GRAPH

IK-130
LOGIKA INFORMATIKA

Ani Anisyah, M.T.

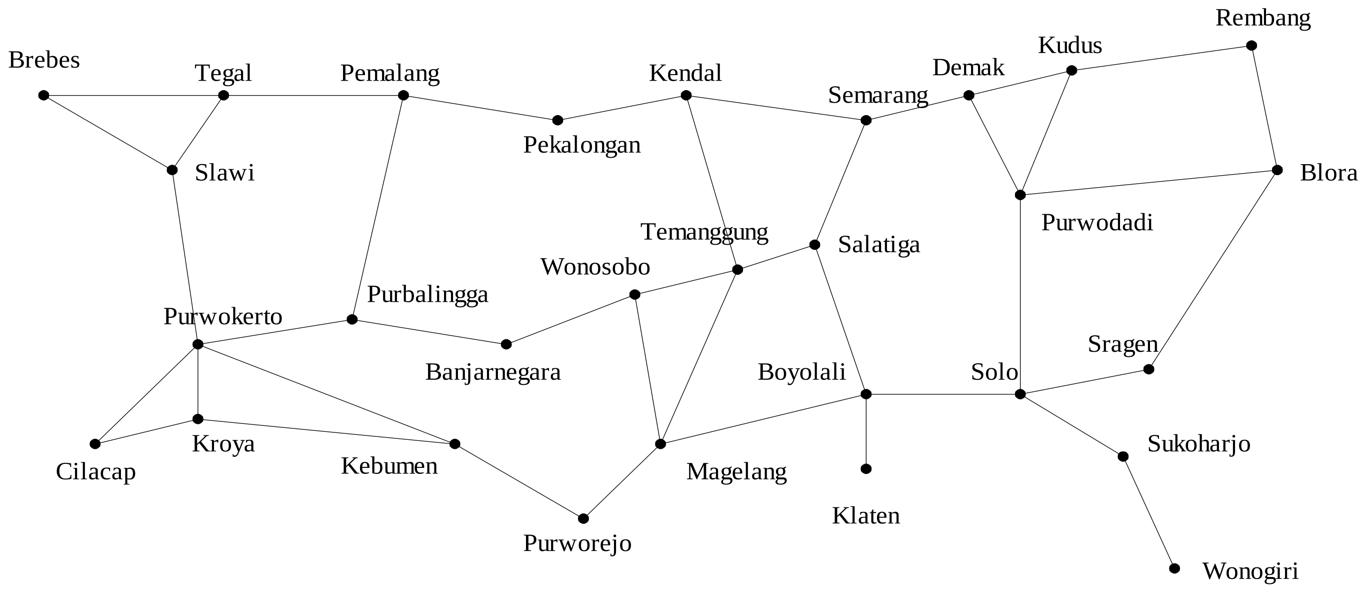
OUTLINE

- Pendahuluan
- Sejarah Graph
- Definisi
- Jenis-jenis Graf
- Terminologi Graf
- Representasi Graf
- Lintasan dan Sirkuit
- Aplikasi Graf

PENDAHULUAN

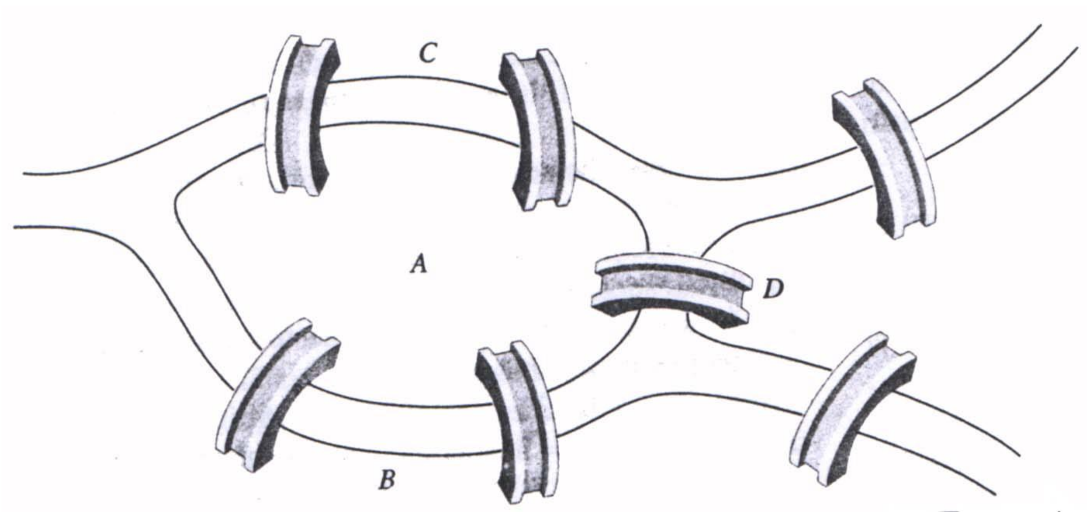
- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.

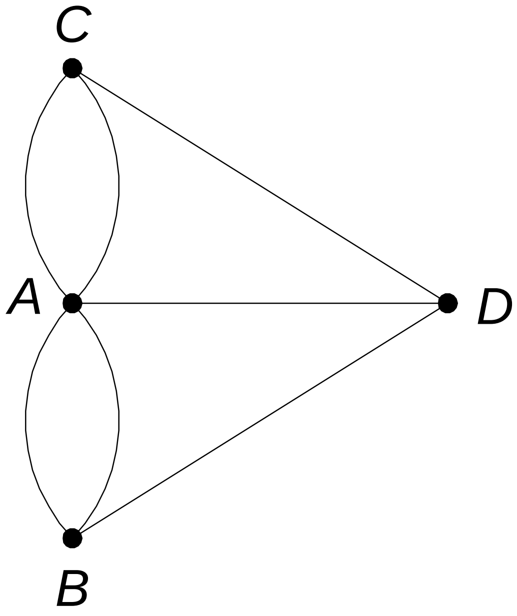
- Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.



SEJARAH GRAF

- Masalah Jembatan Konigsberg(tahun 1736)





Gambar 1. Masalah Jembatan Königsberg

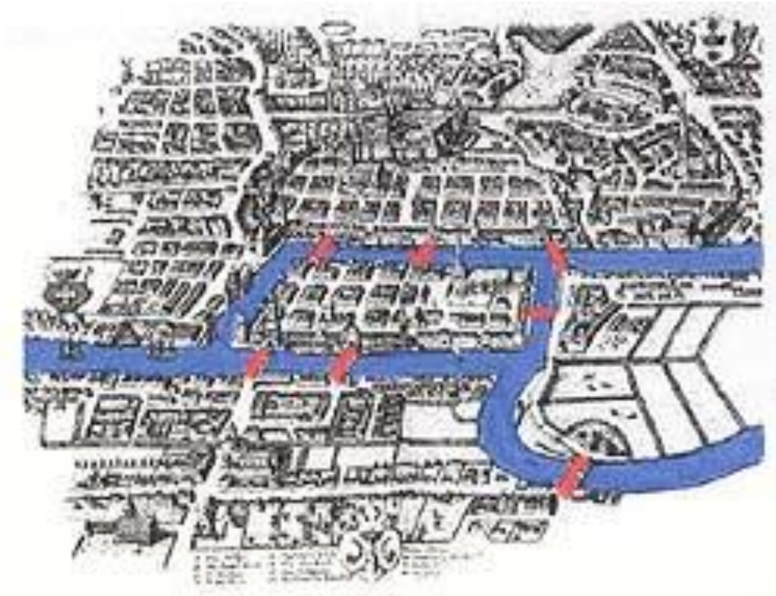
- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:

  Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan

  Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan

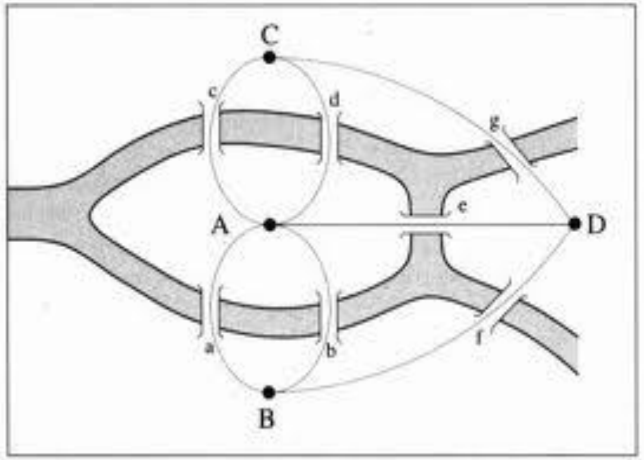
- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

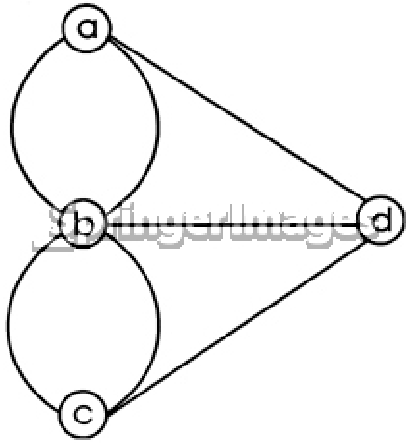
SEJARAH GRAF



Konigsberg Bridge Problem

Leonhard Euler
15 April 1707 – 18 September 1783





DEFINISI GRAF

- Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

  V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

  $= \{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \}$

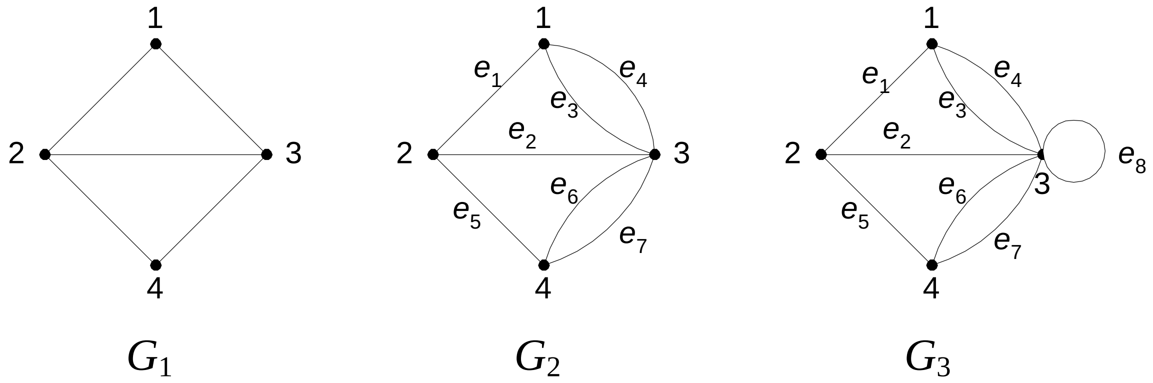
- E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

  $= \{e_1 , e_2 , \ldots , e_n \}$

JENIS-JENIS GRAF

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. **Graf sederhana (simple graph)** → Graf yang **tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda** dinamakan graf sederhana. G1 pada Gambar 2 adalah contoh graf sederhana
2. **Graf tak-sederhana (unsimple-graph)** → Graf yang **mengandung sisi ganda atau gelang** dinamakan graf tak-sederhana (unsimple graph). G2 dan G3 pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 1. Pada Gambar 2, G_1 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

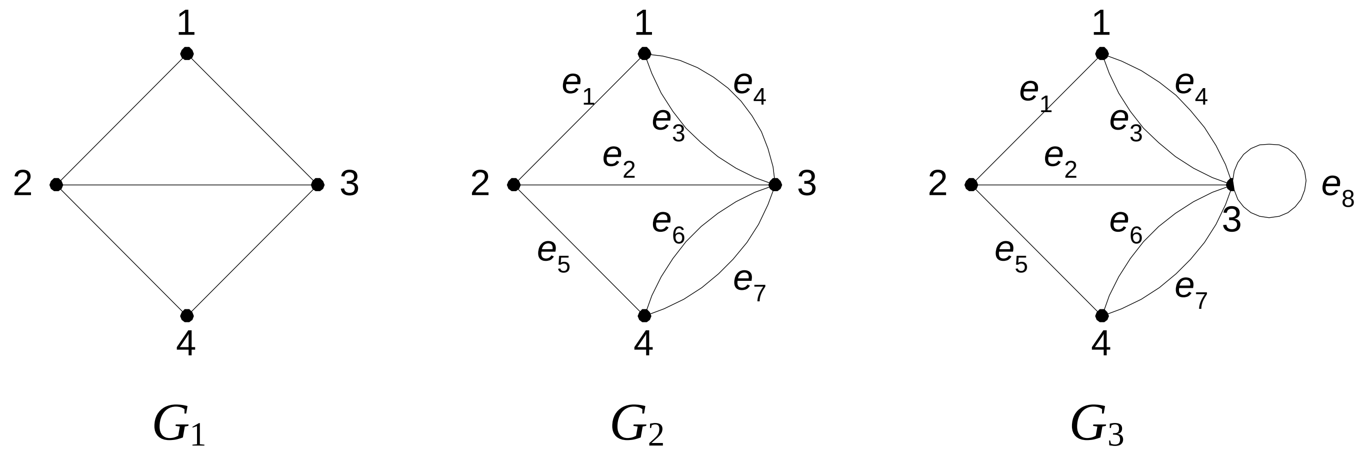
G_2 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$

G_3 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

- Pada G_2, sisi e_3 = (1, 3) dan sisi e_4 = (1, 3) dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

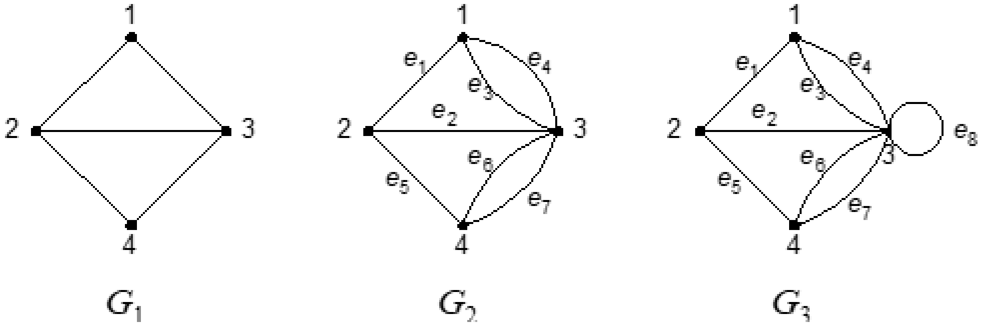
- Pada G_3, sisi e_8 = (3, 3) dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

JENIS-JENIS GRAF

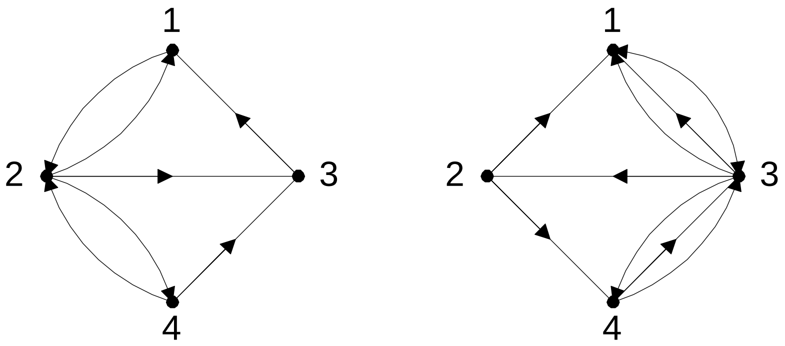
- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graf tak-berarah (undirected graph)** → Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.
2. **Graf berarah (directed graph atau digraph)** → Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.

JENIS-JENIS GRAF



Gambar 2. Graph tak-berarah



(a) G_4 (b) G_5

Gambar 3 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

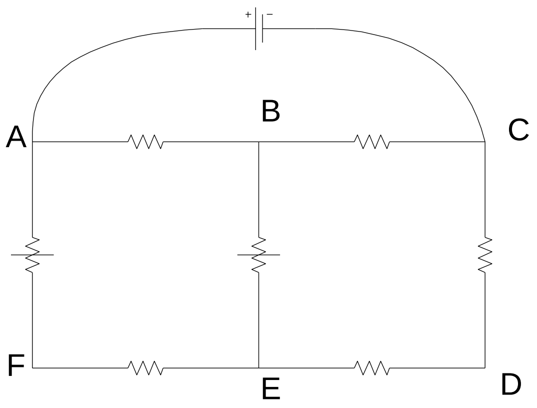
JENIS-JENIS GRAF

Tabel 1 Jenis-jenis graf [ROS99]

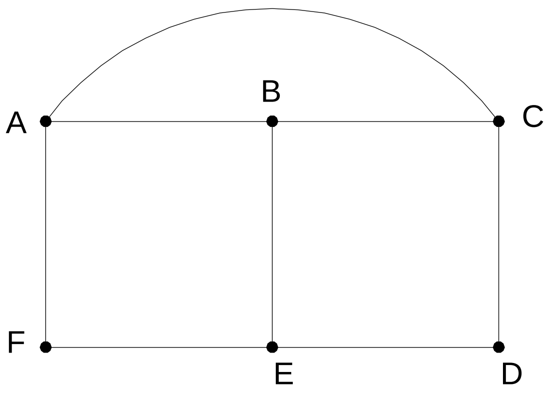
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

CONTOH TERAPAN GRAF

1. *Rangkaian listrik.*



(a)

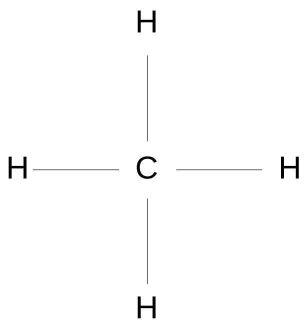


(b)

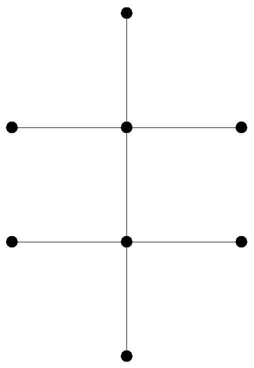
CONTOH TERAPAN GRAF

2. *Isomer senyawa kimia karbon*

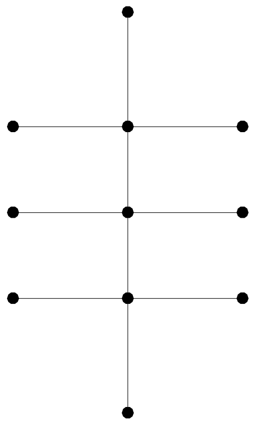
metana (CH_4)



etana (C_2H_6)

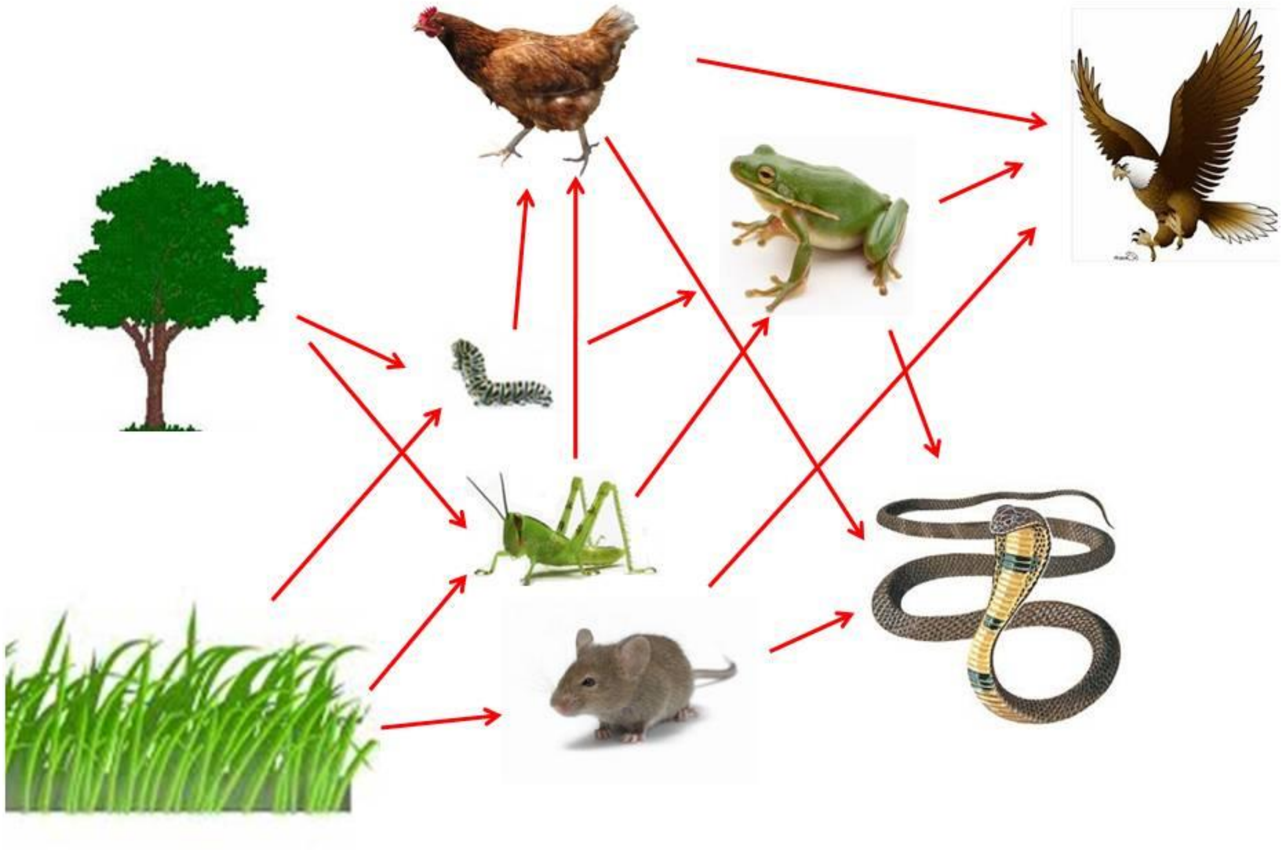


propana (C_3H_8)



CONTOH TERAPAN GRAF

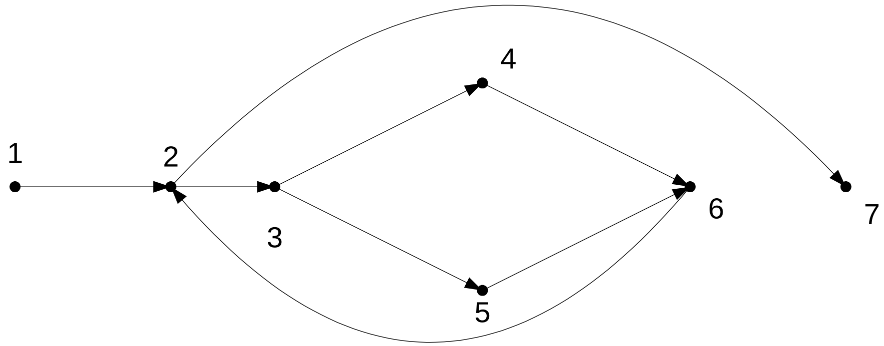
3. Jaring-jarring makanan (biologi)



