$

$X+Y := \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$

- $E \subseteq F \Rightarrow \sup(E) \le \sup(F)$
- $E \subseteq F \Rightarrow \inf(E) \ge \inf(F)$

$\forall x \in X, \forall y \in Y: x \le y \Rightarrow \sup(X) \le \inf(Y)$

$\sup\{X\cup Y\}=\max(\sup(X),\sup(Y))$	$\inf\{X\cup Y\}=\min(\inf(X),\inf(Y))$
$\sup\{X+Y\}=\sup(X)+\sup(Y)$	$\inf\{X+Y\}=\inf(X)+\inf(Y)$
$c\ge 0: \sup\{c\cdot X\}=c\cdot\sup(X)$	$c \ge 0: \inf\{c\cdot X\}=c\cdot\inf(X)$
$c\le 0: \sup\{c\cdot X\}=c\cdot\inf(X)$	$c \le 0: \inf\{c\cdot X\}=c\cdot\sup(X)$

Archimedisches Prinzip: $\exists n \in \mathbb{Z}:$ $x\ge 0: (n-1)x \le y \le n\cdot x$; $x \le 0: (n+1)\cdot x \le y \le n\cdot x$

Korollar: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\ge n_0}: 0<\frac{1}{n}<\varepsilon$

Supremum / Infimum Techniken

- Limit in disguise:

$A=\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\frac{1}{n}$ monoton fallend $\Rightarrow \inf(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

- Infimum raten ∧ Beweisen

Nach c auflösen.

$A=\{f(r)=\frac{1}{r} : r \in \mathbb{R}^+\}$, $\inf(A) \overset{?}{=} c \Rightarrow x+c \not< f(r)$

$\exists c \in \mathbb{R}^+\ \forall r \in \mathbb{R}^+: 0+c<\frac{1}{r} \Rightarrow r\cdot c<1 \Rightarrow c<\frac{1}{r}$ ↯

$A=\{\frac{|x|}{1+|x|}\}$ Da alle Terme positiv $\wedge f(0)=0 \Rightarrow \inf(A)=0$

$\frac{|x|}{1+|x|}$ ist streng monoton wachsend

$\frac{|x|}{1+|x|}-c>1 \Rightarrow \underbrace{\frac{|x|}{1+|x|}}_{<1}>1+c$ ↯

- Beweisen mit Ableitung und diese nach 0 auflösen
- Forme die Menge in einen Bereich um (Falls Form $f(x)\le c$)

$A=\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 5\} \Rightarrow A=[-\sqrt{5},\sqrt{5}] \Rightarrow \sup(A)=\sqrt{5}$

$B=\{\frac{|x+5|}{|x+2|} \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x+5}{x+2}\right| \le 1 \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}\} = (-\infty, -7/2)$

$\frac{x+5}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}=\frac{x+5-x-2}{x+2}=\frac{3}{x+2} \Rightarrow x=-2$

$\frac{-x-5}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}=\frac{-2x-7}{x+2} \Rightarrow x=-7/2$

> Intervalle $(-\infty,-7/2)$, $(-7/2,-2)$, $(-2,+\infty)$

Diese Intervalle sind die einzigen Grenzpunkte.

$f(-10)=\frac{5}{7} \le 1 \Rightarrow x \in (-\infty,-7/2)$

$f(-3)=\frac{2}{1}>1 \Rightarrow x \notin (-7/2,-2)$

$f(0)=5/2>1 \Rightarrow x \notin (-2,+\infty)$

> Stetig, also Lösung in $[-7/2,-7/2]$ und somit $x \in [-7/2,-7/2]$

> -2 = undefiniert

$\Rightarrow \sup(B)=-7/2=\max(B), \inf(B)=-\infty$

$\frac{p(x)}{q(x)} \le 0 \Rightarrow$ Finde alle Nullstellen / Undef. von $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \wedge \left(\frac{p'(x)}{q'(x)}\right)$

Jedes der Intervale hat andere Vorzeichen!

$a\cdot b>0: \frac{1}{a} \le \frac{1}{b} \Rightarrow a \ge b$

$a\cdot b<0: \frac{1}{a} \le \frac{1}{b} \Rightarrow a \le b$

$\frac{1}{a^+} \le 0 \Rightarrow a \le 0$

$\frac{1}{a^-} \le 0 \Rightarrow a \ge 0$

$\frac{|p(x)|}{|q(x)|} = \left|\frac{p(x)}{q(x)}\right|$

Bernoulli: $(\varepsilon+1)^n \le n\varepsilon+1$

$z=a+bi$; $\bar{z}=a-bi$; $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}$

$e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$

Grenzwert einer Sequenz

$\lim_{n\to\infty} a_n = a :\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n>N_\varepsilon : |a_n-a| < \varepsilon$

- Eindeutigkeit: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = b$

$|a-b| = |a-a_n+a_n-b| \le |a-a_n| + |b-a_n| \le 2\varepsilon \xrightarrow{n\to\infty} 0$

- a_n konvergent $\Rightarrow a_n - a_{n+1}$ konv. Konvergent, also beliebig klein

$|a_n - a_{n+1} - 0| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \le \underbrace{|a_n-a|}_{\le \varepsilon/2} + \underbrace{|a_{n+1}-a|}_{\le \varepsilon/2} \le \varepsilon$ □

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow 1 < \varepsilon n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow N_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

$-1<q<1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ 2 Methods → Geometric series limit

→ $q^n < \varepsilon \Rightarrow q < \sqrt[n]{\varepsilon}$ ✓

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow |n^{1/n} - 1| < \varepsilon \Rightarrow n < (\varepsilon+1)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\le} 1 + n\varepsilon$

$\Rightarrow 1 \le n\varepsilon - n \Rightarrow 1 \le n(\varepsilon - 1) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon-1} \le n \Rightarrow N_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon-1} \rceil + 1$

- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ divergent 2 Häufungspunkte $-1, 1 \Rightarrow$ divergent
- $p>1, |q|<1$: $\lim_{n\to\infty} n^p \cdot q^n = 0 \Rightarrow$
- $p>1, |q|>1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{q^n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\le 1} \cdots \underbrace{\frac{1}{n}}_{\le 1} \le \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n_{>1}}{n^n} = 0,\ \overset{k>n}{k \ge x} \le \frac{k^n}{n! = k!(k+1)\cdots(n-1)n} \le \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{k}{k+1} \cdots \frac{k}{n-1} \cdot \frac{k}{n}$

$\le \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{k}{n} = \frac{k^{k+1}}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = c \cdot 0 = 0$

- $\exists$ Limes $\Rightarrow$ Begränzt: $\max(a_n) = \max(a_1, \dots, a_{N_\varepsilon})$

$\min(a_n) = \min(a_1, \dots, a_{N_\varepsilon})$

Widerlegen

- 2 untersch. Häufungspunkte angeben.
- $|a_n - a| + |a_{n+1} - a| \ge |(a_n - a) - (a_{n+1} - a)| = |a_n - a_{n+1}| = 1$

$|a_n - a| < \varepsilon \wedge |a_{n+1} - a| < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a_{n+1}| \le |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < 2\varepsilon$ ↯

- Zeige $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (sogar mit $|\cdot|$)

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n>N_\varepsilon\ |a_n| \gtrless n$

$3^n > \varepsilon \Rightarrow n > \sqrt[3]{\varepsilon} \Rightarrow N_\varepsilon = \lceil \sqrt[3]{\varepsilon} \rceil$

Limes Regeln:

$\lim a_n = a \in \mathbb{R},\ \lim b_n = b \in \mathbb{R}$

$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$

$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\quad \infty \cdot \infty = \infty, (-\infty)(-\infty) = \infty$; $\infty \cdot c_{>0} = \infty$ $\quad (-\infty) c_{>0} = -\infty$

$\lim(a_n / b_n) = a/b$ $\quad \frac{0}{\pm\infty} = 0 \Rightarrow$ De Morgan!

$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad \frac{1}{0^-} = -\infty, \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim(a_n^{b_n}) = a^b$ $\quad -1<c<1 \Rightarrow c^\infty = 0,\ c>1\ c^\infty = +\infty$

Sandwich-rule

Proof: $\forall \varepsilon\ \exists N_1\ \forall n > N_1: L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$

$\forall \varepsilon\ \exists N_2\ \forall n > N_2: L-\varepsilon < b_n < L+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon\ \forall n > \max(N_1, N_2): L-\varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < L+\varepsilon$

$5 = \sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{3^n + 5^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5 \le \sqrt[n]{n} \cdot 5 = 5$

$0 = \frac{1}{2^n} \le \frac{2n}{2^n} \le \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} = 0$

$0 < \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\le 1} \cdots \underbrace{\frac{1}{n}}_{\le 1} < \frac{1}{n}$ finite

Beweise Monotonie

- $f'(x) \ge 0$ or $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ $\quad a_{n+1} - a_n \ge 0$

Monotone-convergence

(a_n) monoton steigend $\wedge$ beschränkt $\Rightarrow$ konvergiert $\sup(a_n)$

Beweis: $a = \sup(A) \Rightarrow a - \varepsilon$ keine obere Grenze.

Also $\exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon\ a - \varepsilon < a_n \overset{\sup}{\le} a + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon\ |a_n - a| < \varepsilon$

Prinzip der Intervallschachtelung

$a_n \le b_n \wedge a_n$ monoton steigend $\wedge\ b_n$ monoton fallend

$\Rightarrow a_n$ konvergent $\wedge\ b_n$ konvergent

Falls: $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Technik: Supremum und Infimum

- $\sup(a_n) = \max\left(\lim_{n\to\pm\infty} a(n), \lfloor a(x_0) \rfloor, \lceil a(x_0) \rceil\right)$, $x_0 \to f'(x_0) = 0$

$\lim_{\substack{n\to\infty \\ f(n)\to\infty}} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\pm\frac{n}{x}}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\pm\frac{n}{x}}\right)^{\pm\frac{n}{x}}\right)^{\pm x} = e^{\pm x}$

$\lim_{n\to 0} (1 + f(n))^{\frac{1}{f(n)}} = e$

$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{\pi}}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\pi}{-x} 2x} = e^{-2\pi}$

$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2}$

$\lim \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n^n n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = e \cdot 0 = 0$

Monotone rekursive Funktionen beweisen

$a_0 = 0 \quad a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1$

1. Monotonie

$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 - a_n = \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{4} = \frac{(a_n-2)^2}{4} \ge 0$

2. Limes erraten:

$a = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4} - a + 1 = 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1/4) \cdot 1}}{2(1/4)} = \frac{1}{1/2} = 2 = a$

$a_0 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

1. Monotonie

$a_0 \le a_1$ ✓

$a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow \sqrt{2 + a_n} \le \sqrt{2 + a_{n-1}}$

$\Leftrightarrow 2 + a_n \le 2 + a_{n-1}$

$\Leftrightarrow a_n \le a_{n-1}$

2. Limes erraten

$a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a^2 = 2 + a$

$-a^2 + a + 2 = 0$

$\Rightarrow a = 2, a = -1$ ← unmöglich

3. Beschränktheit nach Limes

$a_0 = 0 \le 2$ ✓

$a_n \le 2 \Rightarrow \frac{a_n}{2} \le 1 \Rightarrow \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 \le 1$

$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \le 2 \Rightarrow a_{n+1} \le 2$ □

$a_0 = 2 \Rightarrow a_{n-1} \le 2 \Rightarrow 2 + a_{n-1} \le 4$

$\Rightarrow \sqrt{2 + a_{n-1}} \le 2 \Rightarrow a_n \le 2$ □

Alternativ: Löse Rekursion & Beweise per Induktion.

Wurzeltrick

$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(n+2-n)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$

$= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})} + \sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1\right)} =$

$\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{2}{2} = 1$

Teilfolgen $\Lambda \subset \mathbb{N}$ $\quad \Lambda \sim \mathbb{N}$

$\{a_n\}_{n\in\Lambda}$ Teilfolge $\quad \ell: \mathbb{N} \to \Lambda \quad (a_{\ell(n)})$

(a_n) = Folge; $(a_n)_i$ = i-te El. Folge; (a_{2n}) = Teilfolge mit $\Lambda = 2\mathbb{N}$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$ Jede Teilmenge von (a_n) konvergiert nach a

Beweis per Widerspruch: Angenommen eine Teilfolge hätte
$\lim a_{\ell(n)} = c \neq c' = \lim a_{\ell'(n)} \quad \varepsilon = \frac{|c-c'|}{2}$

Dann gibt es kein $N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$, da wir immer eine Zahl aus $(a_{\ell(n)})$ oder eine aus $(a_{\ell'(n)})$ nehmen.

- $\lim_{n\to\infty} (a_{2n}) = a \wedge \lim_{n\to\infty} (a_{2n+1}) = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

Da nur endlich viele Punkte in $(a_{\ell(n)})$ zu einem anderen Punkt konvergieren können und das gleiche in $(a_{\ell'(n)})$ können nur endlich viele Punkte in (a_n) sein. Die andere Richtung folgt

- (a_n) beschränkt $\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\Lambda}$ beschränkt

Häufungspunkte

$h \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n) :\Leftrightarrow \exists \ell : \lim_{n\to\infty} (a_{\ell(n)}) = h$

Bolzano-Weierstrauss

(a_n) beschränkt $\Rightarrow$ Existiert ein Häufungspunkt

Konstruktiver Beweis:

$a_1 = \inf(A) \quad b_1 = \sup(B)$

for($k \in \mathbb{N}$):
$\quad c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$
$\quad$ if$(|\{a_n \in [a_k, c_k] : n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0)$ $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = c_k$;
$\quad$ sonst $a_{k+1} = c_k$; $b_{k+1} = b_k$

TODO difficult example recursion dd

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$; $\quad b_i = \sup\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots\}$

$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$; $\quad c_i = \inf\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots\}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n$

Wachstumsraten

- Methode 1: Zeige das f stetig $\wedge$ $f(x) = g(x)$ Punkte
- L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{B^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha)^{(\alpha)}}{(B^n)^{(\alpha)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\ln^\alpha(B)\, B^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B^n}{n!} \overset{k>B,\ k<n}{\leq} \frac{k^k}{k!(k+1)\cdots n} \leq \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{k^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Cauchy sequence

(a_n) cauchy $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n,m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Cauchy Kriterium

$\Rightarrow \mathbb{Q}$

(a_n) konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) cauchy

(a_n) divergent $\Leftrightarrow$ (a_n) nicht cauchy

$(\Rightarrow)$ $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|a - a_m|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ a_n cauchy $\Rightarrow$ a_n beschränkt $\Rightarrow$ Bolzano Weierstrauss:

$|a_n - a| = |a_n - a + a_{\ell(n)} - a_{\ell(n)}| \leq \underbrace{|a_n - a_{\ell(n)}|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|a - a_{\ell(n)}|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$

Technik cauchy:

$$\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{m-1}{2m}\right| = \left|\frac{mn - m - mn + n}{2nm}\right| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right| < \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$n = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$$

Reihen sind von der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Die Folge der Partialsummen: $(s_n)_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$

Reihe konvergent $:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = H_n \approx \ln(n) + O(1)$

$$|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 1/2n} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq 1/2n} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \ \square$$

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots \quad S_n = 1 + q + \dots + q^n$

$|q| < 1 \quad S_n(1-q) = 1 - q^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad q \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Mengoli-Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 = S_\infty = S$$

Technik: Beweisen per Induktion (geschl. Formel)

Wichtige endliche Reihen:

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} 2k+1 = n^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - 3/2$ ✓

Proof:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$
$$= 2 - \frac{-n-3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} \ \square$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

Alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

Variabelnwechsel Bsp.:

$$\lim_{x\to 1^+} \left[\log(x) \times \log(\log(x))\right]$$

$f(y) := y \log y$ $\quad g(x) = \log(x)$

$$y = \lim_{x\to 1^+} \log(x) = \log(1) = 0^+$$

$$\lim_{y\to 0^+} y\log(y) \overset{\text{Stetig}}{=\!=} 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \underset{y=\frac{1}{x^2}}{\overset{VW}{=\!=}} \lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 \sin\left(\frac{\log(x)}{x^2}\right)}{\log(x)}$$

VW: $y = \frac{\log(x)}{x^2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log(x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{2\sin(y)}{y} = 2$$

Partialbruchzerlegung:

Potenzreihen Bsp.:

$$\frac{\sin(x)-x}{x^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right] - x}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-1)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2(n-1)} = -\frac{1}{3}$$

Limes von Funktionen

Für jede Folge $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_0\ (x_i\neq x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=L$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x_0) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x_0) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0} f(x_0)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x_0)=L=\lim_{x\to x_0^+} f(x_0)$

Einfache Grenzwerte

$\lim_{x\to 3}(x+1)^2 = (\lim_{n\to\infty} x_n+1)^2 = (3+1)^2 = \underline{16}$

$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0\\ -x+2, & x<0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (\lim_{n\to\infty} x_n+1) = 0+1 = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = (-\lim_{n\to\infty} x_n+2) = (-0+2)=2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ does not exist.

