

Analiza wektorowa

Bartosz Węgrzyn

29 marca 2024

1 Analiza wektorowa

1.1 Operatory różniczkowe

1.1.1 Operator nabla

Operator nabla ∇ , oznaczany przez literę del, jest zdefiniowany jako

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (1)$$

Nie jest to prawdziwy wektor, a operator.

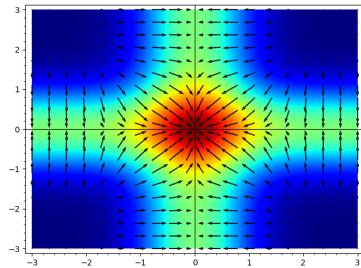
1.1.2 Gradient

Gradientem funkcji skalarnej nazywamy pole wektorowe określone jako:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad (2)$$

Gradient mówi nam w którą stronę funkcja najbardziej rośnie. Na rysunku 1 przedstawiona jest funkcja skalarna $f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-y^2}$, której gradientem jest $\nabla f = -2xe^{-x^2} \hat{i} - 2ye^{-y^2} \hat{j}$.

Pomocne okazuje się wyobrażenie sobie pól wektorowych jako prędkości przepływu wody. Dla gradientu, jeśli wartość funkcji skalarnej dwóch zmiennych w



Rysunek 1

danym miejscu jest wysokość w osi z, otrzymujemy "górzysty teren". Teraz jeśli będziemy polewać go równomiernie wodą, minus gradient tej funkcji wskaże nam zwrot wektora prędkości wody w danym miejscu i jego względową wartość. Jeśli funkcja skalarna 3 zmiennych w danym miejscu w przestrzeni wskazuje nam gęstość pewnego gazu, to zwrot wektora prędkości gazu i jego względna wartość w tej przestrzeni będzie określona przez minus gradient tego pola (gaz płynie z miejsc o większej gęstości do tych o mniejszej gęstości, stąd znak minus).

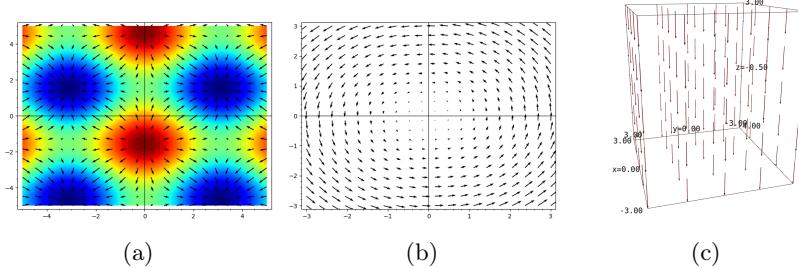
1.1.3 Dywergencja

Dywergencją pola wektorowego nazywamy funkcję skalarną

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (3)$$

W analogii z wodą, miejsca o dodatniej dywergencji będą "źródłami", a miejsca o ujemnej dywergencji "zlewami". Można rozumieć też to tak, że jeśli dywergencja jest ujemna, to do danego punktu "wpływa" więcej wody niż z niego "wypływa" i na odwrót.

Rysunek 2a przedstawia pole wektorowe $\vec{F} = (\sin x)\hat{i} + (\cos y)\hat{j}$ i jego dywergencję w danym miejscu.



Rysunek 2

1.1.4 Rotacja

Rotacją pola wektorowego nazywamy pole wektorowe

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (4)$$

Rotacja mówi, jak bardzo pole wektorowe wiruje. Wracając do analogii z wodą: jeśli w wodzie w pewnym punkcie umieścimy koło wodne i zacznie ono wirować, pole wektorowe przedstawiające prędkość wody ma w tym miejscu niezerową rotację. Gdy koło wiruje zgodnie z wskazówkami zegara, rotacja jest ujemna, a gdy przeciwnie do wskazówek zegara, rotacja jest dodatnia.

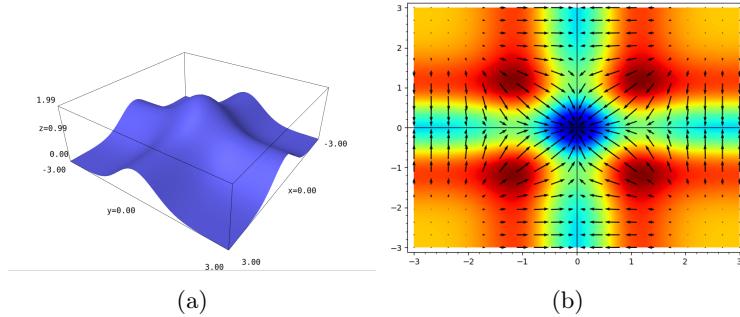
Na rysunku 2b przedstawione jest pole wektorowe $\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j}$, a na rysunku 2c jego rotacja $\nabla \times \vec{F} = -2\hat{k}$. Zauważmy, że rotacja jest wektorem. Aby stwierdzić jednak stopień wirowości pola przydatnym okazuje się wzięcie modułu tego wektora. W tym przypadku wartość rotacji wszędzie jest taka sama (tzn. koło wodne wszędzie obracało się z taką samą prędkością).

1.1.5 Laplasjan

Laplasjanem pola skalarnego nazywamy dywergencję jego gradientu:

$$\nabla^2 f = \Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (5)$$

Posługując się intuicją z wodą: jeśli do danego punktu "wpływa" mniej gradientu niż z niego "wypływa", laplasjan będzie dodatni. Czyli laplasjan jest miarą zmiany "pochyłości" pewnej funkcji.



Rysunek 3

Na rysunku 3a przedstawione jest wcześniejsze pole skalarne $f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-y^2}$. Na rysunku 3b jest przedstawiony gradient tego pola i jego laplasjan. Jak widzimy, na samym środku, gdzie mamy "szczyt górkę" w polu skalarnym, laplasjan jest najbardziej ujemny. Jest tak, ponieważ tam bardzo szybko "pochyłość" pola maleje. Wzdłuż 4 "ramion górkę" laplasjan jest równy 0, ponieważ tam jej "pochyłość" jest stała.

1.1.6 Inne pochodne drugiego rzędu

Dywergencja rotacji:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (6)$$

Rotacja gradientu:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (7)$$

1.2 Całki

1.2.1 Parametryzacja łuków i krzywych

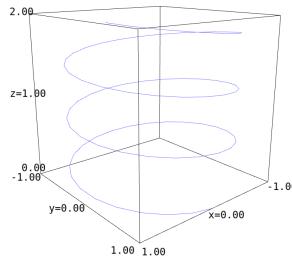
Do parametryzacji łuków i krzywych używamy równań parametrycznych. Za pomocą jednej zmiennej określamy 3 współrzędne, które są funkcjami tej zmiennej i tworzą dla danej wartości zmiennej punkt. Nieskończanie wiele tych punktów tworzy łuk lub krzywą.

Linię daną równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ lub $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ nazywamy łukiem gładkim jeżeli dla tych samych wartości t otrzymujemy takie same współrzędne, funkcje x, y, z są klasy C^1 (mają pierwszą pochodną) oraz $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \neq 0$ (gdyby funkcje były stałymi lub równe 0, ten warunek nie byłby spełniony, a linia była by po prostu punktem).

Zapis: $x(t) \equiv x$, $y(t) \equiv y$, $z(t) \equiv z$, $\vec{r}(t) \equiv \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

Punktem początkowym łuku nazywamy punkt $\vec{r}(\alpha) \equiv A$, a punktem końcowym $\vec{r}(\beta) \equiv B$. Łuk oznaczamy wtedy jako \widehat{AB} .

Przykładowy łuk sparametryzowany jako $\vec{r} = \hat{i} \sin t + \hat{j} \cos t + 0.1t\hat{k}$ jest przedstawiony na rysunku 4.



Rysunek 4

Krzywą gładką nazywamy linię którą da się ją podzielić na skończoną liczbę łuków gładkich oraz funkcje x, y, z są ciągłe w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$.

1.2.2 Całka krzywoliniowa nieskierowana

Jak obliczyć długość danej krzywej? Musimy zsumować nieskończanie wiele małych przesunięć wzdłuż tej krzywej. Takie przesunięcie jest dane jako

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

Jego długość wynosi wtedy:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Zsumujmy to za pomocą całki:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} r' dt \quad (8)$$

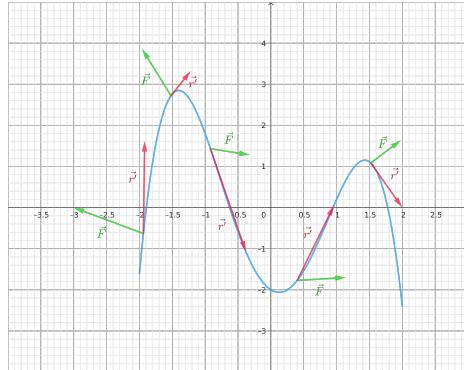
Zatem długość danego łuku jest wyrażona powyższą całką. Całka krzywoliniowa nieskierowana mnoży długość małego odcinka łuku w każdym punkcie razy wartość pewnej funkcji skalarnej w tym punkcie. Zatem całka krzywoliniowa nieskierowana z funkcji $f(x, y, z)$ wzdłuż łuku \mathcal{L} będzie wyglądać następująco:

$$\int_{\mathcal{L}} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) \cdot r' dt \quad (9)$$

1.2.3 Całka krzywoliniowa skierowana

Co jeśli chcemy obliczyć pracę wykonaną przez pewną siłę, która poruszyła ciało po pewnej krzywej \mathcal{L} ? Jak wiemy mała zmiana pracy jest równa iloczynowi skalarnemu wektora siły i infinitezymalnego przesunięcia (rysunek 5):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (10)$$



Rysunek 5

Zatem abytrzymać całkowitą pracę:

$$W = \int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (11)$$

Powyższa całka nazywa się krzywoliniową skierowaną. Niech pole wektorowe będzie określone jako $\vec{F} = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$. Wtedy obliczamy ją następująco:

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \quad (12)$$

gdzie $dx = x' dt$, $dy = y' dt$, $dz = z' dt$

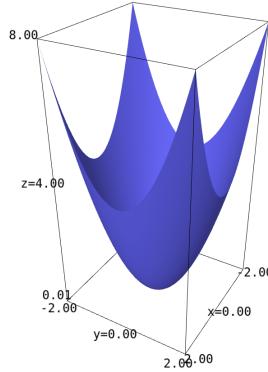
Zauważmy, że wykonaliśmy operację iloczynu skalarnego.

1.2.4 Parametryzacja powierzchni

Niech będą dane 2 zmienne u, v . Równanie parametryczne płata powierzchniowego wygląda wtedy następująco:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \quad (13)$$

u i v są współrzędnymi na płacie powierzchniowym. Założymy teraz że u jest stałe. Dostajemy teraz równanie parametryczne dla krzywej. Tak więc widzimy, że płyt powierzchniowy jest złożony z nieskończenie wielu krzywych, tak jak krzywa jest z nieskończenie wielu punktów. Rysunek 6 przedstawia płyt po-



Rysunek 6

wierzchniowy sparametryzowany jako $\vec{r}(u, v) = u\hat{i} + v\hat{j} + (u^2 + v^2)\hat{k}$. Jak widzimy, jest on złożony z wielu krzywych będących parabolami.

Jednak jak pamiętamy, funkcje 2 zmiennych również tworzą płyty powierzchniowe. Widzimy, że dla płyta z rysunku 6:

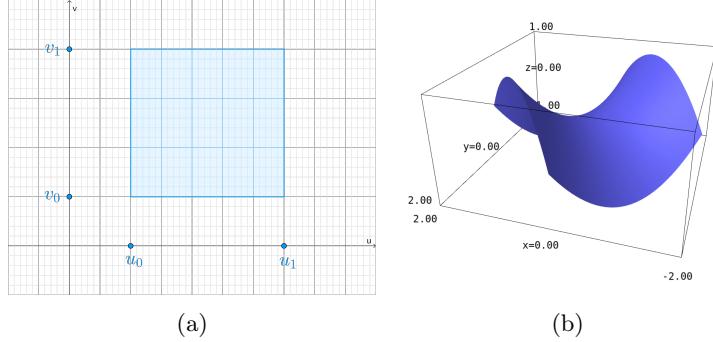
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases} \implies z = x^2 + y^2 \text{ (inny sposób parametryzacji płyta z rysunku 6)}$$

1.2.5 Całka powierzchniowa nieskierowana

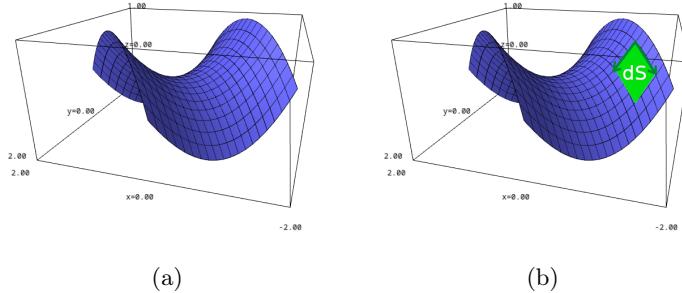
Całka powierzchniowa nieskierowana wygląda podobnie do krzywoliniowej nieskierowanej: sumujemy nieskończenie wiele małych elementów powierzchni pomnożonych razy wartość pewnej funkcji skalarnej w tym punkcie (nieskończonie mały element powierzchni można potraktować jako punkt).

Najpierw zrozummy dokładnie czym są współrzędne u, v . Wyobraźmy sobie układ współrzędnych u, v . Jeśli $u \in \langle a, b \rangle$ i $v \in \langle c, d \rangle$, mamy w naszym układzie prostokąt (rysunek 7a).

Weźmy teraz płyt powierzchniowy z rysunku 7b o parametryzacji typu $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$. "Rozłożymy" na nim układ współrzędnych u, v (rysunek 8a).



Rysunek 7



Rysunek 8

Aby obliczyć pole powierzchni płata musimy zsumować nieskończonie wiele małych kawałków tego płata. Pole takiego kawałka możemy obliczyć jako:

$$dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dv du$$

Jak wiemy, długość wektora powstałego z iloczynu wektorowego jest równa polu równoległoboku stworzonego przez mnożone wektory (rysunek 8b). Przez to tam, gdzie wektory te są bardziej zbieżne (np. przy "biegunie" sfery), pole będzie mniejsze. du i dv stąd, że musimy pomnożyć każdy z wektorów wskazujący kierunek największej zmiany u lub v razy nieskończonie mały element du lub dv .

Zatem pole całego takiego płata jest równe:

$$\iint_S dS = \int_a^b \int_c^d |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dv du \quad (14)$$

Dla płata o parametryzacji $z = f(x, y)$ można wykazać, że:

$$\iint_S dS = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (15)$$

Zatem całka powierzchniowa nieskierowana funkcji skalarnej $f(x, y, z)$ po płacie \mathcal{S} jest równa:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dv du \quad (16)$$

lub dla płata określonego równaniem $z = g(x, y)$:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (17)$$

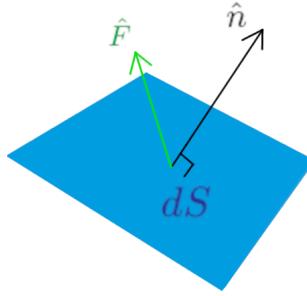
Jeśli na płacie \mathcal{S} jest rozłożony ładunek z gęstością powierzchniową σ , to całka powierzchniowa nieskierowana gęstości ładunku po tym płacie jest całkowitym ładunkiem na tym płacie.

1.2.6 Całka powierzchniowa skierowana

Całka powierzchniowa skierowana, nazywana też strumieniem, polega na wzięciu iloczynu skalarnego pola wektorowego oraz wektora jednostkowego normalnego do powierzchni w danym miejscu i pomnożenie go razy nieskończonym elementem powierzchni.

Z rysunku 8b widać, że w każdym punkcie do powierzchni będzie normalny wektor $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$. Aby jednak jego wartość nie miała wpływu na wynik, potrzebujemy wektora jednostkowego (rysunek 9):

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$$



Rysunek 9

Następnie obliczymy całkę zgodnie ze wcześniejszą definicją:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \\ &= \int_a^b \int_c^d \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dv du = \int_a^b \int_c^d \vec{F} \cdot (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) dv du \end{aligned}$$

1.2.7 Całka objętościowa

Całka objętościowa pozwala, oprócz objętości, np. wyznaczyć masę lub moment bezwładności 3-wymiarowych ciał o nieregularnym kształcie.

Rozważmy objętość określona jako:

$$x, y, z \in \langle -1, 1 \rangle$$

Jest to sześciian o boku długości 2. Założymy że jego gęstość jest stała i wynosi $\rho = 2$. Aby obliczyć jego masę:

$$M = \int dm = \rho \iiint_{\mathcal{V}} dV$$

A więc mamy

$$M = 2 \iiint_{\mathcal{V}} dV = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy dz = 16$$

Wyrowadźmy również wzór na objętość kuli. Kula we wsp. sferycznych jest dana jako:

$$\begin{cases} r \in \langle 0, R \rangle \\ \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \theta \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$$

Obliczając całkę objętościową, mamy:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} dV &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta = \frac{1}{3} R^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\phi d\theta = \\ &= \frac{2}{3} \pi R^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

1.3 Potencjały

1.3.1 Potencjał skalarny

Każde pole wektorowe o zerowej rotacji można przedstawić jako gradient pola skalarnego V zwanego potencjałem skalarnym:

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = -\nabla V \quad (18)$$

(znak minus wynika z konwencji).

Dla takiego pola wartość całki krzywoliniowej skierowanej między dwoma dowolnymi punktami nie zależy od wyboru drogi całkowania, a jedynie od wartości pola wektorowego w tych punktach. Stąd mamy:

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \text{ gdzie } \alpha = \beta \quad (19)$$

i stąd wynika, że:

$$\int_{\mathcal{F}} (\nabla f) \cdot d\vec{r} = 0, \text{ gdzie } \alpha = \beta \quad (20)$$

Można również zauważyć, że:

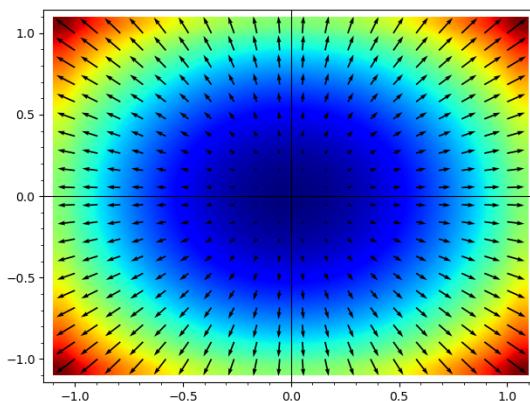
$$\int_{\gamma} (\nabla f) \cdot d\vec{r} = f(\beta) - f(\alpha) \quad (21)$$

Takie pole wektorowe nazywamy zachowawczym. Z fizycznego punktu widzenia oznacza to, że np. poruszając się w takim polu sił nie ma strat energii mechanicznej (np. pole grawitacyjne). W polach sił niezachowawczych takie występują (pole sił oporów).

W fizyce, potencjał skalarny w danym punkcie jest energią potencjalną na jednostkę np. masy lub ładunku.

Do potencjału V można dodawać dowolne stałe, ponieważ nie wpłynie to na wartość gradientu.

Na rysunku 10 przedstawione jest pole wektorowe $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$ i jego potencjał $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ (stałą przyjęto za 0).



Rysunek 10

1.3.2 Potencjał wektorowy

Każde pole wektorowe o zerowej dywergencji można przedstawić jako rotację innego pola wektorowego \vec{A} zwanego potencjałem wektorowym:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = \nabla \times \vec{A} \quad (22)$$

W takim polu:

$$\oint\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (23)$$

oraz

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (24)$$

nie zależy od wyboru powierzchni całkowania dla powierzchni, których brzegiem jest ta sama krzywa.

Do pola \vec{A} można dodawać dowolne gradienty, ponieważ rotacja gradientu jest równa zero.

Każde pole wektorowe można przedstawić jako sumę pola o zerowej rotacji i pola o zerowej dywergencji:

$$\vec{F} = -\nabla f + \nabla \times \vec{A} \quad (25)$$

1.4 Twierdzenia

1.4.1 Twierdzenie Greena

Niech będzie dane 2-wymiarowe pole wektorowe:

$$\vec{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

Weźmy krzywą regularną (krzywą złożoną z krzywych gładkich) zamkniętą \mathcal{C} , będącą brzegiem obszaru \mathcal{D} . Krzywa jest zorientowana dodatnio (tzn. droga całkowania jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara). Zakładamy, że pole \vec{F} posiada pierwszą pochodną na tym obszarze. Twierdzenie Greena mówi wtedy, że:

$$\oint_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot d\vec{S} \quad (26)$$

1.4.2 Twierdzenie Stokesa

Można powiedzieć, że twierdzenie Stokesa jest uogólnionym twierdzeniem Greena dla 3 wymiarów.

Zauważmy, że po prawej stronie twierdzenia Greena, wewnątrz całki powierzchniowej, mamy rotację pola \vec{F} (a konkretnie jej moduł). Zapiszmy więc, że (opuszczając znak modułu):

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (27)$$

Twierdzenie Greena zakłada jedynie prawdziwość powyższego wzoru dla pól i krzywych 2 wymiarowych. Okazuje się on jednak poprawny dla pól i krzywych 3 wymiarowych. Wzór (27) nazywamy twierdzeniem Stokesa, gdzie \mathcal{D} jest dowolnym obszarem otwartym, a \mathcal{C} jest jego konturem.

Intuicja dla twierdzenia Stokesa (i Greena): założymy, że caulkę krzywoliniową liczymy po okręgu. Wyobrażając sobie pole wektorowe jako ruch wody, jeśli jej ruch jest jednorodny (np. jak w rzece), całka będzie równa zero (iloczyn skalarny po jednej stronie zniesie się z tym po drugiej). Jeśli jednak woda wiruje

(pole ma niezerową rotację), iloczyn skalarny po obu stronach będzie miał jednakowe znaki i się "wzmocni". Widzimy zatem, że ta całka krzywoliniowa jest w pewnym sensie miarą rotacji danego pola. Dlatego sumując rotację po płacie, którego ta krzywa jest konturem, otrzymujemy również pewną miarę rotacji w tym obszarze.

1.4.3 Inna definicja rotacji

Z twierdzenia Greena możemy ponownie zdefiniować rotację. Skoro obie całki są miarą rotacji w pewnym obszarze, to aby dostać wartość rotacji w jednym punkcie, pole tego obszaru musi dążyć do 0. Założymy, że pole powierzchni naszego obszaru oznaczamy jako R . Wtedy:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = |R| |\nabla \times \vec{F}| \right)$$

(całkę powierzchniową zastąpiliśmy po prostu polem powierzchni). Przekształcając, mamy definicję rotacji z użyciem całki:

$$|\nabla \times \vec{F}| = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|R|} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (28)$$

gdzie C jest konturem powierzchni, której pole dąży do zera.

Sprawdźmy wartość rotacji pola 2 wymiarowego danego jako $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$. Przyjmijmy, że powierzchnia jest kwadratem o boku a , którego boki są równoległe do osi x i y. Wtedy całka krzywoliniowa będzie równa:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \vec{F} \cdot \vec{a}_1 + \vec{F} \cdot \vec{a}_2 + \vec{F} \cdot \vec{a}_3 + \vec{F} \cdot \vec{a}_4 = \\ &= P(x, y + dy)a + Q(x, y)a - P(x, y)a - Q(x + dx, y)a \end{aligned}$$

$R = dx dy$, a $a = dx = dy$ więc:

$$|\nabla \times \vec{F}| = \frac{P(x, y + dy) - P(x, y)}{dy} - \frac{Q(x + dx, y) - Q(x, y)}{dx}$$

Zauważmy, że wyrażenia po prawej stronie równania to pochodne cząstkowe. Ostatecznie mamy:

$$|\nabla \times \vec{F}| = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (29)$$

co zgadza się z wynikiem, jaki byśmy otrzymali obliczając rotację za pomocą iloczynu wektorowego.

1.4.4 Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa

Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa mówi, że:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV \quad (30)$$

gdzie \mathcal{V} jest objętością wewnętrz powierzchni zamkniętej \mathcal{S} .

Analogia z wodą: całka po lewej stronie twierdzenia (strumień), mówi jak wiele wody wypływa poza powierzchnię. Jeśli wewnętrz powierzchni nie ma źródeł lub się nawzajem znoszą, strumień jest zerem. Jeśli jednak wewnętrz powierzchni znajdują się źródło lub zlew, z powierzchni będzie wypływać woda i strumień nie będzie zerowy. Całka po prawej stronie sumuje wszystkie źródła wewnętrz tej objętości.

1.5 Przykłady

1.5.1 Przykład 1

Obliczyć ilość ładunku na drucie o długości l naładowanym niejednorodnie ładunkiem z gęstością liniową równą $\lambda = \sin t$, gdzie $t \in \langle 0, l \rangle$. Drut potraktuj jako nieskończenie cienki.

Od razu widać, że będziemy mieć do czynienia z całką krzywoliniową nieskierowaną. Drut można sparametryzować jako:

$$\vec{r} = t\hat{i}, t \in \langle 0, l \rangle$$

Liczymy teraz całkę:

$$Q = \int_L \lambda(t) dl = \int_0^l \lambda(t) dt = \int_0^l \sin t dt = [-\cos t]_0^l = -\cos l - (-\cos 0) = 1 - \cos l$$

1.5.2 Przykład 2

Wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej w odległości \vec{r} od nieskończenie cienkiego i długiego przewodnika, w którym płynie prąd o stałym natężeniu I w kierunku zgodnym z wektorem $d\vec{l}$. Wektor $d\vec{l}$ jest skierowany zgodnie z osią x . Posłużyć się prawem Biota-Savarta:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I |d\vec{l} \times \vec{r}'|}{r'^3}$$

gdzie \vec{r}' jest odlegością od $d\vec{l}$.

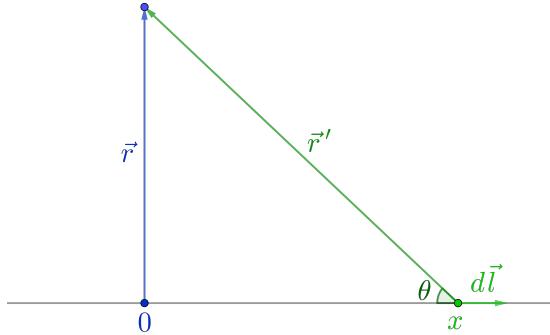
Zauważmy, że przewodnik jest zawsze symetryczny (jest nieskończenie długi). Zatem możemy obliczyć wartość pola dla jednej połowy przewodnika, a wynik następnie pomnożyć razy 2.

Parametryzacja przewodnika:

$$x \in \langle 0, +\infty \rangle$$

Wartość wektora r' można łatwo obliczyć z tw. Pitagorasa:

$$r' = \sqrt{x^2 + r^2}$$



Rysunek 11

Wartość iloczynu wektorowego jest równa

$$\begin{aligned} |d\vec{l} \times \vec{r}'| &= r' \sin \theta \, dl \\ \sin \theta &= \frac{r}{r'} \\ |d\vec{l} \times \vec{r}'| &= r \, dl \end{aligned}$$

Nateżenie prądu możemy wyciągnąć przed całkę, gdyż jest jednakowe w całym przewodniku. Wstawiając wszystko do wzoru otrzymujemy:

$$B = 2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{+\infty} \frac{r \, dx}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Obliczając całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{r \, dx}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} &= \left[\frac{x}{r\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{r} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (r/x)^2}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{r\sqrt{x^2 + r^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{r} (1 - 0) = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

1.5.3 Przykład 3

Obliczyć ilość ładunku zawartego wewnątrz sfery o promieniu R który wytwarza pole elektryczne $\vec{E} = \frac{1}{r^2} \hat{r}$. Posłużyć się prawem Gaussa:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \Phi_E \quad (31)$$

gdzie Φ_E to strumień \vec{E} przez powierzchnię sfery.

Przekształcając prawo Gaussa:

$$Q = \varepsilon_0 \Phi_E$$

Wiemy, że strumień dowolnego pola \vec{E} przez pewną powierzchnię to całka powierzchniowa skierowana tego pola wektorowego przez tę powierzchnię:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Wiemy, że wektor $d\vec{S}$ jest równy

$$d\vec{S} = \hat{n} dS$$

Powierzchnia parametryzuje się jako:

$$\begin{cases} r = R \\ \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \theta \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$$

i stąd

$$dS = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Wektor normalny \hat{n} to wektor \hat{r} , więc iloczyn skalarny wynosi:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}$$

Podstawiając wszystko do całki, mamy:

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \\ &= 2\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi\varepsilon_0 \end{aligned}$$

1.5.4 Przykład 4

Wiedząc, że torus jest zadany równaniami parametrycznymi:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \phi \\ z = r \sin \theta \\ \phi, \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{cases}$$

gdzie r to promień okręgu definiującego torus, a R to odległość środka okręgu od osi obrotu, obliczyć pole powierzchni torusa.

Jak wiemy, do obliczenia pola powierzchni będzie potrzebna całka powierzchniowa nieskierowana po polu przyjmującym wszędzie wartość 1:

$$f(x, y, z) = 1$$

$$S = \iint_S f \, dS$$

We wsp. sferycznych $dS = |\vec{r}'_\theta \times \vec{r}'_\phi| \, d\theta \, d\phi$

$$\begin{aligned} \vec{r}'_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\hat{i}(R + r \cos \theta) \cos \phi + \hat{j}(R + r \cos \theta) \sin \phi + \hat{k}r \sin \theta \right] = \\ &= -\hat{i}r \sin \theta \cos \phi - \hat{j}r \sin \theta \sin \phi + \hat{k}r \cos \theta \\ \vec{r}'_\phi &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\hat{i}(R + r \cos \theta) \cos \phi + \hat{j}(R + r \cos \theta) \sin \phi + \hat{k}r \sin \theta \right] = \\ &= -\hat{i}(R + r \cos \theta) \sin \phi + \hat{j}(R + r \cos \theta) \cos \phi \\ \vec{r}'_\theta \times \vec{r}'_\phi &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r \sin \theta \cos \phi & r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \\ (R + r \cos \theta) \sin \phi & (R + r \cos \theta) \cos \phi & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\hat{i}r(R + r \cos \theta) \cos \theta \cos \phi + \hat{j}r(R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \phi + \\ &\quad -2\hat{k}(r \sin \theta)(R + r \cos \theta) \\ |\vec{r}'_\theta \times \vec{r}'_\phi| &= \\ &= r(R + r \cos \theta) \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta} = \\ &= r(R + r \cos \theta) \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = r(R + r \cos \theta) \\ dS &= (rR + r^2 \cos \theta) \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

Obliczając całkę:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} rR + r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\phi = r \int_0^{2\pi} [R\theta + r \sin \theta]_0^{2\pi} \, d\phi = \\ &= r \int_0^{2\pi} 2\pi R \, d\phi = 4\pi^2 rR \end{aligned}$$

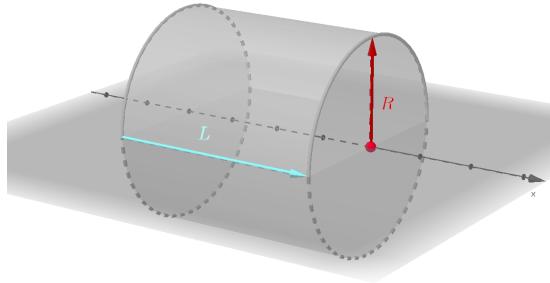
1.5.5 Przykład 5

Wyznaczyć moment bezwładności jednorodnego walca o masie M , promieniu R i długości L wokół osi x zaznaczonej na rysunku 12. Posłużyć się wzorem:

$$I = \int r^2 \, dm$$

gdzie dm to nieskończenie mały kawałek masy, a r to odległość tego kawałka od osi obrotu. Posłużyć się współrzędnymi walcowymi.

dm możemy przestawić jako $\rho \, dV$, gdzie ρ to gęstość walca (która jest wszędzie stała, ponieważ walec jest jednorodny), a dV to nieskończenie mały kawałek objętości. We wsp. walcowych, ten kawałek jest równy $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$.



Rysunek 12

Odległość od osi obrotu będzie równa r , gdzie $r \in \langle 0, R \rangle$. Cała parametryzacja to:

$$\begin{cases} r \in \langle 0, R \rangle \\ \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ z \in \langle 0, L \rangle \end{cases}$$

Podstawiając wszystko do wzoru:

$$I = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta dz = \frac{\rho R^4}{4} \int_0^L \int_0^{2\pi} d\theta dz = \frac{\pi \rho R^4}{2} \int_0^L dz = \frac{\pi \rho R^4 L}{2}$$

Wiemy, że masa walca to

$$M = \rho V = \pi \rho R^2 L \implies \rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

podstawiając ρ do wyniku:

$$I = \frac{\pi M R^4 L}{2 \pi R^2 L} = \frac{1}{2} M R^2$$

Spis treści

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Analiza wektorowa | 1 |
| 1.1 | Operatory różniczkowe | 1 |
| 1.1.1 | Operator nabla | 1 |
| 1.1.2 | Gradient | 1 |
| 1.1.3 | Dywergencja | 2 |
| 1.1.4 | Rotacja | 2 |
| 1.1.5 | Laplasjan | 3 |
| 1.1.6 | Inne pochodne drugiego rzędu | 3 |
| 1.2 | Całki | 4 |
| 1.2.1 | Parametryzacja łuków i krzywych | 4 |
| 1.2.2 | Całka krzywoliniowa nieskierowana | 4 |
| 1.2.3 | Całka krzywoliniowa skierowana | 5 |
| 1.2.4 | Parametryzacja powierzchni | 6 |
| 1.2.5 | Całka powierzchniowa nieskierowana | 6 |
| 1.2.6 | Całka powierzchniowa skierowana | 8 |
| 1.2.7 | Całka objętościowa | 9 |
| 1.3 | Potencjały | 9 |
| 1.3.1 | Potencjał skalarny | 9 |
| 1.3.2 | Potencjał wektorowy | 10 |
| 1.4 | Twierdzenia | 11 |
| 1.4.1 | Twierdzenie Greena | 11 |
| 1.4.2 | Twierdzenie Stokesa | 11 |
| 1.4.3 | Inna definicja rotacji | 12 |
| 1.4.4 | Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa | 12 |
| 1.5 | Przykłady | 13 |
| 1.5.1 | Przykład 1 | 13 |
| 1.5.2 | Przykład 2 | 13 |
| 1.5.3 | Przykład 3 | 14 |
| 1.5.4 | Przykład 4 | 15 |
| 1.5.5 | Przykład 5 | 16 |

Bibliografia

- [1] J. Walker D. Halliday R. Resnick. *Podstawy fizyki, cz.3, wydanie II*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2021.
- [2] David J. Griffiths. *Postawy Elektrodynamiki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.