CONTOH TERAPAN GRAF

4. Pengujian Program

```
read(x);
while x <> 9999 do
 begin
   if x < 0 then
      writeln('Masukan tidak boleh negatif')
   else
      x:=x+10;
   read(x);
 end;
writeln(x);
```

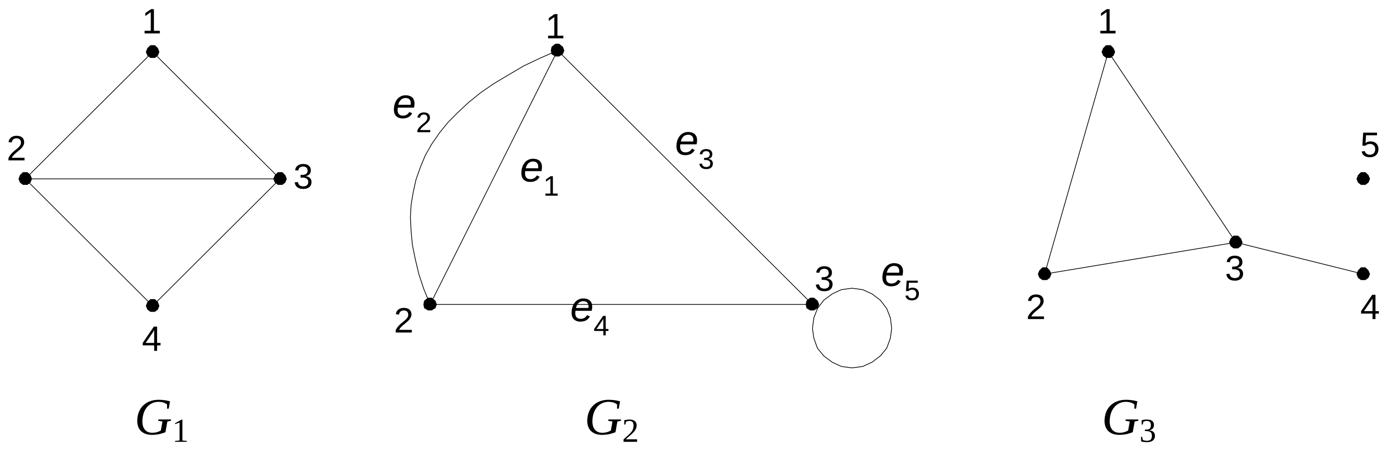


Keterangan:
1 : read(x)
2 : x <> 9999
3 : x < 0
4 : writeln('Masukan tidak boleh negatif');
5 : x := x + 10
6 : read(x)
7 : writeln(x)

TERMINOLOGI GRAF

1. Ketetanggaan (Adjacent)

- Dua buah simpul dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung.
- Tinjau graf G1 :
  - simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
  - simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



TERMINOLOGI GRAF

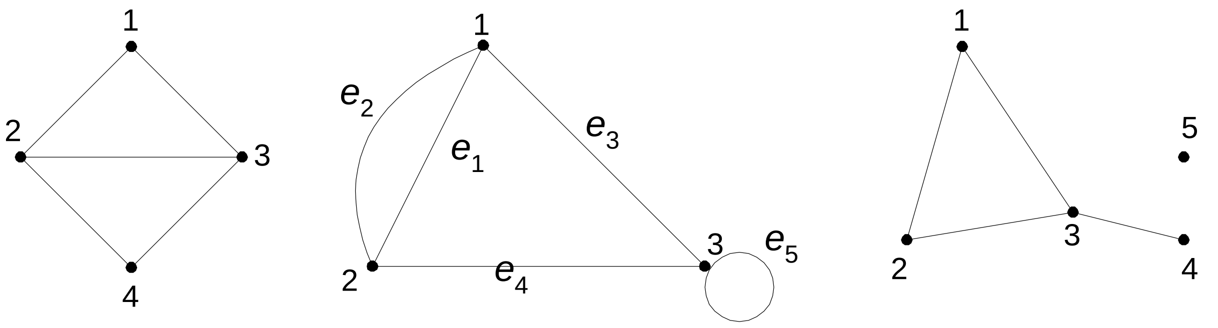
2. Bersisian (*Incidency*)

Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

- e bersisian dengan simpul v_j , atau
- e bersisian dengan simpul v_k

Tinjau graf G_1:

- sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,
- sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,
- tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.

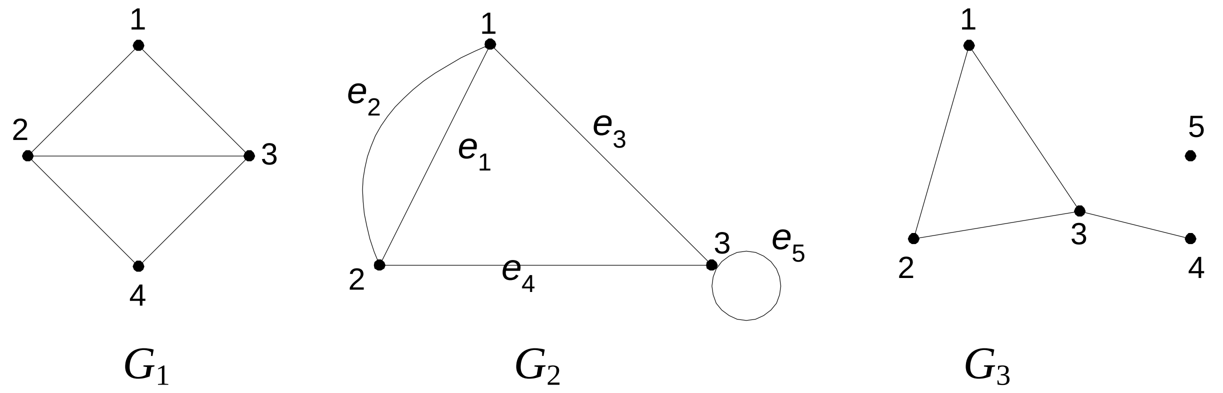


G_1 G_2 G_3

TERMINOLOGI GRAF

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

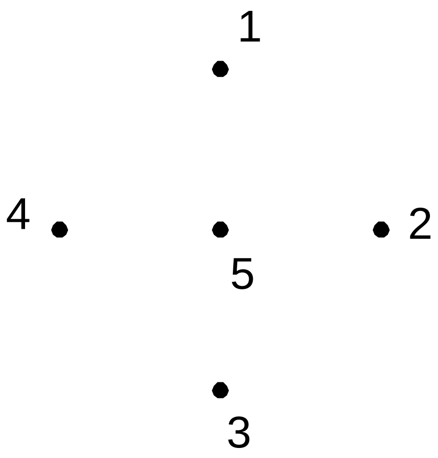
- *Simpul terpencil* ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.
- Tinjau graf G_3: simpul 5 adalah simpul terpencil.



TERMINOLOGI GRAF

4. Graf Kosong (*Null Graph* atau *empty graph*)

- *Graf* yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).
- *Contoh:*



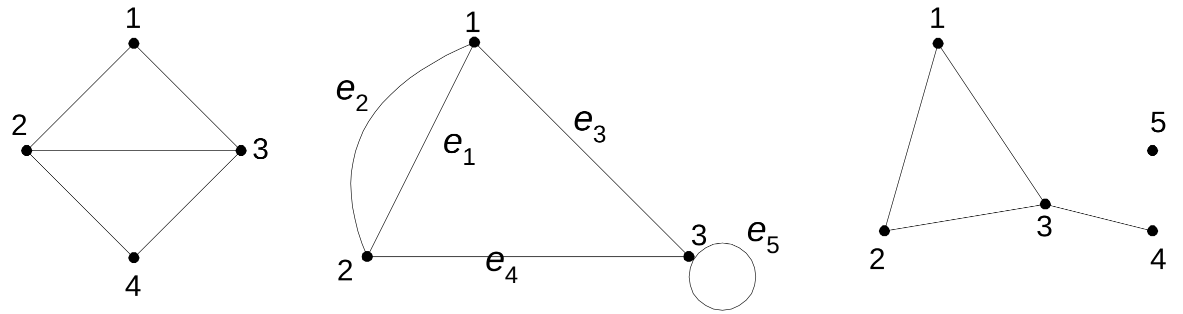
5. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
Notasi: $d(v)$

Tinjau graf G_1: $d(1) = d(4) = 2$
$d(2) = d(3) = 3$

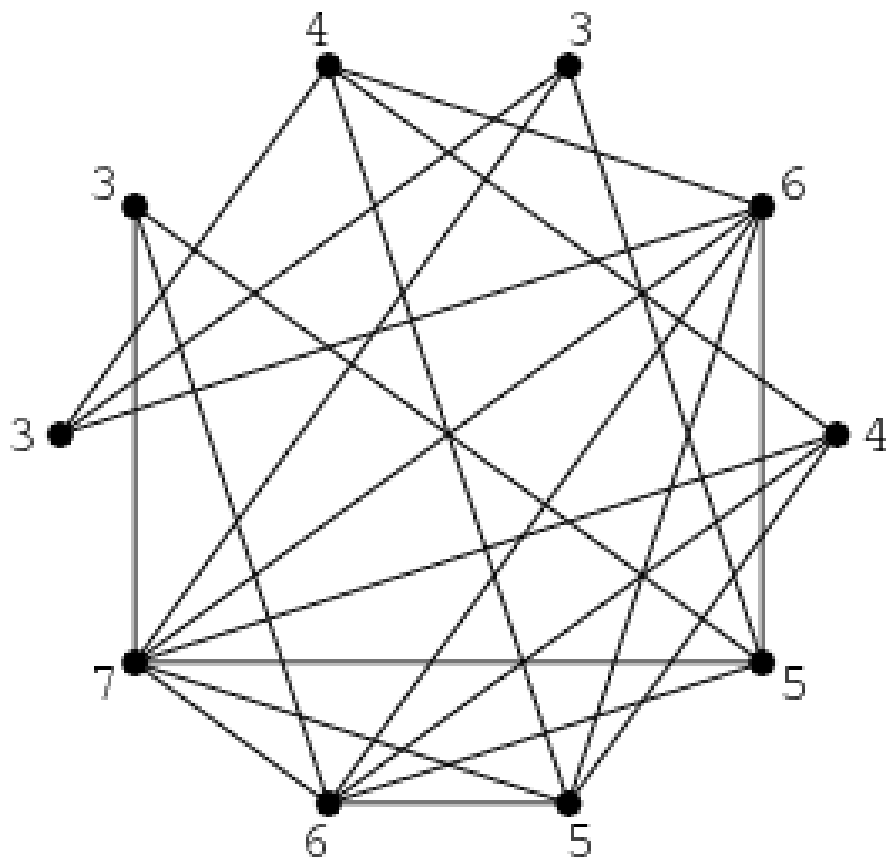
Tinjau graf G_3: $d(5) = 0$ → simpul terpencil
$d(4) = 1$ → simpul anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graf G_2: $d(1) = 3$ → bersisian dengan sisi ganda
$d(2) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)



G_1 G_2 G_3

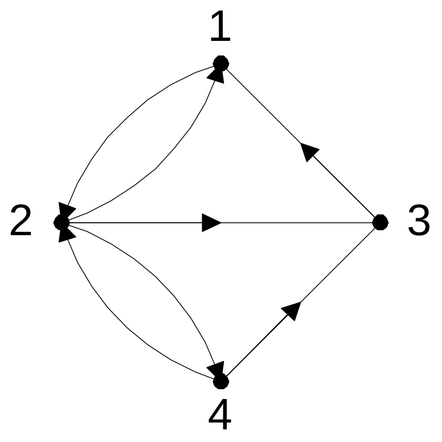
TERMINOLOGI GRAF



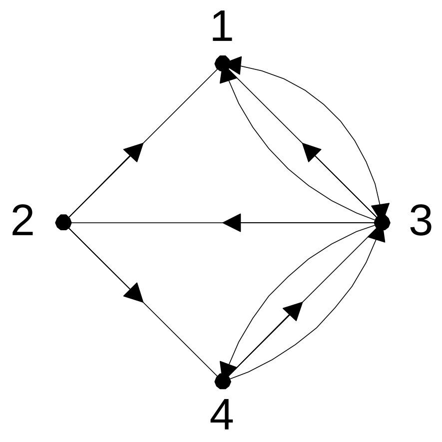
Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul

TERMINOLOGI GRAF

Pada graf beraarah, derajat simpul dibedakan lagi menjadi derajat masuk (in-degree) dan derajat keluar (out-degree)



G_4



G_5

Tinjau graf G_4:

$d_{\text{in}}(1) = 2;\ d_{\text{out}}(1) = 1$
$d_{\text{in}}(2) = 2;\ d_{\text{out}}(2) = 3$
$d_{\text{in}}(3) = 2;\ d_{\text{out}}(3) = 1$
$d_{\text{in}}(4) = 1;\ d_{\text{out}}(3) = 2$

Lema Jabat Tangan

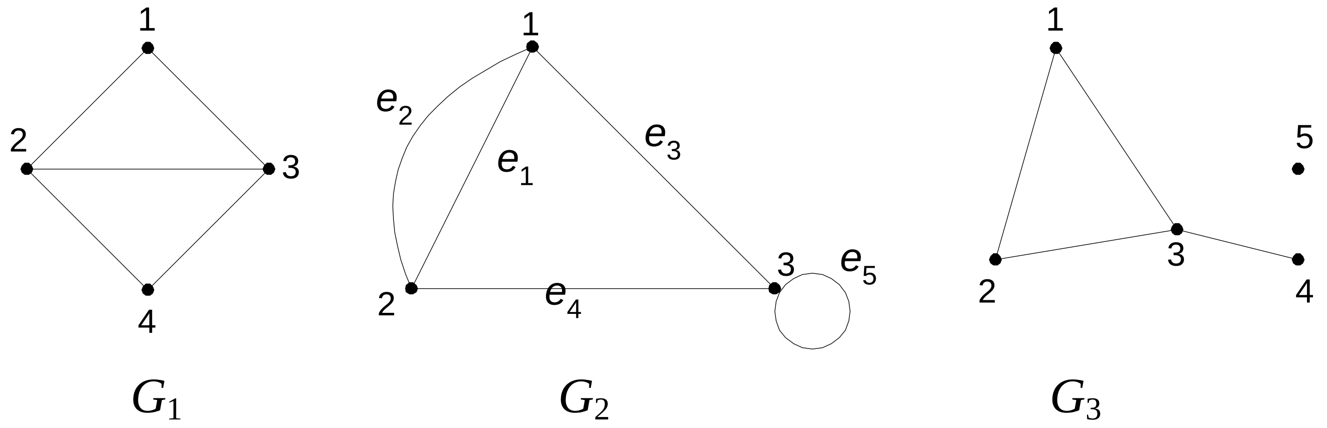
Lemma Jabat Tangan → Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Tinjau graf G_1: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

Tinjau graf G_2: $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

Tinjau graf G_3: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$
$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 4$



Lema Jabat Tangan

- Akibat dari *lemma* (*corollary*):

- **Teorema**: Untuk sembarang graf G, **banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap**.

Contoh 2. Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

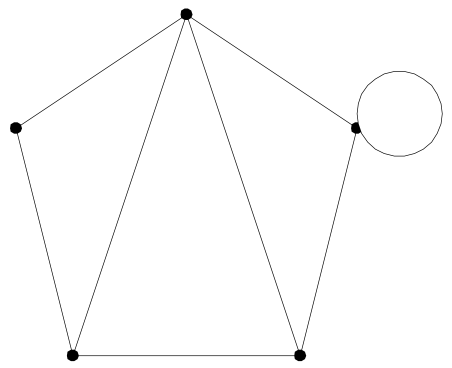
(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

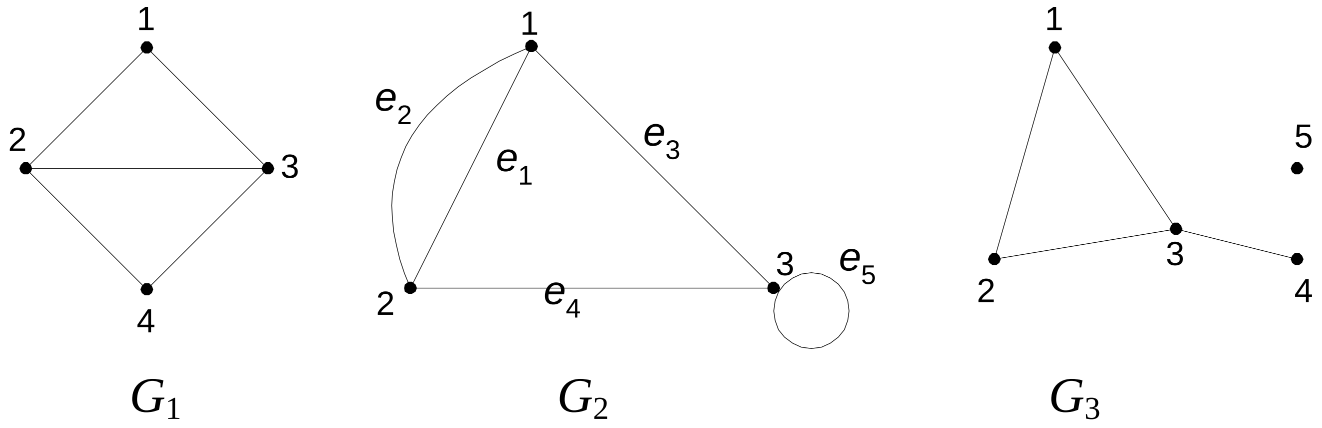
(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil (2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9).

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap (2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16).



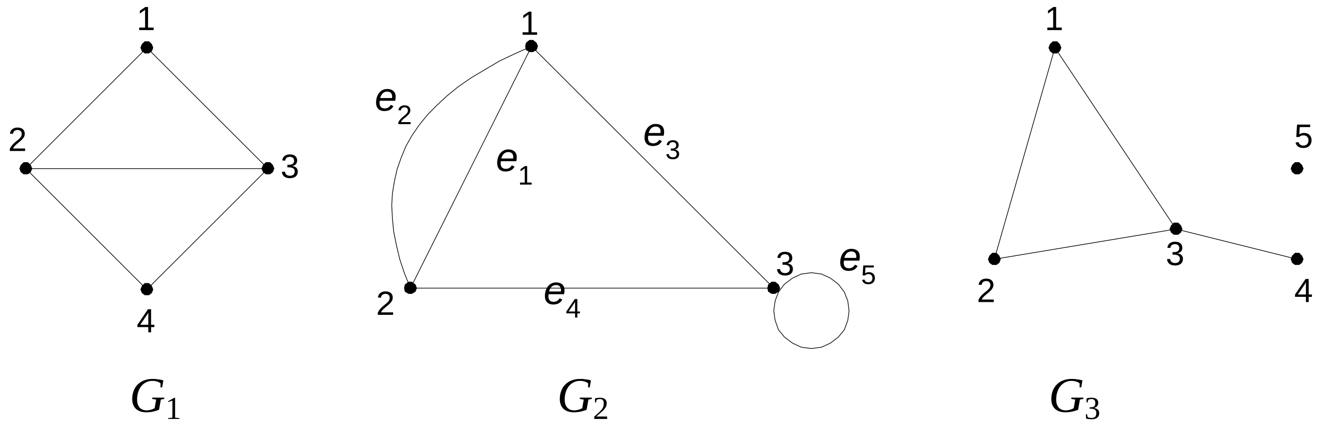
6. Lintasan (Path)

- **Lintasan** yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.
- Tinjau graf G_1: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3)
- **Panjang lintasan** adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.



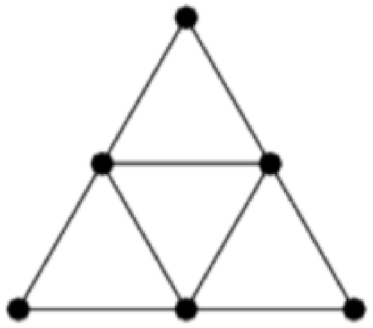
7. Siklus (Cycle) atau Sirkuit (*Circuit*)

- Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.
- Tinjau graf G_1: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.
- **Panjang sirkuit** adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.

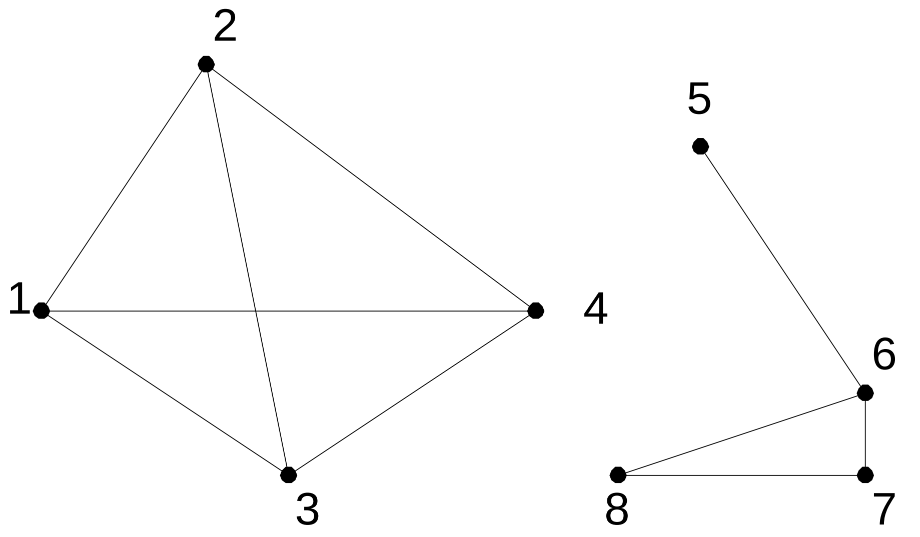


7. Terhubung (*Connected*)

- Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2.
- G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j.
- Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).
- Contoh graf tak-terhubung:



Contoh graf terhubung:

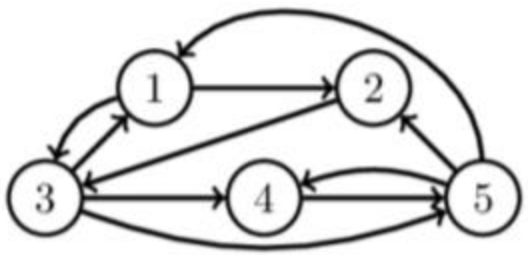


7. Terhubung (*Connected*)

- Graf berarah *G* dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari *G* diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

- Dua simpul, *u* dan *v*, pada graf berarah *G* disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari *u* ke *v* dan juga lintasan berarah dari *v* ke *u*.

- Jika *u* dan *v* tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka *u* dan *v* dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*).



