Metody Optymalizacji, Lista 1, rozwiązania

Błażej Wróbel, 250070, W4N, 4. rok

Zadanie 1

W zadaniu 1 należało zapisać w GNU MathProg model, który służy do testowania odporności i dokładności algorytmów programowania liniowego.

Model, który jest rozpatrywany w tym zadaniu ma następującą postać:

$$\begin{aligned} min\ \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0 \\ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},\ i,\ j = 1, \ldots, n \\ c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1},\ i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

W omawianym modelu mamy wektor zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, gdzie n jest ustalonym parametrem (liczba zmiennych decyzyjnych i wielkość macierzy ograniczeń). Zakładamy, że wszystkie zmienne decyzyjne przyjmują wartości nieujemne, czyli $\mathbf{x} \geq 0$. Omawiane zmienne decyzyjne można traktować jako rozwiązanie układu n równań liniowych, gdzie wektor $\mathbf{x}$ jest wektorem niewiadomych, które mają przyjąć wartości nieujemne. Ze względu na to, że w tym zagadnieniu badamy odporność i dokładność algorytmów możemy przyjąć, że zmienne decyzyjne $x_i, i = 1, \ldots, n$ nie mają żadnych jednostek (lub przyjmują dowolną jednostkę, jeśli to jest wymagane).

Wartości a_{ij} w macierzy ograniczeń są współczynnikami, które występują przy odpowiednich niewiadomych w równaniu liniowym a wartości b_i są wartościami, jakie mają przyjmować poszczególne równania liniowe.

Funkcja celu ma postać:

$$min\ \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}$$

Gdzie wartości c_i współczynników funkcji celu są podane w opisie modelu powyżej. W tym przypadku szukamy takich wartości zmiennych decyzyjnych $x_i,\ i = 1, \ldots, n$, które minimalizują wartość funkcji celu. Istnieje tylko jedno rozwiązanie tego układu n równań liniowych, zatem jeśli mamy tylko jedno rozwiązanie dopuszczalne, to jest to rozwiązanie optymalne. Zatem w tym przypadku chodzi po prostu o znalezienie numerycznie rozwiązania układu n równań liniowych.

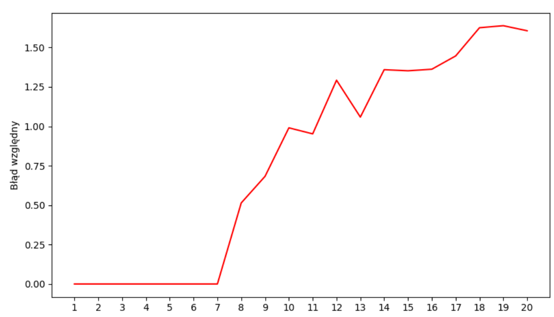
W zadaniu rozważamy rozwiązywanie układu n równań liniowych z macierzą współczynników, która jest macierzą Hilberta. Z modelu (konkretnie z wartości współczynników a_{ij} oraz b_i) możemy wywnioskować, że dokładnym rozwiązaniem jest wektor $\tilde{\mathbf{x}}$, gdzie:

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \;\; x_i = 1$$

Wspomniania macierz powoduje, że zadanie jest źle uwarunkowane co oznacza, że niewielkie zaburzenia w danych wejściowych (macierz $\mathbf{A}$ i wektor prawych stron $\mathbf{b}$) powodują duże (względne) odchylenia w wynikach, które otrzymujemy (dla dostatecznie dużych rozmiarów macierzy, możemy otrzymywać całkowicie błędne wyniki). Zatem można się spodziewać, że wraz ze wzrostem n, drukowany błąd względny $\frac{||\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}||_2}{||\mathbf{x}||_2}$ będzie rósł (tudzież będzie miał tendencję wzrostową).

