Đếm dãy chia hết

Version 1.0: Với mỗi cặp (i, j): $1 \leq i \leq j \leq n$ thử dãy con $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$ nếu tổng chia hết cho d thì tăng biến đếm:

```
ret=0;
for(i=1;i<=n;i++)
for(j=i;j<=n;j++) if ((s[j]-s[i-1])%d==0) ret++;
```

Độ phức tạp của thuật toán là $O(n^2)$ và được 50% số điểm của bài.

Version 2.0: Nhận xét: $(s[i] - s[j])\%d = 0 \leftrightarrow s[i]$ và $s[j]$ đồng dư khi chia cho d. Vì $d \leq 10^5$ nên từ dãy $s[0], s[1], \dots, s[n]$ ta có thể lập mảng $c[0], c[1], \dots, c[d-1]$ với $c[i] =$ số lượng phần tử của mảng s có số dư khi chia cho d bằng i $(i = 0,1,2, \dots, d-1)$.

Hai phần tử của mảng s đồng dư với d cho một dãy. Vậy kết quả cần tìm là:

$$ds = \frac{c[0](c[0]-1)}{2} + \cdots + \frac{c[d-1](c[d-1]-1)}{2}$$

Độ phức tạp của thuật toán giảm xuống còn $O(n)$

Số nghiệm

Trước tiên chúng ta đếm số bộ (X, Y, Z) thỏa mãn:

$$X^d + Y^d + Z^d \equiv m(mod\ N)$$
$$0 \leq X, Y, Z < N$$

Do N nhỏ nên điều này có thể thực hiện một cách đơn giản.

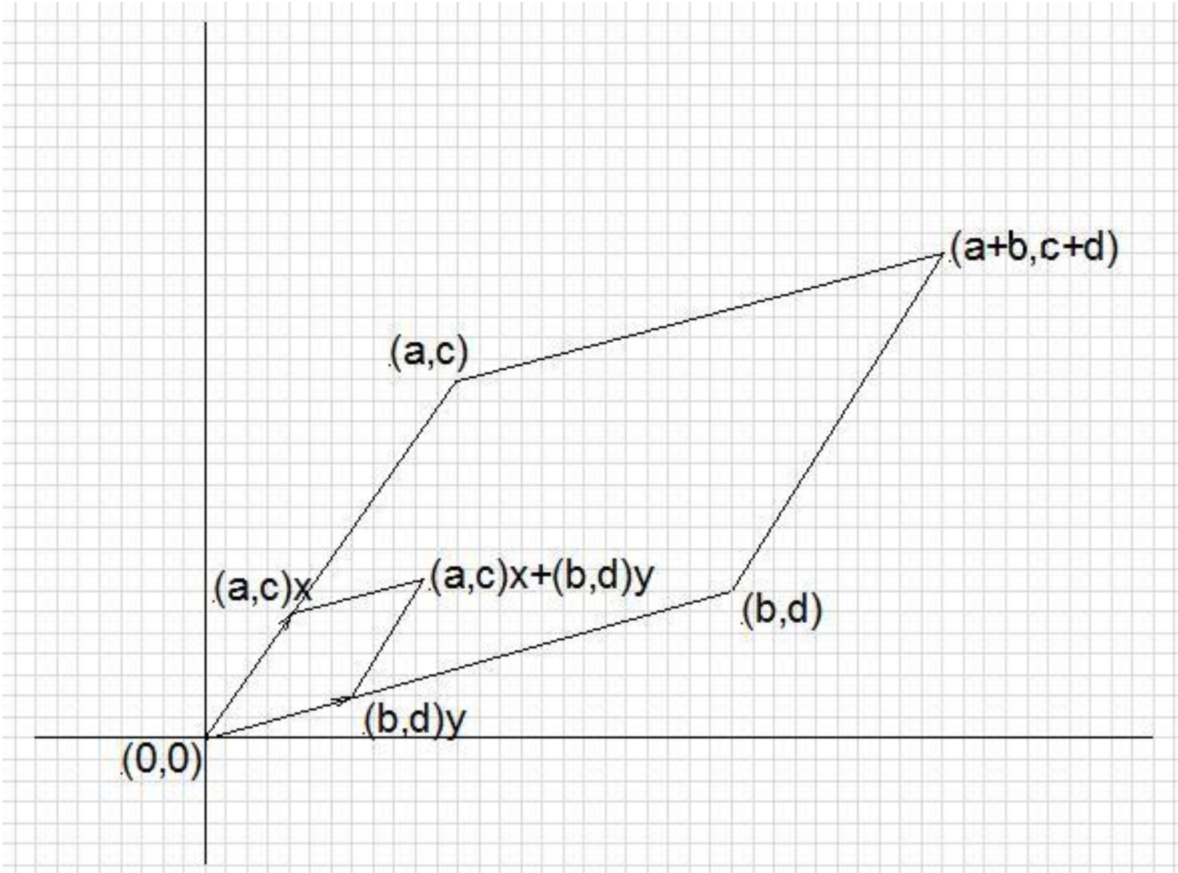
Việc cuối cùng là đếm xem có bao nhiêu bộ (x, y, z) thỏa mãn:

$$x \equiv X(mod\ N), y \equiv Y(mod\ N), z \equiv Z(mod\ N)$$
$$0 \leq x, y, z \leq U$$

Một điều lưu ý là để tính lũy thừa a^d sử dụng kỹ thuật "chia để trị" tính nhanh:

```
int luythua(int a,int d) {
   if (d==0) return 1;
   int b=luythua(a,d/2);
   b=(b*b) % N;
   if (d%2) b=(b*a) % N;
   return b;
}
```

NPAIRS



Đặt $\begin{cases} AX+BY=x \\ CX+DY=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{Dx-By}{AD-BC} \\ Y=\dfrac{-Cx+Ay}{AD-BC} \end{cases}$ $(AD-BC\neq 0)$ thì số cặp $(X;Y)$ thực thỏa mãn đề bài bằng số cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn $0<\dfrac{Dx-By}{AD-BC}<1, 0<\dfrac{-Cx+Ay}{AD-BC}<1$.