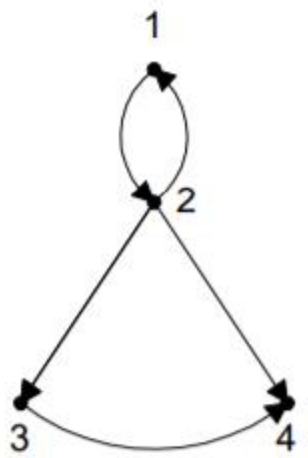
- Simpul 1 dan 4 terhubung kuat, karena ada lintasan dari 1 ke 4 dan lintasan dari 4 ke 1:

  Lintasan dari 1 ke 4: 1, 2, 3, 4

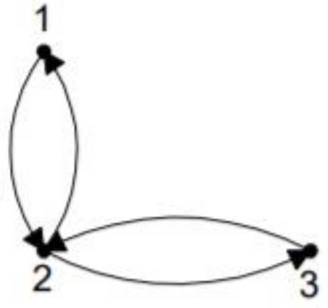
  Lintasan dari 4 ke 1: 4, 5, 1

7. Terhubung (*Connected*)

- Graf berarah G disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G, terhubung kuat. Kalau tidak, G disebut **graf terhubung lemah**.

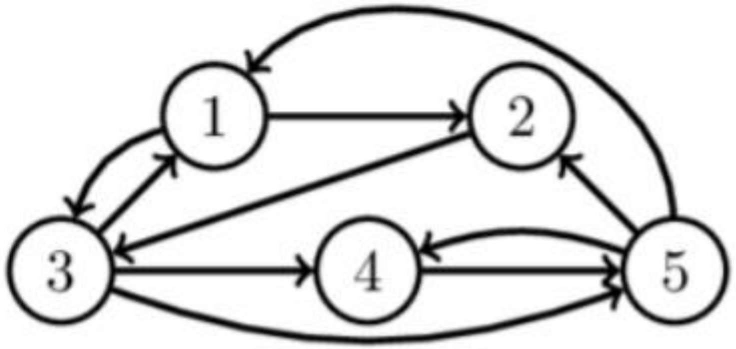


Graf berarah terhubung lemah



Graf berarah terhubung kuat

7. Terhubung (*Connected*)

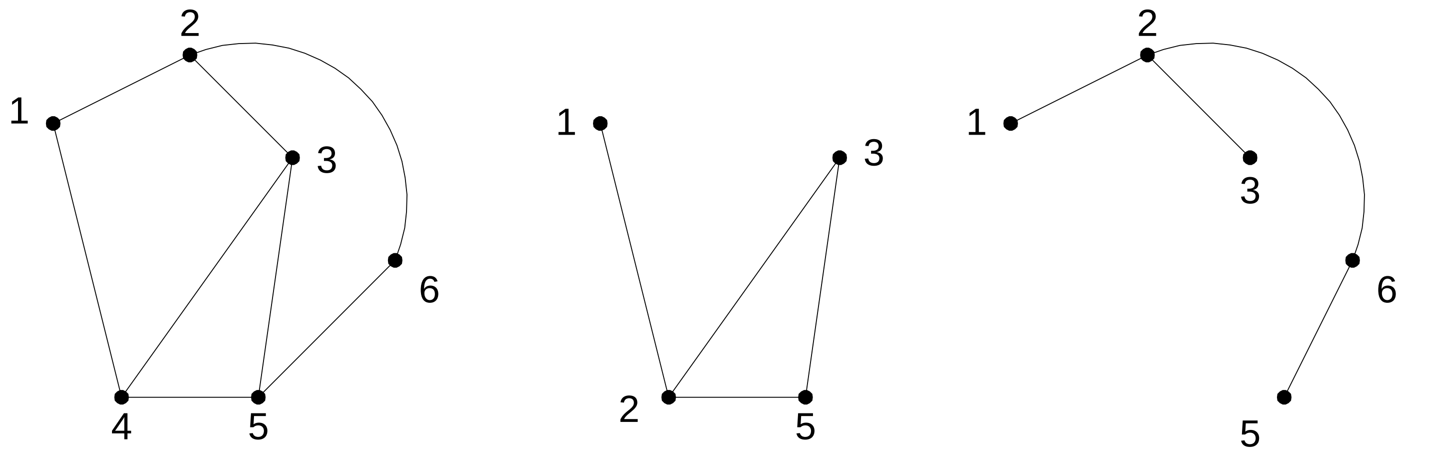


Graf berarah terhubung kuat: selalu ada lintasan dari sepasang simpul manapun.
Periksa!

8. Upagraf (*subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

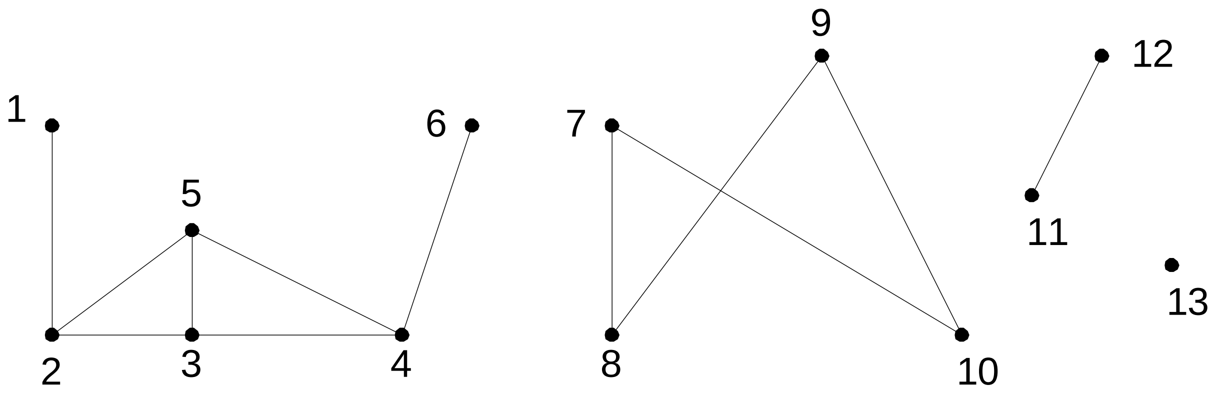


(a) Graf G_1 (b) Sebuah upagraf (c) komplemen dari upagraf (b)

8. Upagraf (*subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Komponen graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf *G*.

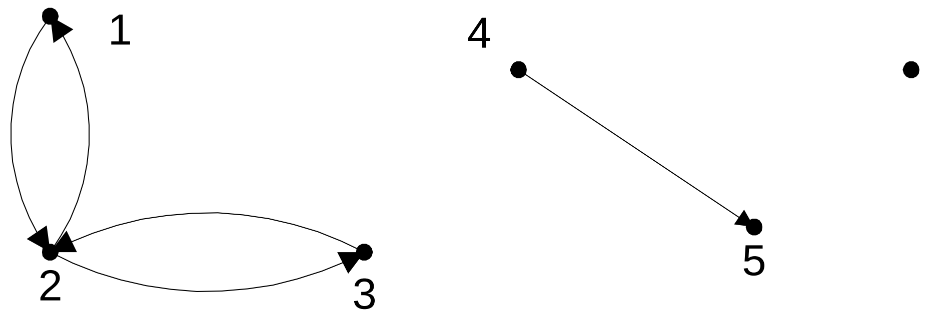
Graf *G* di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



8. Upagraf (*subgraph*) dan Komplemen Upagraf

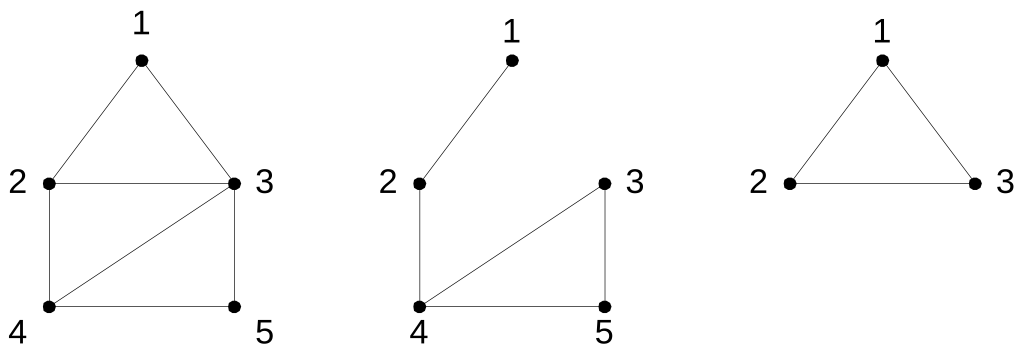
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:



9. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).



(a) graf G, (b) upagraf rentang dari G, (c) bukan upagraf rentang dari G

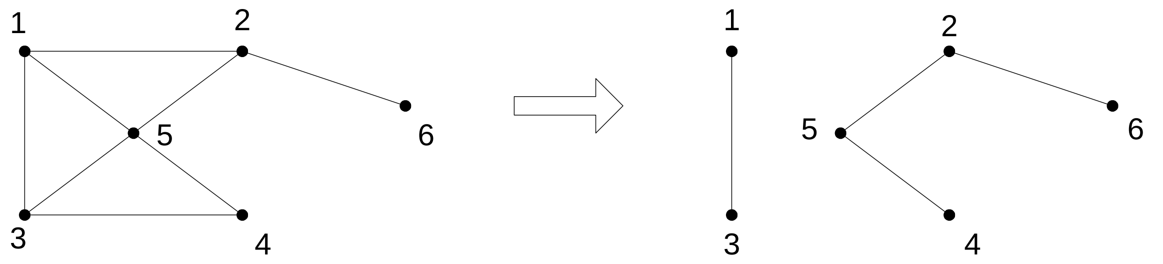
10. Cut-Set

Cut-set dari graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set*,

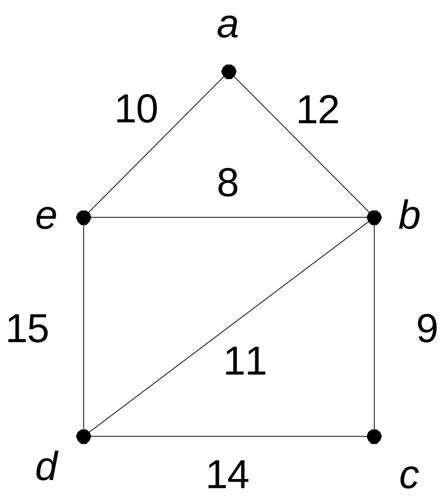
tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.



(a) (b)

8. Graf Berbobot (Weighted Graph)

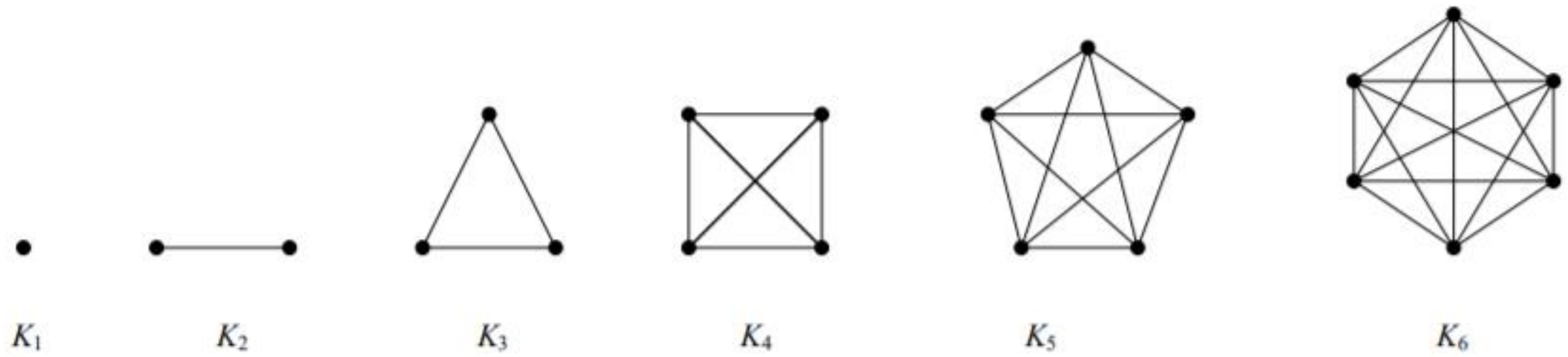
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



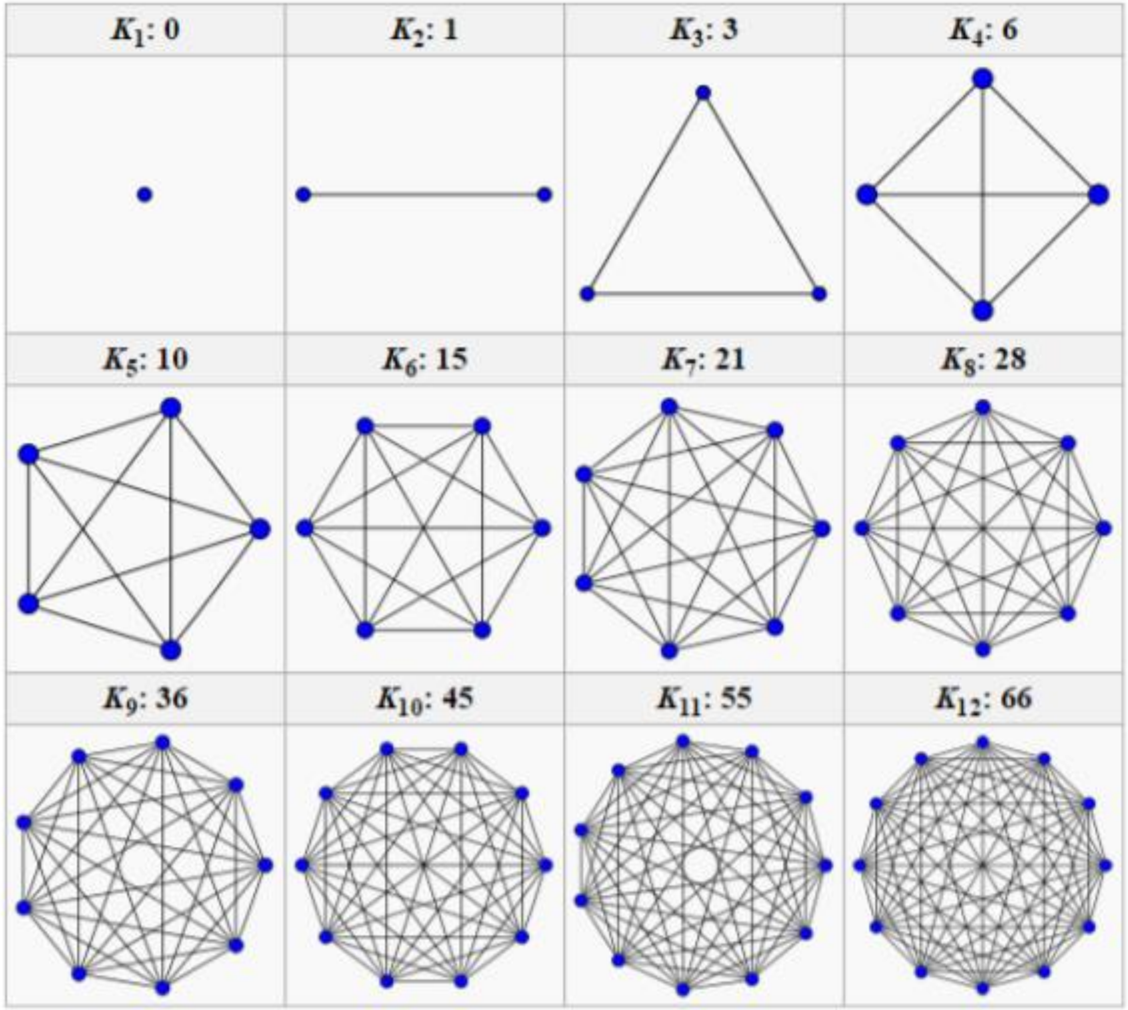
Beberapa Graf Khusus

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan *n* buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari *n* buah simpul adalah $n(n-1)/2$.

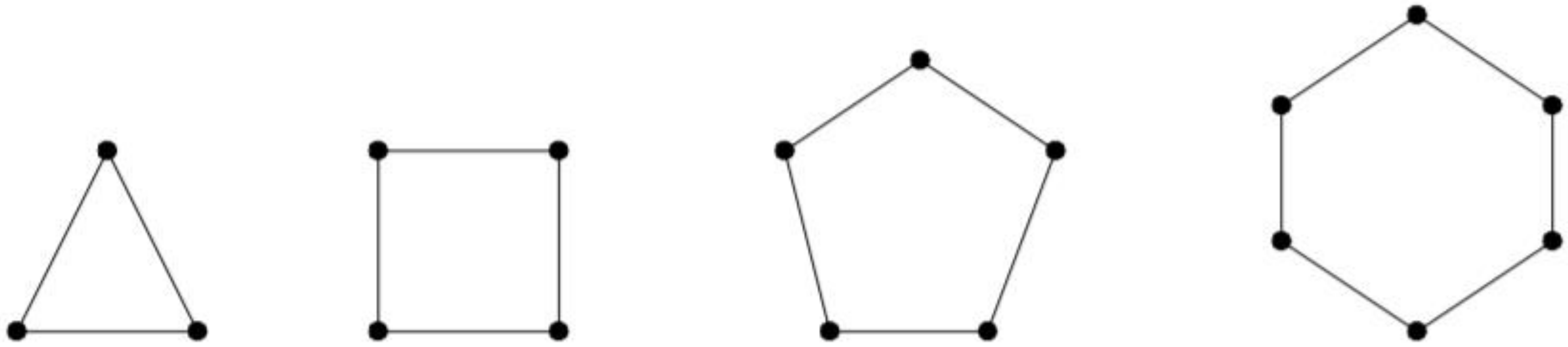


Jumlah sisi di dalam graf lengkap



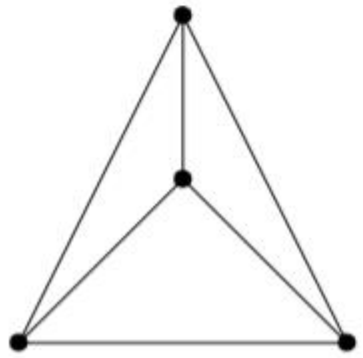
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan *n* simpul dilambangkan dengan C_n.

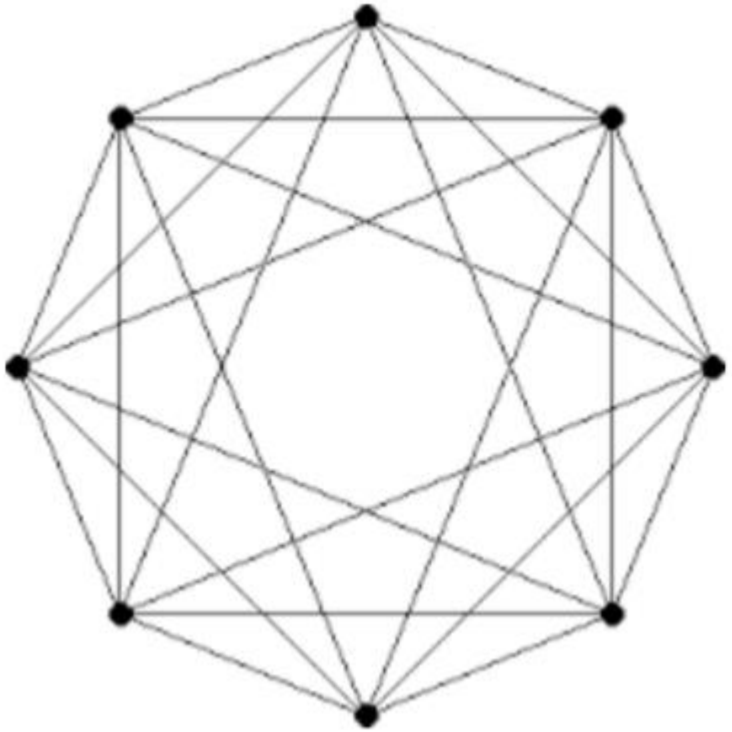


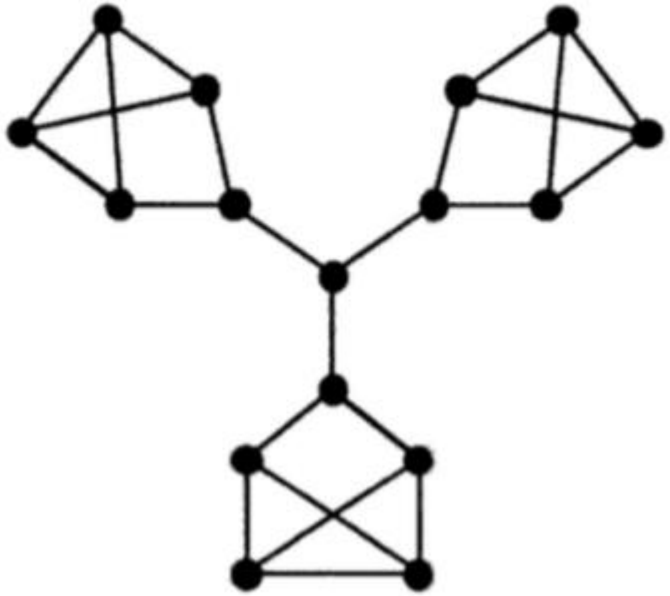
c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah *r*, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat *r*. Jumlah sisi pada graf teratur adalah *nr*/2.

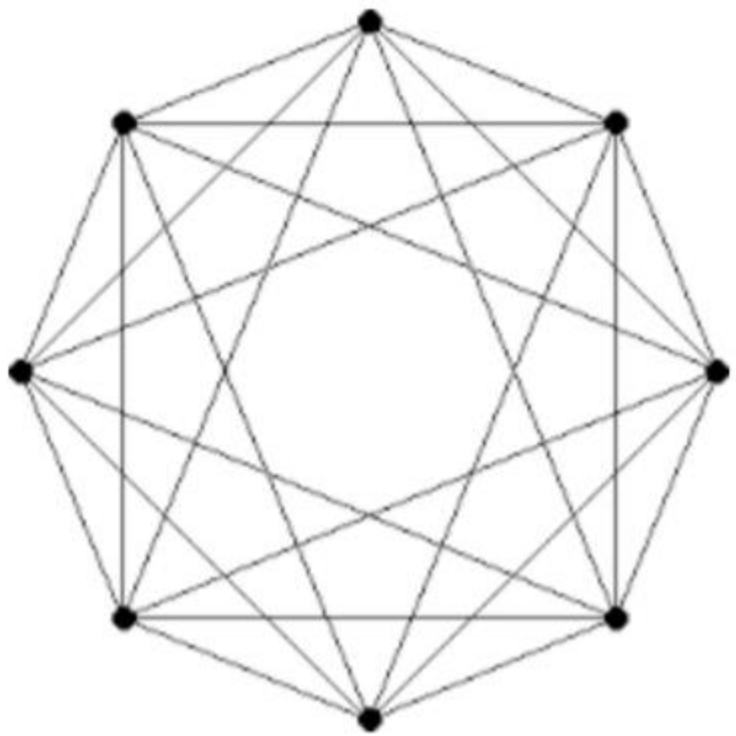


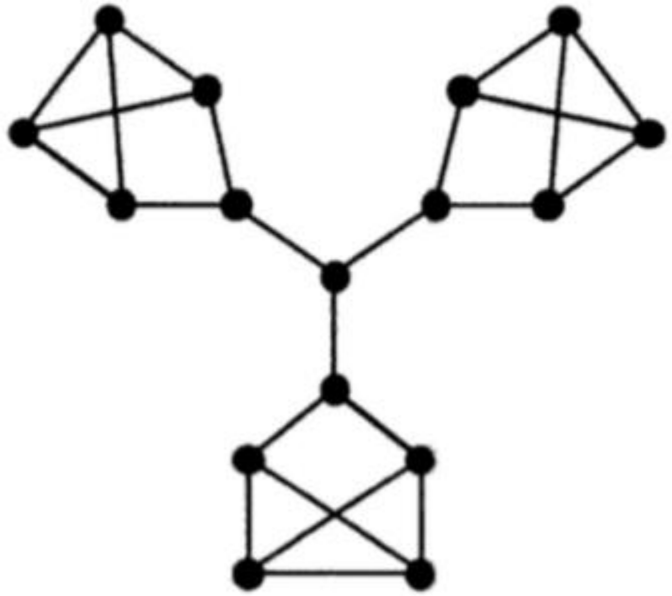
Contoh-fontoh graf teratur lainnya:





Contoh-fontoh graf teratur lainnya:





Latihan

Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat ≥ 4 ?