Einfache Grenzwerte im unendlichen

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}$; Für alle Folgen x_n: $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$: $\frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

Uneigentliche Grenzwerte ($L\in\{-\infty,+\infty\}$)

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, falls jede Folge die nach x_0 konvergiert gilt:

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $(x_n)\to 0^+$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}$ TODO Formeler

---

Addition: $\lim_{x\to 0} |(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)| \leq$

$\leq \underbrace{|f(x)-L_1|}_{\varepsilon/2} + \underbrace{|g(x)-L_2|}_{\varepsilon/2} \overset{!}{\leq} \varepsilon$

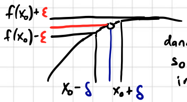
Cool Multiplikation proof: $|f(x)g(x)| \overset{\Delta}{=} |(L_1+f(x)-L_1)*(L_2+g(x)-L_2)|$

$\lim_{x\to 0} f(x)=L_1$, $\lim_{x\to 0} g(x)=L_2$ $\quad \leq (|L_1|+\varepsilon_1)*(|L_2|+\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \leq \frac{1}{L_1^2}\ \ \varepsilon_2\leq\frac{1}{L_2^2}$

(ε-δ) Definition von Grenzwerten

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L :\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\ |f(x)-L|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in\Omega: 0<\|x-x_0\|<\delta \to |f(x)-L|<\varepsilon$



Socrates wählt ε dann findet Plato ein δ, sodass jeder Punkt in Plato's Bereich in Socrates Bereich landet.

Einfache Grenzwerte (Beweis, falls man Grenzwert kennt)

$\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$; $|(3x-2)-1|<\varepsilon \Rightarrow 3|x-1|<\varepsilon$

$3(x-1)<\varepsilon \Rightarrow x<\frac{\varepsilon}{3}+1$ und $(3x-1)>-\varepsilon \Rightarrow x>1-\frac{3}{\varepsilon}$)

$\Rightarrow 1-\frac{\varepsilon}{3}<x<1+\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{3}$

$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \Rightarrow -\varepsilon<x^2-4<\varepsilon$

$\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon} \Rightarrow \delta=\min(\sqrt{4-\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon})$

Grenzwert im unendlichen

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L :\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall x>N: |f(x)-L|<\varepsilon$

Uneigentliche Grenzwerte

$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty :\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(a-\delta,a+\delta): f(x)>M$

Techniken für nicht-einfache Grenzwerte

Widerlegen:

- Zeige, dass linker Limes $\neq$ rechter Limes
- Zeige, dass zwei unterschiedliche Sequenzen existieren

$\lim_{x\to+\infty}\cos(x)$; Die Folgen $a_n=2\pi\cdot n$; $b_n=2\pi\cdot n+\pi$

$\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n=+\infty$

ABER: $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=1 \wedge \lim_{n\to+\infty} f(b_n)=-1$

Alternativ $x_n=\frac{\pi}{2}(n-1)$; $\cos(x_n)=\begin{cases}1; & k\equiv_4 0\\ 0; & k\equiv_4 1,3\\ -1; & k\equiv_4 2\end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos(x_n)$ existiert nicht!

Beweisen:

- Umformen zu einem einfachen Grenzwert
- Grenzwert erraten und ε-δ Beweis anwenden.

Beispiele:

$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5} 2\sqrt{x}$

Delta-Epsilon: $\lim_{x\to 5}\sqrt{x}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow |\sqrt{x}+\sqrt{5}-2\sqrt{5}| = |\sqrt{x}-\sqrt{5}|<\varepsilon$

$\Rightarrow \delta_1=(-\varepsilon+\sqrt{5})^2 < x < (\varepsilon+\sqrt{5})^2=\delta_2$

$\Rightarrow [5-\min(\delta_1,\delta_2), 5+\min(\delta_1,\delta_2)]$

$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-5x^2+3x-15}{(x-1)} = x^2+3 \overset{?}{=} 1 \Rightarrow |x^2+3-1|<\varepsilon$

$\Rightarrow |x^2+2| = x^2+2<\varepsilon$

$\Rightarrow x<\pm\sqrt{\varepsilon-2}$ $\quad \delta=\sqrt{\varepsilon-2}$

$\lim_{x\to 0^+}\log(x)=-\infty \Rightarrow \forall M: \log(x)<M \Rightarrow x<e^M=\delta$ $\quad x\in(0,\delta)$

$\lim_{x\to 0}\cot^2(x)=\infty \Rightarrow \left|\frac{1}{\tan^2(x)}\right| > M \Rightarrow \tan(x)\tan(x)<\frac{1}{M} \Rightarrow x<\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)=\delta$ (OBdA $M>0$)

$r\pm\infty$ ✓ z.B.: $\lim_{x\to -1^+}\sqrt[3]{x}-\log(x+1)$

$=\lim_{x\to -1^+}\sqrt[3]{x}-\lim_{x\to -1^+}(x+1) = -1-\infty=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\log(e^{2x}-2e^{2x}+3) = \log(0+0+3)=\log(3)$

Rules for fractions and roots $\sqrt{\cdot}$:

$\alpha x-\beta = (\sqrt{\alpha}\sqrt{x}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}\sqrt{x}-\sqrt{\beta})$

$|x^2-y^2| = |x-y||x+y|$, $\quad |x^2-2x-3| = |x+1||x-3|$

$\tan(x)\cdot\cos(x) \rightsquigarrow \sin(x)$

Limmultiplikationsbeweis:

$|x-x_0|<\delta \to |f(x)-L_1|<\varepsilon_1$

$|f(x)g(x)-L_1L_2|<\varepsilon$

$|(L_1+f(x)-L_1)*(L_2+g(x)-L_2)-L_1L_2|$

$\overset{\Delta}{\leq} \big((|L_1|+\underbrace{|f(x)-L_1|}_{\leq\varepsilon_1})*(|L_2|+\underbrace{|g(x)-L_2|}_{\leq\varepsilon_2})\big)-L_1L_2|$ $\quad$ wähle $\varepsilon_2<\frac{\varepsilon}{2L_1}$

$\leq |L_1*L_2|+|L_1\cdot\varepsilon_2|+|L_2\cdot\varepsilon_1|-|L_1\cdot L_2| = |L_1\cdot\varepsilon_2|+|L_2\cdot\varepsilon_1|\leq\varepsilon$

Stetigkeit

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d,\ f: \Omega \to \mathbb{R}^n$

f ist **stetig an der Stelle** $x_0 :\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ $\neq \infty$

f ist **stetig ergänzbar** an der Stelle x_0, falls Grenzwert existiert: $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$

f heisst **stetig auf Ω**, falls f stetig $\forall x_0 \in \Omega$ ist.

$\lim f(a_n, b_n) = \lim a_n + b_n = \lim a_n + \lim b_n = f(\lim a_n, \lim b_n)$

Die Polynome: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ sind stetig

- Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ (Dirichlet Funktion)

$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist an **keiner** Stelle stetig.

Beweis: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $x_0 = \pi$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3.1$, $x_3 = 3.14$, $x_4 = 3.141, \ldots$

1. $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k = \pi$ (da $\lim_{k\to\infty} |x_k - x| \le \frac{1}{10^k} \to 0$
2. $\forall k \in \mathbb{N}: \chi_{\mathbb{Q}}(x_k) = 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(x_k) = 1$
3. $\lim_{k\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(x_k) = 1 \neq 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(\lim_{k\to\infty} x_k) = \chi_{\mathbb{Q}}(\pi)$

- $f(x)$ **monoton steigend** $\Rightarrow$ f hat abzählbar viele Unstetigkeitspunkte

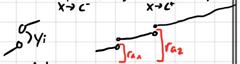
abg. Intervall: $[a,b]$

Es gilt an Unstetigkeitsstelle c: $\lim_{x\to c^-} f(x) \le \lim_{x \to c^+} f(x)$

Da monoton steigend: $\lim_{x\to c^-} f(x) < \lim_{x\to c^+} f(x)$

Somit ist das Intervall:

$Y_i = [\lim_{x\to c_i^-} f(x), \lim_{x\to c_i^+} f(x)]$



Es gibt eine rationale Zahl $r_q \in Y_i$.

Da die nächste Lücke sicher höher liegen wird und es nur abzählbar viele Zahlen in $\mathbb{Q}$ gibt, ist f abzählbar.

δ-ε Stetigkeit (δ abhängig von x_0, ε)

$\forall x_0 \in \Omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \Omega: |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon(x_0)$

$x \in (x - \delta, x + \delta)$, $\neq 0$

Gleichmässig Stetigkeit (δ nur abhängig von ε)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x_0 \in \Omega: |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- f **stetig** $\wedge$ g **stetig** $\Rightarrow$ $f \circ g$ **stetig**

Direkt: $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(\lim_{n\to\infty} f(x_n)) = g(f(x_0))$

- f, g **stetig** $\Rightarrow$ $f \cdot g$ **stetig** $\wedge$ $f + g$ **stetig** $\wedge$ $\frac{f}{g_{\neq 0}}$ **stetig**
- f **stetig** $\Rightarrow$ αf **stetig**

Notation: $C^0(\Omega : \mathbb{R}^n) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig} \}$

Vektorraum über $\mathbb{R}^n$

$-\infty < a \le b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ **stetig**

$\Rightarrow f([a,b])$ **beschränkt**

$\text{Bild}(f) := \{ f(x) : x \in [a,b] \} := f([a,b])$

Beweis (nach oben beschr.)

Wäre es **nicht** beschr.: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists t_n \in [a,b] : f(t_n) > n$ (per Def.)

$(t_n) \subset [a,b]$ beschränkt (da off. $a \le t_i \le b$).

Nach Bolzano-Weierstrauss: $(t_{\ell(n)})$ konvergente Folge

mit $\lim t_{\ell(n)} = x_0 \in [a,b]$

$\lim_{n\to\infty} f(t_{\ell(n)}) = f(\lim_{n\to\infty} t_{\ell(n)}) = f(x_0)$, also konvergiert die Folge: $f(t_{\ell(n)})$ und ist beschränkt.

Aber $(t_n) \ge n \Rightarrow f(t_{\ell(n)}) \ge \ell(n)$ $\lightning$

$f: (0,1] \to \mathbb{R},\ x \to \frac{\log(x^2) + \operatorname{atan}(x)}{x^2 - 1}$

Lipschitz stetig: x^2 auf $[-r, r]$: $|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| |x - x_0|$ $\quad L \le 2r$

Nicht auf $\mathbb{R}$: $\forall L \in \mathbb{R}\ \exists (x, x_0) \in \mathbb{R}\ |x + x_0| |x - x_0| > L |x - x_0|$

- Kompaktheit: $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt $\Leftrightarrow$ Wenn jede Folge $(x_n) \subseteq K$, einen Häufungspunkt in K bes. (also eine Teilfolge $(v_n) \subseteq (x_n)$, $\lim_{n\to\infty} v_n \in K$)

$(a,b]$ ist **nicht** kompakt: $x_n = a + \frac{1}{n} \subseteq (a,b]$

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, muss jeder Häufungspunkt $= a \notin (a,b]$

$[a,b)$ $\wedge$ (a,b) identisch.

$[a,b]$ ist kompakt: Da $(x_n) \subseteq [a,b]$ beschränkt $\xRightarrow{\text{Bolzano-Weierstrauss}}$ $\exists \ell(n): \lim_{n\to\infty} x_{\ell(n)} = c \in [a,b]$ $\square$

(Verallgemeinerung):

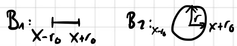
$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

$\Rightarrow K$ **beschränkt** $\wedge\ a = \inf(K) = \min(K)$ $\wedge\ b = \max(K) = \sup(K)$

Topologie

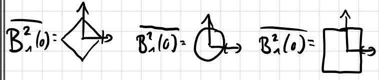
$B_r^n(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r \}$ n-dimensionale offene Kugel.

$\overline{B_r^n}(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le r \}$ n-dimensionale geschlossene Kugel.



Jede Norm hat andere Figur.

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \cdots$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots}$ $\quad \|x\|_\infty = \max(x_1, x_2, \ldots)$



Stetige Funktionen:

$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (Potenzreihe)

↳ Beweis hinten

$\operatorname{Exp}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ konvergiert, für $\mathbb{R} \ge 0$ $\operatorname{Exp}(x) \ge 1$

für $\mathbb{R} < 0$ $\operatorname{Exp}(-x) = \frac{1}{\operatorname{Exp}(x)} \ge 0$

Da $(e^x)' = e^x \Rightarrow$ streng monoton steigend.

Alternativ: $y > x \Rightarrow \operatorname{Exp}(x) - \operatorname{Exp}(y) = \operatorname{Exp}(x) \cdot (\operatorname{Exp}(y - x) - 1) \ge 1$

Da $y - x > 0$, ist $\operatorname{Exp}(y - x) \ge 1$

Stetigkeit: $\lim_{x \to x_0} \operatorname{Exp}(x) = \operatorname{Exp}(x_0)$

Sei $x = x_0 + h$ $(0 < h < 1)$: $\operatorname{Exp}(x) - \operatorname{Exp}(x_0) = \operatorname{Exp}(x_0)(\operatorname{Exp}(x - x_0) - 1)$

$= \operatorname{Exp}(x_0)[\underline{\operatorname{Exp}(h) - 1}]$

$\operatorname{Exp}(h) - 1 = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots - 1 = \overbrace{h + \frac{h^2}{2!} + \cdots}^{\text{absolut konvergent}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \le \sum_{k=1}^{\infty} h^k$

$= \frac{h}{1-h}$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{h}{1-h} = 0$ $\square$

$\Rightarrow \operatorname{Log}(x)$ stetig auf: $(0, \infty) \in \mathbb{R}$ (siehe Argument ↓)

$\sin, \cos, \arcsin, \arccos, \underset{\text{monoton}}{\arctan}$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

Technik: Stetigkeit Widerlegen mit Folgenkriterium

$\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ Nehme Folge $x_n = \pi n + \pi/2$ $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\cdot\pi + \pi/2) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \text{undef} \; \square$

2 Folgen: $\lim_{x\to\infty} \cos(x)$; $x_n = 2\pi n$, $y_n = \pi + 2\pi n$

$\lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \cos(\pi + 2\pi n)$

Stetigkeit widerlegen bei: $\cos(\frac{1}{x}), \sin(\frac{1}{x})$ 0^+

$\cos(\frac{1}{x})$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot\pi} = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{n\cdot\pi}}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$

$\sin(\frac{1}{x})$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi} = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi\right) = (-1)^n$

Allgemein: $f(x) \; {\sin \atop \cos}(\frac{1}{x}) \wedge f(x) \to 0 \Rightarrow$ nicht stetig

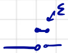
Stetigkeit zeigen bei $\lim_{x\to 0} x^k \sin(\frac{1}{x})$

Nach Sandwich $0 = \lim_{x\to 0} x^k(-1) \leq \lim_{x\to 0} x^k \sin(\frac{1}{x}) \leq \lim_{x\to 0} x^k (1) = 0$

Alternativ:

$\lim_{x\to 0^+} x \sin(\frac{1}{x}) = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} \sin(u) = \lim_{u\to+\infty} \frac{\sin(u)}{u}$

$\lim_{u\to+\infty} \frac{\sin(u)}{u} = 0$



Differenzierbarkeit $x^k \sin(\frac{1}{x})$:

$(x^k \sin(\frac{1}{x}))' = k x^{k-1} \sin(\frac{1}{x}) + x^k \cos(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})$

$= k x^{k-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{k-2} \cos(\frac{1}{x})$

Falls $k \neq 1 \wedge k \neq 2 \Rightarrow$ Sandwich!

$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

Differenzierbarkeit $x \sin(\frac{1}{x})$

$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{h \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(\frac{1}{h}) \Rightarrow$ Existiert nicht!

$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$

$\lim_{h\to 0} v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \cdot \frac{v(x+h) v(x)}{h}$

Triviale Stetigkeit (per Folgenkriterium)

$f: x \mapsto x^2 + 1$ gilt für alle Folgen $\lim_{n\to\infty} (x_i)_n = x$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} [x_n \cdot x_n + 1] = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n + 1 = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$

Stetigkeit zeigen per ε-δ Beweis

zz $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig auf $\mathbb{R}^+$

$|f(x) - f(x_0)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| \cdots < c(x_0, \delta) < \varepsilon$

$|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = |\frac{x_0 - x}{x x_0}| = |\frac{x - x_0}{x x_0}| = \frac{1}{|x||x_0|} \cdot |x - x_0|$

$|x - x_0| < \delta$; ObdA: $\delta < g(x_0) = \frac{1}{2} x_0$

$\frac{1}{|x||x_0|} \delta$ $<$ Da $x - x_0 < |x - x_0| < \delta < \frac{1}{2} x_0$

$\Rightarrow x < \frac{3}{2} x_0$

$\frac{1}{|\frac{5}{2} x_0^2|} \delta = \frac{2}{5|x_0^2|} \delta < \frac{2}{|x_0^2|} \delta \overset{!}{<} \varepsilon \Rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon |x_0^2|}{2}$

$\Rightarrow \delta \leq \min\left(\frac{1}{2} x_0, \frac{\varepsilon |x_0^2|}{2}\right)$

ZZ. $\sqrt{5 + x^2}$ Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$

$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5+x_0^2}| \overset{\cdot \frac{\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot}}{\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot}}}{=} \left| \frac{5+x^2 - (5+x_0^2)}{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5+x_0^2}} \right|$

$\overset{1.1}{=} \frac{|x + x_0|}{\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5+x_0^2}} |x - x_0| < \frac{|x + x_0|}{\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5+x_0^2}} \delta$

$K(x, x_0) \to$ Unabh. von x machen.

