Ch2 随机变量及其概率分布

$\{X<a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{X\le a-\frac{1}{k}\}$

$\{a<X\le b\} = \{X\le b\} - \{X\le a\}$

$\{X>b\} = \Omega - \{X\le b\}$

所有事件均能用 $\{X\le a\}$ 描述

定义 (Distribution function)

设 X 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量。对任意实数 x，

$$F(x)=P(X\le x),\ -\infty<x<\infty$$

为 X 的分布函数，简称分布。并称 X 服从分布 $F(x)$，记为 $X\sim F(x)$。

记号习惯用 $p\{X<x\}$ 作为分布函数

$F(x) = p(X\le a)$

$p(a<X\le b) = P(\{X\le b\} - \{X\le a\})$

$= p(X\le b) - p(X\le a)$

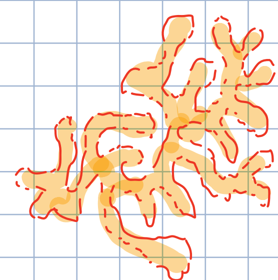
$= F(b) - F(a)$

$p(X>a) = p(\{X<\infty\} - \{X\le a\}) = p(X<\infty) - p(X\le a) = 1-F(a)$

$p(X<a) = p(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X\le a-\frac{1}{k}\}) = \lim_{k\to\infty} p(X\le a-\frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} F(a-\frac{1}{k}) = F(a-0)$

左极限

下连续性 $\lim_{k\to\infty} p(A_k) = p(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X\le a-\frac{1}{k}\})$



$p(X=a) = p(\{X\le a\} - \{X<a\}) = F(a) - F(a-0)$

若分布函数 $F(x)$ 为连续函数，则对任何实数 x，$p(X=x)=0$.

从而区间两端的开.闭性不影响随机变量落入此区间的概率

分布函数的性质

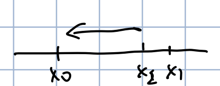
单调性 $F(x)$ 是单调不减，即 $a\le b$ 时，$F(a)\le F(b)$

有界性 对 $\forall x$. 都有 $0\le F(x)\le 1$

$F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

右连续性 $F(x)$ 是 x 的右连续函数 $\lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$



$\{X\le x_i\}$ 单调减序列 $\to$ 上连续性 $\lim_{n\to\infty} P(X\le x_n) = p(\bigcap_{n=0}^{\infty}\{X\le x_n\})$

$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = \lim_{n\to\infty} p(X\le x_n) = p(\bigcap_{n=0}^{\infty}\{X\le x_n\}) = p(X\le x_0) = F(x_0)$

§2.2 离散型随机变量

定义 (Discrete random variable)

设X是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机变量，如果X只取有限个或可列无穷多个值$x_1, x_2, x_3, \ldots$，则称 X 为离散型随机变量，称

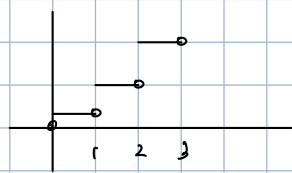
$$p_k = P(X = x_k), k \geq 1$$

为X的分布律 *probability mass function*（或分布列，或概率分布）。

例 2.2.2

怎么分段？ 右连续，等号放≥

$x<0$	$F(x)=P(X\le x)=0$
$0\le x<1$	$F(x)=P(X\le x)=P(X=0)=\frac{1}{3}$
$1\le x<2$	$F(x)=P(X\le x)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$
$x\ge 2$	$F(x)=P(X\le x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$



定义 (Binomial distribution) 二项分布

设X是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量，如果X的取值范围是$0, 1, \ldots, n$，且其分布律为

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n.$$

其中p为常数。则称X服从以n, p为参数的二项分布，记为 $X \sim B(n, p)$。

多重伯努利试验的随机变量的分布即是二项分布

记为 $b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\binom{n}{k+1}\cdot p^{k+1}\cdot(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}}=\frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}}=\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

假设相等 $(n-k)p=(k+1)(1-p)$

$k=np+p-1=(n+1)p-1$

① $(n+1)\cdot p$为整数

$$\begin{cases} k=(n+1)\cdot p-1 \\ k=(n+1)\cdot p \end{cases} \quad P(X=k)=P(X=k+1)$$

② $(n+1)\cdot p$非整

$k<(n+1)\cdot p-1$ ↑

$k>(n+1)\cdot p-1$ ↓

?