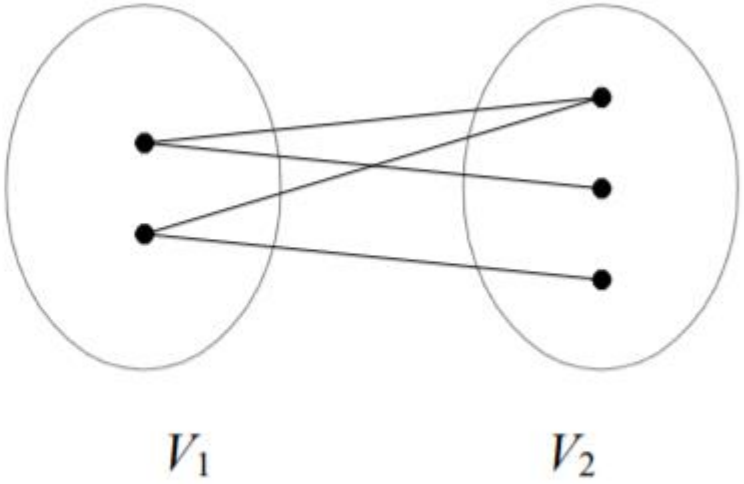
Jawaban

- Tiap simpul berderajat sama -> graf teratur.
- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah e = nr/2.
  Jadi, n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r.
- Untuk r = 4, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu n = 32/4 = 8.
- Untuk r yang lain (r > 4 dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):
  r = 8 -> n = 32/8 = 4 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.
  r = 16 -> n = 32/16 = 2 -> tidak mungkin membuat graf sederhana.

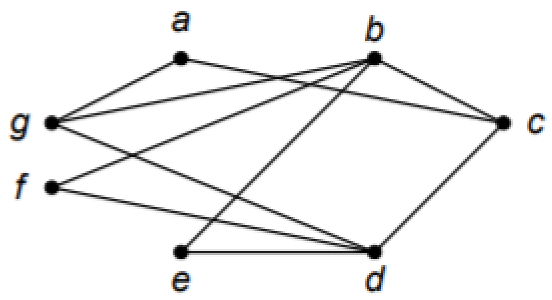
- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

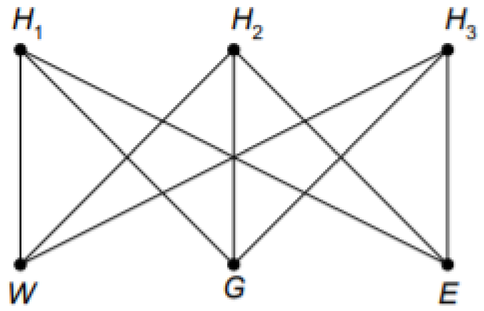
Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.



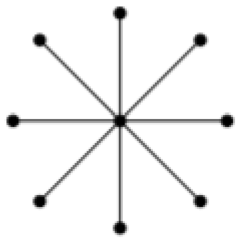
- Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$



- Contoh graf bipartit lainnya:

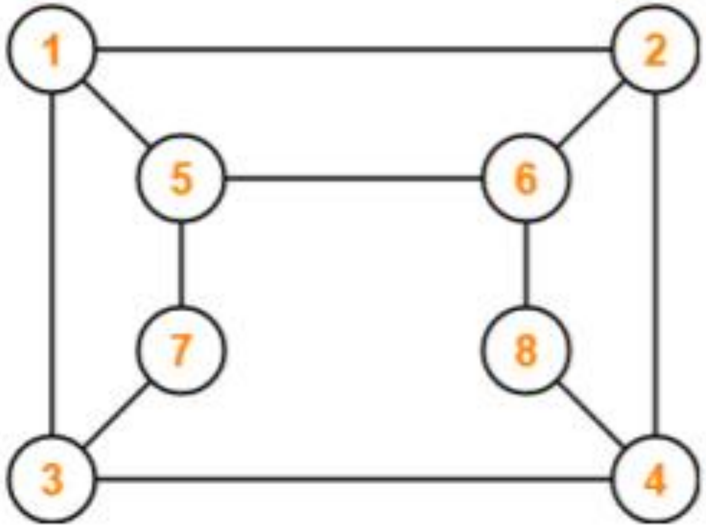


V_1 = {H1, H2, H3} dan V_2 = {W, G, E}

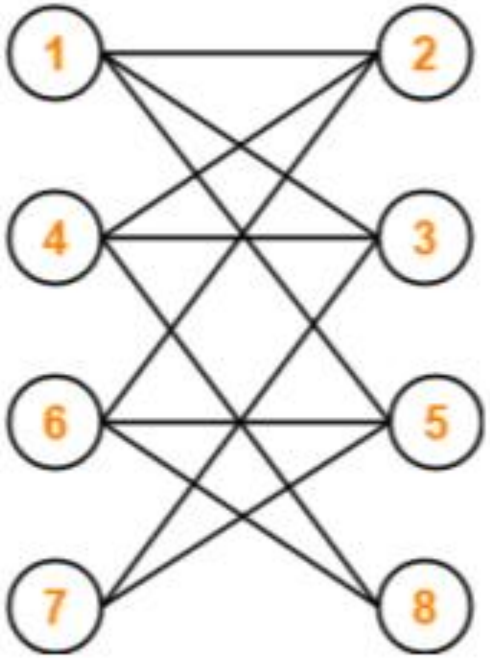


V_1 = {simpul di tengah} dan V_2 = {simpul2 lainnya}

Apakah ini graf bipartit?



Ya, dapat digambar ulang menjadi



$V_1 = \{1, 4, 6, 7\}$ dan $V_2 = \{2, 3, 5, 8\}$

Representasi Graf

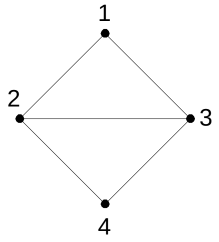
1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

$A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

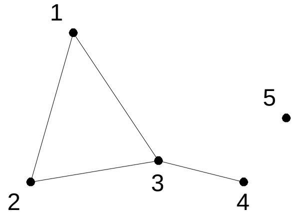
Representasi Graf

Contoh:



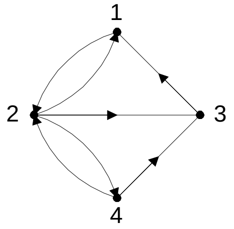
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

(a)



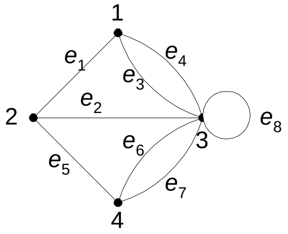
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4&5\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

(b)



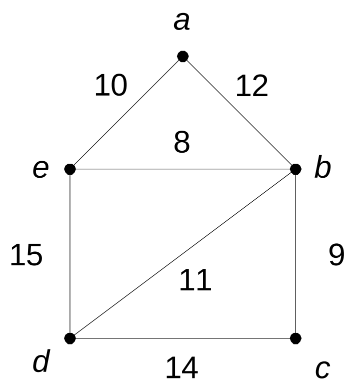
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

(c)



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4\end{matrix}\\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&2&0\\1&0&1&1\\2&1&1&2\\0&1&2&0\end{bmatrix}\end{array}$$

Representasi Graf



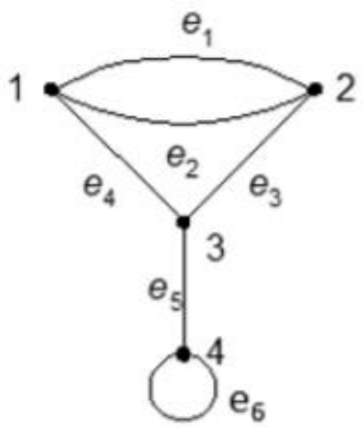
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\
12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\
\infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\
\infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\
10 & 8 & \infty & 15 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Representasi Graf

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

$A = [a_{ij}]$,

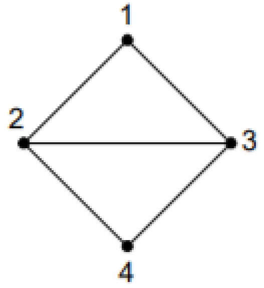
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

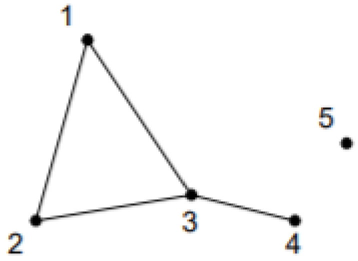
Representasi Graf

3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)



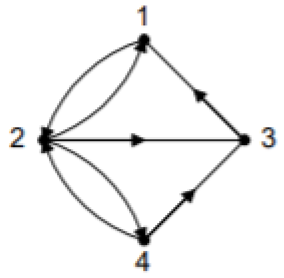
Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)



Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)



Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

(c)

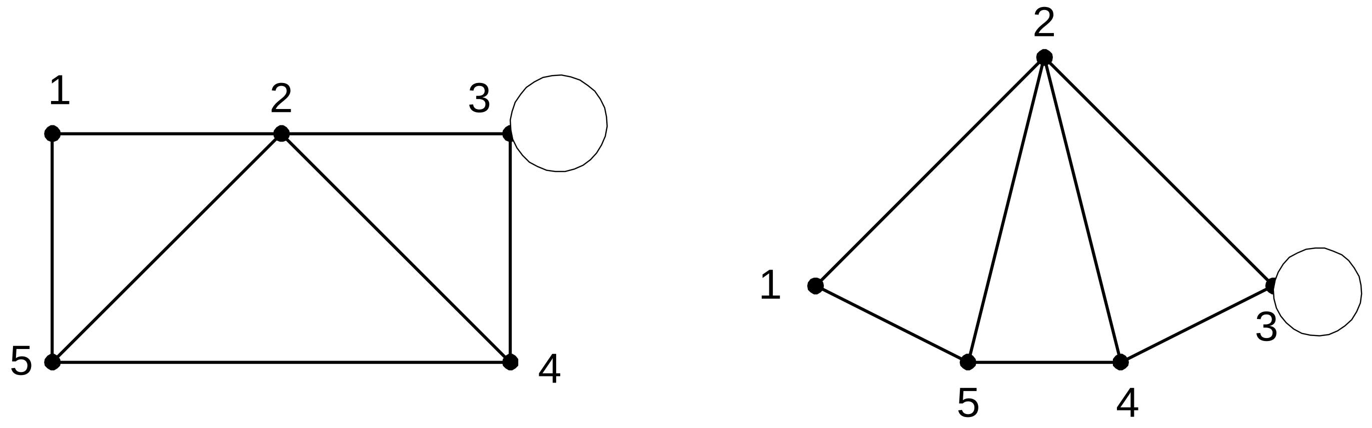
Graf Isomorfik

Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah. Gambarkan dua buah graf yang yang bersesuaian dengan matriks tersebut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Graf Isomorfik

Jawaban:



Dua buah graf yang sama (hanya penggambaran secara geometri berbeda) → **isomorfik**!

Graf Isomorfik

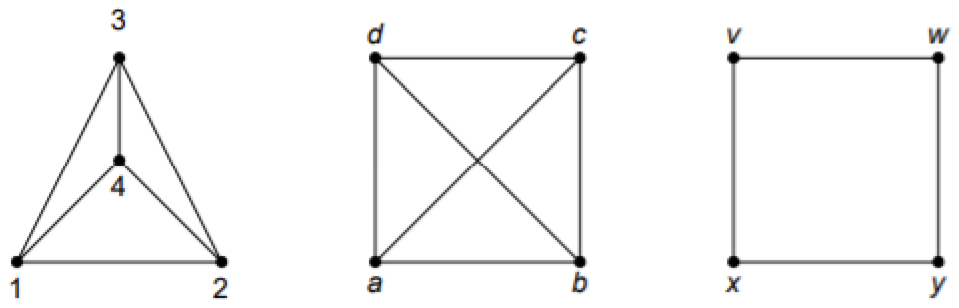
- Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik**.

- Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat **korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduaya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.**

- Dengan kata lain, misalkan sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 harus bersisian dengan simpul u' dan v' yang di G_2.

- **Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda**. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.

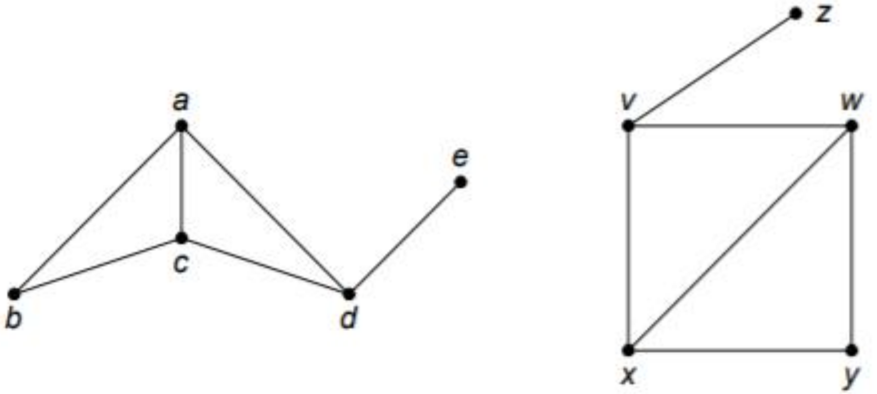
Graf Isomorfik



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

Gambar G_1 isomorfik dengan G_2, tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3

Graf Isomorfik



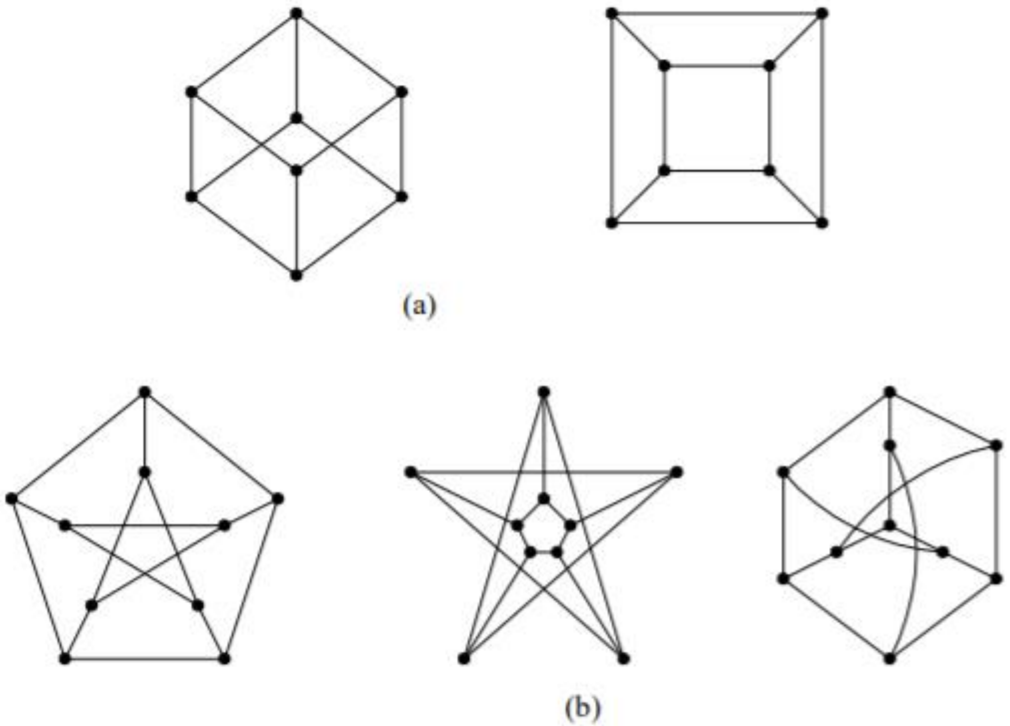
(a) G_1 (b) G_2

Gambar Graf (a) dan graf (b) isomorfik [DEO74]

$$A_{G1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_{G2} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Graf Isomorfik



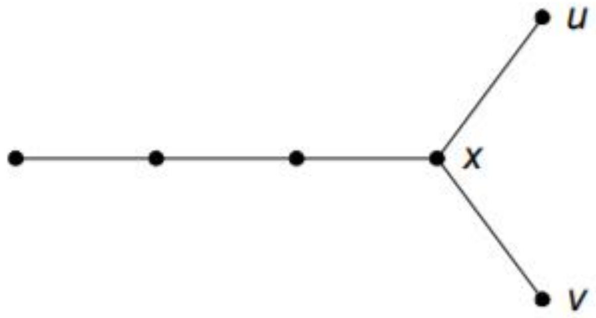
Gambar (a) Dua buah graf isomorfik, (b) tiga buah graf isomorfik

Graf Isomorfik

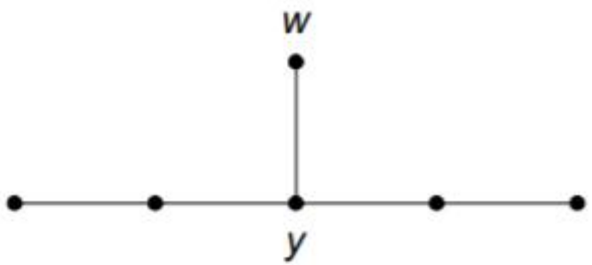
Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut:

1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan.



Simpul x bertetangga dengan u dan v yang masing-masing berderajat 1



Simpul y bertetangga dengan hanya satu simpul berderajat 1

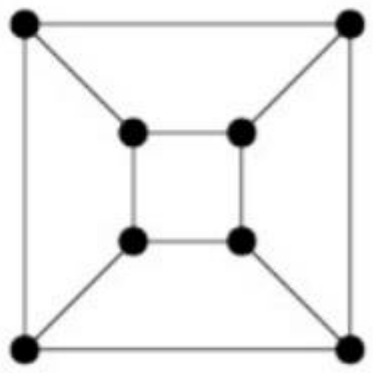
Kesimpulan: kedua graf tidak isomorfik

Latihan

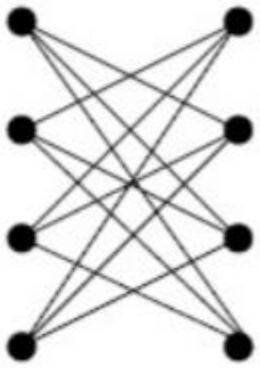
- Gambarkan 2 buah graf yang isomorfik dengan graf teratur berderajat 3 yang mempunyai 8 buah simpul

Latihan

- Jawaban: (Contoh dua kemungkinan gambar grafnya)



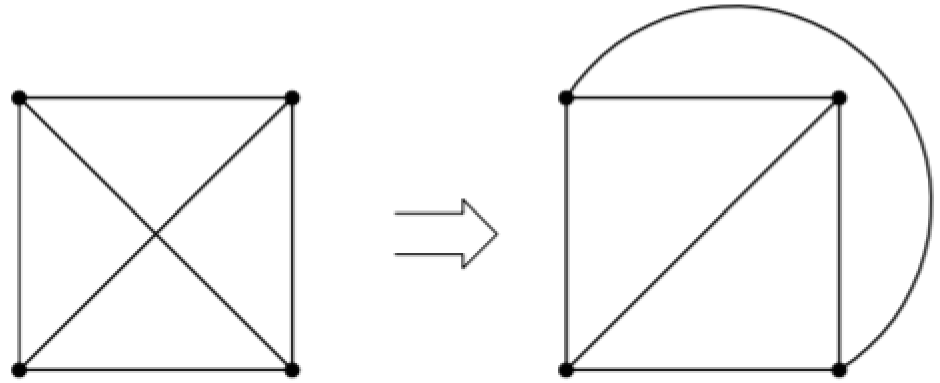
G_1



G_2

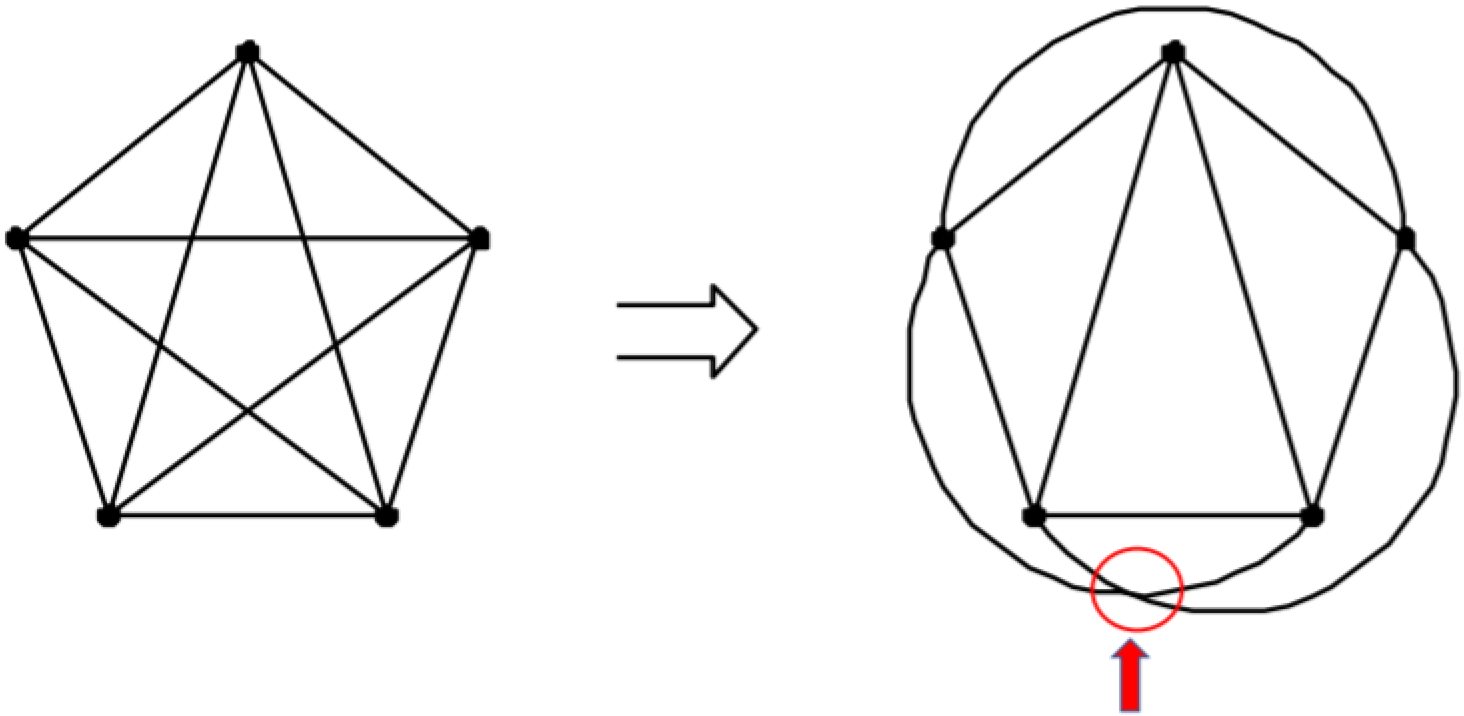
Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)

- Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan) disebut graf planar,
- Jika tidak, maka ia disebut graf tak-planar
- Contoh: K4 di bawah ini adalah graf planar



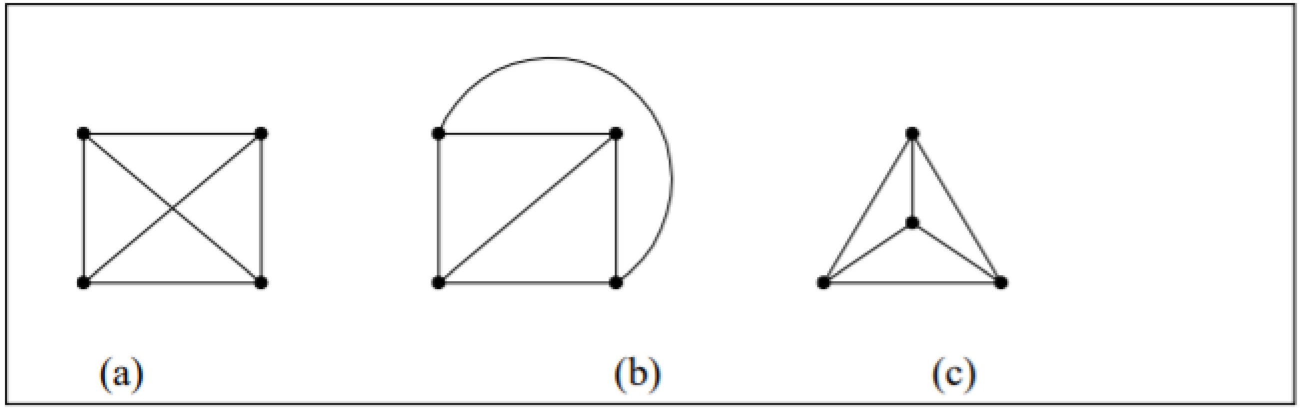
Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)

K_5 adalah graf tidak planar



Graf Planar (Planar Graph) dan Graf Bidang (Plane Graph)

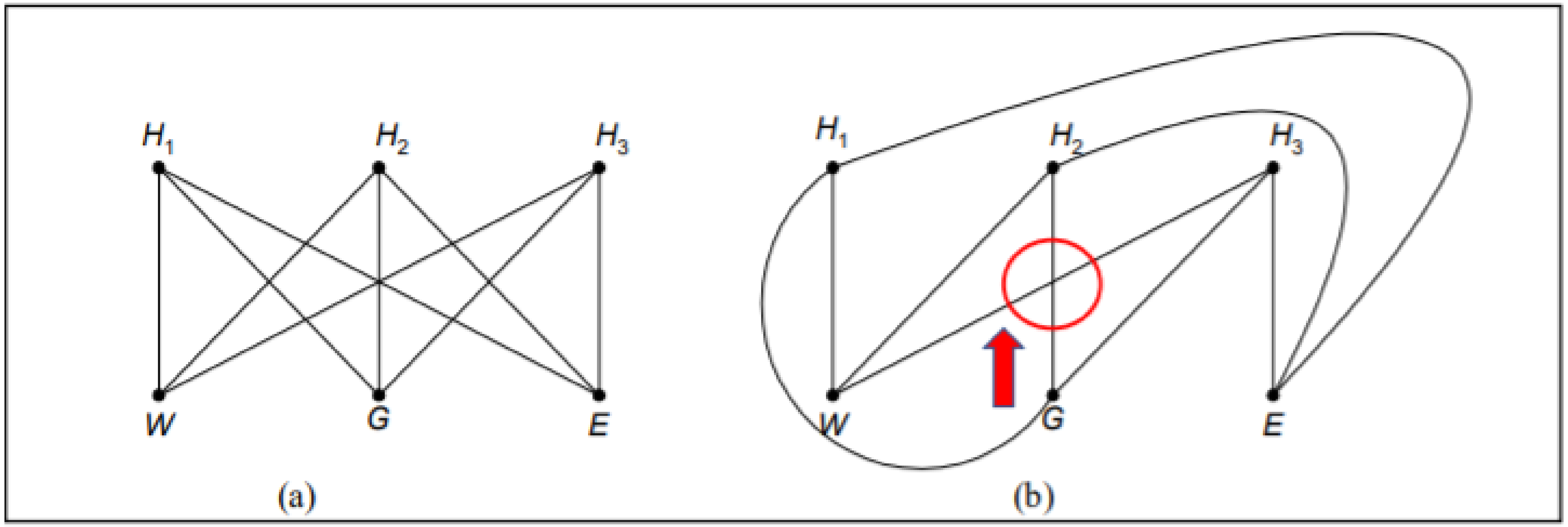
Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang (plane graph).



Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

Aplikasi Graf Planar

Persoalan utilitas (*utility problem)*



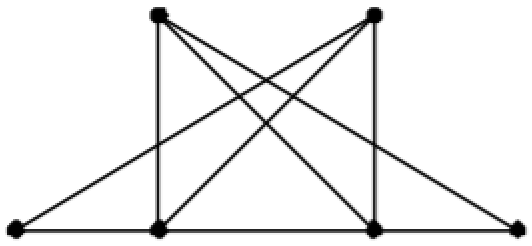
(a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

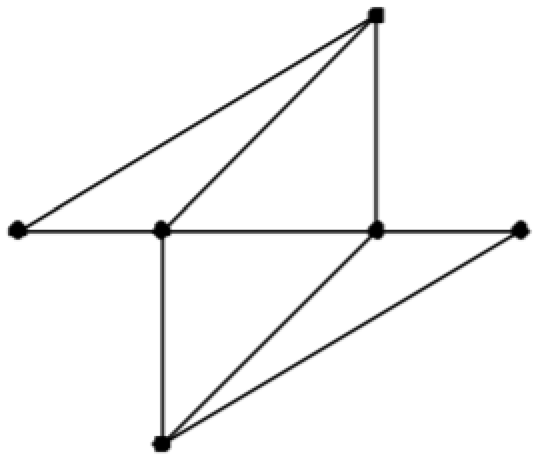
Aplikasi Graf Planar

- Perancangan IC (Integrated Circuit)
- Tidak boleh ada kawat-kawat di dalam IC-board yang saling bersilangan → dapat menimbulkan interferensi arus listrik → malfunction
- Perancangan kawat memenuhi prinsip graf planar

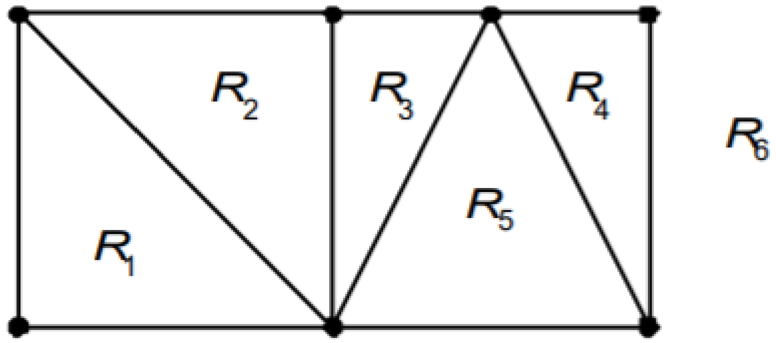
Latihan

- Gambarkan graf (kiri) di bawah ini sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan (menjadi graf bidang). (Solusi: graf kanan)



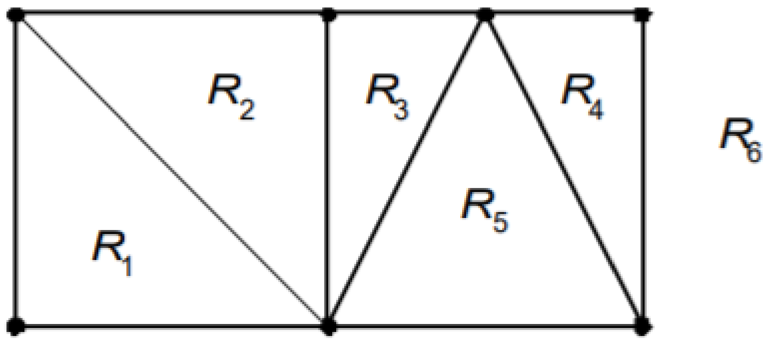


- Sisi-sisi pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah (region) atau muka (face).
- Graf bidang pada gambar di bawah initerdiri atas 6 wilayah (termasuk wilayah terluar):



- Hubungan antara jumlah simpul (n), jumlah sisi (e), dan jumlah wilayah (f) pada graf bidang:

$$n - e + f = 2 \quad \text{(Rumus Euler)}$$



- Pada Gambar di atas, e = 11 dan n = 7, f = 6, maka 7 – 11 + 6 = 2

Latihan

- Misalkan graf sederhana planar memiliki 24 buah simpul, masingmasing simpul berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk?

Jawaban

- Diketahui n = jumlah simpul = 24, maka jumlah derajat seluruh simpul = 24 x 4 = 96.
- Menurut lemma jabat tangan,
  - jumlah derajat = 2 x jumlah sisi,
- sehingga
  - jumlah sisi = e = jumlah derajat/2 = 96/2 = 48
- Dari rumus Euler, n – e + f = 2, sehingga f = 2 – n + e = 2 – 24 + 48 = 26 buah.

- Pada graf planar sederhana terhubung dengan f buah wilayah, n buah simpul, dan e buah sisi ($e > 2$) selalu berlaku:

$$e \leq 3n - 6$$

- Ketidaksamaan yang terakhir dinamakan **ketidaksamaan Euler**,

- Ketidaksamaan ini dapat digunakan untuk menunjukkan keplanaran suatu graf sederhana

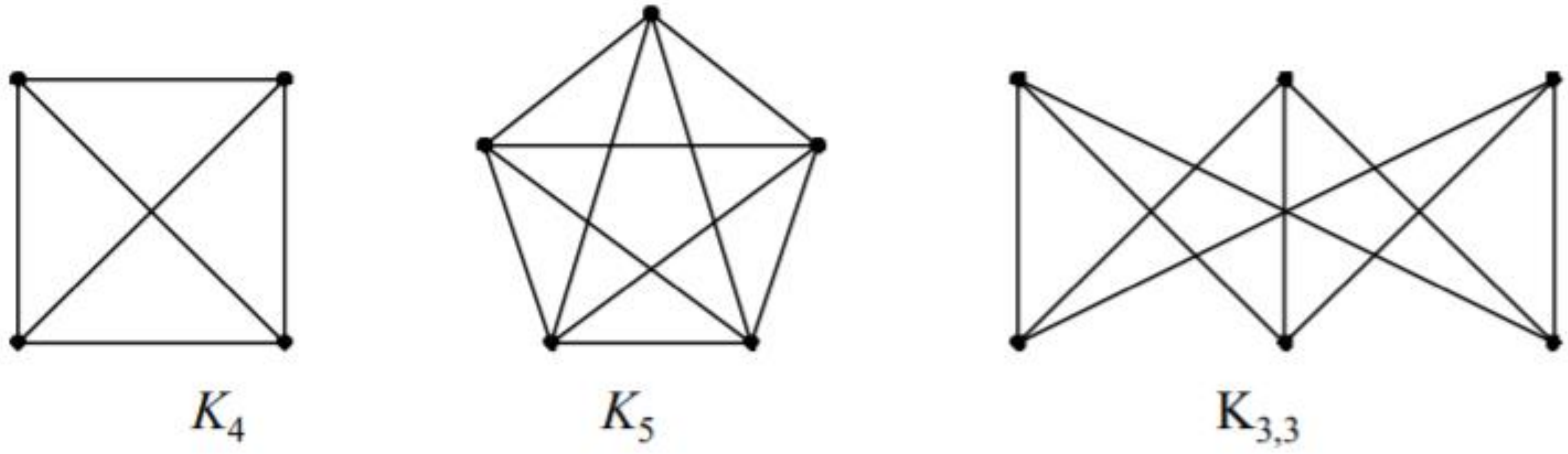
- Jika sebuah graf planar, maka ia memenuhi ketidaksamaan Euler, sebaliknya jika tidak planar maka ketidaksamaan tersebut tidak dipenuhi.

- Contoh: Pada K_4, n = 4, e = 6, memenuhi ketidaksamaan Euler, sebab

$6 \le 3(4) - 6$. Jadi, K_4 adalah graf planar.

Pada graf K_5, $n = 5$ dan e = 10, tidak memenuhi ketidaksamaan Euler sebab

$10 \ge 3(5) - 6$. Jadi, K_5 tidak planar



Ketidaksamaan $e \leq 3n - 6$ tidak berlaku untuk $K_{3,3}$ karena

$$e = 9, n = 6$$

$$9 \leq (3)(6) - 6 = 12 \text{ (jadi, } e \leq 3n - 6)$$

padahal graf $K_{3,3}$ bukan graf planar!

Buat asumsi baru: setiap daerah pada graf planar dibatasi oleh paling sedikit empat buah sisi,

Dari penurunan rumus diperoleh

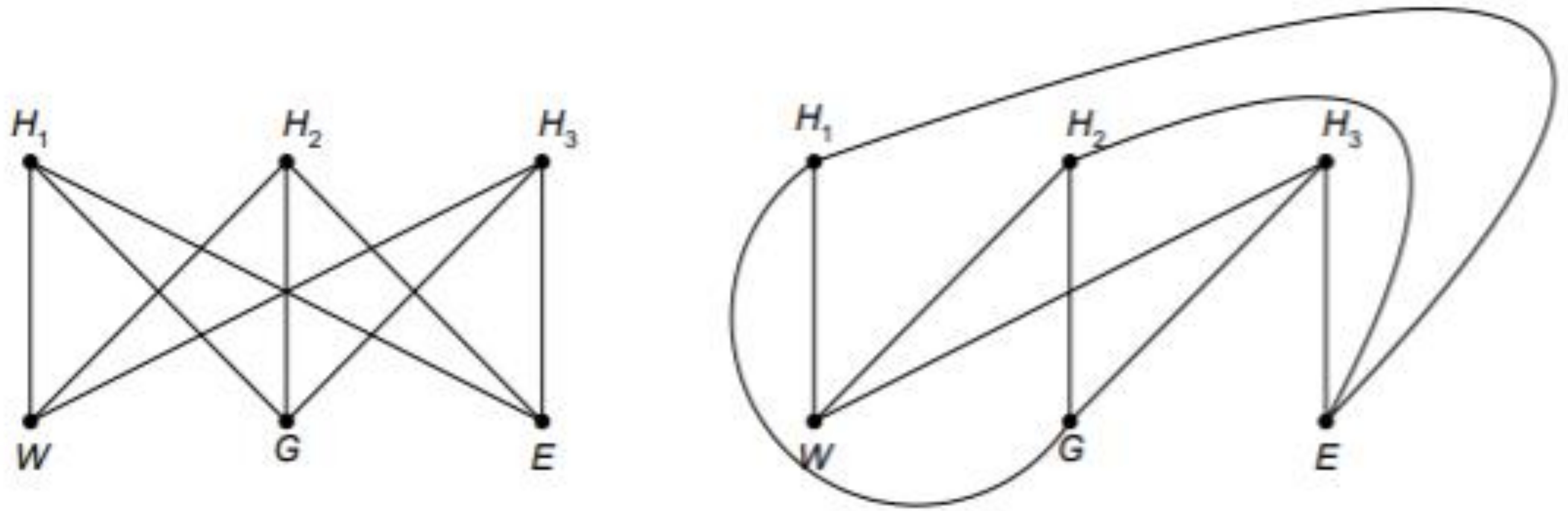
$$e \leq 2n - 4$$

Contoh Graf $K_{3,3}$ pada Gambar di bawah memenuhi ketidaksamaan $e \le 2n - 4$, karena

$e = 9$, $n = 6$

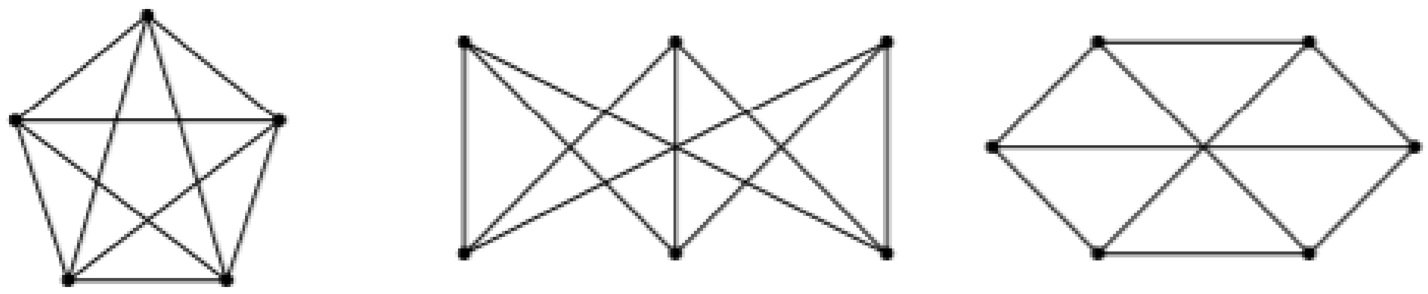
$9 \le (2)(6) - 4 = 8$ (salah)

yang berarti $K_{3,3}$ bukan graf planar.



Teorema Kuratowski

- Berguna untuk menentukan dengan tegas keplanaran suatu graf.



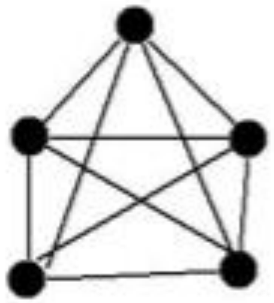
(a) (b) (c)

Gambar (a) Graf Kuratowski pertama (K_5)
(b) Graf Kuratowski kedua ($K_{3,3}$)
(c) Graf yang isomorfik dengan graf Kuratowski kedua

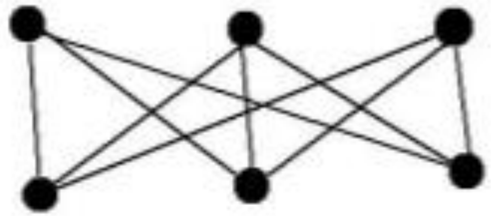
Teorema Kuratowski

Kazimierz Kuratowski (February 2, 1896 – June 18, 1980) was a Polish mathematician and logician. He was one of the leading representatives of the Warsaw School of Mathematics. (Sumber: Wikipedia)

Teorema Kuratowski



G1

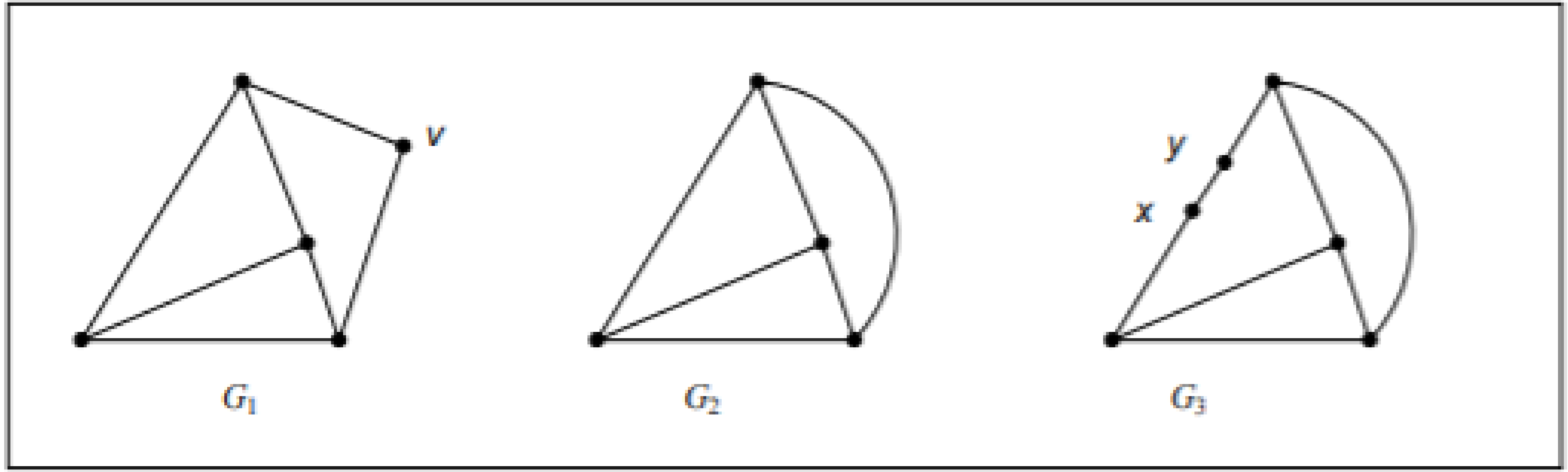


G2

Sifat graf Kuratowski adalah:

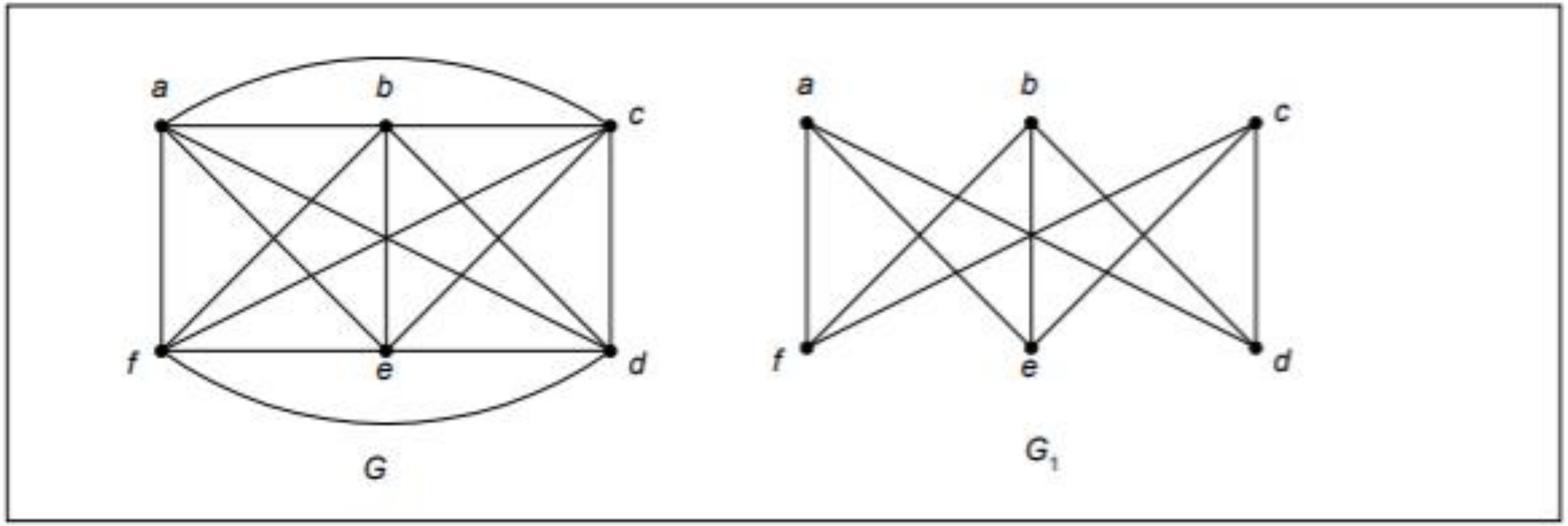
1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

TEOREMA Kuratowski. Graf *G* bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.