Đó chính là số điểm nguyên nằm trong hình bình hành hình vẽ (phương trình các cạnh của hình bình hành chính là $\dfrac{Dx-By}{AD-BC}=0, \dfrac{Dx-By}{AD-BC}=1, \dfrac{-Cx+Ay}{AD-BC}=0, \dfrac{-Cx+Ay}{AD-BC}=1$).

Theo định lý Pick với n là số điểm nguyên nằm trong hình bình hành (mà ta đang cần tìm) và m là số điểm nguyên nằm trên các cạnh của hình bình hành thì $S_{hbh}=n+\dfrac{m}{2}-1$

- Khoảng cách từ điểm có tọa độ $(B;D)$ đến đường thẳng nối hai điểm có tọa độ $(0;0)$ và $(A;C)$ (có phương trình $\dfrac{-Cx+Ay}{AD-BC}=0 \Leftrightarrow -Cx+Ay=0$) là $\dfrac{|-CB+AD|}{\sqrt{A^2+C^2}}$ nên diện tích hình bình hành là $S_{hbh}=\dfrac{|-CB+AD|}{\sqrt{A^2+C^2}}\cdot\sqrt{A^2+C^2}=|AD-BC|$.
- Hoặc áp dụng công thức:

$$S_{hbh} = \left|\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})\right| = |AD - BC|$$

Số điểm nguyên nằm trên hai cạnh song song của hình bình hành là bằng nhau.
Ta tìm số điểm nguyên trên cạnh nối hai điểm có tọa độ $(0;0)$ và $(A;C)$.
Với $GCD(A;C) = d, A = dA', C = dC', GCD(A';C') = 1$ thì các điểm nguyên trên cạnh đó là $(0;0),(A';C'),(2A';2C'),...,(dA';dC') \equiv (A;C)$, như vậy có $d+1$ điểm nguyên (bao gồm cả hai đỉnh $(0;0)$ và $(A;C)$).
Tương tự như vậy trên biên của hình bình hành có tổng cộng $m = 2GCD(A;C) + 2GCD(B;D)$ điểm nguyên (đã trừ các hằng số $+1$ để mỗi đỉnh của hình bình hành chỉ tính đúng một lần).
Do đó $n = S_{hbh} - \frac{m}{2} + 1 = |AD - BC| - GCD(A;C) - GCD(B;D) + 1$.

Hội chợ

Không mất tổng quát ta có thể coi $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Bài toán được giải theo phương pháp qui hoạch động.
Gọi $f[i]$ là chi phí nhỏ nhất để phủ hết các gian hàng $1, 2, \dots, i$ ta có
$f[i] = \min\{f[k] + cp(k+1, i) : k = 0,1,2,\dots, i-1\}$ (*)
$f[0] = 0$
Trong đó $cp(u, v)$ là chi phí nhỏ nhất để phủ một tấm bạt che từ gian hàng x_u đến gian hàng x_v. Có thể tính $cp(u, v)$ theo công thức:

$$cp(u, v) = G[v - u + 1] = \min\{c_{v-u+1}, \dots, c_m\}$$

Mảng G có thể được chuẩn bị trước trong thời gian $O(m)$ và do vậy độ phức tạp chung của thuật toán là $O(m + n^2)$

Tham quan Nam Định

Bài toán quy về đếm số tập con của tập $\{a_1, \dots, a_n\}$ có tổng bằng S.

Subtask1: Quy hoạch động

Gọi $F[i]$ là số cách đi tham quan với số tiền i.
Xét điểm tham quan j $(j = 1..n)$: $F[i] = F[i] + F[i - a[j]]$
Khởi tạo: $F[i] = 0, i = 1..n;$ $F[0] = 1$.

Subtask2: Vét cạn

Sinh tất cả các tập con có thể của tập $\{a_1, \dots, a_n\}$, với mỗi tập con tính tổng của tập con ấy, nếu tổng =S thì tăng *đếm* (khởi tạo *đếm=0*).

Subtask3: Duyệt chia đôi tập hợp

Tập 1: $\{a_1, \dots, a_{\frac{n}{2}}\}$, tập 2: $\{a_{\frac{n}{2}+1}, \dots, a_n\}$,

Sinh tất cả các tập con có thể của tập 1, với mỗi tập con tính tổng của tập con ấy, lưu vào mảng S_1.

Sinh tất cả các tập con có thể của tập 2, với mỗi tập con tính tổng của tập con ấy, lưu vào mảng S_2.

Sắp xếp mảng S_1 tăng dần. Với mỗi phần tử của mảng S_2, tìm kiếm nhị phân trên mảng S_1 số phần tử có giá trị bằng $S - S_1[i]$.