$\overset{\Delta}{\leq} \left[\frac{|x|}{\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5+x_0^2}} + \frac{|x_0|}{\sqrt{5+x^2} + \sqrt{5+x_0^2}} \right] \delta$

Da $\sqrt{5+x^2} > \sqrt{x^2} = x$

$\leq \left[\frac{|x|}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{|x_0|}{\sqrt{5+x_0^2}} \right] \delta \leq (1+1)\delta = 2\delta < \varepsilon$

$\delta < \varepsilon / 2$

Alternativ: $(1 + \frac{|x_0|}{\sqrt{5+x_0^2}}) \delta \overset{!}{<} \varepsilon$

$\delta < \varepsilon / (1 + \frac{|x_0|}{\sqrt{5+x_0^2}})$

Stetigkeit allg. Beweisen:

$|f(x) - f(x_0)| < \cdots < K(x, x_0) \cdot |x - x_0|$

$< \underbrace{K(x, x_0)}_{\text{von } x \text{ unabhängig machen.}} \cdot \delta$

ObdA Trick: $|x - x_0| < \delta < g(x_0)$

Z.B.: $|2x_0 - x_0| < \delta < x_0 = g(x_0)$

↳ ersetzt direkt alle x zu x_0.

$< K(x_0) \cdot \delta \overset{!}{<} \varepsilon \Rightarrow \delta < \varepsilon / K(x_0)$

Für gleichm. Stetigkeit darf K nicht abhängig sein.

Wichtige Umformungen:

$K(x, x_0) \cdot |x^2 - x_0^2| = K(x, x_0) \cdot |x + x_0| \underbrace{|x - x_0|}_{\delta}$

$\overset{\Delta}{\leq} [K(x, x_0)|x| + K(x, x_0)|x_0|] \delta$

$\frac{1}{K(x) \cdot K(x_0)} < \frac{1}{K(x_0)}$

$\frac{5x^n}{2x^n + x^{n-1} + \cdots} < \frac{5x^n}{2x^n} = \frac{5}{2}$

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} < \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$

Stetigkeit Widerlegen $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$(a_n)_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$(b_n)_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\operatorname{sgn}(0) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(a_n)$

$|f'(x)| < L \Rightarrow f(x)$ Lipschitz-stetig

$|x|$ Lipschitz stetig, aber nicht diffbar.

$\sqrt{x}$ gleichm. stetig, aber nicht Lipschitz stetig

Zwischenwertsatz:

f stetig $\wedge f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow$

$\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a,b]: f(x)=y \Leftrightarrow f$ surjektiv im Intervall

Bisektion: $a \leq X \leq b$; $f(x)=y$

$a = a_1 < \dots < a_i < a_{i+1} \leq b_{j+1} < b_j \dots < b_1 = b$; $\lim a_n = X = \lim b_n$

$\text{if } \left(f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq y\right)\{a_{n+1} = a_n;\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}\}$

$\text{else } \{a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2};\ b_{n+1} = b_n\}$

$(a_n),(b_n)$ beschränkt $\wedge$ monoton $\Rightarrow \lim a_n = X = \lim b_n$

- f stetig, $f(a)\cdot f(b) < 0$, $\exists c \in [a,b]: f(c)=0$
- $p(x)$ ein Polynom ungeradem Grad und $a_n \neq 0$:
  $\Rightarrow p(x)$ hat mind. eine Nullstelle $\in \mathbb{R}$
- $\forall M \in \mathbb{R}^{3\times3} \Rightarrow$ mind. ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (u.a. weil $\lambda, \bar{\lambda}$ EW)
  da charakt. Polynom von Grad 3 $\wedge a_3 = 1$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

Zeige $p(x) := 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ eine Nullstelle zwischen 1 und 2 hat.

$p(1) = -1 < 0$; $p(2) = 32 > 0$

Polynom stetig $\wedge$ Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists x^* \in [1,2]: p(x^*) = 0$

Stetigkeit Fixpunkt: $\sqrt[3]{\sin(x) + \cos(x)} - x \overset{!}{=} 0$ in $[0, \pi/2]$

Fixpunkt jeder stetigen Funktion von $f:[a,b] \to [a,b]$

$f(a) = a \vee f(b) = b \to$ Fertig, sonst $g(x) := f(x) - x$

$g(a) = f(a) - a > 0 \wedge g(b) = f(b) - b < 0$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\wedge$ streng monoton wachsend in $[a,b]$

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$\Rightarrow f:[a,b] \to [c,d]$ stetig $\Rightarrow$ bijektiv

$f^{-1}:[c,d] \to [a,b]$ stetig $\wedge$ (streng monoton wachsend)

Beweis: f injektiv (da monoton), f surjektiv Zwischenwertsatz: $\forall y \in [c,d]\ \exists x^* \in [a,b]$

$\Rightarrow f$ bijektiv und damit jeder Punkt definiert.

- Falls f streng monoton $\wedge$ bijektiv $\Rightarrow f^{-1}$ streng monoton

Angenommen $\exists y_1, y_2 \in [c,d]: y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2) \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$

- $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ stetig & streng monoton wachsend mit Limes:

$-\infty \leq c := \lim_{x \to a^+} < \lim_{x \to b^-} =: d \leq +\infty \Rightarrow f$ bijektiv $\wedge f$ stetig

Bsp. x^n stetig, monoton $\Rightarrow \sqrt[n]{x}$ stetig, monoton

Bsp. e^x stetig, monoton $\Rightarrow \log(x)$ stetig, monoton

Punktweise - und gleichmässige Konvergenz
(pointwise) (uniform)

Folgen von Funktionen $:= k \in \mathbb{N}\ (f_k)$

Folge von Funktionen konvergiert punktweise gegen f:

$\forall x \in \Omega: \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$

Formal:

$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists K_{x,\varepsilon}, \forall k > K_{x,\varepsilon}: |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$

Gegenbeispiel: $\forall k\ f_k(x)$ stetig $\not\Rightarrow f(x)$ stetig

$f_k:[0,1] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^k$ $\begin{cases} \lim_{k\to\infty} x^k = 0, & \text{falls } k \neq 1 \\ \lim_{k\to\infty} x^k = 1, & \text{falls } k = 1 \end{cases}$

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f$ nicht stetig, f_k schon.

Folge von Funktionen konvergiert gleichmässig gegen f, falls:

$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \|f_k(x) - f(x)\| = 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon\ \forall k > K_\varepsilon\ \forall x \in \Omega: \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$

- $f_k: \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig $\wedge f_k$ konvergiert gleichmässig gegen f
  $\Rightarrow f$ stetig.

Bsp: $P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ $\quad \rho = \frac{1}{\limsup a_k^{1/k}} < \infty$

P_n ist stetig im Konvergenzradius

$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ konvergiert gleichmässig gegen $P(z)$

für jedes $r < s < \rho$

$\Omega_\rho = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r\} \subset B_\rho(0)$ → Ball mit Radius ρ exkl.

$|P(z) - P_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \underbrace{r^k}_{r\geq0} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \underbrace{\left|\frac{r}{s}\right|^k}_{\leq 1} |s|^k$

$\leq \left|\frac{r}{s}\right|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| s^k = \left|\frac{r}{s}\right|^{n+1} \cdot C_s \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$0 \leq |P(z) - P_n(z)| \leq \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} C_s \overset{\text{Sandwich}}{\Longrightarrow} P(z) - P_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(*) Bernstein Approximation (Umkehrung)

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow B_n(f)(t) := \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\, f\left(\frac{i}{n}\right)$

Wobei: $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \to 3x + 8$ $\quad$ zz f ist stetig

$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Technik: $|f(x) - f(y)| = \dots = c \cdot |x - y| + d < \varepsilon \Rightarrow |x - y| < \frac{\varepsilon - d}{c} =: \delta$

$|f(x) - f(x_0)| = |3x + 8 - (3x_0 + 8)| = |3(x - x_0)| < \varepsilon$

$|x - x_0| < \varepsilon/3 = \delta$ $\wedge$ nicht abhängig von x

$\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right| = \left|x - 1 + \frac{1}{x+1} - y + 1 - \frac{1}{y+1}\right| = \left|x - y + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\right|$

$\leq |x + y + 1| \leq |x + y| + 1 < \varepsilon \Rightarrow |x - y| < \varepsilon - 1 = \delta$

$0 \leq x + y \leq 8$:

$f(x \in [0,4]) = x^2$ $\quad |x^2 - y^2| \leq |(x-y)(x+y)| \leq |x-y||x+y| \leq 8 \cdot |x - y|$

$8|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |x - y| < \frac{\varepsilon}{8} = \delta$

- Sei: $f: K \to \mathbb{R}^d$ stetig, K kompakt $\Rightarrow$
  f gleichmässig stetig

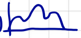
U6-4b) Fixpunktsatz $f:[0,1]\to[0,1]$ hat einFixpunkt.

Also muss $f(x)$ mit x an einem Punkt schneiden 

$g(x) := f(x) - x$

Da $g(1) \leq 0$ und $g(0) \geq 0$, muss nach ZW-Satz:

$\exists c \in [0,1]\ f(c) = 0 \Rightarrow g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$ $\square$

$f(0)=0, f(1)=0 \Rightarrow$ Beliebiger Abstand s.d. $f(x)=f(x+a)$ 

$g(x) = f(x) - f(x+a)$ ist def. $[0,1-a]$

$g(0) = \underbrace{f(0)}_{=0} - \underbrace{f(a)}_{\geq 0} \leq 0$ 

$g(1-a) = f(\underbrace{1-a}_{\geq 0}) - \underbrace{f(1)}_{=0} \geq 0 \Rightarrow \exists c \in [0,1-a]\ g(c) = f(c) - f(c+a) = 0$

Technik: Gleichung nach 0 auflösen: $f(x) = x \Rightarrow f(x) - x = 0$
$f(x) = f(x+a) \Rightarrow f(x) - f(x+a) = 0$

- Zeige, dass ein Schnittpunkt $f \cap g$ existiert $h(x) = f(x) - g(x)$

- Rolle's Satz

Sei f differenzierbar in $[a,b] \wedge f(a) = f(b) \Rightarrow \exists_{c \in [a,b]} f(c) = 0$

- Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\Rightarrow \exists c: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Supremum / Infimum Stetigkeit (Korollar)

f stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ Existieren Maximum & Minimum

Gilt zusätzlich differenzierbar auf (a,b) 

$f(z^+) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \wedge z^+ \in (a,b) \Rightarrow f'(z^+) = 0$
$f(z^-) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \wedge z^- \in (a,b) \Rightarrow f'(z^-) = 0$

Sei $z^+ \in (a,b) \wedge (a,z^+) \neq \emptyset \wedge (z^+,b) \neq \emptyset$
$(x_n) \in (a,z^+)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = z^+$, $(y_n) \in (z^+,b)$ mit $\lim y_n = z^+$

$f'(z^+) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z^+) \leq 0}{x_n - z^+ < 0} \geq 0$
$f'(z^+) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(z^+) \leq 0}{y_n - z^+ > 0} \leq 0$ $\Rightarrow f'(z^+) = 0$ $\square$

Technik Gleichmässige Konvergenz

Gegeben: f_n stetig

i) Berechnung vom punktweise Limes: $\forall x \in \Omega: f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
Falls Punktweise Limes unstetig $\Rightarrow$ nicht gleichmässig konvergent

ii) Gleichmässige Konvergenz

A) Berechne: $\forall x \in \Omega: \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$

Kann mit Ableitung $= 0$ gezeigt werden oder Monotonität wenn Ω Kompakt

B) Berechne $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \stackrel{?}{=} 0$

$\Rightarrow$ Falls 0, konvergiert f_n gleichmässig auf Ω.

Bsp.: Alternativ: f stetig $\wedge f_n \leq f_{n+1}$

$f_n(x) = \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} = \sqrt{|x| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \sqrt{|x|} = f(x)$

$\sup\left(\sqrt{|x| + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{|x|}\right)$

$\left(\sqrt{|x| + 1/n^3} - \sqrt{|x|}\right) \frac{\sqrt{|x| + 1/n^3} + \sqrt{|x|}}{\sqrt{|x| + 1/n^3} + \sqrt{|x|}} = \frac{|x| + 1/n^3 - |x|}{\sqrt{|x| + 1/n^3} + \sqrt{|x|}}$

$= \sup_x \frac{1}{n^3\sqrt{|x| + 1/n^3} + \sqrt{|x|}} \Rightarrow$

$\inf_x\left(n^3\sqrt{|x| + 1/n^3} + \sqrt{|x|}\right) \Rightarrow x = 0!$

$\frac{1/n^3}{\sqrt{1/n^3}} = \sqrt{1/n^3} = \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = 0$ ✓ ?

Sonst Gegenbeispiel: $f(x) = x$ auf $[0,1]$, $z^+ = 1$ aber $f'(1) = 1$ 

Mittelwertsatz: $f'(\,[x,y]\,) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$

$\forall a < b \in [x,y]\ \exists \xi \in (x,y): \quad f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$

$\underbrace{f(\xi)}_{<0}\underbrace{(b-a)}_{>0} = \underbrace{f(b) - f(a)}_{<0} \Rightarrow f(a) > f(b)$

$0 < |g(x)| \leq M \wedge f(x) = x + \varepsilon g(x)$ Zeige $\exists \varepsilon: f'(x) < 0 \vee f'(x) > 0$
$f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x) \wedge \varepsilon = \frac{1}{2M} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2M}|M| = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(M) > 0$

Punktweise Konvergenz auf Kompakten Interval Bsp:

$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^2$ auf $x \in [0,1]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = (1 + \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n})^2 = 1$

$|f_n(x) - f(x)| = \left|(1 + \frac{x}{n})^2 - 1\right| = \left|\frac{x^2}{n^2} + \frac{2x}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}\right|$ (mit $x \nearrow [0,1]$)

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} = 0$

$f_n = \begin{cases} n^2 x + 1 & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & ; \frac{1}{n} < x \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} f_n$ OBdA ist $n \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x = 1$

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n - 1| = \sup_{x\in[0,1]} (n^2 x, 0) = n^2 \underset{[0,1]}{x} = n^2$

$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ (nicht gleichm. konvergent)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} \wedge \left|\frac{x}{n^2}\right| < M_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konv. $\Rightarrow$

konv. $\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{n^2}$ gleichmässig zu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ (Weierstrass-Krit.)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right]$ auf $[3,50]$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-(x+n)}{xn+n^2}$ $|<|$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{-x}{3 \cdot n + n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{3 \cdot n + n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n^2} \to$ konv. $\square$

Technik Bijektivität auf Intervall I

- Finde Umkehrfunktion und zeige das $W_f \subseteq D_{f^{-1}}$

- Zeige streng monoton steigend $\wedge$ stetig auf I.
$f'(x) > 0$ oder umformen (Kehrbruch ändert Wachstum)

Bsp.: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1/x^2 - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{1/x^2 - 1}}$; $\frac{1}{x^2} \searrow \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \searrow \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1/x^2 - 1}} \nearrow$

Zeige $x>0$ gilt: $\sqrt{1+x} < 1 + x/2$

$d/dx(\sqrt{1+x}) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$d/dx(1+x/2) = 1/2$

Für $x>0$ gilt $\sqrt{x+1}>1$, also $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < 1/2$

Also wächst $\sqrt{x+1}$ langsamer als $1+x/2$ für $x>0$

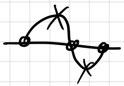
Da $\sqrt{0+1}=1 \wedge 1+0/2=1$ muss $\sqrt{1+x}<1+x/2$ für $x>0$

Mit Mittelwertsatz (aus Stetigkeit):

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u+1}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{[0,x]+1}} = \left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \frac{1}{2}\right] \le \frac{1}{2}$$

Geht auch gut für $\log(x)$ Funktionen



mind. 2 Nullstellen ✓

$$-x+1 : x+3 = -1 + \frac{4}{x+3}$$
$+3$

Intervallarithmetik:

$$((-\infty,-3]+3)^2 = ((-\infty,0])^2 = [0,+\infty)$$

$$-\frac{4}{(x+3)^2} \Rightarrow -\frac{4}{((-\infty,3)+3)^2}$$

$$= -\frac{4}{(0,\infty)} = [-\infty,0) \rightarrow$$

↘ streng! monoton fallend.

$1+e^x > 0$ monoton steigend → surjektiv

injektiv da f eine Funktion ⇒ f bijektiv

$$d/dx(f^{-1}(x)) = d/dx\left[\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right]$$

$$f''(x) = \frac{f'^{-1}(x)\cdot f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^2} = \frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))}$$

$$(x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0$$

$$(x-1)e^x - \frac{x+1}{e^x} = 0$$

Special functions

$Exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; $Exp(0)=1$

$Exp(x+y) = Exp(x)\cdot Exp(y)$; $Exp(x+iy) = e^x[\cos(x)+i\sin(x)]$

$Exp(a+b) - Exp(b) = Exp(a)\,[Exp(b)-1]$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_b(x)$

$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$; $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$; $\log(x^r) = r\log(x)$

$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

a^x { stetig $\mathbb{R}$, monoton wachsend, $a \geq 1$ wobei $a=1$ ——— ; stetig $\mathbb{R}$, " fallend, $0<a\leq 1$; stetig $(0,\infty)$, ——, $a=0$

$\log_a(x)$ { stetig $(0,\infty)$, monoton wachsend, $a\geq 1$; stetig $(0,\infty)$, monoton steigend, $a \leq 1$; stetig $(0,\infty)$, ——, $a=0$ $\log_0(x) = 0^x$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ stetig auf $(\pi k - \pi/2, \pi k + \pi/2)$, monoton steigend

$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$

$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$; $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin(a\pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\sin(b) \mp \sin(a)\cos(b)$

Additionstheoreme s. 99

arcsin, arccos stetig auf $(-1,1)$ $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

arctan stetig auf $\mathbb{R}$ und monoton steigend

$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ nicht differenzierbar bei 0!