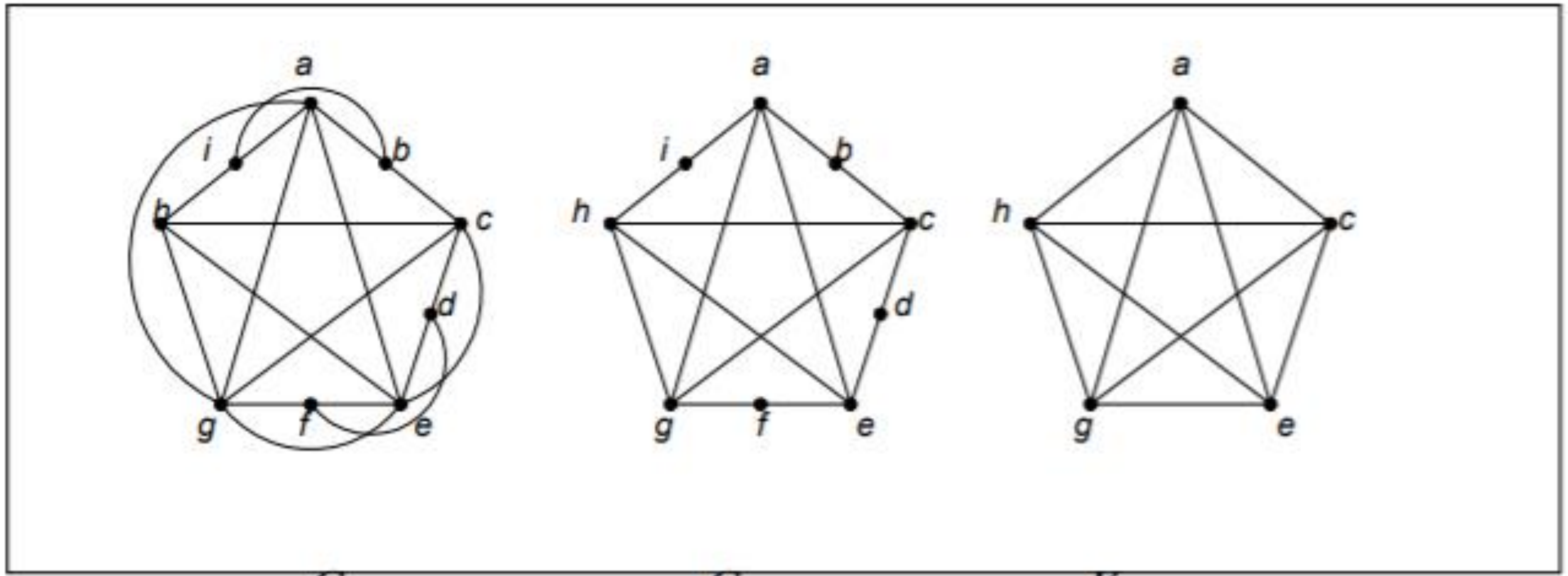
Gambar Tiga buah graf yang homemorfik satu sama lain.

Contoh: Kita gunakan Teorema Kuratowski untuk memeriksa keplanaran graf. Graf G di bawah ini bukan graf planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang sama dengan $K_{3,3}$.



Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf yang sama dengan $K_{3,3}$.

Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang homeomorfik dengan K_5 (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari G_1, diperoleh K_5).

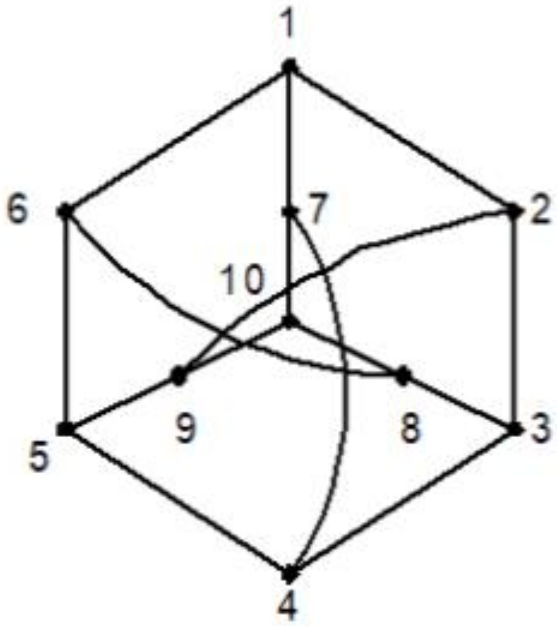


G G_1 K_5

Gambar Graf G, upagraf G_1 dari G yang homeomorfik dengan K_5.

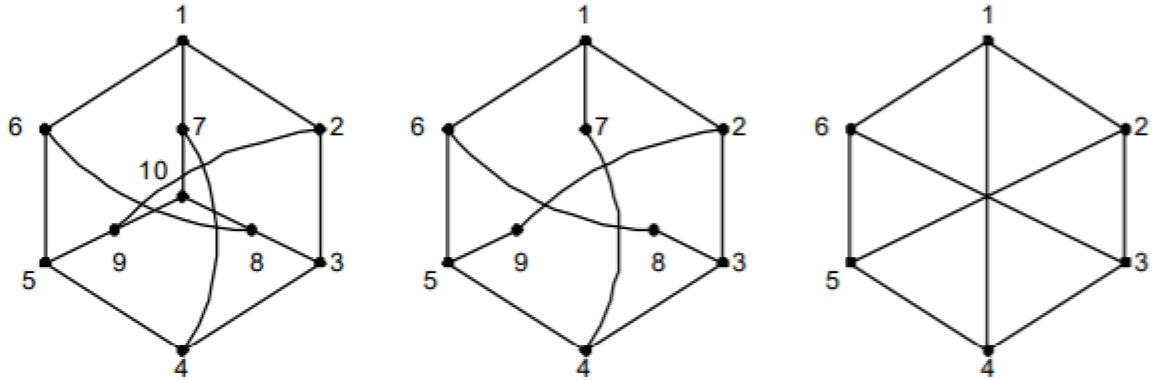
Latihan

- Perlihatkan dengan teorema Kuratowski bahwa graf Petersen tidak planar

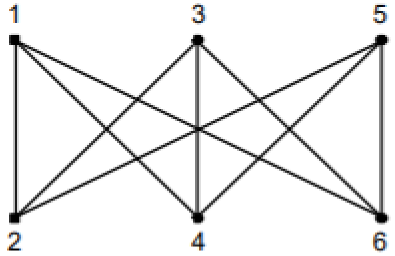


Graf Petersen, G

Jawaban



(a) Graf Petersen, G (b) G_1 (c) G_2



(d) $K_{3,3}$

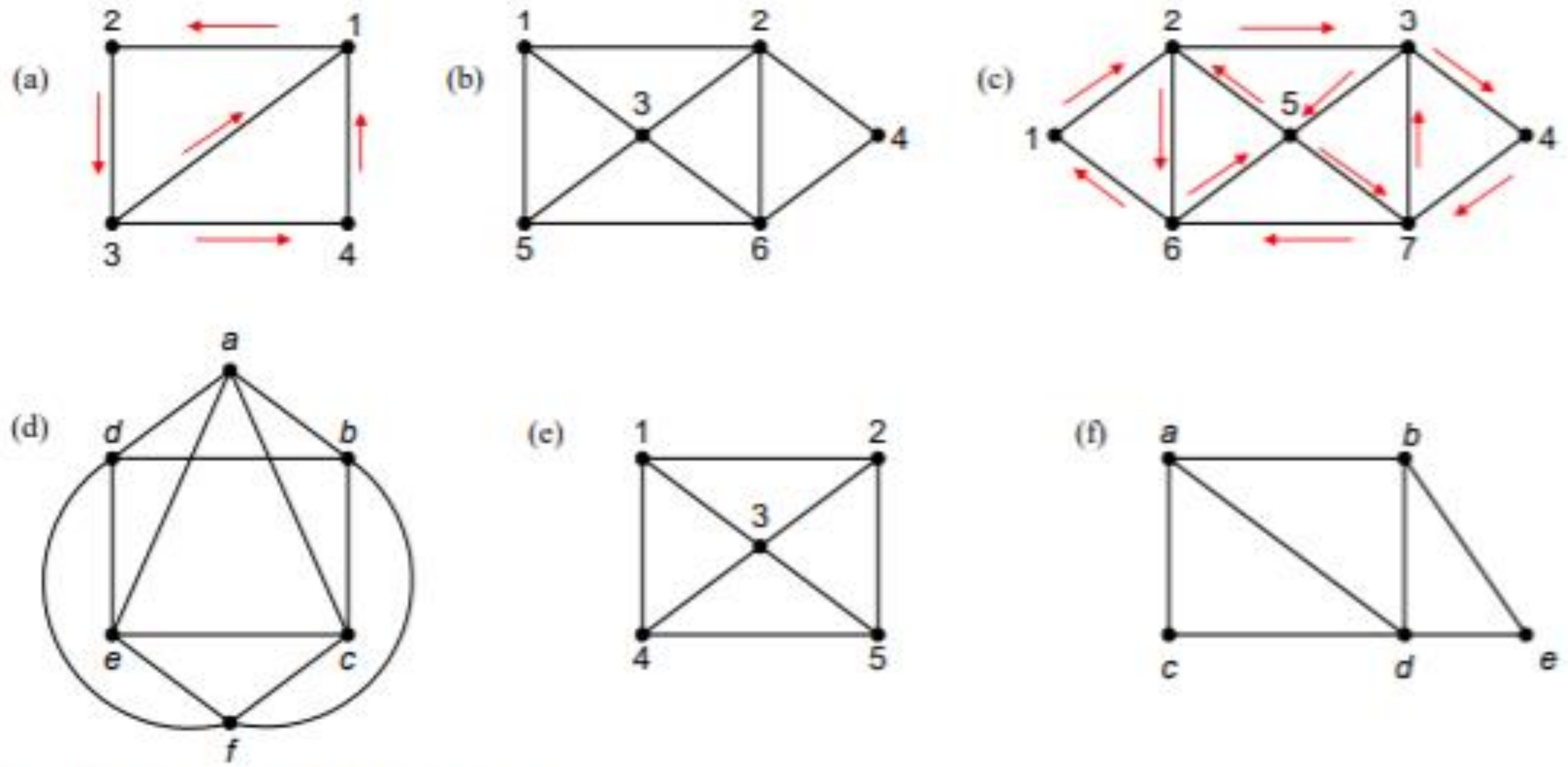
Gambar (a) Graf Petersen
(b) *G*1 adalah upagraf dari *G*
(c) *G*2 homeomorfik dengan *G*1
(d) *G*2 isomorfik dengan *K*3,3

Lintasan dan Sikuit Euler

- **Lintasan Euler** ialah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.

- Sirkuit Euler ialah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali..

- Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut **graf Euler** (*Eulerian graph*). Graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graf **semi-Euler** (*semi-Eulerian graph*).



Lintasan Euler pada graf (a) : 3, 1, 2, 3, 4, 1

Lintasan Euler pada graf (b) : 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3

Sirkuit Euler pada graf (c) : 1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6, 1

Sirkuit Euler pada graf (d) : *a, c, f, e, c, b, d, e, a, d, f, b, a*

Graf (e) tidak mempunyai lintasan maupun sirkuit Euler

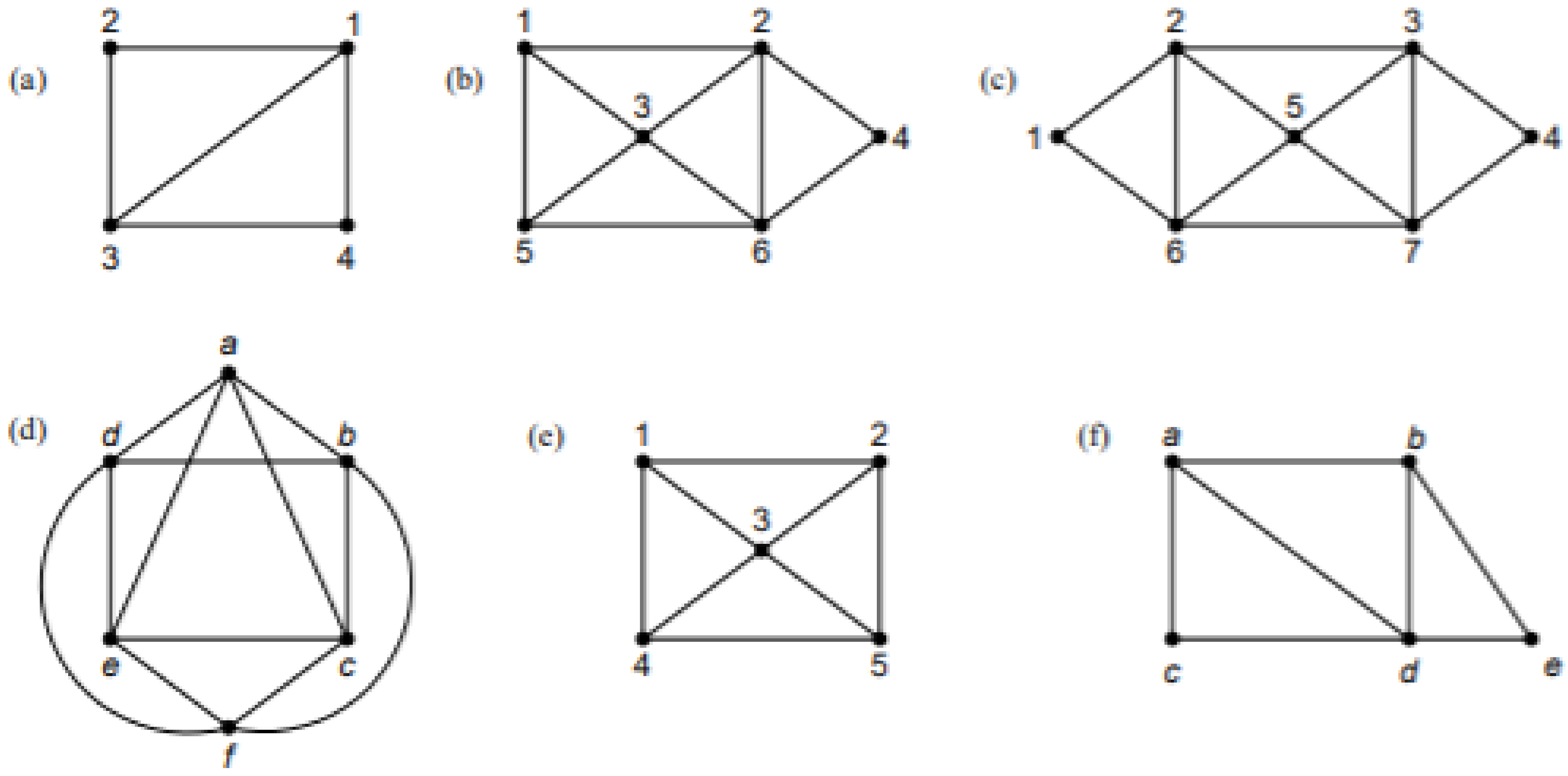
Graf (f) mempunyai lintasan Euler: *a, c, d, a, b, e, d, b*

(a), (b), dan (f) graf semi-Euler

(c) dan (d) graf Euler

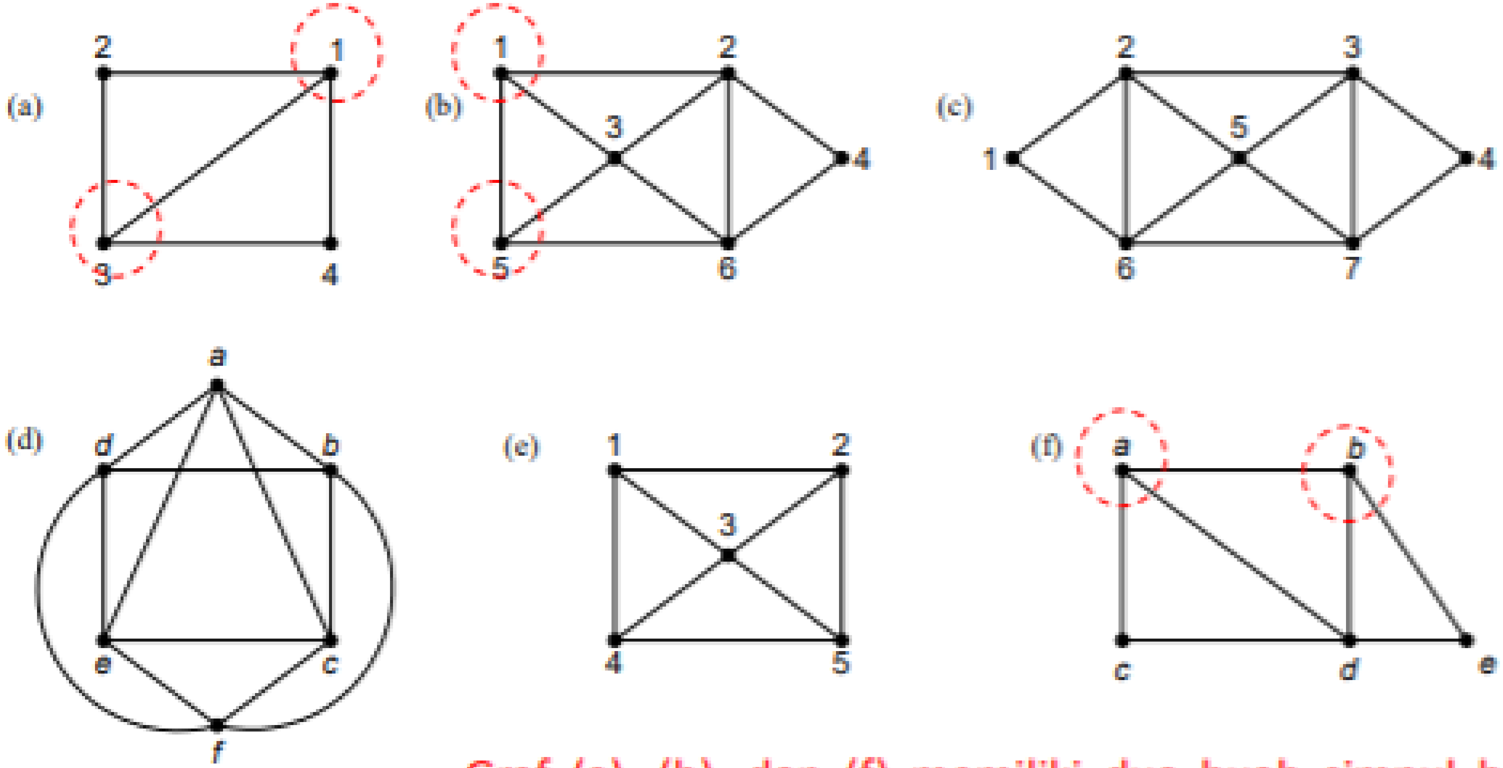
(e) bukan graf semi-Euler maupun graf Euler

TEOREMA 1. Graf tidak berarah *G* adalah graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul berderajat genap.



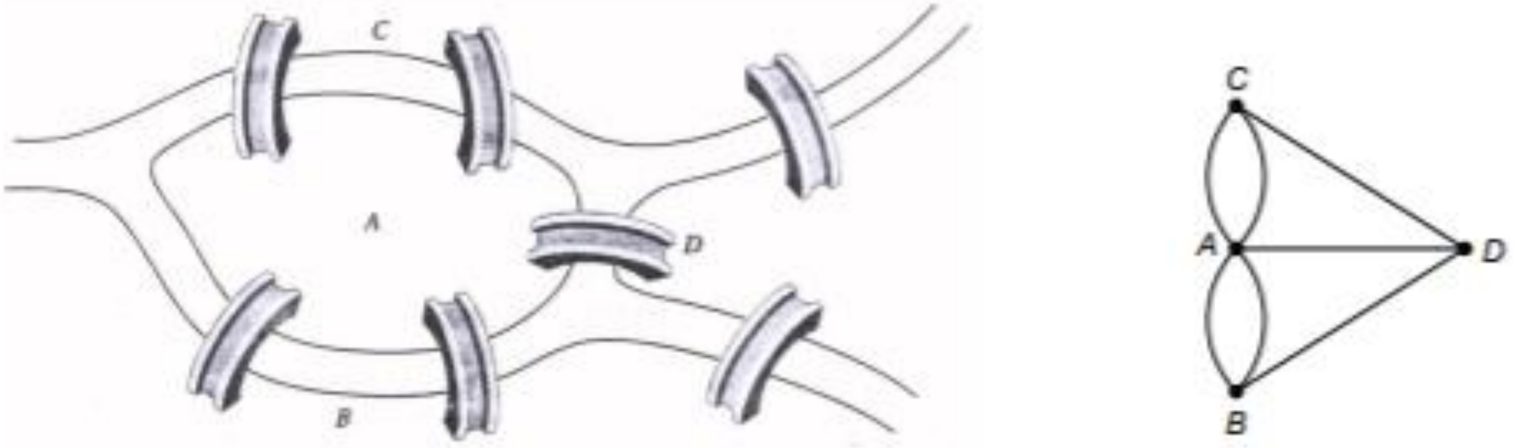
Hanya graf (c) dan (d) yang semua simpulnya berderajat sehingga graf (c) dan (d) memiliki sirkuit Euler (disebut graf Euler)

TEOREMA 2. Graf tidak berarah memiliki lintasan Euler (graf semi-Euler) jika dan hanya jika terhubung dan memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali.



