Bài 4. BIẾN ĐỔI SỐ (Phạm Văn Hạnh)

Sử dụng ý tưởng xử lý độc lập với từng thừa số nguyên tố (TSNT), ta xét một thừa số nguyên tố p bất kì. Giả sử số mũ của p trong phân tích ra TSNT của a và b lần lượt là x và y. Ba thao tác trên có thể quy về:

1. Trừ x và y đi một số nguyên dương z.

2. Chọn một số nguyên dương z, trừ x đi z và cộng y thêm z.

3. Chọn một số nguyên dương z, cộng x thêm z và trừ y đi z.

Để ý rằng ba phép biến đổi trên bảo toàn tính chẵn lẻ của x + y. Hơn nữa, ta dễ dàng chứng minh rằng, nếu $x + y$ chẵn, ta có thể biến đổi về $x + y = 0$. Nếu $x + y$ lẻ, ta có thể biến đổi về $x + y = 1$. Đó hiển nhiên là trạng thái mà chúng ta mong muốn.

Đến đây, ta liệt kê mọi thừa số nguyên tố p ở đó tổng số mũ ứng với a và b là lẻ. Do mỗi số có không quá 10 ước nguyên tố ($< 10^9$), nên sẽ có không quá 20 thừa số nguyên tố cần xét. → sử dụng thuật toán quay lui "sắp xếp" các TSNT này vào a và b để tổng nhỏ nhất.

Bài 5. VƯƠNG QUỐC TRÀ SỮA (Phạm Cao Nguyên – Nguyễn Đinh Quang Minh)

Nhận thấy số lượng cửa hàng không lớn (tối đa là 15), ta có thể dễ dàng duyệt tất cả các trường hợp có thể của việc chọn cửa hàng, rồi tính tổng số quả cầu phải phá.

Có tối đa 2^{15} trường hợp, đủ nhỏ để thực hiện $O(n \times m)$ phép tính mỗi trường hợp.

Để có thể tính được tổng số quả cầu phải phá, trước tiên ta cần xét xem với quả cầu thứ i và cửa hàng j, có cần phá i để lấy được trà sữa từ j hay không?

Để giải quyết câu hỏi trên, ta sẽ chia thành 2 trường hợp:

- Nếu cả cửa hàng j và giáo sư đều nằm trong quả cầu i, ta không cần phá vì quả cầu không cản trở đường lấy trà sữa của ông giáo sư ở cửa hàng đó.
- Nếu một trong hai nằm ngoài, ta cần kiểm tra xem hình cầu có cắt đoạn thẳng với 2 đầu mút là cửa hàng và giáo sư không. Đơn giản hơn, ta cần kiểm tra khoảng cách ngắn nhất từ tâm quả cầu tới đoạn thẳng có nhỏ hơn hoặc bằng bán kính không.

Đối với subtask 1, đây là điều khá đơn giản, khi khoảng cách nhỏ nhất của tâm đến đoạn thẳng chỉ là khoảng cách đến đầu mút gần hơn (trục tọa độ 1 chiều).

Đối với subtask 2 và 3, đáp số sẽ là khoảng cách đến đầu mút gần hơn, xét với hình chiếu của tâm lên đường thẳng chứa đoạn thẳng, nếu hình chiếu nằm trong đoạn thẳng. Việc đi tìm hình chiếu chỉ là bài toán cấp 2 đối với trường hợp 2D (subtask 2), và là toán lớp 11 đối với trường hợp 3D.

Việc giải quyết này có thể làm trong $O(1)$ với mỗi cặp quả cầu – cửa hàng (dù đây là phần cài đặt lằng nhằng nhất).

Khi đã có điều kiện có/không cho từng cặp quả cầu – cửa hàng, ta có thể tính được số lượng quả cầu cần phá đối với một tập hợp cửa hàng bất kì. Tập hợp các quả cầu cần phá chính là các quả cầu cần phá để có đường nối từ vị trí của Giáo sư đến một cửa hàng bất kì trong tập hợp cửa hàng. Ta có thể tìm được tập hợp này trong $O(n \times m)$.