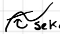
Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

Die Tangente $L(x)$ ist Approximation.

$L(x) = \overset{m}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$

$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$

Die Sekante $g_h(x)$:



$g_h(x) = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{m_h} + f(x_0)$

Differenzenquotient = Steigung $g_h(x) = m_h = \frac{\Delta f}{\Delta h}$

Differentialquotient = $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m = \frac{df}{dh}$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega \wedge$ existiert $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\Rightarrow$ f differenzierbar an Stelle x_0

Dieser Grenzwert $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ ist Ableitung v Differential an Stelle x_0.

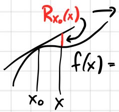
$f = (f_1,\dots,f_n): \Omega \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar $\wedge\ f'(x_0) = (f_1'(x_0),\dots,f_n'(x_0))$

$\Rightarrow$ f differenzierbar an Stelle x_0

$f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\forall x_0 \in \Omega$ $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\Rightarrow f': x_0 \mapsto f'(x_0)$ Ableitungsfunktion

$R_{x_0}(x) \to$ Restglied



$f(x) = L(x) + R_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R(x)$

$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} + \underbrace{\frac{R(x)}{x-x_0}}_{\to 0}$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x-x_0} = 0$

$(mx+b)' = m$ $\quad \lim \frac{mx+b-(mx_0+b)}{x-x_0} = \lim \frac{m(x-x_0)}{x-x_0} = m$

$(x^2)' = 2x$ $\quad \lim \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}$

$= \lim 2x_0 + h = 2x$

$(|x|)' = \begin{cases} \not\exists, & x=0 \\ 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ $\quad x>0$: Bew. $\ x<0$: Bew.

$(Exp)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \Rightarrow e^x$

$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h+\frac{h^2}{2!}+\dots)-1}{h} = \lim_{h\to 0} 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots = 1$

$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \sin(x) \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} + \lim_{h\to 0} \cos(x) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{=1}$

$= \lim_{h\to 0} \cos(x)\cdot 1 = \cos(x) = (\sin(x))'$

$\lim_{x\to 0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$ $\quad \lim_{x\to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$ $\quad \lim_{x\to a} f(x) = a$

$\lim_{\substack{x\to\infty\\ f(x)\to\infty}} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0, \alpha > 0$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$ Prove this!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{DM}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Alternative: $\lim_{x\to 0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x} \overset{DM}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} \overset{DM}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x-2}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-3x+2}{5x-2}}\right)^{\frac{x^2+1}{x-3}}$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-3x+2}{5x-2}}\right)^{\frac{x^2-3x+2}{5x-2}}\right)^{\frac{5x-2}{x^2-3x+2}\cdot\frac{x^2+1}{x-3}}$$

Da $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{5x-2} = \infty \Rightarrow$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+5x-2}{x^3-3x^2+2x-3x^2-6}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{x^3}} = e^5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}\cdot\frac{1}{\sin(4x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin(4x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin(4x)}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x^2)}{1-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-(x+1)^2)}{1-(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-(x^2+2x+1))}{-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x^2-2x)}{-x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2-2x}{-x}\cdot\frac{\sin(-x^2-2x)}{-x^2-2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(x+2)\cdot\frac{\sin(-x^2-2x)}{-x^2-2x} = +2$$

- Differenzierbar $\Rightarrow$ Stetig

Andere Richtung z.B. $|x|$ nicht.

z.z. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Sei $g: \Omega\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Da f differ. $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = f'(x_0)$

$f(x) = g(x)(x-x_0) + f(x_0)$

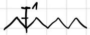
Da f diff. existieren limes:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x)}_{=f'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{0} + f(x_0)$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ □

- Sawtooth $\langle x\rangle :=$ Abstand zur nächsten ganzen Zahl.

$$0 \le \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k x}}_{=f_k(x)} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 0$$



$f_k(x) \xrightarrow[\text{gleichm.}]{} f(x) \Rightarrow f(x)$ stetig

$|f_k(x) - f(x)| < C$

$$\cdot\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle 10^n x\rangle}{10^n}\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\langle 10^n\rangle}{10^n}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n} - \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{10^n}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{10}}\right] = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}}{\frac{9}{10}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}\cdot\frac{10}{9} = \frac{10^{-k}}{18}$$ ⇝ nicht einmal abh. von ε. $=: C$

f, g differenzierbar $\Rightarrow f\pm g$ differenzierbar
$\Rightarrow f\cdot g$ differenzierbar
$\Rightarrow f/g_{\neq 0}$ differenzierbar

1. $(af \pm bg)'(x_0) = af'(x_0) \pm bg'(x_0)$
2. $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ → nicht abg.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x_0)g'(x)}{x - x_0}$$

$$\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x_0)g'(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x)}{x-x_0} - \frac{f(x_0)g(x)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}]$$

$$= f'(x_0)g(x) + f(x_0)\cdot g'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Ist diff. ⇒ stetig

Kettenregel

$f: \Omega\to\mathbb{R}$ differenzierbar an x_0, und g differenz. an $y_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ ToDo Proof this!

Allgemeine Regel: $(x^n)' = n x^{n-1}$

$x^n = x\, x^{n-1} \Rightarrow (x^n)' = (n-1)x^{n-2}\cdot x + x^{n-1} = n x^{n-1}$ □

Umkehrsatz f^{-1} differenzierbar auf $I \wedge f'(x) > 0$

$$\Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Notw. Bedingung $f^{-1}(x) \neq 0$, $f^{-1}(f(x)) \neq 0$

$Log: (0,\infty)\to\mathbb{R}$, Exp differenzierbar, $Log > 0$

$(\log(x))' = \frac{1}{x}$

$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x\log(a)} \Rightarrow \log(a)e^{x\log(a)} = \log(a)a^x = (a^x)'$

Kritische Stelle

Eine Stelle x_0, bei der $f'(x_0) = 0$ oder $f'(x_0) =$ undefiniert.

Falls $f: [a,b]\to\mathbb{R} \wedge f$ differenzierbar auf $[a,b]$

1. $\forall x\in[a,b]: f(x) = 0 \Rightarrow f$ konstant
2. $\forall x\in[a,b]: f(x) \ge 0 \Rightarrow f$ monoton steigend
3. $\forall x\in[a,b]: f(x) \le 0 \Rightarrow f$ monoton fallend

Beweis 2: (easy) $a \le x < y \le b$: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 0 \Rightarrow f(y)-f(x) \ge 0$
$\Rightarrow f(y) \ge f(x)$ □

Falls gilt $f'(t) = \lambda(f(t)) \Rightarrow f(t) = c\cdot e^{\lambda t}$
$\Rightarrow f(0) = c$

Beweis: Betrachte $\left(\frac{f(t)}{e^{\lambda t}}\right)' = -\lambda e^{-\lambda t}f(t) + e^{-\lambda t}\underbrace{f'(t)}_{\lambda f(t)} = 0$

$\Rightarrow g(t)$ konstant

Bernoulli-L'Hôpital Satz $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty$

$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\wedge$ f,g differenzierbar in $(a,c)\cup(c,b)$

$f(c)=0=g(c) \wedge g'(c)\neq 0 \wedge \lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$\Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = A$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\tan(x)}{1+2\tan(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{x^2}{\cos^2(x)}+2x\tan(x)}{\frac{2}{\cos^2(x)}} =$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{x^2}{2}+x\tan(x)\cos^2(x) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{x^2}{2}+x\overset{\infty}{\tan(x)}\cdot\cos^2(x)$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{x^2}{2}+x\sin(x)\cos(x) = \frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 0 = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cancel{1/x}\to\infty}}{x}\to 0 = \lim_{x\to0}\frac{-e^{-1/x}}{x^2} \text{ Kompl!}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\frac1x}{\frac{1}{e^{-1/x}}} = \lim_{x\to0}\frac{\frac1x}{e^{1/x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{-1/x^2\, e^{1/x}} = \frac{1}{e^{1/x}}$$

$e^{-1/x} \to e^{-\infty} = 0$

$$\lim_{x\to0^+} x\log(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\log(x)}{\frac1x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{e}-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac1x} = \frac{-x^{-2}e^{1/x}-1}{-x^{-1}} = x(x^{-2}e^{1/x}-1)$$

$= c$

$= x^{-1}e^{1/x}-1$

$\frac1x(\sqrt[x]{e}-1) = x(\sqrt[x]{e}-1)/x$

$\frac{1}{x^2}\cdot c = c$

$1 \le \sqrt[e]{e} \le \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{e} \le \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1$

$c = x^2 c$

$0 = x^2\cdot c - c$

Trigonometrische Funktionen

$$\mathrm{Exp}(i\varphi) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(i\varphi)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell\varphi^{2\ell}}{(2\ell)!}}_{:=\,\mathrm{Cos}(\varphi)} + i\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell\varphi^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}}_{\mathrm{Sin}(\varphi)}$$

Gerade Funktion: $\cos(-\varphi)=\cos(\varphi)$

Ungerade Funktion: $\sin(-\varphi)=-\sin(\varphi)$

$$\overline{\mathrm{Exp}(i\varphi)} = \cos(\varphi)-i\sin(\varphi) = \cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi) = \mathrm{Exp}(-i\varphi)$$

$$|\mathrm{Exp}(i\varphi)|^2 = \mathrm{Exp}(i\varphi)\,\mathrm{Exp}(-i\varphi) = \mathrm{Exp}(i\varphi-i\varphi) = 1 = \cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)$$

$$\left\|\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Exp}(i\varphi)\right\| = \|i\|\ \|\mathrm{Exp}(i\varphi)\| = 1$$

$\mathrm{Exp}(z+2\pi i) = \mathrm{Exp}(z)\quad z\in\mathbb{C}$

$|e^{a+bi}| = e^a \Rightarrow |e^z|=1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$

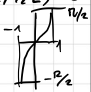
$\overline{e^{a+bi}} = e^{\overline{a+bi}}$

$1=\cos^2(x)+\sin^2(x) \Rightarrow \cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Umkehrfunktion: $\sin(]-\pi/2,\pi/2[)' = \cos(]-\pi/2,\pi/2[) > 0$

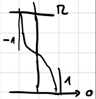
$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Umkehrfunktion: $\cos(]0,\pi[)' = \sin(]0,\pi[) > 0$

Bijektiv da mon. Steigend.

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



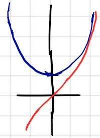
$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Hyperbolfunktionen

$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad\mathbb{R}\to[1,\infty)$

$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\quad\mathbb{R}\to(-1,1)$

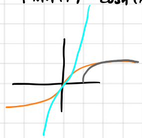


$\cosh'(x)=\sinh(x)$ $\quad\sinh'(x)=\cosh(x)$ $\quad\tanh'(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}$

$\mathrm{arccosh}(x): (1,\infty)\to\mathbb{R}^+ \nearrow$

$\mathrm{arcsinh}(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (wie atan) $\nearrow$

$\mathrm{arctanh}(x): (-1,1)\to\mathbb{R} \nearrow$



$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

$(\mathrm{arccosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\mathrm{arcsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\mathrm{arctanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$

$C^1, C^2, \dots, C^\infty$ Funktion. f stetig $\Rightarrow f \in C^0$

f differenzierbar $\wedge$ f' stetig $\Rightarrow f \in C^1$

$C^1(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f, f' \text{ stetig}\}$

$\{e^x, \cos(x), \sin(x), \log(x), \text{Polynome}\} \subseteq C^\infty$

$f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow f \in C^m(\Omega)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Sandwich: $-x^2 \le x^2 \sin(\frac{1}{x}) \le x^2$, $\lim -x^2 = 0 = \lim x^2$

$\notin C^1$

$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(\frac{1}{h}) = 0$ (Sandwich) $-h < \dots < h$

f' nicht stetig: $\forall (x_n) \lim_{n\to\infty, x_n \neq 0} x_n = 0 \to \lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(\lim_{n\to\infty} x_n)$

ABER: $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $\quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$f'(x_n) = 2 \underbrace{\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}}_{=0} - \cos(n\pi) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f'(x_n)$ existiert nicht! $\Rightarrow f'$ nicht stetig.

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, k \ge 3 \quad \subseteq C^1$$

$x^k \sin(\frac{1}{x})$ differenzierbar, da x^k und $\sin(\frac{1}{x})$ differenzierbar

bei $x \neq 0$! $f'(x) = k x^{k-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{k-2} \cos(\frac{1}{x})$

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^k \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0} h^{k-1} \sin(\frac{1}{h}) = 0$

Sandwich: $0 \leftarrow -h^{k-1} \le h^{k-1} \sin(\frac{1}{h}) \le h^{k-1} \to 0$

f' Stetigkeit bei $x = 0$:

$\lim_{x\to 0} k x^{k-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{k-2} \cos(\frac{1}{x})$

Alternativ: $f'(x) = k x^{k-1} \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2} \cos(\frac{1}{x}) x^k$

k=1: $\lim_{x\to 0} = \lim_{a\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} - \cos(a) \Rightarrow$ div. nicht $\Rightarrow$ Nicht diff.bar!

Für C^0: f_n stetig $\wedge$ $f_n \xrightarrow{\text{gleichm.}} f$ $(\sup |f_n(x) - f(x)| \to 0)$

$\Rightarrow$ f stetig

Für C^1: f_n stetig $\wedge$ $f_n \xrightarrow{\text{gleichm.}} f \wedge f_n' \xrightarrow{\text{gleichm.}} g$

$\Rightarrow f \in C^1(\Omega)$ $(\wedge f' = g)$

Potenzreihe gilt: $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ differenzierbar im Konvergenzkreis ρ $\Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$ $\wedge f(x) \in C^\infty((-\rho, \rho))$ $\quad |x| < \rho$

z.B.: $\exp(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} \Rightarrow \exp'(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{k}{k!} x^{k-1}$
$= \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$

z.B.: $f(x) = \sum_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x} \wedge f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ (umgekehrt)

$\left(f^{(k)}\right)^{(\ell)} = f^{(k+\ell)}$

Taylor-Reihe Grad 1 = Tangente

$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!}$

Sei: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$T_m(x, x_0) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \wedge \lim_{x \to x_0} \frac{R_m(x,x_0)}{(x-x_0)^m} = 0$

$f(x) = T_m(x) + \underbrace{\boxed{f^{(m+1)}(c) \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}}}_{= R_m}$ für $c \in (x_0, x)$

Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$ (also stetig $f, f', \dots, f^m, f^{m+1}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |R_m(f, x, x_0)| \le \sup_{(x_0, x)} |f^{m+1}(x)| \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}$

Falls $x_0 = 0 \Rightarrow$ Maclaurin-Reihe

Potenzreihen mit $\rho = \infty$

$e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$

$R_m(x) = e^c \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \le \frac{e}{(m+1)!}$ $\quad c \in (0,1)$ also: $e^c \le e$

$\sin(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\{0, 1, -1\}}{k!}(x-0)^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$

$T_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x)$

$|R_{2n+2}| = \left|(-1)^n f^{2n+2}(c) \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right| \le 1 \left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|$

- $\cos(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$ $\quad x \in (-1,1)$ $\quad (\rho < 1?)$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{x^n}{n}$ $\quad x \in (-1, 1]$
- $\tan^{-1}(x) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad x \in [-1, 1]$

Taylor-Reihe einer Funktion $f \in C^\infty$

$T_\infty(x) = \sum_{k=0}^\infty f^k(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$

Muss nicht konvergieren! $\to$ Nur wenn $\underbrace{|x - x_0|}_{} < \rho$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad f^{(n)}(x)|_{x=0} = 0$$

TODO: Sawtooth

$T_\infty = f \Leftrightarrow \forall x : \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

- Falls T_∞ nach f konvergiert (muss nicht), dann ist f reel analytisch
- Falls irgendeine Potenzreihe $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n a_k x^k = f(x)$, dann muss es dessen Taylorreihe sein.

z.B. $e^x = e^{x_0 + x - x_0} = e^{x_0} e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum \frac{(x-x_0)^k}{k!} = \sum e^{x_0} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$

Fehlerfunktion $\varphi_m(x) = |T_m(x) - f(x)| = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

$\rho = \infty$ für $e^x, \cos(x), \sin(x)$, $\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^\infty x^n$ $|x| < 1$

Falls: $f=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ Polynom Grad k.

