PENGANTAR LOGIKA INFORMATIKA

IK-130
LOGIKA INFORMATIKA

Ani Anisyah, M.T.

OUTLINE

- Definisi
- Proposisi
- Tabel Kebenaran
- Disjungsi Ekslusif
- Hukum Logika Proposisi
- Operasi Logika di Komputer
- Proposisi Bersyarat (Implikasi)
- Varian Proposisi Bersyarat
- Bikondisional (Bi-Implikasi)
- Inferensi
- Argumen
- Aksioma, Teorema, Lemma, dan Colollary

LOGIKA

LOGIKA

- **Menurut KBBI**

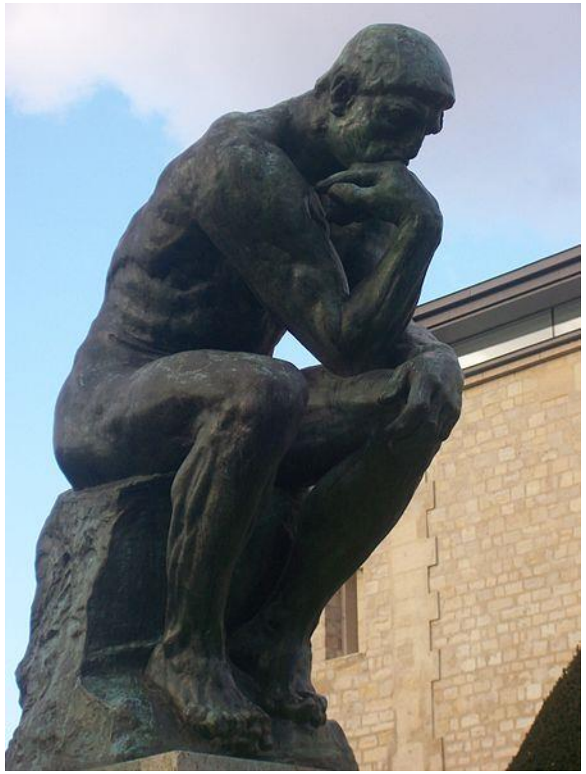
"Cara berpikir dengan mengembangkan **sesuatu berdasarkan akal budi**

dan bukan dengan **perasaan** [illegible] **pengalaman**"

LOGIKA

- Logika adalah ilmu yang membantu kita dalam berpikir dan menalar (*reasoning*)

- Menalar artinya **mencapai kesimpulan dari berbagai pernyataan.**



A thinker

LOGIKA DIFOKUSKAN PADA HUBNGAN ANTARA PERNYATAAN-PERNYATAAN (STATEMENT)

- Perhatikan argumen di bawah ini:

Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.

Apakah penarikan kesimpulan dari argumen di atas valid?

Alat bantu untuk memahami argumen tsb adalah **Logika**

LOGIKA DIFOKUSKAN PADA HUBNGAN ANTARA PERNYATAAN-PERNYATAAN (STATEMENT)

- Perhatikan urutan pernyataan di bawah ini:

  Indra, Ical, Parry adalah sekelompok pembunuh. Mereka tertangkap dan sedang diinterogasi oleh polisi dengan *poligraph*:

  Indra berkata : “Ical bersalah dan Parry tidak bersalah”

  Ical berkata : “Jika indra bersalah maka Parry bersalah”