Graf (a), (b), dan (f) memiliki dua buah simpul berderajat ganjil (dilingkari putus-putus) sehingga ketiganya memiliki lintasan Euler. Perhatikan bahwa sirkuit Euler juga adalah lintasan Euler, oleh karena itu graf (c) dan (d) juga mengandung lintasan Euler

- Persoalan Jembatan Konigsber tidak mempunyai sirkuit Euler



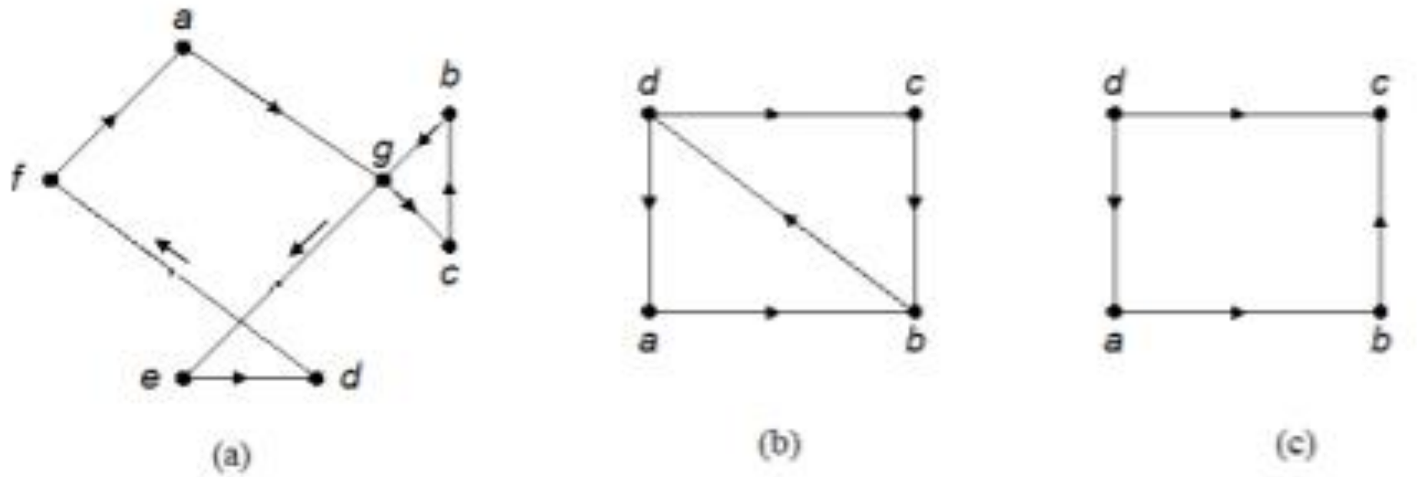
Gambar 1. Masalah Jembatan Königsberg

- Karena derajat setiap simpul tidak genap

TEOREMA. 3

(a) Graf berarah *G* memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika *G* terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama.

(b) *G* memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika *G* terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.



Gambar (a) Graf berarah Euler (*a, g, c, b, g, e, d, f, a*)
(b) Graf berarah semi-Euler (*d, a, b, d, c, b*)
(c) Graf berarah bukan Euler maupun semi-Euler

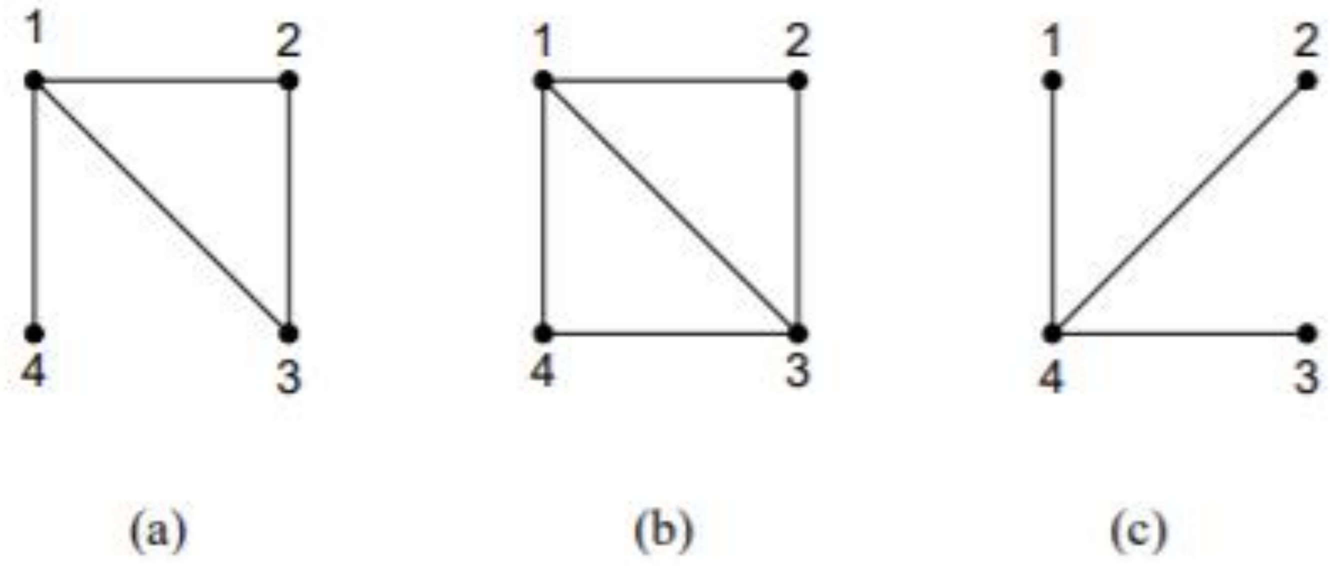
Lintasan dan Sirkuit Hamilton

- **Lintasan Hamilton** ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.

- **Sirkuit Hamilton** ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.

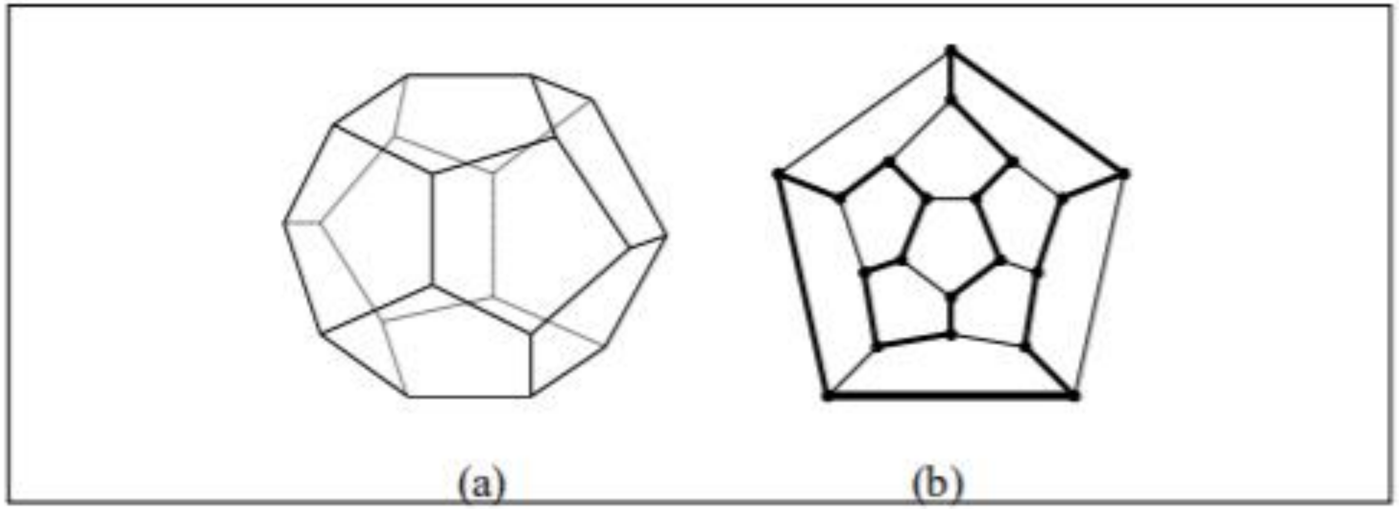
- Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan **graf Hamilton**, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut **graf semi-Hamilton**.

Lintasan dan Sirkuit Hamilton



(a) graf yang memiliki lintasan Hamilton (misal: 3, 2, 1, 4)
(b) graf yang memiliki sirkuit Hamilton (1, 2, 3, 4, 1)
(c) graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton

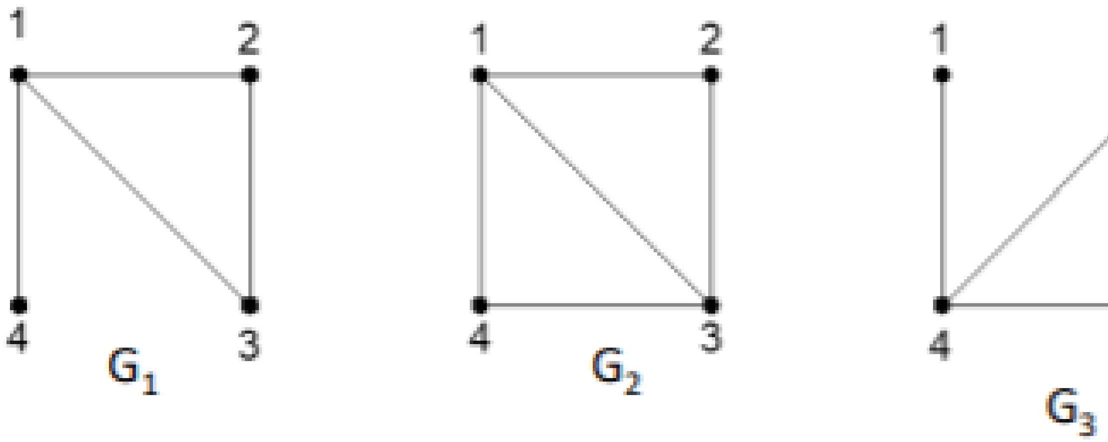
Lintasan dan Sirkuit Hamilton



(a) *Dodecahedron* Hamilton,
(b) graf yang mengandung sirkuit Hamilton

TEOREMA 4. Syarat cukup supaya graf sederhana G dengan n ($\geq$ 3) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit n/2 (yaitu, d(v) $\geq$ n/2 untuk setiap simpul v di G).

Ekivalen dengan: Jika pada graf sederhana G dengan *n* ($\geq$ 3) buah simpul derajat setiap simpul paling sedikit n/2 (yaitu, d(v) $\geq$ n/2 untuk setiap simpul v di G) maka G adalah graf Hamilton.

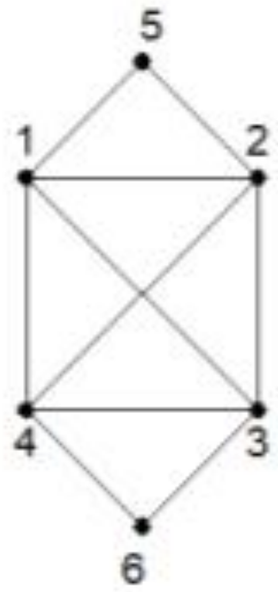


Pada G_1, n = 4, tetapi simpul 4 memiliki d(v) = 1 $\rightarrow$ bukan graf Hamilton
Pada G_2, n = 4, setiap simpul memiliki d(v) $\geq$ 2 $\rightarrow$ graf Hamilton

- Teorema 4 adalah syarat cukup agar sebuah graf sederhana G merupakan graf Hamilton (mengandung sirkuit Hamilton).

- Namun, terdapat graf yang yang tidak setiap simpulnya memiliki derajat paling sedikit n/2 namun memiliki sirkuit Hamilton. Seperti pada contoh graf di bawah ini:

Pada graf ini, n = 6 tetapi tidak setiap simpul v memiliki d(v) ≥ 3 (simpul 5 dan 6 memiliki derajat 2, namun graf ini merupakan graf Hamilton



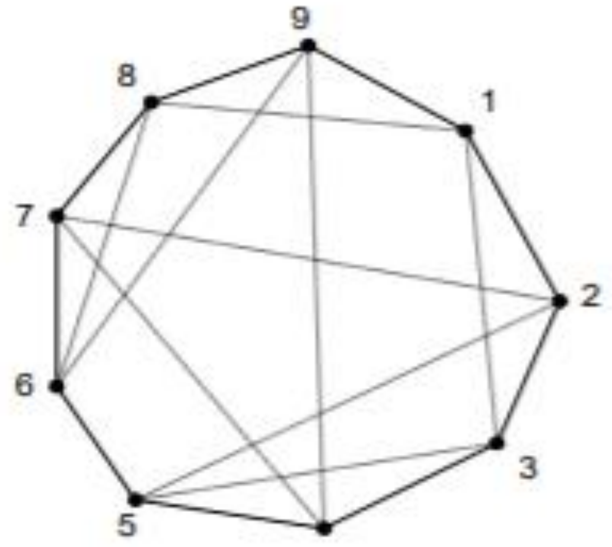
TEOREMA 5. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

TEOREMA 6 Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $(n - 1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

TEOREMA 7. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat $(n - 1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $(n - 2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

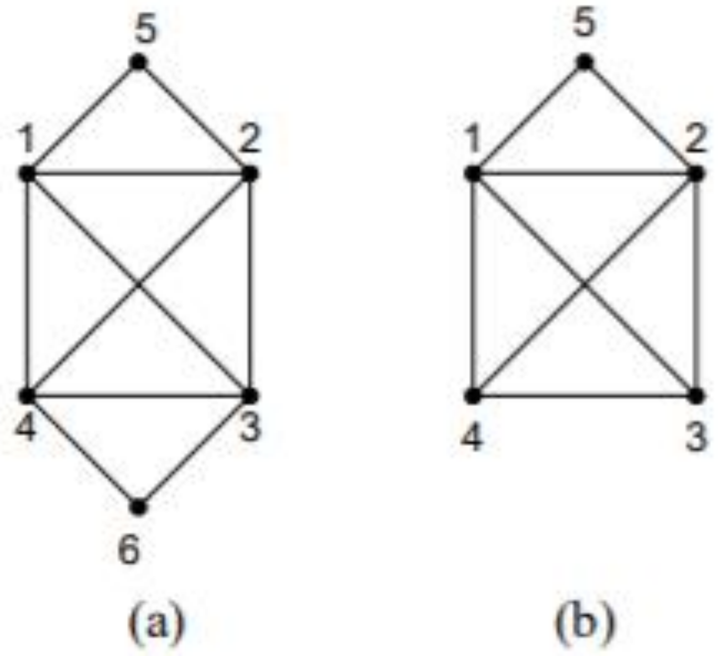
Contoh. Sembilan anggota sebuah klub bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian sehingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda pada setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dapat dilaksanakan?

Jawaban: Jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda adalah $(9 - 1)/2 = 4$.



Gambar Graf yang merepresentasikan persoalan pengaturan tempat duduk.

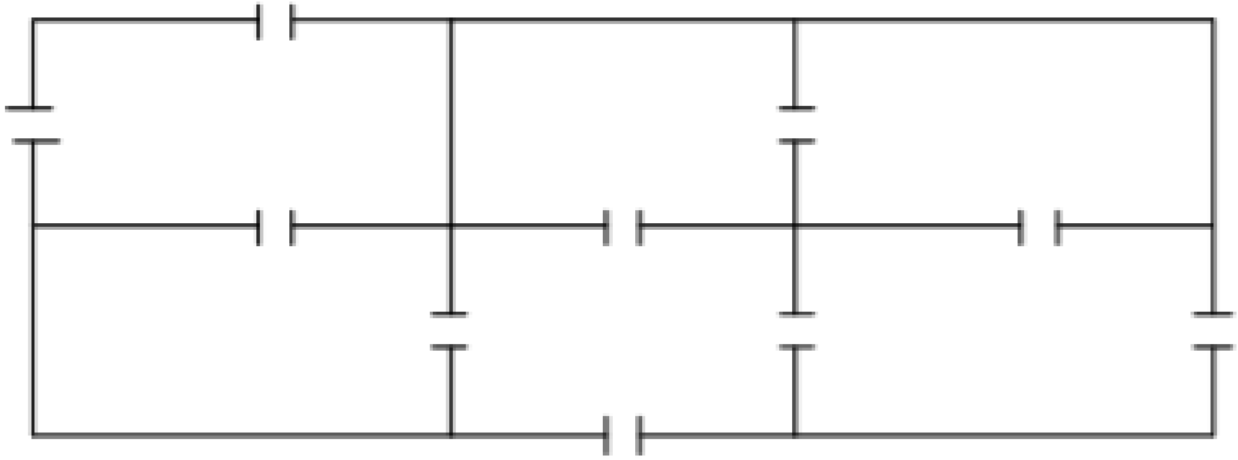
Beberapa graf dapat mengandung sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, dan sebagainya..



(a) Graf Hamilton sekaligus graf Euler
(b) Graf Hamilton sekaligus graf semi-Euler

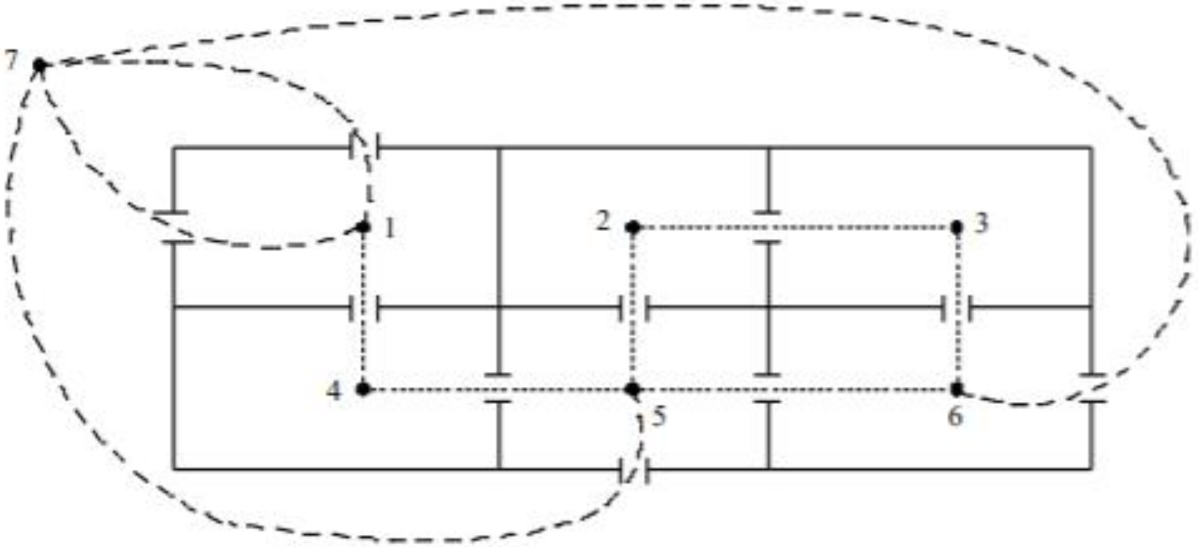
Latihan

Gambar di bawah ini adalah denah lantai dasar sebuah gedung. Apakah dimungkinkan berjalan melalui setiap pintu di lantai itu hanya satu kali saja jika kita boleh mulai memasuki pintu yang mana saja?



Jawaban:

- Nyatakan ruangan sebagai simpul dan pintu antar ruangan sebagai sisi.
- Setiap pintu hanya boleh dilewati sekali (tidak harus kembali ke titik asal) → melewati sisi tepat sekali → lintasan Euler
- Di dalam graf tersebut ada 2 simpul berderajat ganjil (simpul 1 dan 6), selebihnya genap → pasti ada lintasan Euler
- Kesimpulan: setiap pintu dapat dilewati sekali saja



Beberapa Aplikasi Graf

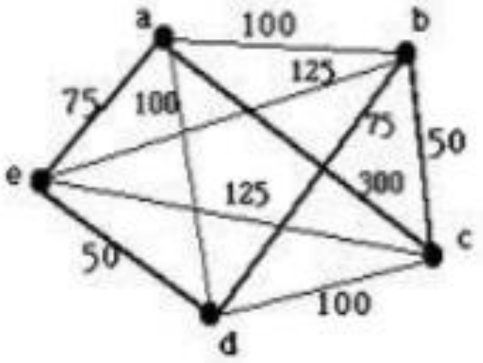
- Lintasan terpendek (*shortest path*)
- Persoalan pedagang keliling (*travelling salesperson problem*)
- Persoalan tukang pos Cina (*chinese postman problem*)
- Pewarnaan graf (*graph colouring*)

Persoalan Pedagang Keliling (*Travelling Salesperson Problem (TSP)*)

Diberikan sejumlah kota dan diketahui jarak antar kota. Tentukan tur terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

==> menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.