$\Rightarrow f = T_n(f,x_0) = T_{n+1} = T_{n+2} = \dots$ da $f^{(n+1)}=0$

$p(x)=x^3+x+1,\ p'(x)=3x^2+1,\ p''(x)=6x,\ p'''(x)=6$

$x_0=1: \frac{3}{1}(x-1)^0+\frac{4}{1}(x-1)^1+\frac{6}{2}(x-1)^2+\frac{6}{6}(x-1)^3=p(x)$

$f:[a,b]\to\mathbb{R},\ x_0\in[a,b]$ (strikt) lokale Minimalstelle von f,
falls $\exists r>0: \forall x\in(x_0-r,x_0+r)=B_r(x_0) \Rightarrow f(x_0)\le f(x)$ ($<$)

$f:[a,b]\to\mathbb{R},\ x_0\in[a,b]$ (strikt) lokale Maximalstelle von f,
falls $\exists r>0: \forall x\in(x_0-r,x_0+r)=B_r(x_0) \Rightarrow f(x_0)\ge f(x)$ ($>$)

Hinreichende Bedingung:

$f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)>0 \Rightarrow$ Lokales Min. Ü konvex

$f'(x_0)=0 \wedge f''(x)<0 \Rightarrow$ Lokales Max. Ä konkav

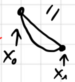
Da $f'(x_0)=0 \Rightarrow \exists c\in(x,x_0): f(x)=f(x_0)+f''(c)\frac{(x-x_0)^2}{2!}$

Sattelpunkt kritische Stelle $f'(x_0)=0 \wedge f^{(2k+1)}\neq 0$

- $f'(x_0)=0=\dots f^{(2k)}(x_0)=0 \wedge f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow$ Kein Extrema
- $f'(x_0)=0=\dots=f^{(2k-1)} \wedge f^{(2k)}(x_0)>0 \Rightarrow$ Minimum

z.B.: $a(x-x_0)^3+b \rightsquigarrow f'(0)=0=f''(0)\neq f'''(0)=a\cdot 3!$

Konvexe Krümmung



Konkave Krümmung

$\forall x\in(x_0,x_1): f(x) \le f(x_0) + \left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)(x-x_0)$ ($\ge$)

starting point, slope

$f''((a,b))\ge 0$ konvex in (a,b) Ü

$f''((a,b))\le 0$ konkav in (a,b) Ä

Endograph: $\{(x,y): e(x)=y>f(x)\}$

Widerlege mit zwei Stellen $x_0<x_1$

Wendepunkt: Wechselnder Drehpunkt

Sattelpunkt = Wendepunkt mit horizontaler Tangente

Bsp.: $f(x)=e^x=f''(x)>0 \Rightarrow$ Konvex
$f(x)=\ln(x)\ f''(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow$ Konkav

Jensens Ungleichung:

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ konvex $\Rightarrow \forall x_1,\dots,x_n\in(a,b)\ \exists t_1,\dots t_n\in(a,b)$
mit $\sum_{i=1}^n t_i=1: f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n t f(x_i)$

$N=2: t_1=t \wedge t_2=1-t$

$\boxed{\forall t\in(0,1): \underline{f(tx_1+(1-t)x_0)} \le tf(x_1)+(1-t)f(x_0)}$

Punkt an Stelle $=f(t(x_1-x_0)+x_0)$ Höhe der Sekante

Korollar:

$0<x_1,\dots,x_n<\infty \wedge 0\le\alpha_1,\dots,\alpha_n\le 1 \wedge$
$\wedge \sum_{i=1}^n\alpha_i=1 \Rightarrow \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}\le\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i$

(Für $\alpha_i=1/n$ klassische Ungl.)

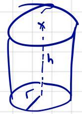
Beweis Kor. $f(x)=e^x \Rightarrow e^x$ konvex

$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^n e^{\alpha_i\ln(x_i)}=e^{\sum_{i=1}^n\alpha_i\ln(x_i)}$

$=f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\ln(x_i)\right)\overset{\text{Jensen}}{\le}\sum_{i=1}^n\alpha_i f(\ln(x_i))$

$=\sum_{i=1}^n\alpha_i e^{\ln(x_i)}=\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i$

5-te Ableitung $\neq 0$? Nana



$A(r,h)=2\pi rh+2\pi r^2$

$V(r,h)=\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$ oder r alternativ

Minimiere A

1. Nebenbed.

$r\in(0,\infty)\quad f(r)=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$

$f'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}\overset{!}{=}0$

$\Rightarrow \frac{4\pi r^3-2V}{r^2}=0 \Rightarrow 4\pi r^3-2V=0$

$r_0=\sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} \Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r_0$

$h=\frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}}=\frac{V^{1/3}}{2\pi^{1/3}}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$f''(r_0)=4\pi+\frac{2V}{r^3}>0 \Rightarrow r_0$ lokales Minimum.

$f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$ auf $[-1,1]$

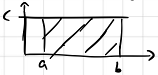
$f'(x)=\frac{2x(1-x^2)-x^3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)\overset{!}{=}0 \Rightarrow 2x-3x^3=0 \Rightarrow 2-3x^2=0 \Rightarrow x\in\{0,\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\}$

Allgemein: $\frac{f(x)}{g(x)}\overset{!}{=}0 \Rightarrow f(x)=0$

Integration

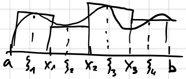
$f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+ \in C[a,b]$ Integration = Fläche



Fläche $c(b-a)$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}^- \in C[a,b]$ Integration = − Fläche

Approximation $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$

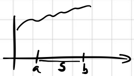


Riemannsche Summe $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \sim A$

② Kraft f längs Weg s von Punkt a nach b $(b-a=s)$

Arbeit $A = \int_a^b f(x)\,dx$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$



uneigentliches Integral

$\shortparallel$

Stammfunktion $F:[a,b]\to\mathbb{R} \in C_1 :\Leftrightarrow F' = f$ im Intervall $[a,b]$

Wenn F Stammfunktion $\Rightarrow F + c$ Stammfunktion

Beweis: Sei $H = F - G$, $H' = F' - G' = f - f = 0 \Rightarrow H$ konstant

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$

Anfangswertproblem $F(c) = d \wedge F'(x) = f(x) = \cdots$

$F(0) = 5 \wedge f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + K \Rightarrow 5 + \cos(0) = K = 6$

Monotone Funktionen – Riemann Integral

$f: x\in[0,5] \mapsto x^2$ Falls f integrierbar $\Rightarrow$ Untersumme genügt

Für eine Partitionenfolge $\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P_{(n)}) = \overline{S}(f, P_{(n)})$

$\underline{S}(f, P_{(n)}) : \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in I_i} f(x) \cdot \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{5(i-1)}{n}\right)^2 \frac{5}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 5^3$

$[(b-a)\frac{i-1}{n} + a, (b-a)\frac{i}{n} + a] \quad = \frac{5^3}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} n^2 - 2n + 1\right) = \frac{250}{n^3}\left(\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right)$

$O(n)$ $\quad O(n)\ O(n)$

$\to 250/6$

Riemannsche Integral

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt

Eine Partition des Intervals $I = [a,b]$

$P := \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ wobei $x_0 < x_1 \dots < x_n$ (n endlich)

$P(I) := \{P \subset I = [a,b] : a, b \in P, P$ ist endlich$\}$

Feinheit der Zerlegung = Länge vom grössten Teilintervall

$\delta(P) = \max_{1\le i\le n} \{|x_i - x_{i-1}|\}$

$\xi_i \in P = I_i \subseteq I$ Zwischenpunkte (Stützstelle)

$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$ (Rechte) Riemannsche Summe

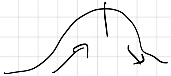
$\Sigma(f, P, \xi)$

Fläche der Zerlegung P und ξ_i

$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =:$ Linke Riemannsche Summe

CDF Form mit links, rechts Integral approximieren.

PDF



Idee:

Differenzierbar $\subseteq$ Continous $\subseteq$ Integrable

Bsp. $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \le x < 1 \\ 5 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Riemannsche Untersumme

$\underline{S} = U = \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k}(f)\,(x_k - x_{k-1})$

$\overline{S} = O = \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k}(f)\,(x_k - x_{k-1})$

$\underline{S}(f,P) \le S(f,P,\xi) \le \overline{S}(f,P)$

Sei $f: I : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion:

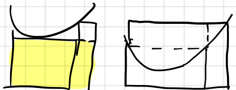
$P, Q \in P(I)$

$P \subset Q \Rightarrow \underline{S}(P) \le \underline{S}(Q) \le \overline{S}(Q) \le \overline{S}(P)$

$\sup_{P\in P(I)} \underline{S}(f,P) \le \inf_{P\in P(I)} \overline{S}(f,P)$

Sei $P = \{x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$

$\subseteq Q = \{x_1, \dots, x_i, \tilde{x}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$



$\{x_i, \tilde{x}, x_{i+1}\}$ Infimum $\quad \{x_i, \tilde{x}, x_{i+1}\}$ Supremum

---

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt **Untere-Riemann Integral**

- $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{\underline{S}(f,P) : P \in P(I)\}$
- $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{\overline{S}(f,P) : P \in P(I)\}$
- f über $[a,b]$ Riemann-integrierbar falls:

$A := \int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

a := Untere Grenze $\quad f$: Integrand $\quad x$: Integrationsvariable

$dx \sim \Delta x = (x_i - x_{i-1})$

Sei $c \in \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion.

$\Rightarrow \sum c$ (Länge von Teilintervalle) = konst.

$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

$f:[0,10]\to\mathbb{R}$ $\quad \forall P (\underline{S}(P) = 0)$

$P^n = \{i + \frac{k}{n} : i = 0, \dots, 10 \wedge k = 0, \dots, n-1\} = N$ Zahlen in jedem Teilinterval

$\overline{S}(f, P^n) = \frac{20}{n} < \varepsilon \qquad \frac{10}{10\cdot n} = \frac{1}{n} = \delta$

$\frac{20}{\varepsilon} < n \Rightarrow N_\varepsilon = \lceil \frac{20}{\varepsilon} \rceil$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ 1 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$ nicht stetig!

$\sup \underline{S}(f,P) = 0$;

Für jede Partion P mit Feinheit $\delta(P)$ gilt:

→ Höchstens 2 Partitionen.

2δ

$0 < \bar{S}(f,P) \leq 2\delta(P)$

$P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots b\}$ $\delta(P_n) = \frac{b-a}{n}$

$0 \leq \inf \bar{S}(f,P) \leq \inf_{P_n} 2\frac{(b-a)}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \bar{S}(P_n) = 0 \Rightarrow 0 = \bar{\int_a^b} f(x)\,dx$

$f: \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Da $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dicht $\Rightarrow$ Es existieren rationale / irrationale Zahlen in jedem Intervall.

Hinreichende Kriterien

- Riemannsche Kriterium: Beschränkte Funktion $f: [a,b]$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists Q \in P(I)$ mit $\bar{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$

- f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar (Teilen in $\nearrow\searrow\nearrow\searrow$ Sch.)
- f monoton $\Rightarrow$ f integrierbar

$\int_a^b f(x)\,dx$ integrierbar $\Rightarrow$ 10.5 ∇!

$A = \int_a^b f(x)\,dx = \sup \underline{S}(f,P) = \inf \bar{S}(f,P)$

$\exists P_1 \quad A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,P_1) \wedge \exists P_2 \quad A + \frac{\varepsilon}{2} > \bar{S}(f,P_2)$

Die Partition $Q := P_1 \cup P_2$ und somit: $\sup(Q) - \inf(Q) < \varepsilon$

aus: $\underline{S}(f,P_1) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \bar{S}(f,Q) \leq \bar{S}(f,P_2)$

($\Leftarrow$)

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Q \in P(I) : \bar{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \varepsilon$

$\bar{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \bar{S} \leq \bar{S}(f,P)$

$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \bar{S} \geq \underline{S}(f,P)$

$\forall \varepsilon > 0$: Wähle $\varepsilon = \lim_{n\to 0^+} n$

$\forall P \in P(I)$: $\bar{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \bar{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

Beweis monoton steigend integrierbar:

$x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i$

$\bar{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)](x_{i+1} - x_i)$

$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0))$

$= [f(b) - f(a)] \frac{b-a}{n}$ (worst-case)

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n > 0 : [f(b) - f(a)] \frac{b-a}{n} < \varepsilon$

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar $\wedge$ beschränkt und $P^{(n)}$ eine Partition mit $\lim_{n\to\infty} \delta(P^n) \to 0$

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f, P^{(n)}, \xi^{(n)})$ ↳ beliebig

Bsp. $\int_0^1 (x^2 - x)\,dx \wedge x_i = a + i\frac{b-a}{n} = \frac{i}{n}$

f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

ξ_i = rechte Zwischenpunkte $= \frac{i}{n}$

$= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{x_k - x_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$

$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

Cauchy Sum

$\forall k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$

Find limit of cauchy sums:

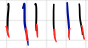
$\delta = \sup\{(x_k - x_{k-1}) : k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$

You can put a pre-order relations on the set of $I_k \in [a,b]$

$I' \leq I'' \Leftarrow \delta' \leq \delta''$

Transitive & Reflexive

$\exists I''' : I', I'' \leq I''' = I' \cup I''$



$\lim_{\delta\to 0} S(f, I, \xi)$ or $\lim_{\delta\to 0} \underline{S}(f, I, \xi)$

If f continuous $\in [a,b]$ or f monotone $\in [a,b]$

$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0} \underline{S}(f, I, \xi) = \lim_{\delta\to 0} \bar{S}(f, I, \xi) =$

$\forall C \lim_{\delta\to 0} S(f, I, \delta)$

For e.g. $\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$: $0 < a, b$

$I = \{a, a + \frac{(b-a)}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, b\}$

$x_k - x_{k-1} = \left(\frac{b-a}{n}\right)$

Technique using Cauchy sum for showing integral

$\int_a^b \frac{1}{x^2}$, $\quad 0<a,b$

Partitioniere $I := \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$

$\xi_k = \sqrt{x_{k-1}\cdot x_k} \in [x_{k-1}, x_k]$ = Geom. Mittel

Identität:

$$\frac{1}{\alpha\cdot\beta} = \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$\alpha = x_{k-1},\ \beta = -x_k$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\xi_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1} x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1}-x_k}\left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right)$$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{n}{b-a}\sum \frac{1}{\xi_k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\xi_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1}\cdot x_k}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta} \Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta+\alpha}(\beta+\alpha)$$

$\alpha = x_{k-1},\ \beta = -x_k$

$$-\frac{1}{x_{k-1}x_k} = \frac{1}{x_{k-1}(-x_k)}\left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right)$$

$$\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n}{b-a}\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{x_{k-1}}-\frac{1}{x_k}\right)$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$\int_0^1 x^2 dx \wedge P^n := \{\frac{1}{n} \cdot k \mid k=0,\dots,n\} \wedge \delta(P^n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$S(f, P^n, \xi^n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hauptsatz

6.3.1 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ riemann integrierbar mit $f\le g$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

6.3.2 Linearität: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-Intg. $\wedge\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_a^b(\alpha f+\beta g) = \alpha\int_a^b f\,dx + \beta\int_a^b g\,dx$$

Kor 6.3.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann I. $\Rightarrow |f|$ integrierbar

$$\wedge\ \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(Kontinuierliche Dreiecksungleichung)

$|\sum x_i| \le \sum |x_i|$

Kor 6.3.2 $f, f_k \in C^0([a,b])$ =stetig mit $f_k \xrightarrow{\text{gleichm.}} f$

$$\left|\int_a^b f_k\,dx - \int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f_k - f|\,dx \le |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f_k - f| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Potenzreihen dürfen gliedweise integriert werden, falls sie im Konvergenzradius konvergiert.

$$\int_a^b p(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k\, k\cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

Gebietsadditivität: $\Leftrightarrow f:[a,b]\to\mathbb{R}$ über $[a,b]$ integ.

Sei $c\in[a,b]$, dann sind $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$c\le d\in[a,b] \Rightarrow \int_d^c f(x)\,dx = -\int_c^d f(x)\,dx$

$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \frac{1}{b-a}(F(b)-F(a)) = F'(c)$

Zwischenwertsatz der Integration

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetige Funktion $\Rightarrow$ $\rightarrow$ alternativ

$$\exists c\in[a,b]: \left[\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\right]$$

Beweis: Es gibt $m := \min(f(x^-)),\ M := \max(f(x^+))$

$$f(x^-)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le f(x^+)(b-a)$$

$$f(x^-) \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{y\in[m,M]} \le f(x^+) \quad \Downarrow = \text{const}$$

$\Rightarrow$ Zwischenwertsatz: Da $\forall y\in[m,M]: \exists c\ f(c)=y$

$$\Rightarrow (b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integral mit veränderbarer obere Grenze: $f\in C^0[a,b]$

$x\in[a,b]: F(x) := \int_a^x f(x)\,dx \Rightarrow$ Existiert immer

Hauptsatz der Integral-& Differential rechnung

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

$\forall x\in[a,b]: F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$

$\Rightarrow F:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar $\wedge\ F'(x) = f(x)$

Kor 6.3.4

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Beweis:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \overset{zz}{\Rightarrow} F(x) = f'(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to0}\frac{F(h+x)-F(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x+h} f(t)\,dt\right]$$

$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ Nach Zwischenwertsatz

$$\exists c_h\in[x,x+h]: \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h)(h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{1}{h} f(c_h)\cdot h = \lim_{h\to0} f(c_h) = f(x)$$

Per Def.: $F_c(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)\,dt = 0 + c$

$\Rightarrow F_c(b) - F_c(a) = (F_0(b)+c) - (F_0(a)+c) = \int_a^b f(t)\,dt$

$\to 1 \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \sin(\pi/2) = 1$

$G(x) = \int_0^x \sin^2(t)\,dt \Rightarrow G'(x) = g(x) = \sin^2(x)$

ABER: $F(x) = \int_0^{x^2+5} \sin^2(t)\,dt$

$\Rightarrow F'(x) = G'(x^2+5)\cdot(x^2+5)'$

$= \sin^2(x^2+5)\,2x$

TODO für unten!