Testy przeprowadziłem dla $n = 1, \dots, 20$. Na rysunku 1 znajduje się wykres błędu względnego w zależności od n. Z tego wykresu można odczytać, że dla $n = 1, \dots 7$ błąd względny był bliski 0 (czyli mogliśmy rozwiązać problem z dokładnością do co najmniej 2 cyfr). Dla $n \geq 8$ błąd względny wyniósł 0.514059 i dla coraz większych n zaczął rosnąć (z pewnymi wyjątkami - należałoby uśrednić wartości błędów). Zatem dla $n = 7$ jesteśmy w stanie rozwiązać problem z dokładnością do 2 cyfr a dla $n \geq 8$ nie jest to już możliwe.

Model napisany w GNU MathProg znajduje się w pliku z1.mod. Model został maksymalnie sparametryzowany, wartości parametru podaje się w sekcji data. Rozwiązania (wektory) wyznaczone numerycznie jak i błędy względne znajdują się w pliku wyniki_z1.txt (można je obejrzeć).



Rysunek 1: Wykres błędu względnego w zależności od n.

Zadanie 2

W zadaniu 2 wprowadziłem zmienne decyzyjne x_{cij}, które oznaczają liczbę kamperów danego rodzaju c przemieszczanych z miasta i do miasta j. Początkowo przyjąłem, że wartości tych zmiennych decyzyjnych przyjmują wartości $x_{cij} \in$

$\mathbb{N} \cup \{0\}$. Omawiane zmienne decyzyjne nie muszą mieć żadnych jednostek, bo wyrażają pewną liczbę transportowanych kamperów.

Czytając opis zadania można dojść do wniosku, że tak naprawdę mamy do czynienia z modyfikacją problemu najtańszego przepływu. Niech M oznacza zbiór miast, w których firma ma swoje oddziały, C będzie zbiorem rodzajów kamperów do wynajęcia a S_{ic} będzie nadwyżką rodzaju kampera c w mieście i. Wówczas mamy:

$$(\forall i \in M) \sum_{c \in C} \sum_{j \in M, j \neq i} x_{cij} \leq S_{ic} \tag{1}$$

Mówiąc wprost, sumaryczna liczba kamperów rodzaju c, która zostanie wywieziona z miasta i, musi być mniejsza równa niż nadwyżka tego rodzaju kampera w mieście i.

W zadaniu mamy dwa rodzaje kamperów: Vip i Standard. Wiemy, że kamper Vip może zastąpić kamper standard, ale kamper Standard nie może zastąpić kampera Vip. W związku z tym, wprowadziłem ograniczenie, które pozwala najpierw pozbyć się niedoboru kamperów Vip z miast, w których ten problem występuje:

$$(\forall j \in M) \sum_{i \in M, i \neq j} x_{'vip'ij} \geq D_{'vip'j} \tag{2}$$

Gdzie D_{cj} oznacza niedobór kampera rodzaju c w mieście j. Zatem to wyraża fakt, że suma kamperów Vip przyjeżdżających z innych miast do miasta j musi być większa równa niż deficyt kamperów Vip w mieście j.

Ostatnim ograniczeniem jest fakt, że również musimy usunąć niedobór kamperów Standard w poszczególnych miastach, ale kamper Standard może być zastąpiony (w razie konieczności) kamperem Vip (ale nie na odwrót). Ten fakt wyraża poniższe ograniczenie:

$$(\forall j \in M) \sum_{i \in M, i \neq j} (x_{'standard'ij} + x_{'vip'ij}) - D_{'vip'j} \geq D_{'standard'j} \tag{3}$$

Zatem suma kamperów Standard, które przyjeżdzają do miasta j i suma kamperów Vip, które zostały po usunięciu ich deficytu w mieście j, musi być większa równa niż deifcyt kamperów Standard w tym mieście.

Niech $Cost_{ij}$ oznacza koszt transportu kampera Standard z miasta i do miasta j. Funkcja celu ma postać

$$F = \sum_{i \in M} \sum_{j \in M, i \neq j} (Cost_{ij} \cdot x_{'standard'ij} + 1.15 \cdot Cost_{ij} \cdot x_{'vip'ij}) \tag{4}$$

Zatem funkcja celu wyraża łączny koszt transportu poszczególnych kamperów z miasta i do miasta j, przy czym koszt transportu kampera Vip jest o 15% wyższy niż kampera Standard (dlatego współczynnik 1.15 w funkcji celu).