An Instance of the Traveling Salesman Problem



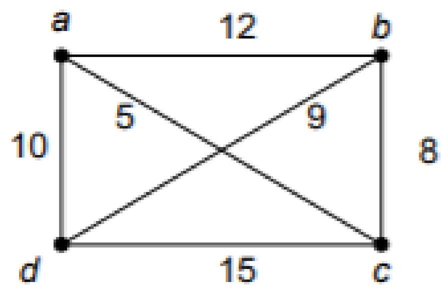
Cost of Nearest Neighbor Path, AEDBCA = 550

Persoalan Pedagang Keliling (*Travelling Salesperson Problem (TSP)*)

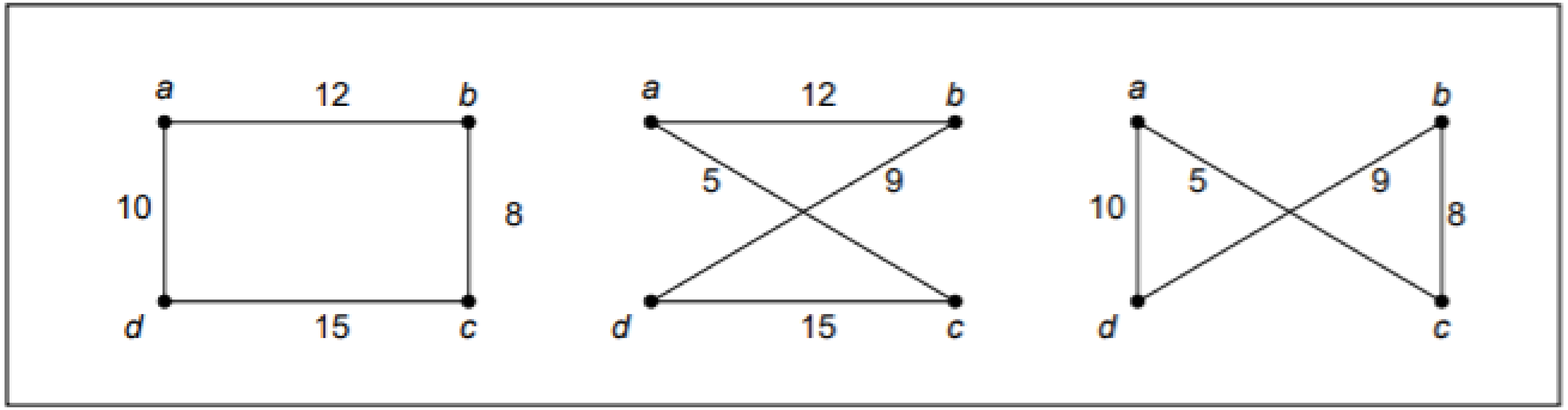
Aplikasi TSP:

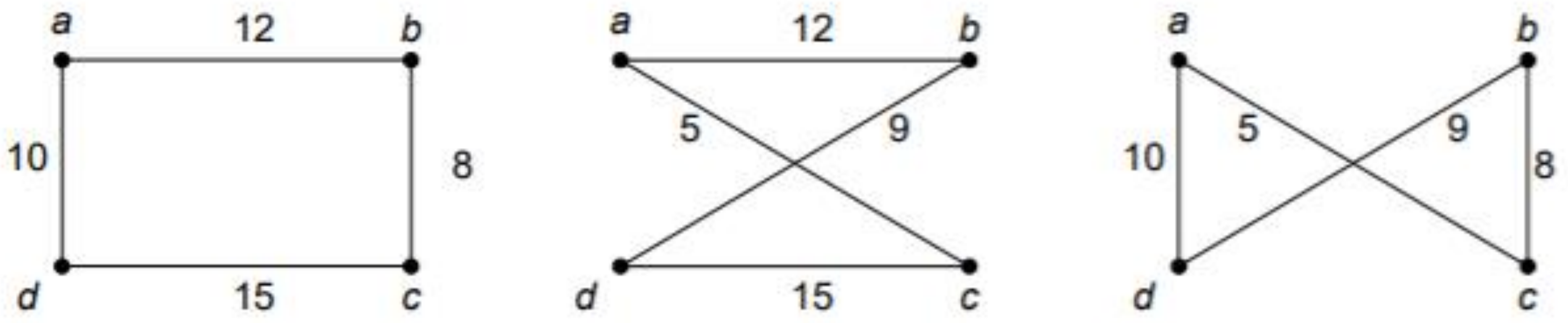
1. Pak Pos mengambil surat di kotak pos yang tersebar pada *n* buah lokasi di berbagai sudut kota.
2. Lengan robot mengencangkan *n* buah mur pada beberapa buah peralatan mesin dalam sebuah jalur perakitan.
3. Produksi *n* komoditi berbeda dalam sebuah siklus.

Jumlah sirkuit Hamilton di dalam graf lengkap dengan n simpul: $(n – 1)!/2$.



Graf di atas memiliki $(4 – 1)!/2 = 3$ sirkuit Hamilton, yaitu:





$I_1 = (a, b, c, d, a) \rightarrow$ bobot = 10 + 12 + 8 + 15 = 45

$I_2 = (a, c, d, b, a) \rightarrow$ bobot = 12 + 5 + 9 + 15 = 41

$I_3 = (a, c, b, d, \mathrm{a}) \rightarrow$ bobot = 10 + 5 + 9 + 8 = 32

Sirkuit Hamilton terpendek: $I_3 = (a, c, b, d, a)$ dengan bobot = 10 + 5 + 9 + 8 = 32.

- Jika jumlah simpul n = 20 akan terdapat (19!)/2 sirkuit Hamilton atau sekitar 6×10^{16} penyelesaian.

Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*)

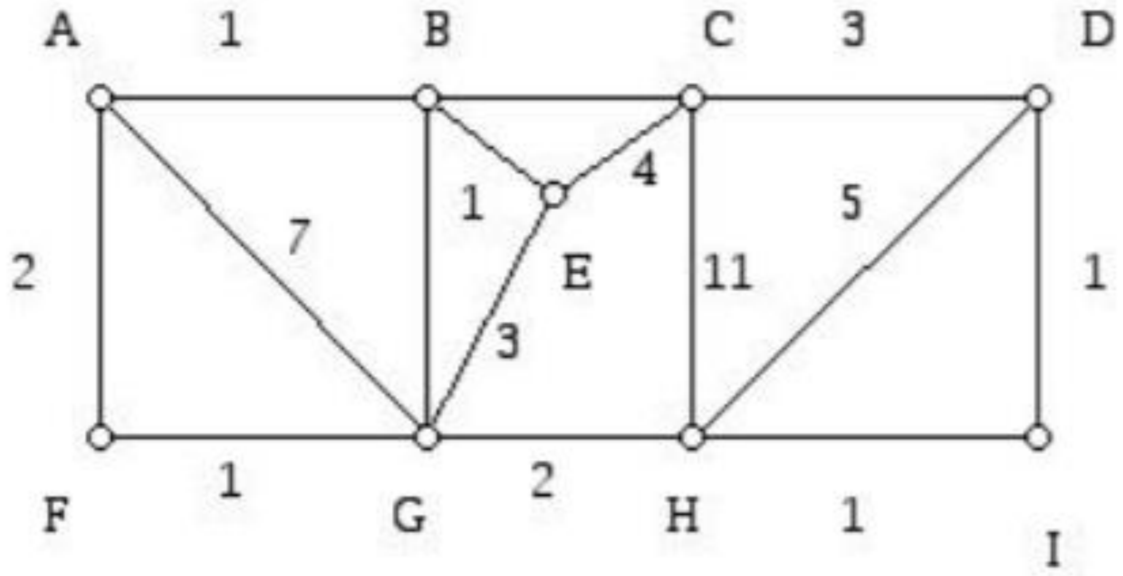
- Dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962.
- Persoalan: seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan?
- ➔ menentukan sirkuit Euler di dalam graf

Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*)

- Jika graf yang merepresentasikan persoalan adalah graf Euler, maka sirkuit Eulernya mudah ditemukan.
- Jika grafnya bukan graf Euler, maka beberapa sisi di dalam graf harus dilalui lebih dari sekali.
- Jadi, pak pos harus menemukan sirkuit yang mengunjungi *setiap jalan paling sedikit sekali* dan mempunyai *jarak terpendek*

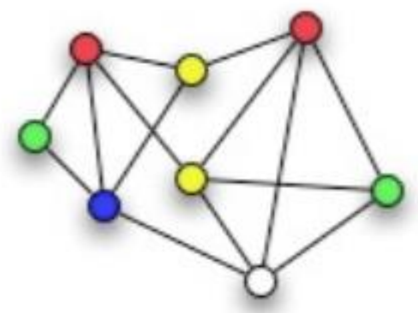
Persoalan tukang pos Cina menjadi:

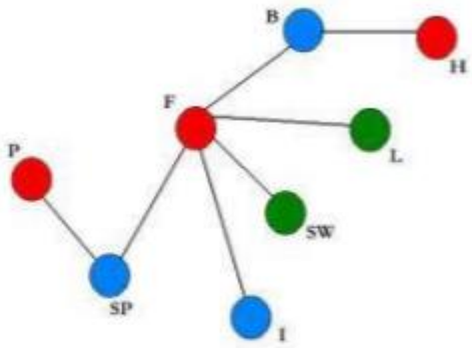
Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya yang mempunyai jarak terpendek supaya ia melewati setiap jalan <u>paling sedikit sekali</u> dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan?



Perwarnaan Graf

- Ada dua macam: pewarnaan simpul, dan pewarnaan sisi
- Hanya dibahas perwarnaan simpul
- Pewarnaan simpul: memberi warna pada simpul-simpul graf sedemikian sehingga dua simpul bertetangga mempunyai warna berbeda.





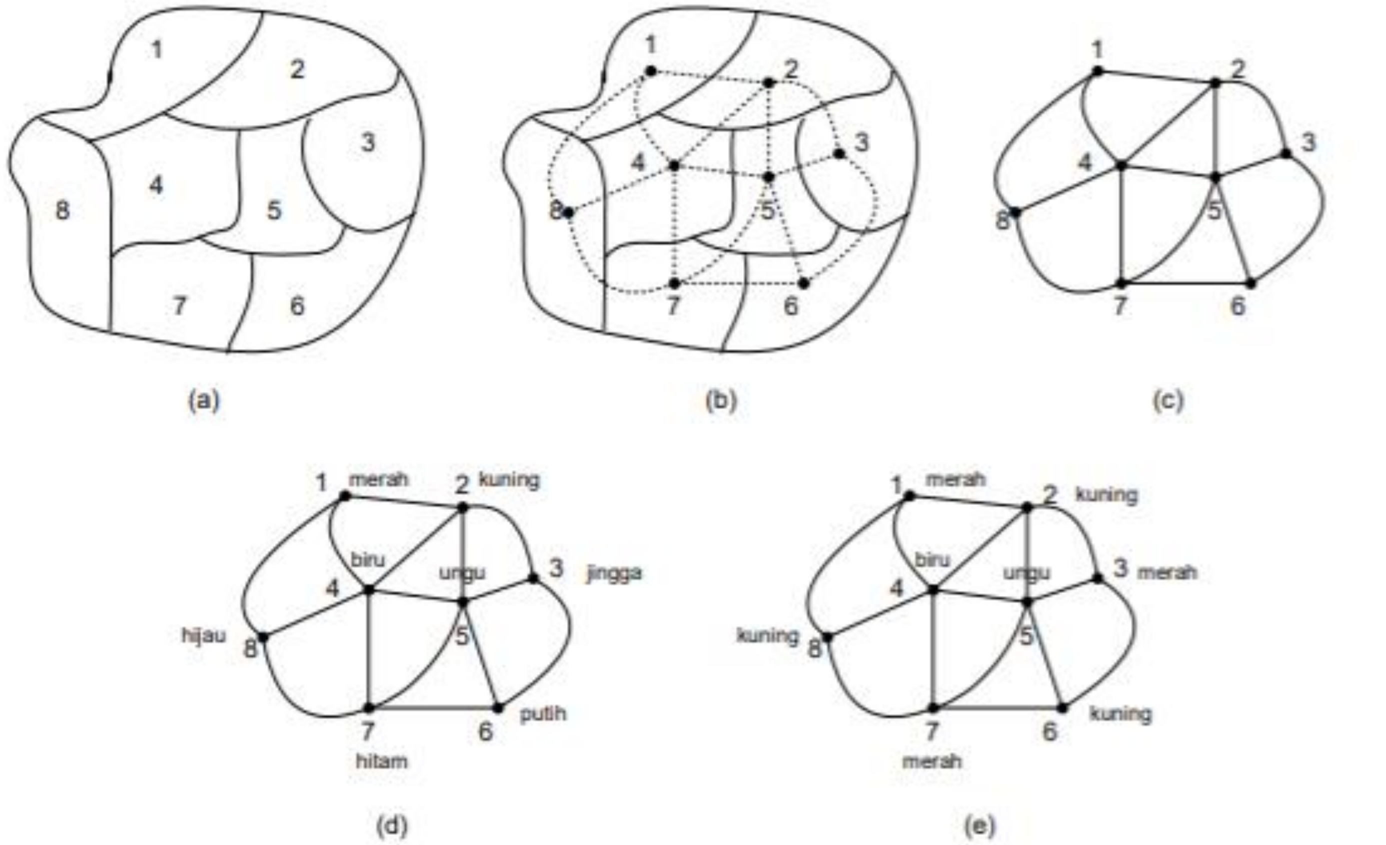
Perwarnaan Graf

- Aplikasi pewarnaan graf: mewarnai peta.
- Peta terdiri atas sejumlah wilayah.
- Wilayah dapat menyatakan kecamatan, kabupaten, provinsi, atau negara.
- Peta diwarnai sedemikian sehingga dua wilayah bertetangga mempunyai warna berbeda.

Perwarnaan Graf

Perwarnaan Graf

- Nyatakan wilayah sebagai simpul, dan batas antar dua wilayah bertetangga sebagai sisi.
- Mewarnai wilayah pada peta berarti mewarnai simpul pada graf yang berkoresponden.
- Setiap wilayah bertetangga harus mempunyai warna berbeda ➔ warna setiap simpul harus berbeda

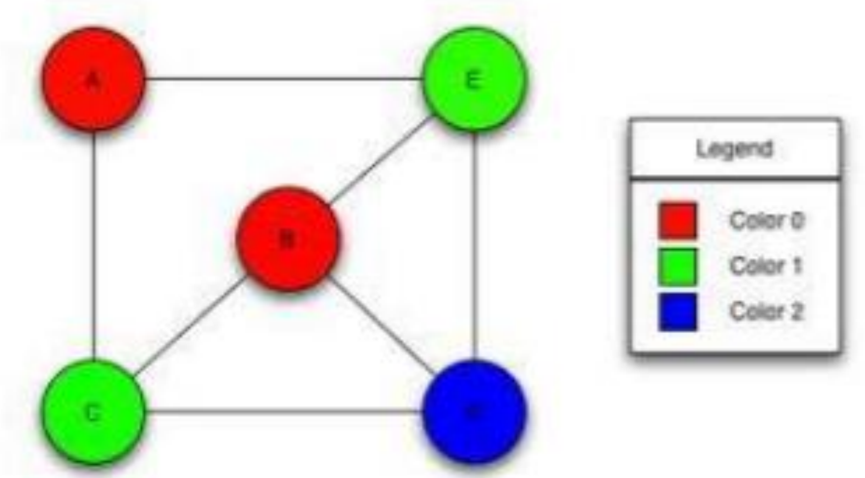


Gambar 8.72 (a) Peta
(b) Peta dan graf yang merepresentasikannya,
(c) Graf yang merepresentasikan peta,
(d) Pewarnaan simpul, setiap simpul mempunai warna berbeda,
(e) Empat warna sudah cukup untuk mewarnai 8 simpul

Bilangan Kromatik

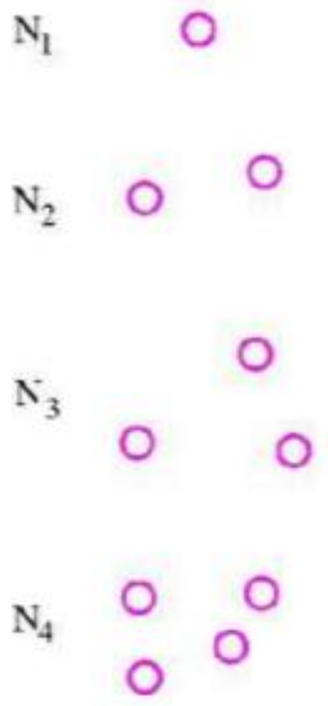
- Bilangan kromatik: jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta.
- Simbol: $\chi(G)$.

- Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatis k dilambangkan dengan $\chi(G) = k$.
- Graf di bawah ini memiliki $\chi(G) = 3$



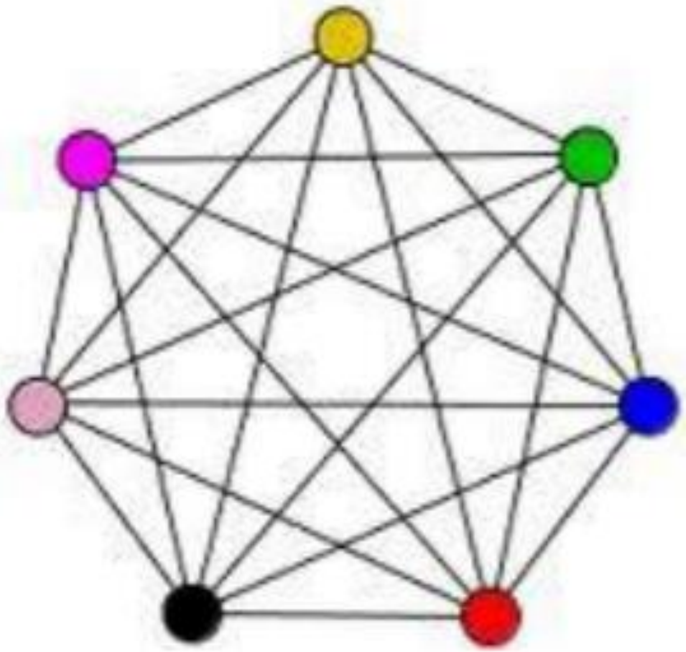
Perwarnaan Graf

- Graf kosong N_n memiliki $\chi(G)$ = 1, karena semua simpul tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua simpul cukup dibutuhkan satu warna saja.



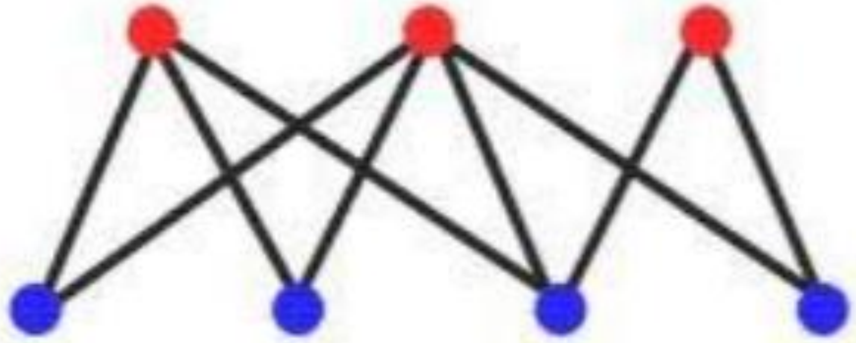
Perwarnaan Graf

- Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$ sebab semua simpul saling terhubung sehingga diperlukan n buah warna.



Perwarnaan Graf

- Graf bipartit $K_{m,n}$ mempunyai $\chi(G) = 2$, satu untuk simpul-simpul di himpunan V_1 dan satu lagi untuk simpul-simpul di V_2.



Perwarnaan Graf

- Graf lingkaran dengan n ganjil memiliki $\chi(G) = 3$, sedangkan jika n genap maka $\chi(G) = 2$.
- Sembarang pohon T memiliki $\chi(T) = 2$.
- Untuk graf-graf yang lain tidak dapat dinyatakan secara umum bilangan kromatiknya.

Perwarnaan Graf

- Perkembangan teorema pewarnaan graf:

  TEOREMA 1. Bilangan kromatik graf planar ≤ 6.

  TEOREMA 2. Bilangan kromatik graf planar ≤ 5.

  TEOREMA 3. Bilangan kromatik graf planar ≤ 4.

- Teorema 4 berhasil menjawab persoalan 4-warna (yang diajuka pada abad 19): dapatkah sembarang graf planar diwarnai hanya dengan 4 warna saja?

- Jawaban dari persoalan ini ditemukan oleh Appel dan Haken yang menggunakan komputer untuk menganalisis hampir 2000 graf yang melibatkan jutaan kasus

Perwarnaan Graf

Cukup 4 warna saja untuk mewarnai sembarang peta

Aplikasi lain perwarnaan graf: penjadwalan

Misalkan terdapat delapan orang mahasiswa (1, 2, …, 8) dan lima buah mata kuliah yang dapat dipilihnya (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*). Tabel berikut memperlihatkan matriks lima mata kuliah dan delapan orang mahasiswa. Angka 1 pada elemen (*i*, *j*) berarti mahasiswa *i* memilih mata kuliah *j*, sedangkan angka 0 menyatakan mahasiswa *i* tidak memilih mata kuliah *j*.

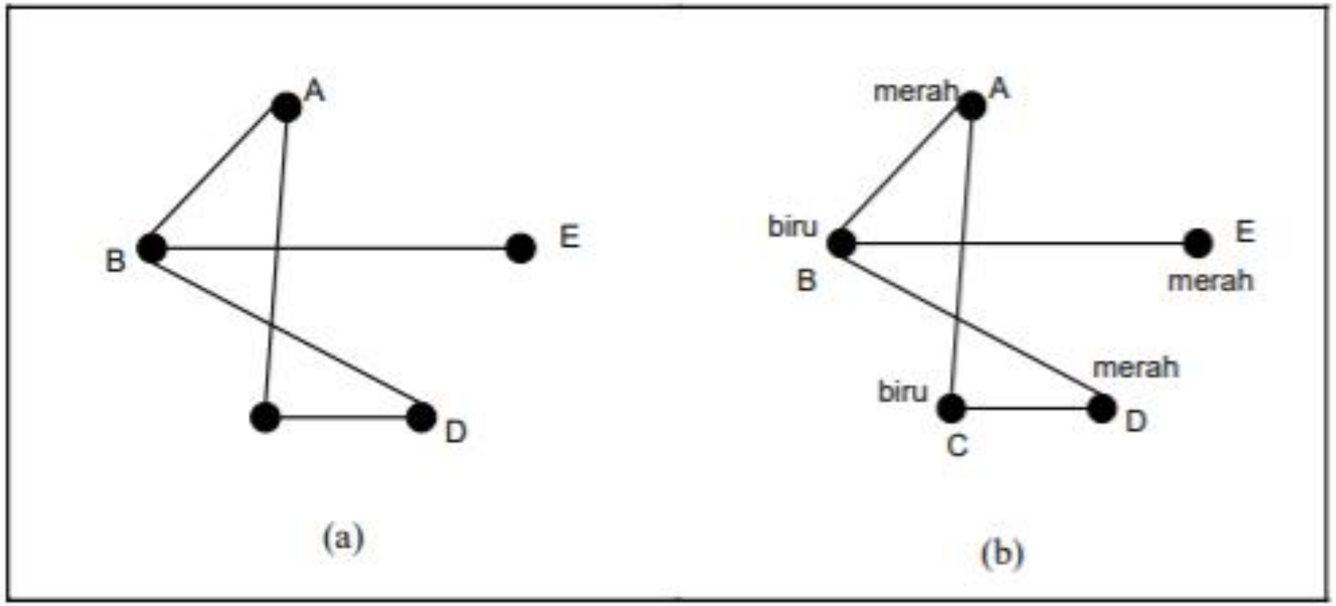
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0

Aplikasi lain perwarnaan graf: penjadwalan

Berapa paling sedikit jumlah hari yang dibutuhkan untuk jadwal ujian tersebut sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian mata kuliah yang diambilnya tanpa bertabrakan waktunya dengan jadwal ujian kuliah lain yang juga diambilnya?

Penyelesaian:

- **Simpul → mata kuliah**
- **Sisi → ada mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah (2 simpul)**



Gambar (a) Graf persoalan penjadwalan ujian 5 mata kuliah untuk 8 orang mahasiswa
(b) Hasil pewaranan pada simpul-simpul graf

- Bilangan kromatik graf pada Gambar di ata adalah 2.
- Jadi, ujian mata kuliah *A*, *E*, dan *D* dapat dilaksanakan bersamaan, sedangkan ujian mata kuliah *B* dan *C* dilakukan bersamaan tetapi pada waktu yang berbeda dengan mata kuliah *A*, *E*, dan *D*.

REFERENSI

1. Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T, *Matematika Diskrit (Edisi Kelima*), Bandung: Informatika , 2013.