$\int x^{-1}\,dx = \ln(|x|) + c$

$\ln'(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

$\int \tan(x)\,dx = -\ln(|\cos(x)|) + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + c$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$

Abschätzung

$\int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup|f|$

Trick Taylorreihe: $\ln(1+x)$

$0 \le b \le 1: \int_1^{b+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(|1+b|) = \ln(1+b)$

$= \int_1^{b+1} \frac{1}{1-(1-x)}\,dx$

$\sum_{r=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$

$\frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k \quad$ wo $|1-x| < 1$

$\ln(1+b) = \int_1^{1+b} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^{1+b} (1-x)^k\,dx$

$\int (1-x)^k\,dx = -\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-(1-x)^{k+1}}{k+1} \Bigg|_1^{1+b} \right)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}\, b^{k+1}}{k+1}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\, b^k}{k} = \ln(1+b), \quad |b| < 1$

Partielle Integration

$(uv)' = u'v + uv'$

$\int (uv)' + c = \int (u'v + uv')\,dx + c \qquad v\frac{d}{dx}\,dx = dv$

$\Rightarrow \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \Leftrightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du + c$

$\int_a^b a\cdot b\,dx = aB\Big|_a^b - \int_a^b a'B\,dx$

Bsp. $\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx + C = (x-1)e^x + C$

$\int e^x x\,dx = e^x \tfrac{1}{2}x^2 - \int e^x \tfrac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow$ nicht besser

$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx = x^n e^x - \frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1} e^x + \frac{n!}{(n-2)!} x^{n-2} e^x \ldots$

Gut für Logarithmenelimination!

$\int \log(x)\cdot 1\,dx = \log(x)\cdot x - \int \frac{1}{x} x\,dx = \log(x)x - x + c \quad \square$

Nützlich für Trigonometrische Funktionen

$\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx =$

$= -\cos(x)\sin(x) + \int (1 - \sin^2(x))\,dx$

$= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$

$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{-\cos(x)\sin(x) + x}{2} + c$

Trigonometrische Identität $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$= 1 - 2\sin^2(x)$

$\int \sin^2(x)\,dx = \int \left(\tfrac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right) dx$

$= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin(2x)}{2}$

$= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\,\frac{2\cos(x)\sin(x)}{2}$

$\int_a^b (\sin x)^{k+1}\,dx = \int_a^b (\sin x)^k (\sin x)\,dx = -(\sin x)^k \cos(x)\Big|_a^b$

$- \int_a^b k(\sin x)^{k-1}\cos(x)(-\cos(x))\,dx = \ldots\Big|_a^b + k\int_a^b (\sin x)^{k-1}\cos^2(x)\,dx$ $\quad \cos^2(x) = (1 - \sin^2(x))$

$\ldots\Big|_a^b\; k\int_a^b (\sin x)^{k-1}\,dx - k\cdot\int_a^b (\sin x)^{k+1}\,dx$

$\int_b^a (\sin x)^{k+1} = \frac{1}{(k+1)} (\sin x)^k \cos(x)\Big|_a^b - \frac{k}{k+1}\int_a^b (\sin x)^{k-1}\,dx$

Falls $(k+1) = 2n$

$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\,dx = 0 + \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-2} =$

$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$= \left(\frac{2n}{2n}\right)\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-2}{2n-2}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right) = \frac{\cdot n!}{(2^n n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$k+1 = 2n+1: \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\pi/2} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

Für $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le \sin(x) \le 1$

$(\sin x)^k - (\sin x)^{k+1} = \underbrace{(\sin x)^k (1 - \sin x)}_{\ge 0}$

$(\sin x)^k \overset{!}{\ge} (\sin x)^{k+1}$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1}\,dx \le \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n}\,dx \le \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n-1}\,dx$$

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \le \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)(2n)!} = \frac{2\,2^{n-1}\, n\,(n-1)!}{2^2 n^2\,(2n-1)!}$$

$$\frac{(2^n n!)^2\,(2^n n!)^2}{(2n+1)!\;(2n)!} \le \pi \le \frac{(2^n n!)^2\; 2\; (2^n n!)^2}{(2n)!\quad 2n(2n)!}$$

Sandwich $\Longrightarrow$ $\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2}\cdot\frac{1}{n}$

Stirlings-Formel

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} + O(1)$

Bmk Taylor entwicklung einer Funktion $f\in C^{n+1}$ um x_0 erhält man durch n-fache Partialintegration

$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^x f'(t)\,dt \wedge F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$

$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^x (t-x)'\, f'(t)\,dt = (t-x)f'(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)\,dt + \dots$ n-mal

Aufgabe hier!

Partielle Integration funktioniert gut bei:

e^x (poly)

e^x (trig)

$(\sin^\alpha x)\, e^x$

$(\log x)$

Methode der Substitution

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R} \in C^0$, $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}\in C^1$

$t_0\le t_1 \in[\alpha,\beta]$, $g([t_0,t_1])\subset[a,b]$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx$

Beweis:

$\int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx = F(g(t_1)) - F(g(t_0)) \Rightarrow$ diff

$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dx \qquad f(g(t_1))\,g'(t_1) - f(g(t_0))\,g'(t_0)$

$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt \Rightarrow g(t)=x,\ g'(t)\,dt = dx$

(links→rechts)

$\int_0^1 (1+t^2)^4\,(2t)\,dt = \int_{1+0^2}^{1+1^2} x^4\,dx = \int_1^2 x^4\,dx = \frac15 x^5 + c$

$\int \sin^3(t)\cos(t)\,dt = \int x^3\,dt = \frac{x^4}{4}+c = \frac{\sin^4(t)}{4}+c$

Grenze kann auch erst am Ende ang. werden!

$\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\cos(t)\,dt = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\sin^4(t)}{4}\Big|_0^{\pi/2}$

3. $\int\tan(t)\,dt = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = \int -\frac1x\,dx = -\log|x|+c = -\log|\cos t|+c$

$x=\cos(t)$

$\Rightarrow dx = -\sin(t)\,dt$

Limes mit Integral trick

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+i}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n(1+\frac in)}} = \frac1n\cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac in}} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac1n\cdot f(\tfrac in) = \int_0^1 f(x)\,dx$

Löse für a, sodass $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x \overset{\text{Subst. } t=x-a}{=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2a}{t}\right)^x$

$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2a}{t}\right)^{t+a} \overset{3}{=} \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2a}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2a}{t}\right)^a$

$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2a}{t}\right)^t\cdot\left(1+\lim_{t\to\infty}\frac{2a}{t}\right)^a = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2a}{t}\right)^t\cdot 1 \Rightarrow a=\frac12$

Direkte Integration

$\int\frac{1}{x\log(x)}\,dx = \int \frac1x\cdot\frac{1}{\log(x)}\,dx = \int\frac1u\,du = \log(u) = \log(\log(x)) + c$

$\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \overset{u=\cos(x)}{=} \int -\frac1u\,du = -\log(u) = -\log(\cos(x))+c$

$\int\frac{\operatorname{atan}^5(x)}{1+x^2}\,dx \overset{u=1+x^2}{=} \int \operatorname{atan}^5(u)\,du = \frac16\operatorname{atan}^6(u) = \frac16\operatorname{atan}^6(1+x^2)$

$\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \overset{u=e^x}{=}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(e^x)$

Trick $\sqrt{x}$

$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx = \int\frac{\sqrt{x}}{1+(x^{3/2})^2} \overset{u=x^{3/2},\ du=\frac32\sqrt{x}}{=} \int\frac23\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du = \frac23\tan^{-1}(u)$

$\int\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \overset{u=\sqrt{x}}{=} \int\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\sin^{-1}(u)$

Trick $1+\sin(2x) = 1+2\sin(x)\cos(x) = (\sin(x)+\cos(x))^2$

$\int\sqrt{1+\sin(2x)}\,dx = \int\sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)}\,dx = \int\sqrt{\sin^2(x)+\cos^2(x)+2\sin\cos}$

$=\int\sqrt{(\sin(x)+\cos(x))^2}\,dx = \int \sin(x)+\cos(x)\,dx = \sin(x)-\cos(x)+c$

$\int\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sqrt{\sin(2x)}} = \int\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sqrt{(\sin(x)+\cos(x))^2-1}} \overset{u=\sin(x)+\cos(x),\ du=\cos(x)-\sin(x)}{=} \int\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du = \tan$

Substitution (links → rechts)

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt \quad \frac{u=e^t}{du=e^t dt} \quad \int_{u(0)=1}^{u(1)=e} \frac{du}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_1^e$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{du}{1+u} = \ln|1+u|\Big|_{u(0)}^{u(1)} = \ln|1+e^t|\Big|_0^1$$

Substitution (rechts → links)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{t^{-1}(0)}^{t^{-1}(1)} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac12+\frac{\cos(2t)}{2}\right)dt = \frac12 t + \frac{\sin(2t)}{4}\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \pi/4$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx \quad \frac{u=2x-3}{du=2dx} \quad \int \frac{\frac{u+3}{2}}{\sqrt u}\,\frac{du}{2}$$

$\frac{u+3}{2}=x \wedge dx=\frac{du}{2}$

$$\int \frac12 u^{1/2}+\frac34 u^{-1/2}\,du = \frac{\frac12}{\frac32}u^{3/2}+\frac{3/4}{1/2}u^{1/2}+c$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx \quad \frac{u=\sin(x)}{du=\cos(x)dx} \quad \int_{u(-\pi/2)=-1}^{u(\pi/2)=1}\frac{du}{u^2} = \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2}\,du$$

→ Nicht stetig!

$$\int_0^{2\pi} x\,dx \quad \frac{u=\sin(x) \Rightarrow x=\operatorname{asin}(u)}{dx=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}} \quad [-\pi/2,\pi/2]$$

$$\neq \int_0^0 \left(\frac{\operatorname{asin}(u)}{\sqrt{1-t^2}}\right)du=0$$

Da asin(u) nicht definiert von $[0,2\pi]$

$$\int_{-1}^1 x^3 x\,dx \quad \frac{u=x^2 \Rightarrow x=\sqrt u \;\text{ nicht def } [-1,0)}{du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}} \quad \int_{-1}^1 u^{3/2}\,\frac{du}{2} \;\; \text{undef.}$$

$$\int_{-1}^0 x^4\,dx + \int_0^1 u^{3/2}\,\frac{du}{2}$$

Partialbruchzerlegung $p\in P_n,\ q\in P_m \quad n<m$

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \rightsquigarrow$ Elementare rationale Funktionen.

$\int\frac{1}{x-a} = \ln|x-a| \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{atan}(x)+c$

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0 = \prod_{i=1}^N (x-x_i)^{n_i}\prod_{j=1}^M\left[(x-(\alpha_j+i\cdot\beta_j))^{m_j}(x-(\alpha_j-i\cdot\beta_j))^{m_j}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^N (x-x_i)^{n_i}\prod_{j=1}^M\left((x_i-\tilde\alpha_j)^2+\tilde\beta_j^2\right)^{m_j} \quad \Big|\; x_i\text{: Reele Nullstellen}$$

$$\Rightarrow R(x) = P_1(x)+\sum_{i=1}^N R_i(x)+\sum_{i=1}^M S_i(x)$$

$P_1(x)$ = falls deg P ≥ deg Q $\qquad R_i(x) = \frac{a_{i1}}{(x-x_i)^1}+\frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2}+\dots;$

$$S_i(x) = \frac{b_{j,1}x+d_{j,1}}{((x-\alpha_j)^2+(\beta_j)^2)}+\dots+\frac{b_{j,m_j}x+d_{j,m_j}}{((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2)^{m_j}}$$ wo m_j = Multiplizität

$a_{ik} \quad k=1,\dots,n_i \quad i=1,\dots,N;\ j=1,\dots,M$

$R(x)=\frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$; $Q(x)=0$ für $x=\{0,-i,+i\}$ Vielfachheit 2, Vielfachheit 1

$$\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{b_1x+d_1}{x^2+1}=\frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1(x)(x^2+1)+a_2(x^2+1)+(b_1x+d_1)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow a_1x^3+b_1x^3+(a_2+d_1)x^2+a_1x+a_2 = 1-x$$

$$\Leftrightarrow a_1+b_1=0 \wedge a_2+d_1=0\wedge a_1=-1\wedge a_2=1 \Rightarrow b_1=1,\ d_1=-1$$

$$\int\frac{1-x}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int\left(-\frac1x+\frac1{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= -\ln|x| - x^{-1} + \underbrace{\int\frac{x}{x^2+1}\,dx}_{=\frac12\ln|x^2+1|} - \underbrace{\int\frac{1}{x^2+1}\,dx}_{=\operatorname{atan}(x)}$$

$$\frac{f(x)}{(x^2-x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

Nullstellen bestimmen

1. Durch x dividieren! $3x^3-12x = x(3x^2-12)$
* $ax^2-b = (\sqrt a x-\sqrt b)(\sqrt a x+\sqrt b)$
* $a^3x^3+b^3 = (a+b)(a^2-2ab+b)$
* $a^3x^3-b^3 = (a-b)(a^2+2ab+b)$
* Binomische Formel: $a^2x^2+2abx+b^2=(ax+b)^2$

2. Rational roots test $ax^n+\dots+z \qquad \pm\frac{\text{Faktoren }(z)}{\text{Faktoren }(a)}$

$\int\frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| \qquad \int\frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$

$$\int\frac{bx+d}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx \quad \frac{x-\alpha=\beta t}{dx=\beta dt} \quad \int\frac{Ct+D}{(t^2+1)^m}\,dt$$

$$C\int\frac{t}{(t^2+1)^m}\,dt \quad \frac{u=t^2+1}{du=2t} \quad C\cdot\frac12\int\frac{1}{u^m}\,du = \begin{cases} C\cdot\frac12 \log|u|+\tilde c \\ C\cdot\frac12\, \frac{u^{1-m}}{1-m}+\tilde c\end{cases}$$

$I_1 = \int\frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{atan}(t)+\tilde c$

D	I
$(t^2+1)^{-m}$	1
$-m(t^2+1)^{-m-1}$	t

$$I_m = \int\frac{1}{(t^2+1)^m}\cdot 1\,dt = \frac{t}{(t^2+1)^m}+2m\int\frac{t^2-1+1}{(t^2+1)^{m+1}}\,dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^m}+2m\left[\int\frac{t^2+1}{(t^2+1)^{m+1}}-\int\frac{1}{(t^2+1)^{m+1}}\,dt\right]$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^m}+2m\left[I_m - I_{m+1}\right]$$

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m}\left[\frac{t}{t^2+1}+(2m-1)I_m\right]$$

Partialbruchzerlegung Tricks:

$$\frac{x^2-5x+8}{x^4-6x^2+8x-3} \to P(x) = \frac{a(x-1)^3+b_1(x+3)(x-1)^2+b_2(x+3)(x-1)+b_3(x+3)}{H(x)} \to P(x)$$

$P(1)\overset{!}{=}4 \Rightarrow b_3=1 \qquad P(-3)=64\Rightarrow a=-\frac12$

Schlau: Koeffizientenvergleich Ordnung 3 $a+b_1\overset{!}{=}0$

$b_1(x+3)(x-1)^2 = 3\cdot1+(-1)\cdot2$ Ordnung 2 $-3a+1b_1+b_2\overset{!}{=}1$

$$\int \cos(\alpha x)\,dx = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$$

$$\int \sin(\alpha x)\,dx = -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$$

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \overset{u=\cos(x)}{=} \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln(|u|) = -\ln(|\cos(x)|)+c$$

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{1}{\tan(x)}\,dx = \ln(|\sin(x)|)+c$$

$$\int |x|\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+c & \text{if } x \ge 0 \\ -\frac{1}{2}x^2+c & \text{if } x<0 \end{cases} = \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{|x|}{x}+c = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sgn}(x)+c$$

$$\int \frac{\log^n(x)}{x}\,dx \overset{u=\log(x)}{=} \int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$$

$$\int_c^{v(x)} f(x)\,dx = F(x) \Rightarrow F'(x) = F(v(x))\,v'(x) - \underbrace{F(c)}_{=0}$$

$$\int_{u(x)}^{c} f(x)\,dx = -\int_c^{u(x)} f(x)\,dx = -F(u(x))\,u'(x)$$

$u(x) \neq v(x)$

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx = \int_c^{v(x)} f(x)\,dx - \int_c^{u(x)} f(x)\,dx$$

$$\int \sum_{i=0}^{n} f_k(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n}\int f_k(x)\,dx \qquad = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}$$

f_k gleichmässig konvergent $\Rightarrow \int \sum_{i=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\int f_k(x)\,dx$

↳ z.B. für Potenzreihen im Konvergenzradius. (Zielfunktion implizit stetig)

Für ein eigentliches Integral:

$-p < a < b < p$

$\int_a^b p(x)\,dx \qquad p_n \xrightarrow{\text{gleichm.}} p$

$f_k \xrightarrow{\text{glm.}} f \Rightarrow \int f_k\,dx \xrightarrow{\text{glm.}} \int f\,dx$

$$\int p(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int p_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum a_k \int x^k\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) + c$$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \Rightarrow \int \exp(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}+\tilde{c}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}+\tilde{c} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\underbrace{-1+\tilde{c}}_{:=c}$$

Partielle Integration

$$\int \log^2(x)\cdot 1\,dx = \log^2(x)x - \int \frac{2}{x}\log(x)\,x\,dx$$

$$= \log^2(x)x - 2\int \log(x)\,dx$$

$$= \log^2(x)x - 2\log(x)x + \underbrace{2\int 1\,dx}_{=2x} + c$$

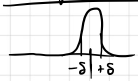
$$\int e^{2x}\cos(x)\,dx = \sin(x)e^{2x} + 2e^{2x}\cos(x) - 4\int e^{2x}\cos(x)\,dx$$

	D	I
+	e^{2x}	$\cos(x)$
−	$2e^{2x}$	$\sin(x)$
+	$4e^{2x}$	$-\cos(x)$

i) f stetig ii) $f(x) \ge 0$ iii) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ Widerspruchbeweis:

$\exists x_0\ f(x_0) > 0$



$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0: \forall x\in[a,b]: |x-x_0| \to |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0: \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta): f(x_0)-\varepsilon < f(x)$

Wähle $\varepsilon = f(x_0)$

$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta): 0 < f(x) \Rightarrow$ Nur pos. Fläche!

$$\int_a^{a-\tilde\delta} f\,dx + \underbrace{\int_{a-\tilde\delta}^{a+\tilde\delta} f\,dx}_{>0} + \int_{a+\tilde\delta}^{b} f\,dx \qquad \tilde\delta = \delta/2$$

Alternativ mit Mittelwertsatz

Trick: Ungleichungen Monotonie lösen!