Rozwiązałem model przy założeniu, że zmienne decyzyjne przyjmują wartości całkowitoliczbowe i bez tego założenia. Okazało się, że założenie o całkowitoliczbowości jest zbędne (i dobrze, bo programowanie całkowitoliczbowe jest trudne), bo otrzymujemy te same wyniki bez tego założenia (tylko traktowane jako liczby zmiennoprzecinkowe). Poniżej są otrzymane rezultaty (tzn. plan przemieszczeń) dla odpowiednio kampera Standard (pierwsza tabela) i Vip (druga tabela):

Skąd	Dokąd	Ile
Warszawa	Gdańsk	14
Szczecin	Gdańsk	6
Szczecin	Berlin	4
Szczecin	Rostok	2
Kraków	Wrocław	6
Kraków	Koszyce	4
Praga	Wrocław	2
Praga	Lipsk	3
Praga	Brno	5

Skąd	Dokąd	Ile
Gdansk	Warszawa	2
Szczecin	Berlin	4
Wroclaw	Warszawa	2
Wroclaw	Krakow	8
Rostok	Berlin	4
Lipsk	Berlin	8
Lipsk	Praga	2
Brno	Praga	2
Bratyslawa	Brno	4
Bratyslawa	Budapeszt	4
Koszyce	Budapeszt	4
Budapeszt	Bratyslawa	4

Analizując powyższy plan przemieszczeń można dojść do wniosku, że pozbyto się deficytów kamperów (dowolnego rodzaju) i nie przekroczono ilości dostępnych kamperów jakie można przemieścić (nie przekroczono nadwyżek). Minimalny koszt transportu, wynikający z planu przemieszczeń wynosi 25444.50 (waluta nie była podana w treści zadania).

Źródła modelu znajdują się w pliku z2.mod. Model został maksymalnie sparametryzowany a dane podaje się w sekcji data.

Zadanie 3

W zadaniu 3 wprowadziłem następujące zmienne decyzyjne:

- $x_1 \geq 0$ - ilość surowca 1 do kupienia.

- $x_2 \geq 0$ - ilość surowca 2 do kupienia.
- $x_3 \geq 0$ - ilość surowca 3 do kupienia.
- $x_{1a} \geq 0$ - ilość surowca 1 przeznaczonego do produkcji produktu A.
- $x_{2a} \geq 0$ - ilość surowca 2 przeznaczonego do produkcji produktu A.
- $x_{3a} \geq 0$ - ilość surowca 3 przeznaczonego do produkcji produktu A.
- $x_{1b} \geq 0$ - ilość surowca 1 przeznaczonego do produkcji produktu B.
- $x_{2b} \geq 0$ - ilość surowca 2 przeznaczonego do produkcji produktu B.
- $x_{3b} \geq 0$ - ilość surowca 3 przeznaczonego do produkcji produktu B.
- $x_{1c} \geq 0$ - ilość oryginalnego surowca 1 przeznaczonego do produkcji produktu C.
- $x_{1co} \geq 0$ - ilość odpadów surowca 1 otrzymywanych przy produkcji produktu A, przeznaczona do produkcji mieszanki C.
- $x_{2co} \geq 0$ - ilość odpadów surowca 2 otrzymywanych przy produkcji produktu A, przeznaczona do produkcji mieszanki C.
- $x_{3co} \geq 0$ - ilość odpadów surowca 3 otrzymywanych przy produkcji produktu A, przeznaczona do produkcji mieszanki C.
- $x_{2d} \geq 0$ - ilość oryginalnego surowca 2 przeznaczonego do produkcji produktu D.
- $x_{1do} \geq 0$ - ilość odpadów surowca 1 otrzymywanych przy produkcji produktu B, przeznaczona do produkcji mieszanki D.
- $x_{2do} \geq 0$ - ilość odpadów surowca 2 otrzymywanych przy produkcji produktu B, przeznaczona do produkcji mieszanki D.
- $x_{3do} \geq 0$ - ilość odpadów surowca 3 otrzymywanych przy produkcji produktu B, przeznaczona do produkcji mieszanki D.