Như vậy, xét tất cả 2^{15} tập hợp, tính số lượng và cập nhật kết quả, tổng độ phức tạp là $O(2^n * n * m)$.

Bài 6. THẾ GIỚI TRÀ SỮA (Phạm Văn Hạnh)

Bài toán có thể phát biểu lại như sau: Cho một cây gồm n đỉnh các cạnh của cây có trọng số và k (k luôn chẵn) đỉnh quan trọng. Cần ghép k đỉnh quan trọng trên thành $\frac{k}{2}$ cặp đỉnh, sao cho mỗi cạnh của cây thuộc tối đa một đường đi giữa hai đỉnh cùng cặp; và khoảng cách giữa hai đỉnh cùng cặp xa nhau nhất là nhỏ nhất có thể.

Thuật toán:

Thực hiện chia nhị phân đáp án, ta quy về bài toán sau: Với một giới hạn X cho trước, cần kiểm tra có tồn tại cách ghép k đỉnh quan trọng thành $\frac{k}{2}$ cặp sao cho khoảng cách giữa hai đỉnh của mọi cặp đều không quá X.

Không mất tính tổng quát, giả sử gốc của cây là đỉnh 1. Xét đỉnh u bất kì khác gốc của cây. Gọi v là cha của u. Nếu một đỉnh quan trọng x nằm trong cây con gốc u được ghép với đỉnh quan trọng y nằm ngoài cây con gốc u, thì đường đi từ x tới y sẽ chứa cạnh (u, v). Do đó chỉ có tối đa một đỉnh quan trọng thuộc cây con gốc u được nối ra phía ngoài.

Vì vậy, nếu trong cây con gốc u có chẵn đỉnh quan trọng, các đỉnh này phải được nối với nhau. Ngược lại, có đúng một đỉnh quan trọng thuộc cây con gốc u được nối ra ngoài. Hiển nhiên, sau khi đã nối các đỉnh quan trọng trong cây con gốc u lại với nhau, ta muốn đỉnh thừa ra này phải gần u nhất có thể (để dễ nối được ra ngoài).

Tới đây, ta thấy để giải quyết bài toán kiểm tra với giới hạn X đã nêu, ta cần thực hiện hai việc:

- Với cây con gốc u có chẵn đỉnh quan trọng, kiểm tra xem các đỉnh trong cây con gốc u có nối được với nhau hay không.
- Với cây con gốc u có lẻ đỉnh quan trọng, tính khoảng cách nhỏ nhất từ u tới đỉnh quan trọng trong cây con gốc u sẽ được nối ra phía ngoài, để các đỉnh quan trọng còn lại có thể nối được với nhau. Ta gọi giá trị này là $f(u)$.

Để thực hiện công việc trên với một cây con gốc u bất kì, ta xét các con của u là $v_1, v_2, \dots, v_p$. Dùng phương pháp đệ quy xử lý từng cây con này trước. Giả sử $w_1, w_2, \dots, w_q$ lần lượt là các con của u mà ở cây con gốc w_i có lẻ đỉnh quan trọng.

- Nếu q chẵn, khi đó trong cây con gốc u có chẵn đỉnh quan trọng. Ta ghép cặp các đỉnh thừa ra ở các nhánh con w_i bằng thuật toán tham lam rồi so sánh độ dài với giới hạn X.

- Nếu q lẻ, giả sử w_j là nhánh có đỉnh quan trọng sẽ được nối ra ngoài cây con gốc u. Chia nhị phân, tìm w_j có $f(w_j)$ nhỏ nhất để các nhánh còn lại có thể ghép được với thuật toán tham lam đã nêu ở trên.

Chú ý: Với thuật toán đã trình bày ở trên, ta rút ra kết luận: Bài toán luôn có lời giải và không bao giờ in ra -1. Độ phức tạp của giải thuật là $O(n \times L \times logn)$ với L là số lần chia nhị phân.