$\sin(x) \le x \quad \forall x\in[0,\infty)$

$0 \le x - \sin(x) \to$ Suchen minimum!

$f'(x) = 1-\cos(x) \ge 0$ monoton!

$f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \ge 0 \ \forall x \in [0,\infty)$

$$\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$\left(e^{e^{e^x}}\right)' = e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}}$$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} = \ln(\ln(\ln(x)))$$

Uneigentliche R. Integrale

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ sinnlos, da $\frac{1}{x}$ unbeschränkt $[0,1]$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon} = 2$

$f:(a,b)\to\mathbb{R} \wedge [a',b']\in(a,b)$ integrierbar ⇒

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a'\to a^+}\lim_{b'\to b^-}\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$

Konvergente Integrale

$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)\,dx$ (wobei ∃ Grenzwert)

$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^L f(x)\,dx$

Doppelunendlich integrale

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to+\infty}\int_A^c f(x)\,dx + \int_c^B f(x)\,dx$

Grenzen müssen unabhängig sein! Gegenbsp. $\int x\,dx$

$\int_{-b}^b x\,dx = 0$ ABER: $\lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to+\infty}\int_A^B x\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\frac{b^2-a^2}{2} = \nexists$

$f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$

$\lim_{c'\to c^-}\int_a^{c'} f(x)\,dx + \lim_{c'\to c^+}\int_{c'}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to\infty}\int_a^L \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to\infty}\begin{cases}\frac{x^{1-s}}{1-s} & s\neq 1\\ \ln|x| & s=1 \to \text{diverg.}\end{cases}$

$= \lim_{b\to\infty}\begin{cases}\frac{b^{1-s}}{1-s}-\frac{a^{1-s}}{1-s}\\ \ln|b|-\ln|a| = \infty\end{cases}\quad\begin{cases}\infty & s<1\\ -\frac{a^{1-s}}{1-s} & s>1\end{cases}$

$\lim_{A\to a}\int_A^b \frac{dx}{(x-a)^s} = \begin{cases}\frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} & \text{für } s<1\\ \infty & \text{für } s\geq 1 \text{ da ln div.}\end{cases}$

$\lim_{A\to aA}\int_A^b (x-a)^{-s}\,dx \overset{s\neq 1}{=} \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s} - \frac{(\overset{\to 0}{A-a})^{1-s}}{1-s} = \begin{cases}s<1 & --\\ s>1 & \infty\end{cases}$

$\overset{s=1}{=} \ln|b-a| - \ln|\underbrace{A-a}_{\to 0}| = -\infty$

$\Longrightarrow \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}} < \infty \qquad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \infty$

Technik: Direktes eins

$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -\underbrace{e^{-b}}_{\to 0}+1 = 1 \quad \square$

Konvergenzkriterium

also NIE 0

$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}^+$ monoton fallend

⇒ $\sum_{k=1}^\infty f(t)$ konvergiert ⇔ $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert

Bsp.: $\zeta(s) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ existiert für alle $s>1$

$\int_1^\infty x^{-s}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-s}\,dx = \lim_{b\to\infty}\begin{cases}\log(b) & s=1\\ \frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_1^b\end{cases}\quad\begin{cases}\text{diverg. } s<1\\ \text{konv. } s>1\\ \text{zu } \frac{1}{s-1}\end{cases}$

Lemma $0 \leq \sum_{n=a}^\infty \frac{1}{n^s} - \int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \leq f(1)$

$\frac{1}{s-1} < \sum n^{-s} \leq \frac{s}{s-1}$

Beispiel

$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\log^s(k)}$ konvergiert ⇔ $\int_1^\infty \frac{1}{x(\log(x))^s}\,dx \quad \begin{matrix}u=\log(x)\\ du=\frac{1}{x}\end{matrix} \quad \int \frac{1}{u^s}\,du$

$\frac{1}{1-s}u^{-s+1} = \dots$

Beweis

$\sum > f(1)+f(2)+\dots+f(n-1) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq f(2)+f(3)\dots+f(n)$

$0 \leq f(n) < \sum f$

Majorantenkriterium für Integrale

(stetig) → Lösen mit 2 Form.

$f:[a,\infty)$ stetig $\wedge\ \forall x\ |f(x)|<g(x) \wedge \int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergiert

⇒ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent

$\forall x\ 0\leq g(x)\leq f(x) \wedge \int g(x)\,dx$ divergiert ⇒ $\int f(x)\,dx$ diverg.

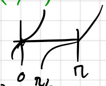
$\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+6t^2)^{5/3}}\,dt < \int_1^\infty \frac{1}{(6t^2)^{5/3}} < \int_1^\infty \frac{1}{t^{10/3}}$ → konvergiert

$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx = \int_\alpha^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\geq 1}\underbrace{\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}x}\right)}_{\leq 1} \leq \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ → conv.

$\frac{1}{\sqrt{x}+x^2} = f(x) \ \Big|\ f(x) \underset{0}{\approx} \frac{1}{\sqrt{x}} \ :\Leftrightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ ⇒ konv.

For simplicity split $(0,1)\cup(1,\infty)$

$\int_0^\pi \tan(x)\,dx$ convergent?



$\int_0^{\pi/2}\tan(x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \leq \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos(x)}\,dx \qquad \exists\xi\in(x,x_0)$

Taylor 2nd degree

$\cos(x) = \cos(x_0) - \sin(x_0)(x-x_0) - \frac{\cos(\xi)}{2}(x-x_0)^2$ around 0. monoton ous

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 - 1(x-\frac{\pi}{2}) - \frac{\cos(\xi)}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$

$\tan(x) \underset{\pi/2}{\approx} \frac{1}{\pi/2-x} \ :\Leftrightarrow\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan(x)}{\pi/2-x} = 1 =$

$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(x)}{\pi/2-x-\frac{\cos(\xi)}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2}$

$\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\frac{\sin(x)}{\pi/2-x-\frac{\cos(\xi)}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2}\,dx \qquad \begin{matrix}u=\pi/2-x\\ x=\pi/2-u\\ dx=-du\end{matrix}$

$-\int \frac{\sin(\pi/2-y)}{y-\frac{\cos(\xi)}{2}(-y)^2}\,dy = -\int \frac{\sin(\pi/2-y)}{y-\underbrace{\frac{\cos(\xi)}{2}}_{=c}y^2}\,dy$

$-\int_{\pi/2}^{\varepsilon}\frac{1}{y-cy^2}\,dy = \int_\varepsilon^{\pi/2}\frac{1}{y(1-cy)}\,dy$ → diverges $\varepsilon\to 0$

$$\int_R^\infty x^n e^{-x}\,dx$$ Zeige, dass es konvergiert (ohne n-mal partiell integrieren)

$$\int_R^\infty x^n e^{-x} \leq \int_R^\infty e^x e^{-x}\,dx = \int_R^\infty 1\,dx \;\; \ddot{\frown}$$

$$\leq \int_R^\infty e^{\frac{x}{2}} e^{-x}\,dx = \int_R^\infty \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}\,dx \;\; \text{konv.} \ddot{\smile}$$

$$\int \tan^4(x)\,dx = \int \frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{\left(1/2 - \sin(2x)\right)^2}{\cos^4(x)}\,dx$$

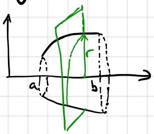
$f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}\ \in C^0$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ finite} \Leftrightarrow \alpha>1$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3\log(x)}\,dx \text{ converges} \Leftrightarrow \int_1^{2}\frac{1}{x^3\log(x)}dx \underset{\text{conv}}{} \wedge \int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3\log(x)}dx \underset{\text{conv.}}{}$$

Rotationskörper

Geg. $f(x) \wedge 2$ Geraden $x=a, x=b$

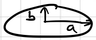


Querschnittsfläche $Q(x_0)=\pi(f(x_0))^2$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x=a}^{x=b} V_{rot}\ \pi(f(x))^2\Delta x$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Rotationsellipsoid: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$



$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a}}$

$$V=\int_a^b \pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a}\right)dx = \pi b^2 x - \pi b^2\int_a^b\frac{x^2}{a}dx$$

$$=\pi b^2\left[x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{a}\right]_{-a}^{a} = \pi b^2\left[a-\frac{1}{3}a^2-\left(-a+\frac{1}{3}a^2\right)\right]$$

$$\pi b^2\left(a-\frac{1}{3}a^2+a-\frac{1}{3}a^2\right)$$

$$2\pi a b^2-\frac{2\pi b^2}{3}a^2$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

$y'(x)=y(x)\sin(x)+y^2(x)$ | $2y''(x)+y'(x)-y(x)=\sin(x)$

Ordnung :$\Leftrightarrow$ Höchster Ableitungsgrad

Gewöhnlich :$\Leftrightarrow$ $f(y,y',\dots)=0$ (also nur von einer Var.)

Homogen :$\Leftrightarrow$ Von Form $a(x)y+b(x)y' \quad =0$

$f'(t)=-\alpha f(t);\ f(0)=F_0$ | $(e^{-\alpha x})'=-\alpha e^{-\alpha x}$

Herleitung:

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=-\alpha \Rightarrow \int\frac{f'(t)}{f(t)}dt=-\int\alpha\,dt \Rightarrow$$

$$\ln|f(t)|=-\alpha t+c \Rightarrow f(t)=e^{-\alpha t+c}=e^{-\alpha t}\cdot \underbrace{e^c}_{K}$$

$$=Ke^{-\alpha t};\ \underbrace{e^{-\alpha\cdot 0}}_{=1}\cdot K=F_0$$

Normalerweise: Gleichung n-ter Ordnung n-param. Lösung.

Anfangwertproblem: An einem Punkt a: $y(0)=1, y'(0)=2$

$\forall k\in[0,\dots,n-1]:\ y^{(k)}(a)=y_{ak}$ bekannt.

Randwertproblem: An untersch. Punkten bei y:

$\forall k\in[0,\dots,n-1]\ \exists a_k:\ y(a_k)=y_k$ bekannt.

Bsp: $y'(t)+2y''(t)=\sin(t);\ y(0)=1;\ y(\frac{\pi}{2})=1$

Separierbare DGL 1. Ordnung (DGL mit trennbaren V.)

$y'=g(x)h(y) \xrightarrow{1.} \forall y_0: h(y_0)=0$ ist $y=y_0$ Lös.

$\downarrow 2.$

$$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx \Leftrightarrow \int\frac{1}{h(y)}dy=\int g(x)dx$$

Bsp.1 $y'=2xy \overset{2.}{\Rightarrow} \int\frac{1}{y}dy=\int 2x\,dx \Rightarrow \ln|y|=x^2+c$

$\downarrow 1.$ $y=0$ $\quad |y|=e^{x^2+c}=Ke^{x^2} \overset{y\geq 0}{\Longrightarrow} y'=2xKe^{x^2}$

Bsp.2 $y'=1+y^2 \Rightarrow \int\frac{1}{1+y^2}dy=\int 1\,dx \Rightarrow \operatorname{atan}(y)=x+c$

$\downarrow 1.$ $h(y)\overset{!}{=}0$ $\quad \Rightarrow y=\tan(x+c)$

Substitution für lineare Funktionen $y'=f(ax+by+c)$

$y'=f(ax+by+c)$ Subst. $\begin{cases} u(x)=ax+by\ (+c) \\ u'(x)=a+by' \Rightarrow y'=\frac{u'(x)-a}{b}\end{cases}$

Bsp 1 $y'=(4x-y+1)^2;\ y(0)=2;\ u(x)=4x-y;\ u'(x)=4-y'$

$4-u'=(u+1)^2 \Leftrightarrow u'=4-(u+1)^2=-u^2-2u+3=h(u)$

$$-\int\frac{1}{u^2+2u-3}du=\int 1\,dx \Leftrightarrow -\int\frac{1/4}{u-1}-\frac{1/4}{u+3}du=x$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{1}{u^2+2u-3} \Leftrightarrow A(u+3)+B(u-1)=1 \Rightarrow A=1/4;\ B=-1/4$$

$$\Rightarrow 1/4\ln|u+3|-1/4\ln|u-1|=x+c=1/4\ln\left|\frac{u+3}{u-1}\right|$$

$$\Rightarrow e^{4x+c}=\frac{u+3}{u-1}=1+\frac{4}{u-1}$$

Ziel: u ausklammern!

$(u-1)(Ke^{4x}-1)=4 \Rightarrow (4x-y-1)(Ke^{4x}-1)=4$

$-4x+y+1-yKe^{4x}+Ke^{4x}(4x-1)=4 \Leftrightarrow$

$$y=\frac{4x+3-Ke^{4x}(4x-1)}{Ke^{4x}-1} \Leftrightarrow$$

$e(4x-1)+4x+3 : e-1$
$=4x-1+\frac{4}{e-1}$

$$\Leftrightarrow y=4x-1+\frac{4}{Ke^{4x}-1} \ \Big|\ 2=-1+\frac{4}{K-1};\ K=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$$y=4x-1+\frac{4}{\frac{1}{3}e^{4x}-1}$$

Grenzwertkriterium für uneigt. Integrale

$f,g:[a,x_0)\to\mathbb{R} \wedge f,g$ integrierbar auf $[a,x]$ $(\forall x\in[a,x_0))$

$\wedge$ g stetig in x_0 $\wedge\ g(x_0)\neq 0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\int_a^{x_0} f(t)\,dt \text{ exist.} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\int_a^{x} g(t)\,dt \text{ exist.}$$

$y' = f(\frac{y}{x})$ Substitution: $u = y/x$

$ux = y$

$u'x + 1\cdot u = y'$

$xy' = y - \sqrt{xy}$

$y' = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{xy}}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{xy}{x^2}} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}}$

$y' = u - \sqrt{u}$

$u'x + u = u - \sqrt{u}$

$u' = -\sqrt{u}\cdot x \rightarrow -\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx$

$u = 0$ Lösung $\qquad -2\sqrt{u} = \ln|x| + c$

$\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ Lösung $\qquad u = \left[-\frac{\ln|x|+c}{2}\right]^2$

$\frac{y}{x} = \left(-\frac{\ln|x|+c}{2}\right)^2 \Rightarrow y = x\left(-\frac{\ln|x|+c}{2}\right)^2$

$xyy' + 4x^2 + y^2 = 0 \mid y(2) = -7 \quad x > 0$

$\frac{xyy'}{x^2} = \frac{-4x^2+y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{yy'}{x} = -4 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$u = \frac{y}{x} \Rightarrow uy' = -4 - u^2 \Rightarrow y' = -\frac{4}{u} - u$

$y = \left(\int v(x) e^{U(x)}\, dx + c\right) e^{-U(x)}$

$y' = \frac{-4x^2 - y^2}{xy} = y' = -\frac{4x^2}{y} - \frac{y}{x}$

L Differentialoperator der Ordnung n auf Intervall I

$L = a_n(x)\, y^n + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \dots + a_0(x)$, $\quad a_i: I \to \mathbb{R}$

$u: I \to \mathbb{R} \in C^n$

$(Lu)(x) = a_n(x)\, u^n(x) + a_{n-1}(x)\, u^{n-1}(x) + \dots + a_0(x)\, u(x)$

$Ly = b$ (Differentialgleichung), b Störfunktion $\quad$ | $Ly = 0$ homogen

$L(y+u) = Ly + Lu \wedge L(\alpha y) = \alpha L y$

$Ly_1 = 0 = Ly_2 \Rightarrow L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = 0$

$V_H^L := \{y: I \to \mathbb{R} \mid Ly = 0\}$ ist Vektorraum Dimension n

Basis $y_{H_1}, \dots, y_{H_n}$ ist Fundamentallösung.

$y(x) = \alpha_1 y_{H_1}(x) + \alpha_2 y_{H_2}(x) + \dots + \alpha_n y_{H_n}(x)$

allgemeine Lösung, also $Ly = 0$.

$Ly_p = b \wedge Ly_H = 0 \Rightarrow L(y_p + y_H) = Ly_p + Ly_H = 0 + b$

Alle Lösungen von $Lx = 0$, $\alpha_1 y_{H_1} + \dots + \alpha_n y_{H_n} = 0$

Partikuläre Lösung: $Ly_p = b$, Allg.: $0 = \alpha_1 y_{H_1} + \dots + \alpha_n y_{H_n} + y_p$

Superpositionsprinzip (Beweis oben)

$Ly_1 = b_1 \wedge Ly_2 = b_2 \Rightarrow L(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$

$\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem zum lösen.