Każda zmienna decyzyjna wyraża odpowiadającą jej wartość w kilogramach.

Z treści zadania wynika, że przedsiębiorstwo musi kupić pewne minimalne ilości poszczególnych surowców oraz ilość każdego z surowców, która może zostać przetworzona przez przedsiębiorstwo jest ograniczona z góry. Z tego otrzymujemy następujące ograniczenia:

$$6000 \geq x_1 \geq 2000$$
$$5000 \geq x_2 \geq 3000$$
$$7000 \geq x_3 \geq 4000$$

Produkty A i B składają się z odpowiednio wymieszanych ilości surowców 1, 2 oraz 3. Z pierwszej tabelki w zadaniu 3 otrzymujemy następujące ograniczenia na ilości surowców 1, 2 i 3 przeznaczonych do produkcji A:

$$0.8 \cdot x_{1a} - 0.2 \cdot x_{2a} - 0.2 \cdot x_{3a} \geq 0 \tag{5}$$
$$-0.4 \cdot x_{1a} + 0.6 \cdot x_{2a} - 0.4 \cdot x_{3a} \geq 0 \tag{6}$$
$$-0.1 \cdot x_{1a} - 0.1 \cdot x_{2a} + 0.9 \cdot x_{3a} \leq 0 \tag{7}$$

Pierwsze ograniczenie odpowiada faktowi, że surowiec 1 ma stanowić co najmniej 20% produktu (mieszanki) A, drugie ograniczenie odpowiada faktowi, że surowiec 2 ma stanowić co najmniej 40% produktu (mieszanki) A a ograniczenie 3 odpowiada warunkowi, że surowiec 3 ma stanowić co najwyżej 10% mieszanki A. Oczywiście ilości surowców 1, 2 i 3 przeznaczone do produkcji A nie mogą być większe niż zakupione ilości surowców 1, 2 oraz 3 co wyrażają następujące ograniczenia:

$$x_{1a} \leq x_1$$
$$x_{2a} \leq x_2$$
$$x_{3a} \leq x_3$$

W podobny sposób wyprowadzamy ograniczenia na ilości surowców 1, 2 oraz 3 przeznaczone do produkcji produktu B:

$$0.9 \cdot x_{1b} - 0.1 \cdot x_{2b} - 0.1 \cdot x_{3b} \geq 0 \tag{8}$$
$$-0.3 \cdot x_{1b} - 0.3 \cdot x_{2b} + 0.7 \cdot x_{3b} \leq 0 \tag{9}$$

Pierwsze ograniczenia wyraża fakt, że w skład produktu B ma wejść co najmniej 10% surowca 1 a drugie ograniczenie wyraża fakt, że w skład produktu B ma wejść co najwyżej 30% surowca 3. Analogicznie jak w przypadku produktu A, ilości poszczególnych surowców przeznaczonych do produkcji B, nie mogą przekroczyć dostępnych ilości poszczególnych surowców, które zostały po produkcji produktu A:

$$x_{1b} \leq x_1 - x_{1a}$$
$$x_{2b} \leq x_2 - x_{2a}$$
$$x_{3b} \leq x_3 - x_{3a}$$

Następne ograniczenia będą dotyczyły produktów C i D. Dla produktu C mamy następujące ograniczenia:

$$x_{1co} \leq 0.1 \cdot x_{1a} \tag{10}$$
$$x_{2co} \leq 0.2 \cdot x_{2a} \tag{11}$$
$$x_{3co} \leq 0.4 \cdot x_{3a} \tag{12}$$
$$x_{1c} \leq x_1 - x_{1a} - x_{1b} \tag{13}$$
$$0.8 \cdot x_{1c} - 0.2 \cdot x_{1co} - 0.2 \cdot x_{2co} - 0.2 \cdot x_{3co} = 0 \tag{14}$$

Pierwsze trzy ograniczenia wyrażają fakt, że ilości odpadów pochodzących z produkcji produktu A, które są przeznaczone do produkcji produktu C, nie mogą przekroczyć dostępnej ilości odpadów poszczególnych surowców pochodzących z produkcji mieszanki A. Czwarte ograniczenie wyraża fakt, że ilość oryginalnego surowca 1 przeznaczonego do produkcji C, nie może być większa niż dostępna ilość tego surowca, pozostała po produkcji mieszanek A i B. Ostatnie ograniczenie wyraża fakt, że surowiec 1 ma stanowić wagowo dokładnie 20% mieszanki C (odpady z surowców 1, 2 i 3 mogą być wymieszane dowolnie).