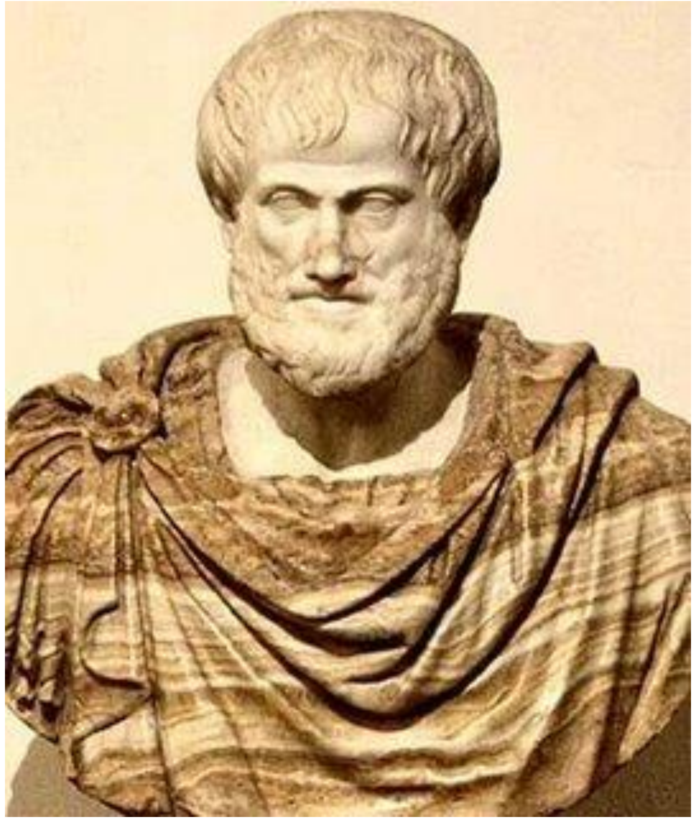
  Parry berkata : “Saya tidak bersalah, tetapi Ical atau Indra bersalah”.

Tentukan siapa sajakah yang bersalah bila tes *poligraph* menunjukkan bahwa Ical telah berbohong, sementara kedua temannya mengatakan kebenaran!

Alat bantu untuk menjawab pertanyaan ini adalah adalah **Logika**

SEJARAH SINGKAT

- Dikembangkan oleh filusuf Yunani, Aristoteles sekitar 2300 tahun lalu



Aristoteles, peletak dasar-dasar logika

APLIKASI ILMU LOGIKA DI ILMU KOMPUTER

- logika adalah pondasi dasar algoritma dan pemrograman.
- Contoh :

```
if x > y then
    begin
        temp:=x;
        x:=y;
        y:=temp;
    end;
```

APLIKASI ILMU LOGIKA DI ILMU KOMPUTER

- Bidang pemrograman
- Analisis kebenaran algoritma
- Kecerdasan buatan (artificial intelligence)
- Perancangan komputer
- Dll

PROPOSISI

- Logika didasarkan pada pada hubungan antara kalimat pernyataan (*statements*).

- Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang menjadi penalaran/tinjauan → **proposisi**
  - **Karena tidak semua kalimat berhubungan dengan logika**

- **Proposisi**: pernyataan yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

CONTOH

"Gajah lebih besar daripada tikus."

Apakah ini sebuah pernyataan?	YA
Apakah ini sebuah proposisi?	YA
Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini?	BENAR

CONTOH

"230 < 111"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

CONTOH

"y > 3"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada y, tapi nilainya belum ditentukan.

Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi** atau **kalimat terbuka**.

CONTOH

"Sekarang tahun 2021 dan 100 < 3"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

CONTOH

"Tolong untuk tidak tidur selama kuliah logika informatika"

Apakah ini sebuah pernyataan? TIDAK

Permintaan / perintah

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Hanya **pernyataan**lah yang bisa menjadi **proposisi**

CONTOH

"x<y jika dan hanya jika y>x"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

.. Karena nilai kebenarannya tidak tergantung pada nilai/harga spesifik x atau y

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini ? BENAR

PROPOSISI

Kesimpulan : Proposisi adalah kalimat berita

CONTOH PROPOSISI LAINNYA

a) 13 adalah bilangan ganjil
b) Soekarno adalah alumnus UI.
c) $1 + 1 = 2$
d) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$
e) Ada monyet di bulan
f) Hari ini adalah hari Rabu
g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap
h) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

CONTOH PROPOSISI ??

a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?

b) Isilah gelas tersebut dengan air!

c) $x + 3 = 8$

d) $X > 3$

BUKAN

FUNGSI PROPOSISI

- Pernyataan yang melibatkan peubah (*variable*) disebut **predikat**, **kalimat terbuka**, atau **fungsi proposisi**

  Contoh: “ $x > 3$”, “$y = x + 10$”

  Notasi: $P(x)$, misalnya $P(x)$: $x > 3$

- Predikat dengan *quantifier*: $\forall x\, P(x)$

PROPOSISI

- Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil *p*, *q*, *r*, ….

