

# Oscylator harmoniczny

Bartosz Węgrzyn

31 maja 2024

## 1 Oscylator harmoniczny

### 1.1 Oscylator bez tłumienia

#### 1.1.1 Masa na sprężynie

Przyjmijmy, że do sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$  jest przyczepiona masa  $m$ . W układzie nie ma strat energii. Wychylamy tę masę o  $A$  z pewnego punktu równowagi i puszczamy. Naszym celem jest znalezienie równania ruchu dla tej masy.

W tym celu posłużymy się mechaniką Lagrange'a. Zauważmy, że nasz układ ma jeden stopień swobody,  $x$ . Obliczając energię kinetyczną i potencjalną możemy wyznaczyć Lagrangian:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\U &= \frac{1}{2}kx^2 \\ \mathcal{L} = T - U &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne w równaniu Lagrange'a-Eulera:

$$\begin{aligned}\partial_x \mathcal{L} &= -kx \\ \partial_{\dot{x}} \mathcal{L} &= m\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x}} \mathcal{L} &= m\ddot{x}\end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy równanie:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \tag{1}$$

Nie trudno zgadnąć, że rozwiązanie tego równania będzie miało postać  $x(t) = Ce^{\alpha t}$ , gdzie  $C$  i  $\alpha$  to pewne stałe. Wstawmy więc to odgadnięte rozwiązanie do

równania (1):

$$\begin{aligned} C\alpha^2 e^{\alpha t} &= -\frac{k}{m} C e^{\alpha t} \\ \alpha^2 &= -\frac{k}{m} \\ \alpha &= i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Jednostka urojona pojawia się tu z powodu własności  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Zauważmy też, że stałą  $C$  możemy przedstawić jako  $C = Ae^{\phi}$ , gdzie  $A$  i  $\phi$  to również pewne stałe. Mamy wtedy:

$$x(t) = Ae^{i(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)} \quad (2)$$

Zauważmy, że równanie (1) jest również spełnione przez część rzeczywistą (2), która nas będzie interesować. Ostatecznie mamy:

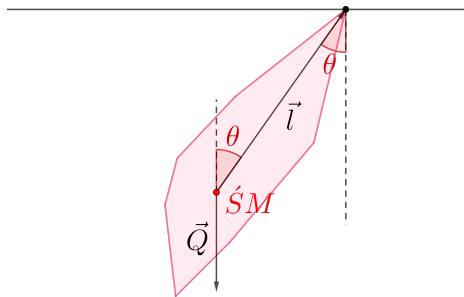
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3)$$

gdzie  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  to częstotliwość kątowna oscylacji,  $\phi$  to przesunięcie fazowe i  $A$  to amplituda drgań. Okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

### 1.1.2 Wahadło fizyczne i matematyczne

Przypadek idealnego wahadła okazuje się bardziej skomplikowany niż przypadek masy na sprężynie. Załóżmy, że odległość środka masy wahadła od osi obrotu to  $l$ , wahadło ma masę  $m$  i moment bezwładności  $I$ . W układzie nie ma strat energii. Zauważmy, że mamy znów jeden stopień swobody - kąt wychylecia wahadła,  $\theta$ .



Rysunek 1

Tym razem użyjemy mechanikę Newtona. Na wahadło działa moment siły grawitacji,  $\vec{M}$ , wynoszący:

$$\vec{M} = \vec{Q} \times \vec{l}$$

gdzie  $\vec{l}$  jest wektorem łączącym oś obrotu wahadła ze środkiem masy wahadła (punktem przyłożenia  $Q$ ), o długości  $l$ . Wartość momentu siły jest dana jako:

$$M = Ql \sin \theta = -mgl \sin \theta$$

(minus, ponieważ kąt między  $\vec{Q}$  i  $\vec{l}$  jest równy  $\pi - \theta$ )

Przyspieszenie kątowe będzie wtedy równe:

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{I} = -\frac{mgl \sin \theta}{I} \quad (5)$$

co jest naszym równaniem różniczkowym. Możemy wykonać przybliżenie  $\sin \theta \approx \theta$  dla małych kątów, co daje nam:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgl\theta}{I}$$

Rozwiązaniem równania (5), analogicznie do przypadku sprężyny, jest:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (6)$$

gdzie  $\omega^2 = \frac{mgl}{I}$ . Okres drgań to wtedy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (7)$$

i dla wahadła matematycznego, gdzie  $I = ml^2$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8)$$

Pamiętajmy, że jest to jedynie prawdziwe dla małych kątów przez przybliżenie  $\sin \theta \approx \theta$ .