Dla produktu D wyprowadziłem następujące ograniczenia:

$$x_{1do} \leq 0.2 \cdot x_{1b} \tag{15}$$
$$x_{2do} \leq 0.2 \cdot x_{2b} \tag{16}$$
$$x_{3do} \leq 0.5 \cdot x_{3b} \tag{17}$$
$$x_{2d} \leq x_2 - x_{2a} - x_{2b} \tag{18}$$
$$0.7 \cdot x_{2d} - 0.3 \cdot x_{1do} - 0.3 \cdot x_{2do} - 0.3 \cdot x_{3do} = 0 \tag{19}$$

Trzy pierwsze ograniczenia (podobnie jak w poprzednim przypadku) wyrażają fakt, że ilości odpadów surowców 1, 2 i 3 pozostałych po produkcji mieszanki B, które są przeznaczone do produkcji mieszanki D nie mogą przekroczyć dostępnej ilości odpadów z poszczególnych surowców. Czwarte ograniczenia mówi o tym, że ilość oryginalnego surowca 2, która wejdzie w skład produktu D nie może przekroczyć dostępnej ilości tego surowca po produkcji mieszanek A i B. Ostanie ograniczenie wyraża fakt, że surowiec 2 stanowi dokładnie 30% mieszanki D.

Maksymalizowaną funkcją celu jest zysk osiągnięty przez firmę na którą składa się zysk ze sprzedaży produktów A, B, C i D pomniejszony o koszty zakupów poszczególnych surowców oraz koszty utylizacji odpadów. Funkcja celu wyraża się następującym wzorem:

$$F = -2.1 \cdot x_1 - 1.6 \cdot x_2 - x_3 + 3 \cdot (x_{1a} + x_{2a} + x_{3a}) + 2.5 \cdot (x_{1b} + x_{2b} + x_{3b}) + 0.6 \cdot (x_{1c} + x_{1co} + x_{2co} + x_{3co}) + 0.5 \cdot (x_{2d} + x_{1do} + x_{2do} + x_{3do}) - (0.1 \cdot (0.1 \cdot x_{1a} - x_{1co}) + 0.1 \cdot (0.2 \cdot x_{2a} - x_{2co}) + 0.2 \cdot (0.4 \cdot x_{3a} - x_{3co}) + 0.05 \cdot (0.2 \cdot x_{1b} - x_{1do}) + 0.05 \cdot (0.2 \cdot x_{2b} - x_{2do}) + 0.4 \cdot (0.5 \cdot x_{3b} - x_{3do})) \tag{20}$$

Pierwszy człon funkcji kosztu $-2.1 \cdot x_1 - 1.6 \cdot x_2 - x_3$ jest kosztem zakupu określonych ilości surowców 1, 2 oraz 3. Drugi człon $3 \cdot (x_{1a} + x_{2a} + x_{3a})$... jest zyskiem ze sprzedaży określonych ilości produktów A, B, C i D. Ostatni, trzeci człon funkcji celu $-(0.1 \cdot (0.1 \cdot x_{1a} - x_{1co})$... jest kosztem utylizacji odpadów pozostałych po produkcji wszystkich produktów.

Po zapisaniu programu w GNU MathProg i uruchomieniu rozwiązywania modelu, otrzymałem następujące wyniki:

- Ilość surowca 1 do kupienia: 6000 kg.
- Ilość surowca 2 do kupienia: 5000 kg.
- Ilość surowca 3 do kupienia: 4000 kg.