- Contoh:

  p : 13 adalah bilangan ganjil.

  q : Soekarno adalah alumnus UGM.

  r : 2 + 2 = 4

BENTUK PROPOSISI

- Proposisi dapat dinyatakan dalam empat bentuk:
  1. Proposisi atomik
  2. Proposisi majemuk
  3. Implikasi
  4. Bi-implikasi

PROPOSISI ATOMIK

- Proposisi tunggal
- Contoh:

  (a) Prodi Ilmu Komputer didirikan tahun 2005

  (b) $2n$ selalu genap untuk n=0, 1, 2, …

  (c) I’m Javanese

  (d) Orang Jawa belum tentu bisa Bahasa Java

PROPOSISI MAJEMUK

- Misalkan *p* dan *q* adalah proposisi atomik.
- *p* dan *q* digabungkan dengan operator logika (or, and, not)
- Empat macam proposisi majemuk:

1. Konjungsi (*conjunction*): *p* dan *q*

Notasi $p \wedge q$,

2. Disjungsi (*disjunction*): *p* atau *q*

Notasi: $p \vee q$

3. Ingkaran (*negation*) dari *p*: tidak *p*

Notasi: $\sim p$

4. **Disjungsi eksklusif**: *p* atau *q* tapi bukan keduanya

Notasi: $p \oplus q$

CONTOH PROPOSISI MAJEMUK

p : Hari ini hujan

q : Siswa masuk sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan siswa masuk sekolah

semakna dengan

Hari hujan namun siswa masuk sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan

(atau: Hari ini *tidak* hujan)

CONTOH PROPOSISI MAJEMUK

p : Pemilih dalam Pilkada harus berusia 17 tahun

q : Pemilih dalam Pilkada sudah menikah

$p \vee q$: Pemilih dalam Pilkada harus berumur 17 atau tahun atau sudah menikah

LATIHAN

Latihan. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge \sim q$
(c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

TABEL KEBENARAN

p	q	$p \wedge q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

p	q	$p \vee q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

p	$\sim p$
T	
F	

TABEL KEBENARAN

Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Disjungsi

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Ingkaran

p	$\sim p$
T	F
F	T

DISJUNGSI EKSKLUSIF

Kata “atau” (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam salah satu dari dua cara:

1. ***Inclusive or***

“atau” berarti “*p* atau *q* atau keduanya” → **bernilai benar jika salah satu proposisi atomiknya benar atau keduanya benar.**

Contoh: “Tenaga IT yang dibutuhkan harus menguasai

Bahasa C++ **atau** Java”.

2. ***Exclusive or***

“atau” berarti “*p* atau *q* tetapi bukan keduanya”. → **bernilai benar jika *p* atau *q* salah satunya bernilai benar (tapi bukan keduanya).**

Contoh: “Ia dihukum 5 tahun **atau** denda 10 juta”.

DISJUNGSI EKSKLUSIF

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*
Notasi: $\oplus$

Tabel kebenaran:

p	q	$p \oplus q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

DISJUNGSI EKSKLUSIF

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*

Notasi: $\oplus$

Tabel kebenaran:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- Nilai kebenaran proposisi majemuk dapat ditentukan dengan menggunakan “tabel kebenaran”
- Contoh proposisi majemuk: $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
- Tabel kebenaran:

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	
T	T	F	T	F	F	
T	F	T	F	T	T	
T	F	F	F	T	F	
F	T	T	F	F	F	
F	T	F	F	F	F	
F	F	T	F	T	T	
F	F	F	F	T	F	

- Nilai kebenaran proposisi majemuk dapat ditentukan dengan menggunakan "tabel kebenaran"
- Contoh proposisi majemuk: $(p \land q) \lor (\sim q \land r)$
- Tabel kebenaran:

p	q	r	$p \land q$	$\sim q$	$\sim q \land r$	$(p \land q) \lor (\sim q \land r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

- Proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus

- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

$p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	
T	F	F	T	
F	T	F	T	
F	F	F	T	

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

$p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	
T	F	F	T	F	
F	T	F	T	F	
F	F	F	F	T	

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

EKIVALEN

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

HUKUM-HUKUM LOGIKA

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – ${\sim}(p \wedge q) \Leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q$ – ${\sim}(p \vee q) \Leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}q$

Contoh

Latihan. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee \sim q$

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

$\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Contoh

Latihan. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$ (Hukum *Null*)

$\Leftrightarrow p$ (Hukum Identitas)

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – ${\sim}(p \wedge q) \Leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q$ – ${\sim}(p \vee q) \Leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}q$

Latihan

Diberikan pernyataan “Tidak benar bahwa dia belajar Logika Informatika tetapi tidak belajar Matematika”.

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik (ekspresi logika)

(b) Berikan pernyataan yang ekivalen secara logika dengan pernyataan tsb (Petunjuk: gunakan hukum De Morgan)

Penyelesaian

Misalkan

p : Dia belajar Logika Informatika

q : Dia belajar Matematika

maka,

(a) Tidak benar bahwa dia belajar Logika Informatika tetapi tidak belajar Matematika: $\sim (p \wedge \sim q)$

(b) $\sim (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Hukum De Morgan)

dengan kata lain: “Dia tidak belajar Logika Informatika atau belajar Matematika”

Operasi Logika di Dalam Komputer

- Menggunakan tipe data Boolean → untuk data yang bertipe logika
- Tipe Boolean mempunyai dua buah nilai, yaitu true dan false
- Operasi pada tipe data Boolean :
    1. AND
    2. OR
    3. XOR
    4. NOT
- Operasi bit bersesuaian dengan operasi bit
    - Sebuah bit mempunyai nilai 1 atau 0
    - 1 → true, 0 → false

$$\sim 0$$
$$1 \wedge 0$$
$$0 \vee 0$$
$$1 \oplus 0$$

$$\sim F$$
$$T \wedge F$$
$$F \vee F$$
$$T \oplus F$$

Implikasi

- Disebut juga proposisi bersyarat
- Bentuk proposisi: "jika *p*, maka *q*"
- Notasi: $p \rightarrow q$

- *p* disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**
- *q* disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Contoh Implikasi

a. Jika saya mendapatkan IPK 4, maka saya akan berlibur ke Bali
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka alarm akan berbunyi
c. Jika anda tidak mendaftar ulang masuk universitas, maka anda dianggap mengundurkan diri

Tabel Kebenaran Implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Implikasi *p* → *q* **hanya salah jika *p* benar tetapi *q* salah,**
Selain itu bernilai benar.

Implikasi dengan contoh

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Penjelasan (dengan contoh)

Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.
Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong?
Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar).
$\therefore$ pernyataan dosen benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).
$\therefore$ dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).
$\therefore$ dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).
$\therefore$ dosen anda benar.

Ekspresi Implikasi

- Jika *p*, maka *q* (*if p, then q*)
- Jika *p*, *q* (*if p, q*)
- *p* mengakibatkan *q* (*p implies q*)
- *q* jika *p* (*q if p*)
- *p* hanya jika *q* (*p only if q*)
- *p* syarat cukup untuk *q* (*p is sufficient condition for q*)
- *q* syarat perlu bagi *p* (*q is necessary condition for q*)
- *q* bilamana *p* (*q whenever p*)
- *q* mengikuti dari *p* (*q follows from p*)

Contoh:

Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

1. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
2. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
4. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
5. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi

Latihan

Ubahlah proposisi di bawah ini dalam bentuk standard “jika *p* maka *q*”

1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

Jawaban

1) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.

Ingat: $p \rightarrow q$ **dapat dibaca** p syarat cukup untuk q

Susun sesuai format:

Percikan api dari rokok adalah syarat cukup agar pom bensin meledak."

Identifikasi proposisi atomik:

p : Api memercik dari rokok

q : Pom bensin meledak

Notasi standard: Jika p, maka q

Jika api memercik dari rokok, maka pom bensin meledak.

Jawaban

2) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.