Anfangswertproblem $Ly = b$, $y(x_0) \dots y^n(x_0)$ eine eindeutige Lösung.

Homogene lineare DGL mit Konstanten Koeffizienten

$Ly = y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + \underline{a_0 y}$ mit $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$

Das charakteristische Polynom: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + \underline{a_0}$

Nullstellen = Eigenwerte von L

$L(e^{\lambda x}) = P_L(\lambda) \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \Rightarrow Le^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \lambda$ Nullstelle

$y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^n = \lambda^n e^{\lambda x}$

Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ untersch. Nullstellen mit Multiplizität $(m_1, \dots, m_n)$

$y_{j,k}(x) = x^k e^{\lambda_j x} \quad (1 \le j \le r;\ 1 \le k < m_j)$ Multiplicity

$L\left[\sum_{j,k} \alpha_{j,k}\, y_{j,k}(x)\right] = 0$

L hat reelle Koeffizienten, dann sind alle komplexe Nullstellen von der Form: $x_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ (wobei + und − gleiche Multipliz.)

$x^k e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)x} = x^k e^{\alpha_j x} e^{\pm i \beta x}$

$= x^k e^{\alpha_j x}[\cos(\beta_j x) \pm i \sin(\beta_j)]$ (Ergo Basiswechsel zu $\mathbb{R}$)

Bsp 1 $\quad y'' - y = 0$; $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y_{H_1} = e^{-x} \wedge y_{H_2} = e^{+x}$

Bsp 2 $\quad y'' + y = 0$; $\lambda^2 + 1 = 0 \xrightarrow{\lambda_{1,2} = \pm i} y_{H_1} = e^{ix}$, $y_{H_2} = e^{-ix}$

$\tilde{y}_{H_1}(x) = \cos(x)$, $\tilde{y}_{H_2}(x) = \sin(x)$; Allg. $y_H(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$

Bsp 3 $\quad y'''' + 2y'' + 2y = 0 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$; $y_{H_1}(x) = e^{ix}$, $y_{H_3} = e^{-ix}$, $y_{H_2}(x) = xe^{ix}$, $y_{H_4} = xe^{-ix}$

$\tilde{y}_{H_1}(x) = \cos(x)$, $\tilde{y}_{H_2} = x\cos(x)$, $\tilde{y}_{H_3} = \sin(x)$, $\tilde{y}_{H_4} = x\sin(x)$

Bsp 4 $\quad y'''' - y = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) \xrightarrow{\lambda = \pm 1, \pm i} y_H(x) = e^x, e^{-x}, e^{ix}, e^{-ix}$

$e^x, e^{-x}, \cos(x), \sin(x)$

Bsp 5 $\quad y'''' + 2y'' + 8y' + 5y = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5) \Rightarrow \lambda = 1, 1, -1+2i, -1-2i$

$y_{H_1} = e^x$, $y_{H_2} = xe^x$, $y_{H_3} = e^{-x}\sin(2x)$, $y_{H_4} = e^{-x}\cos(2x)$

Nebenbedingung: $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

$\lim_{x \to 0}\left[c_1 \underbrace{e^x}_{\to\infty} + c_2 \underbrace{xe^x}_{\to\infty} + c_3 e^{-x}\sin(2x) + c_4 e^{-x}\cos(2x)\right] = 0$

Also muss $c_1 = 0 = c_2$

$c_3 e^{-0}\underbrace{\sin(0)}_{0} + c_4 e^{-0}\cos(0) = 1 \Rightarrow c_4 = 1$

$y'(x) = -c_3 e^{-x}\sin(2x) + c_3 e^{-x} 2\cos(2x) - c_4 e^{-x}\cos(2x) - c_4 e^{-x} 2\sin(2x)$

$(-c_4 + 2c_3)e^{-0}\cos(20) = 3 \Rightarrow c_3 = 2$

ODEs

Separable: $y'(x)=f(y)g(x) \Rightarrow \frac{y'}{f(y)}=g(x)$

$y'=\frac{y}{t} \Rightarrow y\overset{?}{=}0$ ✓

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{t} \Rightarrow y\,dy=\frac{1}{t}dx \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{t}dt \Rightarrow \ln|y|=\ln|t|+c$

TRICK

$|y|=e^{c+\ln|t|}=\underbrace{e^{c}}_{>0}|t| \Rightarrow y=\underset{(-\infty,\infty)}{A}|t|$; $A\in\mathbb{R}$

$y'(t)=t\cdot\cos^2(y) \wedge y(t_0)=y_0$

$\cos(y)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ is a solution? ✓

$\frac{dy}{dx}=t\cos^2(y) \Rightarrow \int\frac{dy}{\cos^2(y)}=\int t\,dt$

$\Rightarrow \tan(y)=t^2/2+c \xRightarrow{\text{Correct}} y=\operatorname{atan}\left(\frac{t^2}{2}+c\right)+k\pi$

1. If $y_0=\pi/2+k\pi \Rightarrow y(t)\equiv\frac{\pi}{2}+k\pi$
2. If $y_0\neq\pi/2+k\pi$

$y(t_0)=y_0=\operatorname{atan}\left(\frac{t_0^2}{2}+c\right)+k\pi$

$\xRightarrow{k=0} \frac{t_0^2}{2}+c=\tan(y_0) \Rightarrow c=\tan(y_0)-\frac{t_0^2}{2}$

$\Rightarrow y(t)=\operatorname{atan}\left(\frac{t^2}{2}+\tan(y_0)-\frac{t_0^2}{2}\right)+k\pi$

Linear & constant coefficients

$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$

$p(\lambda)=a_n\lambda^n+\dots+a_1\lambda+a_0\overset{?}{=}0$

$Le^{\lambda x}=P_L(\lambda)e^{\lambda x} \xRightarrow{\text{Nullstelle}} Le^{\lambda x}=0$

$\mathbb{R}: e^{\lambda_j t}, xe^{\lambda_j t}, x^2e^{\lambda_j t},\dots$

$\mathbb{C}: e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\dots t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), t^{m_j-1}e^{\beta_j t}\sin()$

Factorization of polynomials

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

$P(x)=\sum a_j\lambda^j \Rightarrow$ Find a root $p(\lambda_0)=0$

Horner/Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots\ a_1 & a_0 \\ \lambda_0 & & \lambda_0 a_n & *\lambda_0 & & \lambda_0(\square) \\ \hline & a_n & * & \Delta & \square & \overset{!}{=}0 \end{array}$$

$a_{n-2}+*\lambda_0$

$\frac{-1\pm\sqrt{-11}\,i}{2}$

$P(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-6 \Rightarrow (y-2)(\lambda^2+\lambda+3)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & / \end{array}$$

$y(t)=Ae^{2t}+Be^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)+Ce^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)$

$y'''-y''+y'-6y=1 \Rightarrow -1/6$

ANSATZ: $y'''-y=t \Rightarrow$ Try $y_0(t)=at+b$ and solve.

Exercises: Störfunktion leicht berechenbar.

1 - Last year series
2 - Blatter Analysis I, II (ex.)
0 - Schaum(n): (Advanced) Calculus (easy)

$X_0(t)=y(t),\ X_1(t)=y'(t),\dots,X_{n-1}(t)=y^{(n-1)}(t)$

$X_0'=X_1,\ X_{n-2}'=X_{n-1};\ X_{n-1}'=-a_{n-1}X_{n-1}-a_{n-2}X_{n-2}-\dots-a_0X_0$

$$\begin{pmatrix}X_0'\\X_1'\\\vdots\\X_{n-1}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&&-a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\\vdots\\X_{n-1}\end{pmatrix}$$

System linearer DGL

Methode der unbestimmten Koeffizienten

$Ly=b(x)$ mit $b(x)=$ Kombination von: $\sin(x),\cos(x),\exp(x)$

Störfunktion ein Polynom ⇒ Lösung ist Polynom.

$y''+y'-6y=3e^{-4x}$

$p(\lambda)=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda-2)(\lambda+3),\ \lambda_{1,2}=-2,3$

$y_H=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$ $y_p(x)=Ke^{-4x}$ = Ansatz

$y_p'=-4Ke^{-4x},\ y_p''=16Ke^{-4x}$

$16Ke^{-4x}-4Ke^{-4x}-6Ke^{-4x}\overset{!}{=}3e^{-4x}$

Koeffizienten vergleich

$6Ke^{-4x}=3e^{-4x} \Rightarrow K=1/2 \Rightarrow y_p=\frac{1}{2}e^{-4x}$

$y''+y'-6y=50\sin(x)$ ($\rightsquigarrow \lambda=\pm i$)

$y_H=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$ $y_p=K_1\sin(x)+K_2\cos(x)$

$\overbrace{-K_1\sin(x)-K_2\cos(x)}^{y_p''}+\overbrace{K_1\cos(x)-K_2\sin(x)}^{y_p'}\overbrace{-6K_1\sin(x)-6K_2\cos(x)}^{y_p}=50\sin(x)$

$(-7K_1-K_2)\sin(x)+(K_1-7K_2)\cos(x)=50\sin(x)$

$-7K_1-K_2=50$ & $K_1-7K_2=0 \Rightarrow$ lösen ✓

$ae^{\alpha x} \Rightarrow Ke^{\alpha x}$; $P_n(x)\Rightarrow R_n(x)$

$a\sin(\alpha x) \vee a\cos(\alpha x) \Rightarrow K_1\sin(\alpha x)+K_2\cos(\alpha x)$

$P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow R_n(x)e^{\alpha x}$ | $ae^{\alpha x}\sin(\alpha x) \Rightarrow e^{\alpha x}(K_1\sin(x)+K_2\cos(x))$

$P_n(x)e^{\alpha x}\underset{\cos}{\sin}(\alpha x) \Rightarrow e^{\alpha x}(R_n(x)\sin(\alpha x)+S_n(x)\cos(\alpha x))$

LK von Störfunktionen ⇒ LK Ansätze

Superpositionsprinzip (Bei hoher Multiplizität in char. Poly $\rightarrow x^m$)

$L(y)=3e^{-4x} \wedge L(y)=50\sin(x) \Rightarrow y_{p_1}+y_{p_2}$ Lösung

---

$y''+y'-6y=10e^{2x}$ $y_p=Ke^{2x},\ y_p'=2Ke^{2x},\ y_p''=4Ke^{2x}$

$4Ke^{2x}+2Ke^{2x}-6Ke^{2x}=10e^{2x}=0$?

$\Rightarrow e^{2x}$ eine Lösung von $y_H(x)$.

Stattdessen: $y_p=xKe^{2x},\ y_p'=Ke^{2x}+2xKe^{2x},\ y_p''=4Ke^{2x}+4xKe^{2x}$

$y''+y'-6=4Ke^{2x}+4xKe^{2x}+Ke^{2x}+2xKe^{2x}-6xKe^{2x}=10e^{2x}$

$5Ke^{2x}=10e^{2x} \Rightarrow K=2$

Allg.: $2xe^{2x}+K_1e^{2x}+K_2e^{-3x}$ $y(0)=0,\ y'(0)=7$

$y(0)=K_1+K_2=0$

$y'(0)=2+2K_1-3K_2=7 \Rightarrow K_1=1,\ K_2=-1$

Lineare DGL 1. Ordnung mit allg. Koeff.

$y' = a(x)y + 0$ ist separierbar.

$\Rightarrow y_H = e^{\int a(x)dx + c} = Ke^{A(x)}$ → wobei $a(x) = 0$ mit $K = 0$

$y' = a(x)y + b(x)$

$y_P = \lambda(x)e^{A(x)}$ Ansatz eine Lösung

$y_P' = \underbrace{\lambda'(x)e^{A(x)}}_{=b(x)} + \underbrace{\lambda(x)e^{A(x)}}_{=y_P}\underbrace{A'(x)}_{=a(x)} = b(x) + y_P a(x)$

$y_P = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx\right)e^{A(x)}$

Eigenfrequence bridge

$L(y, y', \dots) = b(x)$ If $b(x)$ is an exponential ^ is an eigen value, the oscillation will be amplified.

Alternativ Beweis mit integrierenden Faktor

$y'(x) = a(x)y + b(x)$

$e^{-\int a(x)dx}y'(x) = e^{-\int a(x)dx}(a(x)y + b(x))$

$y'e^{-\int a(x)dx} - a(x)ye^{-\int a(x)dx} = b(x)e^{-\int a(x)dx}$

$= \frac{d}{dy}\left(ye^{-\int a(x)dx}\right) = b(x)e^{-\int a(x)dx}$

$ye^{-\int a(x)dx} = \int b(x)e^{-A(x)}dx$

$y_P = e^{A(x)}\int b(x)e^{-A(x)}dx$

$xy' - 2y = 2x^4 \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y - 2x^3 \Leftrightarrow y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)}y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$

$y_H = e^{\int a(x)dx} = e^{2\ln|x| = \ln x^2} = x^2$

$y_P = e^{\int \frac{2}{x}dx} \cdot \int b(x)e^{-A(x)}$

$y_P = e^{\ln(x^2)} \cdot \int 2x^3 e^{-\ln(x^2)}dx$

$x^2 \cdot \int 2x^3 \frac{1}{x^2}dx = x^2 \cdot x^2$

$\frac{n-1}{n-1} - \frac{1}{n-1}$

Trig Tricks

$\int \sin^n(x)\cos^m(x)dx$ ungerade aufteilen

$\int \sin^5(x)\cos^2(x)dx = \int \sin^4(x)\sin(x)\cos^2(x)dx$

$= \int (1-\cos^2(x))^2\sin(x)\cos^2(x)dx \quad \frac{u = \cos(x)}{du = -\sin(x)dx}$

$\int (1-u^2)^2 u^2 \sin(x)\frac{du}{-\sin(x)} = -\int -u^6 - 2u^4 + u^2 du$

$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c$

$\int \sin^4(x)dx = \int \left(\frac12 - \frac12\cos(2x)\right)^2 dx$

$= \int \frac14 - 1\cos(2x) + \frac14\cos^2(2x)dx$

$= \frac14 x - \frac12\sin(2x) + \int \frac14\left(\frac12 + \frac12\cos(4x)\right)dx$

$= \frac14 x - \frac12\sin(2x) + \frac18 x + \frac{1}{32}\sin(4x) + c$

$\int \tan^4(x)dx = \int \tan^2(x)\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)dx$

$= \int \tan^2(x)\sec^2(x)dx - \int \tan^2(x)dx$

$u = \tan(x)$ $\quad \hookrightarrow \int \frac{1}{\cos^2(x)} - 1\,dx = \tan(x) - x + c$

$du = \sec^2(x)dx$

$= \int u^2 du = \frac13 u^3 + c = \frac13\tan^3(x) + c \rightarrow \frac13\tan^3(x) - \tan(x) + x + c$

$\int \sin^n(x)dx$

$\sin^2(x)\sin^{n-2}(x)$

$\left(\frac12 - \cos(2x)\right)\sin^{n-2}(x)$

$\int (1-\cos^2(x))\sin^{n-2}(x)$

$\int \cos(x)\sin^{n-2}(x)\cos(x)dx$

$+ \cos(x) \quad \sin^{n-2}(x)\cos(x)$

$- -\sin(x) \quad \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)$

$= \frac{1}{n-1}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{1}{n-1}\int \sin^n(x)dx$

$\int \sin^{n-2}(x)dx - \int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx =$

$\int \sin^n(x)dx = \int \sin^{n-2}(x)dx - \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\cos(x) - \frac{1}{n-1}\int \sin^n(x)dx$

$\frac{n}{n-1}\int \sin^n(x)dx = \int \sin^{n-2}dx - \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\cos(x)$

$f'(x) \le C$ für $x \in (a,b)$

$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le C$

$\Rightarrow f(x) \le f(a) + C\cdot(x-a)$

If $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ and $\forall x: f'(x) \le 2$

$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac52$ ↯ Contradiction

$|\sin(a) - \sin(b)| \le |a - b| \Leftrightarrow \left|\frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b}\right| \le 1$

$\exists c: f'(c) = \left|\frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b}\right| \overset{?}{>} 1$, no since $|\cos(x)| \le 1$

Trig sub

$\sqrt{a^2 - b^2x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\sin\theta \quad dx = \frac{a}{b}\cos(\theta)d\theta$

$\sqrt{a^2 + b^2x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\tan\theta \quad dx = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos^2(\theta)}d\theta$

$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$

$\sqrt{b^2x^2 - a^2} \Rightarrow x = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos(\theta)} \quad dx = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta$

$d/dx(1 + x/2) = 1/2 > 0 \Rightarrow 1 + x/2$ ist ↗

Beide sind stetig für $x > -1$ (offs.)

$d_1 = 3 \quad d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}$

$d_2 = \sqrt{3 \cdot 3 - 2} = \sqrt{7} < 3$

Angenommen es wäre konvergent, dann wäre der Grenzwert:

$D = \sqrt{3D - 2}$

$D^2 = 3D - 2 \qquad \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2$

$D^2 - 3D + 2$

Monotonität

$d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} < \sqrt{3d_{n-1} - 2} = d_n$

Beschränktheit:

$2 > d_1 = 3$

$2 > d_n$

$6 > 3d_n$

$4 > 3d_n - 2$

$2 > \sqrt{3d_n - 2} = d_{n+1}$

Da nie grösser als 2 konv. es zu 2.