Oscylator harmoniczny

Bartosz Węgrzyn

30 maja 2024

1 Oscylator harmoniczny

1.1 Oscylator bez tłumienia

1.1.1 Masa na sprężynie

Przyjmijmy, że do sprężyny o współczynniku sprężystości k jest przyczepiona masa m. W układzie nie ma strat energii. Wychylamy tę masę o A z pewnego punktu równowagi i puszczamy. Naszym celem jest znalezienie równania ruchu dla tej masy.

W tym celu posłużymy się mechaniką Lagrange'a. Zauważmy, że nasz układ ma jeden stopień swobody, x. Obliczając energię kinetyczną i potencjalną możemy wyznaczyć Lagrangian:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$
$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Obliczmy pochodne w równaniu Lagrange'a-Eulera:

$$\partial_x \mathcal{L} = -kx$$
$$\partial_{\dot{x}} \mathcal{L} = m\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} \mathcal{L} = m\ddot{x}$$

Skąd otrzmujemy równanie:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \tag{1}$$

Nie trudno zgadnąć, że rozwiązanie tego równania będzie miało postać $x(t) = Ce^{\alpha t}$, gdzie C i α to pewne stałe. Wstawmy więc to odgadnięte rozwiązanie do równania (1):

$$C\alpha^2 e^{\alpha t} = -\frac{k}{m} C e^{\alpha t}$$
$$\alpha^2 = -\frac{k}{m}$$
$$\alpha = i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jednostka urojona pojawia się tu z powodu własności $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Zauważmy też, że stałą C możemy przedstawić jako $C = Ae^{\phi}$, gdzie A i ϕ to również pewne stałe. Mamy wtedy:

$$x(t) = Ae^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)} \tag{2}$$

Zauważmy, że równanie (1) jest również spełnione przez część rzeczywistą (2), która nas będzie interesować. Ostatecznie mamy:

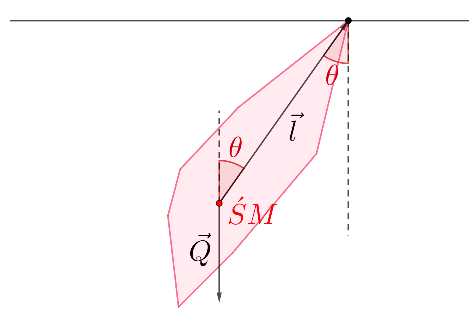
$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right) \tag{3}$$

gdzie $\omega^2 = \frac{k}{m}$ to częstotliwość kątowa oscylacji, ϕ to przesunięcie fazowe i A to amplituda drgań. Okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4}$$

1.1.2 Wahadło fizyczne i matematyczne

Przypadek idealnego wahadła okazuje się bardziej skomplikowany niż przypadek masy na sprężynie. Załóżmy, że odległość środka masy wahadła od osi obrotu to l, wahadło ma masę m i moment bezwładności I. W układzie nie ma strat energii. Zauważmy, że mamy znów jeden stopień swobody - kąt wychylenia wahadła, θ.



Rysunek 1

Tym razem użyjemy mechanikę Newtona. Na wahadło działa moment siły grawitacji, $\overrightarrow{M}$, wynoszący:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{l}$$

gdzie $\overrightarrow{l}$ jest wektorem łączącym oś obrotu wahadła ze środkiem masy wahadła (punktem przyłożenia Q), o długości l. Wartość momentu siły jest dana jako:

$$M = Ql \sin\theta = -mgl \sin\theta$$

$$\text{(minus, ponieważ kąt między } \overrightarrow{Q} \text{ i } \overrightarrow{l} \text{ jest równy } \pi - \theta)$$

Przyspieszenie kątowe będzie wtedy równe:

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{I} = -\frac{mgl \sin\theta}{I} \tag{5}$$

co jest naszym równaniem różniczkowym. Możemy wykonać przybliżenie $\sin\theta \approx \theta$ dla małych kątów, co daje nam:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgl\theta}{I}$$

Rozwiązaniem równania (5), analogicznie do przypadku sprężyny, jest:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{6}$$

gdzie $\omega^2 = \frac{mgl}{I}$. Okres drgań to wtedy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \tag{7}$$

i dla wahadła matematycznego, gdzie $I = ml^2$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8}$$

Pamiętajmy, że jest to jedynie prawdziwe dla małych kątów przez przybliżenie $\sin\theta \approx \theta$.

1.1.3 Wymuszony oscylator harmoniczny

Wspomniana częstotliwość oscylacji podczas drgań swobodnych, ω, to tzw. częstotliwość własna oscylatora i będzie od teraz oznaczana przez ω_0.

Gdy mamy do czynienia z drganiami wymuszonymi, oscylator nie drga z częstotliwością własną, lecz częstotliwością wymuszoną, oznaczaną od teraz przez ω.

Opiszmy oscylator wymuszony za pomocą dynamiki Newtona. Przyjmijmy znów masę m zawieszoną na sprężynie o wsp. sprężstości k, na którą oprócz siły sprężystości działa również siła wymuszająca dana jako $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ (pomijamy przesunięcie fazowe, gdyż będzie ono identyczne dla oscylatora i siły).

Aby znacznie ułatwić sobie obliczenia, zapiszmy $F_c(t) = F_0 e^{i\omega t}$. Zauważmy, że $\mathrm{Re}\,(F_c) = F$. Analogicznie postąpimy z $x(t)$. Ponieważ oscylator drga z częstotliwością wymuszoną, $x_c(t) = Ae^{i\omega t}$. Naszym celem jest znalezienie wartości A.

Układając 2 zasadę dynamiki dla masy mamy:

$$\ddot{x_c} = -\frac{k}{m}x_c + \frac{1}{m}F_c \tag{9}$$

Postawmy wszystko do równania:

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} = -\frac{k}{m}Ae^{i\omega t} + \frac{1}{m}F_0 e^{i\omega t}$$

Wyraz $e^{i\omega t}$ się skróci, pozostawiając:

$$A\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) = \frac{1}{m}F_0$$

Zauważmy, że $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Przekształcając ostatecznie mamy:

$$A = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \tag{10}$$

Z zależności A od ω, widzimy że gdy ω ma wartość bardzo bliską ω_0 zachodzi rezonans mechaniczny. Gdy $\omega = \omega_0$, $A \to \infty$, ponieważ nasz układ nie zawiera tłumienia. W układach rzeczywistych zachodzi tłumienie i taka sytuacja nie ma miejsca.

1.2 Oscylator z tłumieniem

1.2.1 Postać ogólna

Możemy założyć, że na masę na sprężynie działa siła oporów ruchu, która jest wprost proporcjonalna do prędkości masy. Układając 2 zasadę dynamiki dla masy mamy:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} \tag{11}$$

gdzie b to pewien współczynnik. Zgadując, że rozwiązanie ma postać $x_c(t) = Ae^{\alpha t}$:

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} = -\frac{k}{m}Ae^{\alpha t} - \frac{b}{m}A\alpha e^{\alpha t}$$

Po obustronnym podzieleniu przez $Ae^{\alpha t}$ i przekształceniach otrzymujemy:

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0$$

Wyznaczmy α:

$$\alpha = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

gdzie $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ i $\beta = \frac{b}{2m}$ to pewien współczynnik tłumienia. Zatem ogólne rozwiązanie równania (2) ma postać

$$x_c(t) = Ae^{\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} \tag{12}$$

Zdefinujmy również stosunek tłumienia $\zeta = \frac{\beta}{\omega_0}$.

1.2.2 Oscylator bez tłumienia

Gdy $\beta = 0 \iff \zeta = 0$:

$$x_c(t) = Ae^{\pm\sqrt{-\omega_0^2}t} = Ae^{\pm i\omega_0 t}$$

i stąd mamy:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(x_c(t)\right) = A\cos\omega_0 t \tag{13}$$

(pomijamy przesunięcie fazowe). $\cos(x)$ jest funkcją parzystą, więc możemy pominąć $\pm$. Widzimy zatem, że gdy $\beta = 0$, mamy oscylator nietłumiony.

1.2.3 Oscylator słabo tłumiony

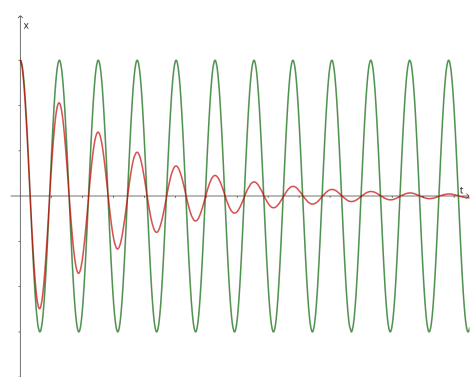
Gdy $\beta^2 < \omega_0^2 \iff 0 < \zeta < 1$:

$$x_c(t) = Ae^{-\beta t \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)}t} = Ae^{-\beta t \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t} = Ae^{-\beta t}e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

i stąd:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos\omega t \tag{14}$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$. Przypadek ten nazywamy oscylatorem słabo tłumionym. Rysunek 2 przedstawia wykresy oscylatora słabo tłumionego i bez tłumienia.



Rysunek 2

1.2.4 Oscylator krytycznie tłumiony

Gdy $\beta = \omega_0 \iff \zeta = 1$:

$$x_c(t) = x(t) = Ae^{-\beta t} \tag{15}$$

Mamy do czynienia z oscylatorem krytycznie tłumionym. Nie wykonuje on drgań, lecz jak najszybciej wraca do stanu równowagi.

1.2.5 Oscylator przetłumiony

Gdy $\beta > \omega_0 \iff \zeta > 1$ otrzymujemy dwa przypadki:

$$x_c(t) = x(t) = A_1 e^{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$$

oraz

$$x_c(t) = x(t) = A_2 e^{\left(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$$

Aby otrzymać jedno rozwiązanie, posłużmy się zasadą superpozycji i dodajmy do siebie wcześniejsze rozwiązania:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\left(e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right) \tag{16}$$

gdzie $A = A_1 + A_2$. Oscylator przetłumiony nie wykonuje drgań i powoli wraca do stanu równowagi.

1.2.6 Wymuszony oscylator harmoniczny z tłumieniem

W przypadku wymuszonego oscylatora z tłumieniem, naszym celem jest rozwiązanie równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x} + \frac{1}{m}F(t) \tag{17}$$

Oscylator będzie drgał z pewną częstotliwością ω:

$$x_c(t) = Ae^{i\omega t}$$

Obliczając pochodne i wstawiając je do równania (17) otrzymujemy:

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} = -A\omega_0^2 e^{i\omega t} - 2\beta Ai\omega e^{i\omega t} + \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

Podzielmy obustronnie przez $e^{i\omega t}$:

$$-A\omega^2 = -A\omega_0^2 - 2\beta Ai\omega + \frac{F_0}{m}$$

$$A\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta Ai\omega\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$A = \frac{F_0}{m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta i\omega\right]}$$

Zauważmy, że amplituda okazuje się być liczbą zespoloną. Przestawiając ją w postaci $\rho e^{i\theta}$ możemy wywnioskować, że zawiera ona w sobie również pewne przesunięcie fazowe θ. Aby przedstawić ją w postaci polarnej, zapiszmy ją w inny sposób:

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta i\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

Widzimy, że promieniowi wodzącemu odpowiada

$$\rho = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]} \tag{18}$$

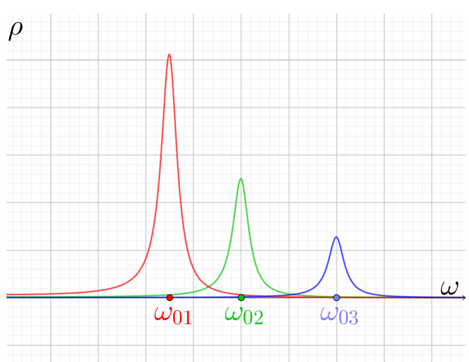
a wyrażeniu $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta i\omega$$

skąd możemy wyznaczyć θ:

$$\cos\theta = \omega_0^2 - \omega^2$$
$$\sin\theta = -2\beta\omega$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Na podstawie powyższych obliczeń możemy dojść do wniosku, że wymuszony tłumiony oscylator harmoniczny będzie wykonywał drgania o amplitudzie wyrażonej wzorem (18) z przesunięciem fazowym względem siły wymuszającej drgania. Przesunięcie fazowe będzie rosło wraz z wzrostem tłumienia, a maksymalna amplituda zostanie osiągnięta, gdy $\omega = \omega_0$. Rysunek 3 przestawia wykres zależności ρ od ω dla różnych wartości ω_0. Zauważmy, że ρ maksymalne jest tym mniejsze, im większe jest ω_0.



Rysunek 3

1.2.7 Energia oscylatora

Rozważmy moc oscylatora wymuszonego. Praca wykonana przez siłę wymuszającą w czasie dt wynosi $F\,dx$, zatem moc siły jest równa $P = F\frac{dx}{dt}$. Wiedząc, że siła jest dana wzorem

$$F(t) = m\ddot{x} + 2\beta m\dot{x} + m\omega_0^2 x$$

i stąd mamy:

$$P = \frac{dx}{dt}\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta m\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x\right)$$

Zauważmy, że po wymnożeniu pierwszy i ostatni wyraz możemy zapisać w postaci

$$\frac{dx}{dt}\left(m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]$$

Jak widzimy, wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej oscylatora, która nie ulega zmianie, zatem całe wyrażenie jest równe 0. Możemy teraz zapisać, że:

$$P = 2\beta m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{19}$$

Jest to chwilowa wartość mocy siły F. Wyznaczmy moc średnią:

$$\langle P\rangle = \left\langle 2\beta m\rho^2\omega^2\cos^2\left(\omega t + \theta\right)\right\rangle$$

Wartość średnia funkcji $\cos^2 x$ to $\frac{1}{2}$, zatem

$$\langle P\rangle = \beta m\rho^2\omega^2 \tag{20}$$

Jest to nie tylko średnia moc siły F, ale też średnia tracona energia.

Spis treści