Ingat: $p \to q$ **dapat dibaca** q syarat perlu untuk p

Susun sesuai format:

Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia

Identifikasi proposisi atomik:

q: Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan

p: Indonesia ikut Piala Dunia

Notasi standard: Jika p, maka q

Jika Indonesia ikut Piala Dunia, maka Indonesia mengontrak pemain asing kenaman.

Latihan

Nyatakan pernyataan berikut:

"Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah".

dalam notasi simbolik.

Penyelesaian

Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu <u>jika</u> anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah”.

Format: *q* jika *p*

Susun ulang ke bentuk standard: Jika *p*, maka *q*

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

Penyelesaian

Jika anda berusia di bawah 17 tahun, kecuali kalau anda sudah menikah, maka anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu

m : Anda berusia di bawah 17 tahun.
n : Anda sudah menikah.
r : Anda dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu.

maka pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

$(m \wedge \sim n) \rightarrow \sim r$ atau $(\sim m \vee n) \rightarrow r$

Implikasi dalam Bahasa Pemrograman

`if c then S`

`c`: ekspresi logika yang menyatakan syarat/kondisi
`S`: satu atau lebih pernyataan.

`S` dieksekusi jika `c` benar,
`S` tidak dieksekusi jika `c` salah.

- Struktur *if-then* pada bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi *if-then* yang digunakan dalam logika.
- Pernyataan *if-then* dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi ($\rightarrow$).
- *Interpreter* atau *compiler* tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan *if-then* secara logika. *Interpreter* hanya memeriksa kebenaran kondisi `c`, jika `c` benar maka `S` dieksekusi, sebaliknya jika `c` salah maka `S` tidak dieksekusi.

Contoh. Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan berikut:

```
if x > y then y:=x+10;
```

Berapa nilai *y* setelah pelaksanaan eksekusi if-then jika:

(i) $x = 2, y = 1$
(ii) $x = 3, y = 5$?

<u>Penyelesaian</u>:

(i) `x = 2` dan `y = 1`
Ekspresi `x > y` bernilai benar
Pernyataan `y:=x+10` dilaksanakan
Nilai *y* sekarang menjadi $y = 2 + 10 = 12$.

(ii) `x = 3` dan `y = 5`
Ekspresi `x > y` bernilai salah
Pernyataan `y:=x+10` tidak dilakukan
Nilai `y` tetap seperti sebelumnya, yaitu 5.

Ekivalensi bentuk $p \to q$

- Implikasi $p \to q$ ekivalen dengan $\sim p \vee q$

p	***q***	***~p***	***p → q***	***~p v q***
T	T	F		
T	F	F		
F	T	T		
F	F	T		

Ekivalensi bentuk $p \to q$

- Implikasi $p \to q$ ekivalen dengan $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	**T**	**T**
T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	**T**	**T**
F	F	T	**T**	**T**

Ekivalensi bentuk $p \rightarrow q$

- Kita dapat membuat **negasi dari implikasi dengan menggunakan bentuk ekivalensinya** tersebut:

$$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \boldsymbol{\sim(\sim p \vee q)} \Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

- Contoh: Jika anda berusia 17 tahun, maka anda boleh memiliki SIM

  Negasinya: Anda berusia 17 tahun tetapi anda tidak boleh memiliki SIM.

Varian Proposisi Bersyarat

Konvers (kebalikan): $q \to p$
Invers : $\sim p \to \sim q$
Kontraposisi : $\sim q \to \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \to q$	Konvers $q \to p$	Invers $\sim p \to \sim q$	Kontraposisi $\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh : Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari "Jika Amir mempunyai IP 4, maka ia orang pintar"

Penyelesaian:

- Konvers : Jika Amir orang pintar, maka ia mempunyai IP 4
- Invers : Jika Amir tidak mempunyai IP 4, maka ia bukan orang pintar
- Kontraposisi: Jika Amir bukan orang pintar, maka ia tidak mempunyai IPK 4

Latihan. Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
(d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.
(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Latihan. Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
(d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.
(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Penyelesaian:

(a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah.
(b) Jika 6 bilangan negatif, maka 6 tidak lebih besar dari 0.
(c) "Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar".
Kontraposisi: "Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian"
(d) "Jika ia mendapat pekerjaan maka ia tidak terlambat"
Kontraposisi: "Jika ia terlambat maka ia tidak akan mendapat pekerjaan itu"
(e) "Ada angin adalah syarat perlu agar layang-layang bisa terbang" ekivalen dengan "Jika layang-layang bisa terbang maka hari ada angin". Kontraposisi: "Jika hari tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang".
(f) "Hari hujan adalah syarat cukup agar hari ini dingin",
Ekivalen dengan "Jika hari hujan maka hari ini dingin".
Kontraposisi: "Jika hari ini tidak dingin maka hari tidak hujan".

Bi-Implikasi

- Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \leftrightarrow q$ bernilai benar, jika dan hanya jika p dan q mempunyai Nilai kebenaran yang sama

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Bi-Implikasi

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

- Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

Cara Menyatakan Bi-Implikasi

- *p* jika dan hanya jika *q*
- *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*
- Jika *p* maka *q,* dan sebaliknya
- *P iff q*

Contoh

- Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:
  - 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4
  - Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi
  - Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya
  - Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah provinsi di Indonesia

Contoh

- Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:
  - 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4
  - Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi
  - Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya
  - Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah provinsi di Indonesia

Latihan

- Sebuah pulau didiami oleh dua suku asli. Penduduk suku pertama selalu mengatakan hal yang benar, sedangkan penduduk dari suku lain selalu mengatakan kebohongan. Anda tiba di pulau ini dan bertanya kepada seorang penduduk setempat apakah di pulau tersebut ada emas atau tidak. Ia menjawab, "Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran". Apakah ada emas di pulau tersebut?

Penyelesaian

Ada emas di pulau ini jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran

Misalkan

p : Ada emas di pulau ini

q : Saya selalu menyatakan kebenaran

Ekspresi logika: $p \leftrightarrow q$

Tinjau dua kemungkinan kasus:

Kasus 1, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang benar.

Kasus 2, orang yang memberi jawaban adalah orang dari suku yang selalu menyatakan hal yang bohong.

Penyelesaian

Kasus 1: orang tersebut selalu menyatakan hal yang benar. Ini berarti q benar, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga benar, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut bernilai benar. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila q benar dan $p \leftrightarrow q$ benar, maka p harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

Kasus 2: orang tersebut selalu menyatakan hal yang bohong. Ini berarti q salah, dan jawabannya terhadap pertanyaan kita pasti juga salah, sehingga pernyataan bi-implikasi tersebut salah. Dari Tabel bi-implikasi kita melihat bahwa bila q salah dan $p \leftrightarrow q$ salah, maka p harus benar. Jadi, ada emas di pulau tersebut adalah benar.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	T	F
F	F	T

Dari kedua kasus, kita selalu berhasil menyimpulkan bahwa ada emas di pulau tersebut, meskipun kita tidak dapat memastikan dari suku mana orang tersebut. ■

Bi-Implikasi

- Bila dua proposisi majemuk yang ekivalen di-bikondisionalkan, maka hasilnya adalah tautologi
- Teorema:
  - Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah tautologi.

Argumen

- Argumen adalah **suatu deret proposisi** yang dituliskan sebagai

$$
\begin{array}{ll}
 & p_1 \\
 & p_2 \\
 & \vdots \\
 & p_n \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

yang dalam hal ini, ***p*₁, *p*₂, …, *p*ₙ disebut hipotesis (atau premis), dan *q* disebut konklusi.**

- Sering ditulis dalam bentuk: $p_1, p_2, ..., p_n \Rightarrow q$

- **Konklusi biasanya ditandai dengan kata "Jadi", "Oleh karen itu", "Dengan demikian, ", dll**

Argumen

- Contoh sebuah argumen:

  Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika. Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika.

- Argumen ada yang **sahih** (*valid*) dan **palsu** (*invalid*).

Argumen

- Definisi :
  - Sebuah **argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).**

- Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

- adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Latihan

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.

adalah sahih.

