

# Prawo Coulomba i pole elektryczne

Bartosz Węgrzyn

16 grudnia 2023

## 1 Wprowadzenie

Prawo Coulomba można śmiało nazwać najważniejszym prawem w elektrostatyce. Z niego wyprowadzone są wszystkie inne prawa, np. prawo Gaussa, które fundamentalnie są tym samym, lecz pozwalają na obejście skomplikowanych obliczeń (o których czytelnik przekona się rozwiązując zadania).

## 2 Postać prawa Coulomba

### 2.1 Wiadomości wstępne

#### 2.1.1 Wektory położeń

Wektor położenia ładunku próbnego (takiego ładunku, który nie wpływa na pole elektryczne pozostałych ładunków, tzn. jest znikomy)  $Q$  oznaczamy  $\vec{r}$ . Wektor położenia ładunku punktowego (źródłowego)  $q$  oznaczany jest przez  $\vec{r}'$ .

Wektor różnicy tych położeń:

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (1)$$

Wektor jednostkowy wskazujący nam kierunek siły:

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

#### 2.1.2 Przenikalność elektryczna próżni

Wielkość  $\varepsilon_0 \approx 8,8541 \times 10^{-12} \text{F m}^{-1}$  jest nazywana przenikalnością elektryczną próżni.

Łatwym do zapamiętania jej przybliżeniem jest  $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F m}^{-1}$ .

## 2.2 Dwa ładunki

### 2.2.1 Prawo Coulomba dla dwóch ładunków

Prawo Coulomba dla dwóch ładunków ma następującą postać:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}} \quad (3)$$

### 2.2.2 Zależności wynikające z prawa Coulomba

Z równania (3) wynikają następujące zależności:

$$F \sim qQ \quad (4)$$

$$F \sim \frac{1}{\mathcal{R}^2} \quad (5)$$

Zależność (5) jest niezwykle ważna, ponieważ występuje ona w wielu innych dziedzinach fizyki, np. w prawie powszechnego ciążenia lub w rozchodzeniu się jakichkolwiek fal, m. in. elektromagnetycznych.

### 2.2.3 Uwagi

Wersor  $\hat{\mathcal{R}}$  w równaniu (3) wskazuje kierunek siły  $\vec{F}$  działającej na ładunek próbny  $Q$ .

Pamiętajmy, że w omawianym przypadku siła  $\vec{F}$  działająca na ładunek źródłowy  $q$  jest znikoma, ponieważ ładunek próbny  $Q$  jest znikomy. Stąd wynika, że ładunek  $q$  pozostaje w spoczynku.

## 2.3 Więcej ładunków

### 2.3.1 Zasada superpozycji

Kiedy mamy do czynienia z większą ilością ładunków źródłowych, warto sięgnąć do zasady superpozycji. Mówi ona, że siła wypadkowa działająca na ładunek próbny  $Q$  jest równa sumie indywidualnych sił działających na ładunek  $Q$  ze strony każdego ładunku źródłowego:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i Q}{\mathcal{R}_i^2} \hat{\mathcal{R}} \quad (6)$$

### 2.3.2 Pole elektryczne

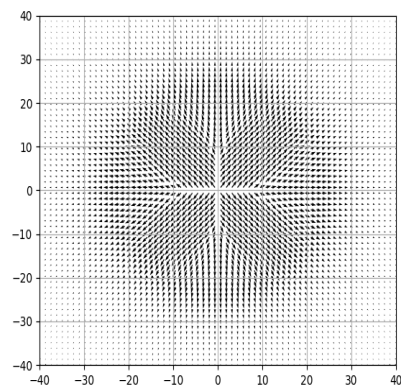
Zdefiniujmy nową wielkość - natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ :

$$\boxed{\vec{E} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i^2} \hat{\mathcal{R}}} \quad (7)$$