- Część surowca 1 przeznaczona do produkcji mieszanki A: 0.195848.
- Część surowca 2 przeznaczona do produkcji mieszanki A: 0.188014 .
- Część surowca 3 przeznaczona do produkcji mieszanki A: 0.058754.
- Część surowca 1 przeznaczona do produkcji mieszanki B: 0.787505.
- Część surowca 2 przeznaczona do produkcji mieszanki B: 0.811986.
- Część surowca 3 przeznaczona do produkcji mieszanki B: 0.941246.
- Część surowca 1 przeznaczona do produkcji mieszanki C: 0.016647.
- Część surowca 2 przeznaczona do produkcji mieszanki D: 0.000000.
- Część odpadów surowca 1 z produkcji mieszanki A, przeznaczona do produkcji C: 1.000000.
- Część odpadów surowca 2 z produkcji mieszanki A, przeznaczona do produkcji C: 1.000000.
- Część odpadów surowca 3 z produkcji mieszanki A, przeznaczona do produkcji C: 1.000000.
- Część odpadów surowca 1 z produkcji mieszanki B, przeznaczona do produkcji D: 0.000000.
- Część odpadów surowca 2 z produkcji mieszanki B, przeznaczona do produkcji D: 0.000000.
- Część odpadów surowca 3 z produkcji mieszanki B, przeznaczona do produkcji D: 0.000000.
- Część odpadów surowca 1 z produkcji A do zniszczenia: -0.000000.
- Część odpadów surowca 2 z produkcji A do zniszczenia: 0.000000.
- Część odpadów surowca 3 z produkcji A do zniszczenia: -0.000000.
- Część odpadów surowca 1 z produkcji B do zniszczenia: 1.000000.
- Część odpadów surowca 2 z produkcji B do zniszczenia: 1.000000.
- Część odpadów surowca 3 z produkcji B do zniszczenia: 1.000000.
- Maksymalny osiągnięty zysk (w dolarach): 13284.183314.

Sumując części poszczególnych surowców przeznaczone do produkcji poszczególnych produktów otrzymamy 1.0. Jak widać, zostanie wyprodukowany tylko produkt drugorzędny C a produkt D nie zostanie w ogóle wyprodukowany. Wszystkie odpady z produkcji A zostaną przeznaczone na produkcję C, a wszystkie odpady z produkcji B zostaną zniszczone.

Źródła modelu znajdują się w pliku z3.mod.

Zadanie 4

W zadaniu 4 wprowadziłem następujące binarne zmienne decyzyjne:

- $x_{algebra1}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 1 z algebry.
- $x_{algebra2}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 2 z algebry.
- $x_{algebra3}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 3 z algebry.
- $x_{algebra4}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 4 z algebry.
- $x_{analiza1}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 1 z analizy.
- $x_{analiza2}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 2 z analizy.
- $x_{analiza3}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 3 z analizy.
- $x_{analiza4}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 4 z analizy.
- $x_{fizyka1}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 1 z fizyki.
- $x_{fizyka2}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 2 z fizyki.
- $x_{fizyka3}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 3 z fizyki.
- $x_{fizyka4}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 4 z fizyki.
- $x_{chemmin1}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 1 z chemii minerałów.
- $x_{chemmin2}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 2 z chemii minerałów.
- $x_{chemmin3}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 3 z chemii minerałów.
- $x_{chemmin4}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 4 z chemii minerałów.

- $x_{chemorg1}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 1 z chemii organicznej.
- $x_{chemorg2}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 2 z chemii organicznej.
- $x_{chemorg3}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 3 z chemii organicznej.
- $x_{chemorg4}$ - zmienna decyzyjna oznaczająca wybór (lub jego brak) grupy zajęciowej numer 4 z chemii organicznej.

Za pomocą wartości $v,\ v \in \{0, 1\}$ tych zmiennych decyzyjnych, jestem w stanie wyrazić plan jak wybór poszczeólnych grup zajęciowych (przy czym w obrębie jednego przedmiotu wybieram tylko jedną grupę zajęciową). Podane zmienne decyzyjne opisują wybór danej grupy zajęciowej (lub jego brak) zatem nie muszą mieć żadnych jednostek.

Ułożony plan musi spełniać pewne ograniczenia. Pierwszym, naturalnym ograniczeniem jest to, że student nie może zapisywać się na kolidujące (czasowo) ze sobą zajęcia (to się tyczy również zajęć sportowych). Ograniczenia, które nam to gwarantują są następującej postaci:

$$x_{algebra1} + x_{analiza1} \leq 1 \tag{21}$$
$$x_{chemmin1} + x_{chemmin2} \leq 1 \tag{22}$$
$$x_{chemmin1} + x_{chemorg1} \leq 1 \tag{23}$$
$$x_{chemmin2} + x_{chemorg1} \leq 1 \tag{24}$$
$$x_{algebra2} + x_{analiza2} \leq 1 \tag{25}$$
$$x_{algebra2} + x_{fizyka1} \leq 1 \tag{26}$$
$$x_{algebra2} + x_{fizyka2} \leq 1 \tag{27}$$
$$x_{analiza2} + x_{fizyka2} \leq 1 \tag{28}$$
$$x_{algebra3} + x_{analiza3} \leq 1 \tag{29}$$
$$x_{algebra4} + x_{analiza3} \leq 1 \tag{30}$$
$$x_{chemmin4} + x_{chemorg4} \leq 1 \tag{31}$$

Powyższe ograniczenia powstały poprzez rozpisanie planu tygodniowego i zobaczenie, które konkretnie grupy zajęciowe kolidują ze sobą w danym dniu. W tych ograniczeniach wyrażamy fakt, że student może zapisać się tylko na jedną z kolidujących ze sobą grup zajęciowych.

Następnym ograniczeniem, jest fakt, że student musi się zapisać tylko na jedną grupę zajęciową z danego przedmiotu. Ten fakt wyrażamy następującymi ograniczeniami:

$$x_{algebra1} + x_{algebra2} + x_{algebra3} + x_{algebra4} = 1 \tag{32}$$
$$x_{analiza1} + x_{analiza2} + x_{analiza3} + x_{analiza4} = 1 \tag{33}$$
$$x_{fizyka1} + x_{fizyka2} + x_{fizyka3} + x_{fizyka4} = 1 \tag{34}$$
$$x_{chemmin1} + x_{chemmin2} + x_{chemmin3} + x_{chemmin4} = 1 \tag{35}$$
$$x_{chemorg1} + x_{chemorg2} + x_{chemorg3} + x_{chemorg4} = 1 \tag{36}$$

Kolejnym ograniczeniem jest fakt, że student nie chce mieć więcej niż 4 godziny ćwiczeń dziennie. Po rozpisaniu tygodniowego planu (jakie zajęcia w jakim dniu), uzyskujemy następujące ograniczenia:

$$x_{algebra1} + x_{analiza1} + x_{chemmin1} + x_{chemmin2} + x_{chemorg1} + x_{chemorg2} \leq 4 \tag{37}$$
$$x_{algebra2} + x_{analiza2} + x_{fizyka1} + x_{fizyka2} \leq 4 \tag{38}$$
$$x_{analiza4} + x_{fizyka3} + x_{fizyka4} + x_{chemmin3} \leq 4 \tag{39}$$
$$x_{analiza4} + x_{fizyka3} + x_{fizyka4} + x_{chemmin3} \leq 4 \tag{40}$$
$$x_{chemmin4} + x_{chemorg3} + x_{chemorg4} \leq 4 \tag{41}$$

Mówiąc wprost - suma jedynek (wybranych grup zajęciowych) w ciągu jednego dnia, nie może być większa niż 4.

Następnym ograniczeniem jest fakt, że student chce mieć codziennie między 12 a 14 jedną godzinę wolną. Po rozpisaniu planu tygodniowego, można dojść do wniosku, że problem z tym ograniczeniem występuje jedynie w piątek. Zatem mamy następujące ograniczenia:

$$x_{chemorg3} + x_{chemorg4} \leq 1 \tag{42}$$
$$x_{chemorg3} + x_{chemmin4} \leq 1 \tag{43}$$

Ostatnie ograniczenia są związane z zajęciami sportowymi. Na początku wyrazimy fakt, że student może trenować 1, 2 lub 3 razy w tygodniu:

$$1 \leq x_{sportclasses1} + x_{sportclasses2} + x_{sportclasses3} \leq 3 \tag{44}$$

Kolejne ograniczenia wyrażają fakt, że student nie może być na zajęciach obowiązkowych i sportowych jednocześnie oraz, że student musi mieć godzinną przerwę między

12 a 14:

$$x_{sportclasses1} + x_{algebra1} \leq 1 \quad (45)$$
$$x_{sportclasses1} + x_{analiza1} \leq 1 \quad (46)$$
$$x_{algebra3} + x_{sportclasses2} \leq 1 \quad (47)$$
$$x_{analiza3} + x_{sportclasses2} \leq 1 \quad (48)$$
$$x_{algebra4} + x_{sportclasses2} \leq 1 \quad (49)$$
$$x_{analiza3} + x_{sportclasses3} \leq 1 \quad (50)$$
$$x_{algebra4} + x_{sportclasses3} \leq 1 \quad (51)$$

Tutaj działa podobne rozumowanie jak w przypadku ograniczeń dotyczących kolizji zajęć (w wyprowadzeniu tych ograniczeń trzeba skorzystać z tygodniowego planu). Dwa pierwsze ograniczenia odpowiadają za kolidujące zajęcia w poniedziałki a reszta za kolidujące zajęcia i godzinną przerwę w środy.

Maksymalizowana funkcja celu jest po prostu sumą iloczynów wyborów (wartości $\in \{0,1\}$) i odpowiadających im punktów preferencyjnych:

$$\begin{gathered} F = 5x_{algebra1} + 4x_{algebra2} + 10x_{algebra3} + 5x_{algebra4} + 4x_{analiza1} \\ + 4x_{analiza2} + 5x_{analiza3} + 6x_{analiza4} + 3x_{fizyka1} + \\ 5x_{fizyka2} + 7x_{fizyka3} + 8x_{fizyka4} + 10x_{chemmin1} + \\ 10x_{chemmin2} + 7x_{chemmin3} + 5x_{chemmin4} + 0x_{chemorg1} + 5x_{chemorg2} + \\ 3x_{chemorg3} + 4x_{chemorg4} + 0x_{sportclasses1} + 0x_{sportclasses2} + 0x_{sportclasses3} \end{gathered} \quad (52)$$

Jest to zgodne z sformułowaniem problemu, który rozwiązujemy. Dodatkowe zmienne decyzyjne, które odpowiadają za wybór (lub jego brak) poszczególnych zajęć sportowych mają punkty preferencyjne równe 0, więc nie wpływają na funkcję celu. Można je traktować jako dodatkowe zmienne, których celem jest ułatwienie zapisu ograniczeń w modelu.

Po rozwiązaniu modelu otrzymałem następujący plan zajęć dla studenta:

Poniedziałek	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek
Chemia minerałów (8-10)	-	Algebra (10 - 12)	Analiza (8 - 10)	-
Chemia organiczna (10:30 - 12)	-	-	Fizyka (17 - 20)	-
Zajęcia sportowe (13 - 15)	-	-	-	-
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-

Uzyskana suma ważona punktów preferencyjnych wynosi 39. Jak widać plan spełnia wszystkie postawione ograniczenia. Ponadto widać, że wszystkie zajęcia są zgrupowane w poniedziałki, środy oraz czwartki i wszystkie punkty preferencyjne wybranych grup zajęciowych są nie mniejsze niż 5. Nie ma zgrupowania zajęć we wtorki, ponieważ zadaniem jest maksymalizacja funkcji celu a 3 z 4 grup ćwiczeniowych odbywających się we wtorki ma mniej niż 5 punktów preferencyjnych (grupa ćwiczeniowa z fizyki ma dokładnie 5 punktów preferencyjnych).

Źródła modelu znajdują się w pliku z4.mod.