Prawo Gaussa

Bartosz Węgrzyn

17 grudnia 2023

1 Wprowadzenie

Rozwiązując zadania z artykułu o prawie Coulomba, można było natknąć się na dość skomplikowane całki. Niestety, wraz ze wzrastającą złożonością problemów, wzrasta również złożoność obliczeń. Prawo Gaussa jest jednym z narzędzi w elektrostatyce mającym na celu ominięcie tychże obliczeń, znacznie ułatwiając analizę nawet pozornie bardzo skomplikowanych zadań.

2 Postać prawa Gaussa

2.1 Wiadomośći wstępne

2.1.1 Strumień pola elektrycznego

Strumieniem Φ_E pola $\vec{E}$ przez powierzchnię $\mathcal{S}$ nazywamy całkę:

$$\boxed{\Phi_E := \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a}} \tag{1}$$

Strumień $\vec{E}$ przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest miarą całkowitego ładunku zawartego w tej powierzchni.[1]

2.2 Odmiany prawa Gaussa

2.2.1 Prawo Gaussa w postaci całkowej

Obliczmy strumień pewnego pola $\vec{E}$ wytwarzanego przez ładunek punktowy q znajdujący się w początku układu przez sferę o promieniu r:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

[1]Wszystkie linie pola elektrycznego muszą albo przejść przez powierzchnię, zmieniając tym samym strumień, albo skończyć się na innym, przeciwnym ładunku, nie wnosząc nic do strumienia. Ponieważ natężenie pola elektrycznego jest skutkiem istnienia ładunku oraz jest ono wprost proporcjonalne co do jego wielkości, jest ono samo w sobie miarą tego ładunku.

$$d\vec{a} = dl_\theta \times dl_\phi = r\, d\theta\, \hat{\theta} \times r \sin\theta\, d\phi\, \hat{\phi} = r^2 \sin\theta\, dr\, \hat{r}$$

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\Phi_E = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

Stąd mamy:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

Stosując zasadę superpozycji:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i} \implies \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E_i} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_0} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{wew}$$

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{wew} \tag{2}$$

Równanie (2) to prawo Gaussa w postaci całkowej.

2.2.2 Prawo Gaussa w postaci różniczkowej

Stosując na równaniu (2) podstawowe twierdzenie dla dywergencji mamy:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) d\tau$$

Jeśli ładunek q_{wew} jest rozłożony wewnątrz powierzchni $\mathcal{S}$ z gęstością ρ, mamy:

$$q_{wew} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\, d\tau \implies \iiint_{\mathcal{V}} \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau$$

Funkcje wewnątrz całek muszą być równe, więc:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{3}$$

Równanie (3) to prawo Gaussa w postaci różniczkowej.

2.3 Zastosowania prawa Gaussa

2.3.1 Kiedy stosować prawo Gaussa?

Prawo Gaussa sprawdza się najlepiej, kiedy mamy do czynienia z pewną symetrią. W szczególności, kiedy mamy do czynienia z symetrią sferyczną, osiową lub względem płaszczyzny.

Kiedy mamy do czynienia z symetrią sferyczną, wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie sfery.

Kiedy mamy do czynienia z symetrią osiową, wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie walca, którego osią jest oś symetrii.

Kiedy mamy do czynienia z symetrią względem płaszczyzny, wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie pudełka obejmującego powierzchnię z obu stron.

Choć symetrie osiowa i względem płaszczyzny wymagają nieskończenie długich walców i płaszczyzn, stanowią one bardzo dobre przybliżenie dla długich walców i dużych płaskich powierzchni.

2.3.2 Izolowany przewodnik naładowany

Jeżeli izolowany przewodnik (to znaczy, że nie może wymieniać ładunku z innymi przewodnikami, np. zawieszony na nieprzewodzącej lince w powietrzu) nie posiada nadmiernego ładunku, to pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz niego jest zerowe. Co jednak jeśli jest on naładowany? Gdyby w jego wnętrzu występowało pole elektryczne, to zacząłby płynąć tam prąd, co jest niemożliwe[2]. Dlatego wszystkie nadmierne ładunki przemieszczają się na powierzchnię przewodnika, przez co w jego wnętrzu $\overrightarrow{E} = 0$, a prąd nie płynie.

Weźmy kawałek powierzchni przewodnika $\mathcal{S}$ tak mały, że można uznać go za płaski. Wtedy mamy do czynienia z symetrią względem płaszczyzny, więc powierzchnią Gaussa będzie pudełko.

Wszystkie składowe $\overrightarrow{E}$ równoległe do $\mathcal{S}$ wzajemnie się znoszą, więc $\overrightarrow{E}$ zawsze będzie miało kierunek zgodny z kierunkiem wektora normalnego powierzchni $\mathcal{S}$, $\hat{n}$.

Zauważmy, że strumień przez część pudełka Gaussa znajdującą się wewnątrz przewodnika będzie zerowy, ponieważ tam $\overrightarrow{E} = 0$. Strumień przez boki prostopadłe do $\mathcal{S}$ jest równy 0, więc zostaje tylko strumień przez zewnętrzny bok równoległy do $\mathcal{S}$. Powierzchnia tego boku będzie taka sama jak powierzchnia fragmentu $\mathcal{S}$ wewnątrz pudełka Gaussa, $d\mathcal{S}$. Wtedy strumień wynosi:

$$\Phi_E = E\, d\mathcal{S} \tag{4}$$

Zakładamy, że całą powierzchnia przewodnika jest naładowana jednorodnie z gęstością σ. Wtedy całkowity ładunek zawarty wewnątrz pudełka Gaussa wynosi:

$$q_{wew} = \sigma\, d\mathcal{S} \tag{5}$$

Podstawiamy wielkości do równania (2):

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma} \tag{6}$$

$\overrightarrow{E}$ będzie miało zwrot zgodny z $\hat{n}$, gdy przewodnik będzie naładowany dodatnio, a przeciwny, gdy przewodnik będzie miał ładunek ujemny.

[2] W przewodniku przez ułamek sekundy ładunki przemieszczają się, dopóki nie osiągną równowagi elektrostatycznej. Tutaj jednak mamy na myśli nieprzerwany prąd stały (taki jak np. z baterii).

3 Zadania

1. Znaleźć pole na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu R i gęstości ładunku ρ.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczamy całkowity ładunek zawarty w kuli:

$$q_{wew} = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Następnie podstawiamy do równania (2):

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wiemy, że $\vec{E}$ będzie zawsze skierowane radialnie na zewnątrz kuli, czyli będzie zawsze równoległe do wektora normalnego $\hat{n}$ naszej powierzchni Gaussa $\mathcal{S}$. Stąd:

$$\vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,da \implies E \oiint_{\mathcal{S}} da = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\oiint_{\mathcal{S}} da$ to po prostu powierzchnia naszej kuli:

$$4\pi R^2 E = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{1}{3\varepsilon_0} R\rho$$

Jak wspomniano wcześniej, $\vec{E}$ jest skierowane radialnie od wewnątrz kuli, więc:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0} R\rho\hat{n}} \tag{7}$$

Co ciekawe, podstawiając $\frac{q_{wew}}{V}$ za ρ, otrzymujemy:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{wew}}{R^2}\hat{n}}, \tag{8}$$

co jest niczym innym jak podstawową definicją pola elektrycznego.

2. Nieskończenie długi drut jest naładowany jednorodnie gęstością liniową λ. Znaleźć pole elektryczne na zewnątrz tego druta.

Rozwiązanie:

Ponieważ drut jest nieskończenie długi, możemy otoczyć go walcem Gaussa o promieniu R i długości l. Obliczamy ładunek zawarty w części druta:

$$q_{wew} = \lambda l$$

Wszystkie poziome składowe $\vec{E}$ będą się znosić, a więc będzie ono skierowane radialnie od środka druta. Dlatego $\vec{E}$ będzie zawsze równoległe do wektora normalnego $\hat{n}$ powierzchni $\mathcal{S}$. Zatem:

$$\vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,da$$

Podstawiamy wszystko do wzoru (2):

$$E \oiint_{\mathcal{S}} da = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

$\oiint_{\mathcal{S}} da$ to pole powierzchni naszego walca Gaussa[3]:

$$2\pi R l E = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l \implies E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

Jak pamiętamy, $\vec{E}$ jest równoległe do $\hat{n}$, więc:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\hat{n}} \tag{9}$$

3. Wyznaczyć pole elektryczne nad płytką jednorodnie naładowaną z gęstością σ. W obliczeniach przyjąć, że płytka jest nieskończenie wielka, nieskończenie cienka i idealnie płaska.

Rozwiązanie:

Mamy do czynienia z symetrią względem płaszczyzny, a więc użyjemy tu pudełka Gaussa o wymiarach $a \times a \times h$.

Wszystkie składowe równoległe do powierzchni się skracają i zostajemy z polem prostopadłym do niej. Przyjmujemy, że zwrot $\vec{E}$ jest zgodny ze zwrotem $\hat{n} = \hat{k}$.

Ładunek q_{wew} możemy wyrazić następująco:

$$q_{wew} = a^2\sigma$$

Wtedy, podstawiając do równania (2) mamy:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}a^2\sigma$$

Ponieważ $\vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,da$, E wyciągamy przed całkę:

$$E \oiint_{\mathcal{S}} da = \frac{1}{\varepsilon_0}a^2\sigma$$

$\oiint_{\mathcal{S}} da$ to nic innego jak pole powierzchni pudełka Gaussa[4]:

$$2a^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}a^2\sigma \implies E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma$$

Ponieważ $\vec{E}$ ma zwrot taki sam jak $\hat{k}$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\hat{k}} \tag{10}$$

[3] Nie bierzemy tutaj pod uwagę pola powierzchni podstaw, ponieważ jak zostało wspomniane wcześniej, poziome składowe $\vec{E}$ będą się znosić, a wtedy Φ_E przez podstawy $= 0$.

[4] Tak jak we wcześniejszym zadaniu, nie bierzemy pod uwagę boków prostopadłych do płytki, ponieważ przez nie $\Phi_E = 0$.

Spis treści

Bibliografia

[1] J. Walker D. Halliday R. Resnick. *Podstawy fizyki, cz.3, wydanie II*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2021.

[2] David J. Griffiths. *Postawy Elektrodynamiki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.