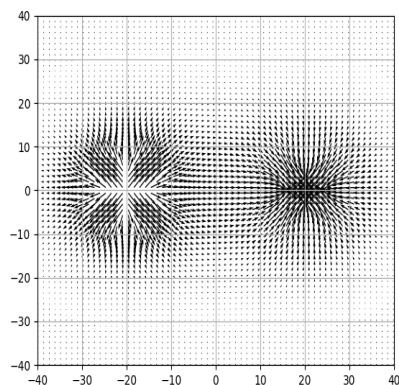
Wtedy:

$$\boxed{\vec{F} = Q\vec{E}} \quad (8)$$

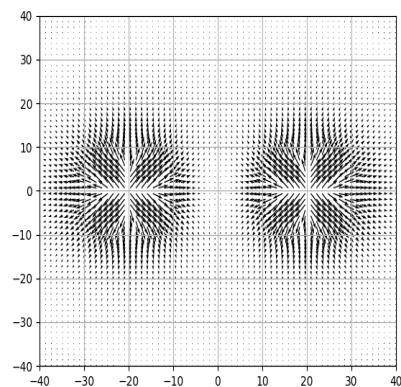
Rysunek 1 przedstawia pole elektryczne wokół różnych konfiguracji ładunków.



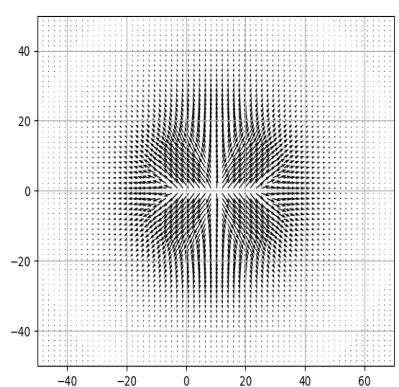
(a)



(b)



(c)



(d)

Rysunek 1: Pole elektryczne wokół (a) ładunku dodatniego, (b) ładunku dodatniego i ujemnego, (c) dwóch ładunków dodatnich, (d) jednorodnie naładowanej linii

Pole elektryczne można interpretować jako siłę na jednostkę ładunku (tzn. im ładunek większy, tym siła większa) działającą na ładunek próbny w danym punkcie w przestrzeni.

## 2.4 Ciągły rozkład ładunku

### 2.4.1 Postać ogólna

Dla ciągłego rozkładu ładunku:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dq \quad (9)$$

Wiemy, że  $\lambda = \frac{dq}{dl}$  (gęstość liniowa),  $\sigma = \frac{dq}{da}$  (gęstość powierzchniowa) oraz  $\rho = \frac{dq}{d\tau}$  (gęstość objętościowa), więc:

$$dq = \lambda dl, dq = \sigma da, dq = \rho d\tau$$

### 2.4.2 Ładunek ciągle rozłożony na krzywej

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle na pewnej krzywej gładkiej  $\mathcal{L}$ , prawo Coulomba w postaci całki krzywoliniowej:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(\vec{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dl \quad (10)$$

### 2.4.3 Ładunek ciągle rozłożony na powierzchni

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle na pewnej powierzchni  $\mathcal{S}$ , prawo Coulomba w postaci całki powierzchniowej wygląda następująco:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\vec{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} da \quad (11)$$

### 2.4.4 Ładunek ciągle rozłożony w przestrzeni

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle wewnątrz pewnego obszaru  $\mathcal{V}$ , prawo Coulomba w postaci całki objętościowej ma następującą postać:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} d\tau \quad (12)$$

### 2.4.5 Uwagi

Jeśli gęstość  $\lambda$ ,  $\sigma$  lub  $\rho$  jest stała, można wyciągnąć ją przed znak całki.

Wersora  $\hat{\mathcal{R}}$  ani wielkości  $\mathcal{R}^2$  nie wolno wyciągać przed znak całki, ponieważ zależą one od  $\vec{r}$ , którego poszczególne współrzędne są zmiennymi całkowania.

### 3 Zadania

1. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości  $z$  nad środkiem odcinka rozciągającego się od  $x = -L$  do  $x = L$  naładowanego jednorodnie gęstością liniową  $\lambda$ .

**Rozwiązanie:**

Z treści zadania wiemy, że  $\vec{r} = z\hat{j} \wedge \vec{r}' = x\hat{i}$ . Stąd:

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{j} - x\hat{i} \implies \mathcal{R}^2 = z^2 + x^2 \wedge \hat{\mathcal{R}} = \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

Podstawiając wszystko do równania (10) mamy:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl \quad (13)$$

Parametryzacja naszej krzywej wygląda następująco:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} y = 0 \\ -L \leq x \leq L \end{cases}$$

Obliczamy całkę:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl &= \int_{-L}^L \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left[ \frac{x\hat{i} + z\hat{j}}{z\sqrt{x^2 + z^2}} \right]_{-L}^L = \\ &= \frac{2L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \hat{j} \end{aligned} \quad (14)$$

Teraz podstawiamy wynik z (14) do równania (13) i otrzymujemy ostateczną odpowiedź:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \hat{j}} \quad (15)$$

Wygląd pola wektorowego wokół jednorodnie naładowanej linii jest przedstawiony na rysunku 1d. Widać na nim, że nad środkiem linii pole elektryczne ma jedynie składową pionową, co zgadza się z naszymi obliczeniami.

2. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości  $z$  nad środkiem okręgu o promieniu  $r$  naładowanego jednorodnie gęstością  $\lambda$ .

**Rozwiązanie:**

Z treści zadania wynika, że  $\vec{r} = z\hat{k} \wedge \vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} \implies \vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' = -x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$ . Po dalszych obliczeniach mamy:

$$\frac{\vec{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podstawiając do równania (10) otrzymujemy:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{L}} \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dl \quad (16)$$

Teraz należy sparametryzować krzywą, która jest okręgiem o promieniu  $r$ :

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Mając już wszystkie dane, przechodzimy do obliczenia całki:

$$\begin{aligned} & \oint_{\mathcal{L}} \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dl = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r\hat{i} \cos t - r\hat{j} \sin t + z\hat{k}}{(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} r \cos t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} r \sin t\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r(\hat{i} \cos t + \hat{j} \sin t) + z\hat{k}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} r dt = r \left[ \frac{-r(\hat{i} \sin t - \hat{j} \cos t) + zt\hat{k}}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{2\pi r z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \end{aligned}$$

Podstawiamy wszystko do równania (16) i otrzymujemy nasz ostateczny wynik:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\lambda r z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}} \quad (17)$$

**3. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości  $z$  nad środkiem koła o promieniu  $r$  z wyciętym środkiem o promieniu  $R$  ( $R < r$ ) naładowanego jednorodnie gęstością  $\sigma$ .**

**Rozwiązanie:**

Ponownie ustalamy, że:

$$\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podstawiamy do równania (11):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} da \quad (18)$$

Parametryzujemy powierzchnię:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ R \leq u \leq r \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

Przed przystąpieniem do obliczenia całki powierzchniowej liczymy moduł iloczynu wektorowego:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \left| (\cos v \hat{i} + \sin v \hat{j}) \times (-u \sin v \hat{i} + u \cos v \hat{j}) \right| = \\
& = \left| \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos v & \sin v \\ -u \sin v & u \cos v \end{bmatrix} \hat{k} \right| = \\
& = \left| (u \cos^2 v + u \sin^2 v) \hat{k} \right| = \left| u \hat{k} \right| = u
\end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć całkę:

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} da &= \int_R^r \int_0^{2\pi} \frac{-u(\hat{i} \cos v + \hat{j} \sin v) + z\hat{k}}{(u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + z^2)^{\frac{3}{2}}} u dv du = \\
&= 2\pi z \hat{k} \int_R^r \frac{u}{(z^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} du = 2\pi z \hat{k} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right)
\end{aligned}$$

Podstawiamy do (18) i otrzymujemy wynik końcowy:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma z \hat{k} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right)} \quad (19)$$

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Postać prawa Coulomba</b>	<b>1</b>
2.1	Wiadomości wstępne . . . . .	1
2.1.1	Wektory położeń . . . . .	1
2.1.2	Przenikalność elektryczna próżni . . . . .	1
2.2	Dwa ładunki . . . . .	2
2.2.1	Prawo Coulomba dla dwóch ładunków . . . . .	2
2.2.2	Zależności wynikające z prawa Coulomba . . . . .	2
2.2.3	Uwagi . . . . .	2
2.3	Więcej ładunków . . . . .	2
2.3.1	Zasada superpozycji . . . . .	2
2.3.2	Pole elektryczne . . . . .	2
2.4	Ciągły rozkład ładunku . . . . .	4
2.4.1	Postać ogólna . . . . .	4
2.4.2	Ładunek ciągle rozłożony na krzywej . . . . .	4
2.4.3	Ładunek ciągle rozłożony na powierzchni . . . . .	4
2.4.4	Ładunek ciągle rozłożony w przestrzeni . . . . .	4
2.4.5	Uwagi . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Zadania</b>	<b>5</b>

## Bibliografia

- [1] David J. Griffiths. *Postawy Elektrodynamiki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2005.
- [2] Wikipedia. *Vacuum permittivity*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum\\_permittivity](https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity).