§1.4 条件概率

定义 (条件概率 Conditional Probability)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B \in \mathcal{F}$，$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$，令

条件概率分母不能为0

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

并称它为在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率。

条件概率也是概率，满足概率所具有的一切性质

① $p(A|B) \geq 0$

② $p(\Omega|B) = 1$

③ 可列可加

$A_iA_j = \phi \Rightarrow A_iB \cap A_jB = \phi$

$$p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A|B) = \frac{p((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\cdot B)}{p(B)} = \frac{p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_iB)}{p(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} p(A_iB)}{p(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i|B)$$

④ $p(\phi|B) = 0$

⑤ $p(A|B) = 1 - p(\bar{A}B)$

可减

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{p(B - \bar{A}B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(\bar{A}B)}{p(B)} = 1 - p(\bar{A}|B)$$

⑥ 加法公式

$$p(A_1 \cup A_2|B) = \frac{p((A_1 \cup A_2)\cdot B)}{p(B)} = \frac{p(A_1B \cup A_2B)}{p(B)}$$

加法公式

$$= \frac{p(A_1B) + p(A_2B) - p(A_1A_2B)}{p(B)} = p(A_1|B) + p(A_2|B) - p(A_1A_2|B)$$

概率是一种特殊的条件概率 $p(A) = p(A|\Omega)$

乘法公式 $p(AB) = p(A|B)\,p(B)$

$p(A_1A_2 \cdots A_n) = p(A_1)\,p(A_2|A_1)\,p(A_3|A_1A_2) \cdots p(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$

$$p(\underbrace{A_1A_2\cdots}_{B}\underbrace{A_n}_{A}) = \underbrace{p(A_1A_2\cdots A_{n-1})}_{\downarrow}\,p(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例 1.4.3

$$p(A_1 \cdots A_n) = p(A_1)\cdot p(A_2|A_1)\,p(A_3|A_1A_2) \cdots p(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

定义 (1.4.2 完备事件组)

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间，$B_i\in\mathscr{F}, i=1,\dots,n$，如果

$$\cup_{i=1}^n B_i=\Omega, B_iB_j=\phi(i\neq j), P(B_i)>0, i=1,\dots,n,$$

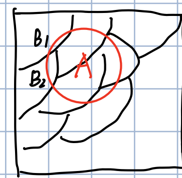
则称$B_1,\dots,B_n$为完备事件组。
类似地，称$\mathscr{F}$中可列无穷个事件$B_1,\dots,B_n,\dots$为完备事件组，如果

$$\cup_{i=1}^\infty B_i=\Omega, B_iB_j=\phi(i\neq j), P(B_i)>0, i=1,\dots,n,\dots$$

构造完备事件组

$$A=A\Omega=A\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)=\bigcup_{i=1}^n AB_i$$

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^n AB_i\right)=\sum_{i=1}^n P(AB_i)=\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$



全概率公式

定理 (1.4.2 Total Probability Formula)

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间，$B_1,\dots,B_n$为完备事件组，则对任何事件$A\in\mathcal{F}$，

$$P(A)=\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

类似地，若$B_1,\dots,B_n,\dots$为完备事件组，则对任何事件$A\in\mathscr{F}$，

$$P(A)=\sum_{i=1}^\infty P(B_i)P(A|B_i)$$

使用关键：找出完备事件组 B_i $(i\geq 1)$
使 $P(B_i)$、$P(A|B_i)$ 好计算

- 全概率公式最简单的形式：

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

- 条件$B_1,\dots,B_n$为样本空间的一个分割，可以改成$B_1,\dots,B_n$互不相容且$A\subset\cup_{i=1}^n B_i$，定理依然成立。

例：（抽签模型）n张彩票中有1张奖券

A_i：第i个人摸到奖券

$p(A_1)=\frac{1}{n}$

完备事件：A_1、$\overline{A_1}$

$$p(A_2)=p(A_1)\cdot p(A_2|A_1)+p(\overline{A_1})p(A_2|\overline{A_1})$$
$$=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$$
$$=\frac{1}{n}$$