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \to q$

p	q	$p \to q$	
T	**T**	**T**	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \to q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa tabel, p dan $p \to q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen di atas **sahih**.

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

Tabel 1.16 $[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$ adalah tautologi

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih.

Inferensi

- Inferensi adalah penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi
- Terdapat sejumlah kaidah inferensi, beberapa diantaranya adalah :
  1. Modus Ponen
  2. Modus Tollen
  3. Silogisme Hipotesis
  4. Silogisme Disjungtif
  5. Simplikasi
  6. Penjumlahan
  7. Konjungsi

Inferensi

1. **Modus ponen**

$p \rightarrow q$

p

$\therefore q$

2. **Modus tollen**

$p \rightarrow q$

~q

$\therefore \sim p$

Modus ponen didaskarkan pada tautologi

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

Modus tollen didaskarkan pada tautologi

$$[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$$

Inferensi

3. Aturan transitif / Silogisme Hipotesis

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\therefore\ p \rightarrow r$

Modus silogisme hipotesis didaskarkan pada tautologi

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

4. Silogisme disjungtif/kontrapositif

$p \vee q$	$p \vee q$
~p	~q
----------	---------
$\therefore\ q$	$\therefore\ p$

Modus Silogisme disjungtif didaskarkan pada tautologi

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$$

Atau

$$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$$

Beberapa Argumen yang terbukti sahih

5. Simplifikasi

$p \wedge q$

$\therefore\ p$

Modus Simplikasi didaskarkan pada tautologi
$(p \wedge q) \rightarrow q$

6. Penjumlahan disjungtif

p

$\therefore\ p \vee q$

Modus Simplikasi didaskarkan pada tautologi
$p \rightarrow (p \vee q)$

7. Konjungsi

p

q

$\therefore\ p \wedge q$

Modus Konjungsi didaskarkan pada tautologi
$\big((p)\ \wedge (q)\big) \rightarrow (p \wedge q)$

Pembuktian argument dengan hukum logika dan penarikan kesimpulan (modus ponen, tollen, dsb)

- **Contoh**: Buktikan bahwa argumen berikut benar:

  $\sim p \vee q$, $s \vee p$, $\sim q \Rightarrow s$

  Bukti:

  (1) $\sim p \vee q$ Premis

  (2) $\sim q$ Premis

  (3) $\sim p$ Silogisme disjungtif (1) dan (2)

  (4) $s \vee p$ Premis

  (5) s Silogisme disjungtif (3) dan (4)

- **Contoh**: Buktikan bahwa argumen berikut benar:

  $p \to r$, $q \to s$, $p \vee q \;\Rightarrow s \vee r$

  Bukti:

  (1) $p \vee q$ Premis

  (2) $\sim p \to q$ Ekivalensi bentuk (1)

  (3) $q \to s$ Premis

  (4) $\sim p \to s$ Aturan transitif (2) dan (3)

  (5) $\sim s \to p$ Ekivalensi bentuk (4)

  (6) $p \to r$ Premis

  (7) $\sim s \to r$ Aturan transitif (5) dan (6)

  (8) $s \vee r$ Ekivalensi bentuk (7)

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

- Aksioma adalah ***proposisi yang diasumsikan benar.*** **Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.**
- Contoh:
  (a) Untuk semua bilangan real x dan y, berlaku x + y = y + x (hukum komutatif penjumlahan).
  (b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.
- **Teorema** adalah **proposisi yang sudah terbukti benar**
- Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

- **Lemma**: teorema sederhana yang digunakan untuk pembuktian teorema lain

- **Corollary**: teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan.

- atau, *corollary* adalah teorema yang mengikuti teorema lain.

Contoh Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

- Contoh-contoh teorema:
  a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
  b. Untuk semua bilangan real x, y, dan z, jika $x \le y$ dan $y \le z$, maka $x \le z$ (hukum transitif).

- Contoh *corollary*:
  - Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.
  - *Corollary* ini mengikuti teorema (a) di atas.

- Contoh *lemma*:
  - Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.

REFERENSI

1. Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T, *Matematika Diskrit (Edisi Kelima*), Bandung: Informatika , 2013.