（与抽取顺序无关）

例：（三门问题）

A_i：第i次选中

$p(A_1)=\frac{1}{3}$　　A_1、$\overline{A_1}$

$$p(A_2)=p(A_1)\cdot p(A_2|A_1)+p(\overline{A_1})\cdot p(A_2|\overline{A_1})$$
$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

例 1.4.4

A：抽到不合格品

B_i：来自第i条 B_1, B_2, B_3, B_4

$P(A) = \sum P(B_i) \cdot P(A|B_i)$

已知抽到不合格品，来自第i条生产线的概率

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum P(B_i) P(A|B_i)}$$

已知“结果”求“原因”

定理 (1.4.3（贝叶斯公式）)

设$B_1, \ldots, B_n$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的完备事件组，$P(A) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, \ldots, n$$

类似地，若$B_1, \ldots, B_n, \ldots$是完备事件组，$P(A) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, \ldots, n, \ldots$$

先验概率：$P(B_i)$

后验概率：$P(B_i|A)$

最常用的贝叶斯公式

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

例 1.4.5 甲胎蛋白

$$P(B|A) = \frac{0.95\,P(B)}{0.95\,P(B) + 0.1 \cdot (1 - P(B))} = \frac{0.95}{0.85 + \frac{0.1}{P(B)}}$$

关于 $P(B)$ 的增函数

后验概率大小受先验概率的影响

例 1.4.6 狼来了

A_i：第i次说谎

$$P(B|A_1) = \frac{P(B)\,P(A_1|B)}{P(B) \cdot P(A_1|B) + P(\overline{B})\,P(A_1|\overline{B})}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.1}{0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.5} = \frac{0.08}{0.18} = 0.44$$

孩子可信度变了

$$P(B|A_2) = \frac{P(B) \cdot P(A_2|B)}{P(B) \cdot P(A_2|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A_2|\overline{B})}$$

$$= \frac{0.44 \times 0.1}{0.44 \cdot 0.1 + (1 - 0.44) \cdot 0.5} = 0.138$$

§1.5 事件的独立性

$P(A|B)=P(A)$.　A的发生与否与B的发生与否互不影响

$P(B|A)=P(B)$

定义 (1.5.1（两个事件的独立性）)

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间，$A,B\in\mathcal{F}$。如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称**事件A与B相互独立(独立 independent)**。否则称A与B不独立或相依。

概率为0的事件与任何事件独立　（概率为0的事件不一定为空集）

$P(A)=0$

$A\supset AB$

$0=P(A)\geq P(AB)\geq 0 \implies P(AB)=0$

$P(A)\cdot P(B)=0$

概率为1的事件与任何事件独立

$P(A)=1$

$A\subset A\cup B$

$1=P(A)\leq P(A\cup B)\leq 1 \implies P(A\cup B)=1$

加法公式 $\underbrace{P(A\cup B)}_{1}=\underbrace{P(A)}_{1}+P(B)-P(AB)$

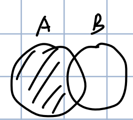
$\implies P(AB)=P(B)=P(B)\cdot \underbrace{P(A)}_{1}$

例1.5.3　若A,B独立，则$\{\bar{A},B\}$，$\{A,\bar{B}\}$，$\{\bar{A},\bar{B}\}$也独立

$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-P(A)P(B)$

$=P(A)\cdot P(\bar{B})$



事件A·B独立　$P(AB)=P(A)P(B)$　① $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$　独立

互不相容　$AB=\phi$　② $P(A)>0$, $P(B)>0$　不可能同时成立

定义 (1.5.2（三个事件的独立性）)

设A, B, C是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的三个事件，若有

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B) \\
P(BC) &= P(B)P(C) \\
P(AC) &= P(A)P(C)
\end{aligned}
$$

则称A, B, C 两两独立。若还有

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称A, B, C 相互独立 *mutually independent*。

$A\cup B$ 与 C 相互独立

$$
\begin{aligned}
P((A\cup B)C) = P(AC\cup BC) &= P(AC)+P(BC)-P(ABC) \\
&= P(C)(P(A)+P(B)-P(AB)) \\
&= P(C)\cdot P(A\cup B)
\end{aligned}
$$