### 1.1.3 Wymuszony oscylator harmoniczny

Wspomniana częstotliwość oscylacji podczas drgań swobodnych,  $\omega$ , to tzw. częstotliwość własna oscylatora i będzie od teraz oznaczana przez  $\omega_0$ .

Gdy mamy do czynienia z drganiami wymuszonymi, oscylator nie drga z częstotliwością własną, lecz częstotliwością wymuszoną, oznaczaną od teraz przez  $\omega$ .

Opiszmy oscylator wymuszony za pomocą dynamiki Newtona. Przyjmijmy znów masę  $m$  zawieszoną na sprężynie o wsp. sprężystości  $k$ , na którą oprócz siły sprężystości działa również siła wymuszająca dana jako  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  (pomijamy przesunięcie fazowe, gdyż będzie ono identyczne dla oscylatora i siły).

Aby znacznie ułatwić sobie obliczenia, zapiszmy  $F_c(t) = F_0 e^{i\omega t}$ . Zauważmy, że  $\text{Re}(F_c) = F$ . Analogicznie postąpimy z  $x(t)$ . Ponieważ oscylator drga z częstotliwością wymuszoną,  $x_c(t) = A e^{i\omega t}$ . Naszym celem jest znalezienie wartości  $A$ .

Układając 2 zasadę dynamiki dla masy mamy:

$$\ddot{x}_c = -\frac{k}{m}x_c + \frac{1}{m}F_c \quad (9)$$

Postawmy wszystko do równania:

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} = -\frac{k}{m}A e^{i\omega t} + \frac{1}{m}F_0 e^{i\omega t}$$

Wyraz  $e^{i\omega t}$  się skróci, pozostawiając:

$$A \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right) = \frac{1}{m}F_0$$

Zauważmy, że  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ . Przekształcając ostatecznie mamy:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (10)$$

Z zależności  $A$  od  $\omega$ , widzimy że gdy  $\omega$  ma wartość bardzo bliską  $\omega_0$  zachodzi rezonans mechaniczny. Gdy  $\omega = \omega_0$ ,  $A \rightarrow \infty$ , ponieważ nasz układ nie zawiera tłumienia. W układach rzeczywistych zachodzi tłumienie i taka sytuacja nie ma miejsca.

## 1.2 Oscylator z tłumieniem

### 1.2.1 Postać ogólna

Możemy założyć, że na masę na sprężynie działa siła oporów ruchu, która jest wprost proporcjonalna do prędkości masy. Układając 2 zasadę dynamiki dla masy mamy:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} \quad (11)$$

gdzie  $b$  to pewien współczynnik. Zgadując, że rozwiązanie ma postać  $x_c(t) = A e^{\alpha t}$ :

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} = -\frac{k}{m}A e^{\alpha t} - \frac{b}{m}A\alpha e^{\alpha t}$$

Po obustronnym podzieleniu przez  $A e^{\alpha t}$  i przekształceniach otrzymujemy:

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0$$

Wyznamy  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

gdzie  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  i  $\beta = \frac{b}{2m}$  to pewien współczynnik tłumienia. Zatem ogólne rozwiązanie równania (2) ma postać

$$x_c(t) = Ae^{(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (12)$$

Zdefiniujmy również stosunek tłumienia  $\zeta = \frac{\beta}{\omega_0}$ .

### 1.2.2 Oscylator bez tłumienia

Gdy  $\beta = 0 \iff \zeta = 0$ :

$$x_c(t) = Ae^{\pm \sqrt{-\omega_0^2}t} = Ae^{\pm i\omega_0 t}$$

i stąd mamy:

$$x(t) = \text{Re}(x_c(t)) = A \cos \omega_0 t \quad (13)$$

(pomijamy przesunięcie fazowe).  $\cos(x)$  jest funkcją parzystą, więc możemy pominąć  $\pm$ . Widzimy zatem, że gdy  $\beta = 0$ , mamy oscylator nietłumiony.

### 1.2.3 Oscylator słabo tłumiony

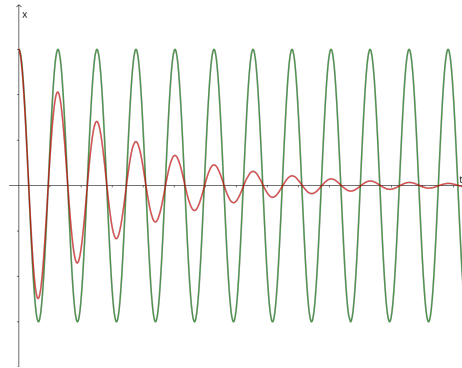
Gdy  $\beta^2 < \omega_0^2 \iff 0 < \zeta < 1$ :

$$x_c(t) = Ae^{-\beta t \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)}t} = Ae^{-\beta t \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t} = Ae^{-\beta t} e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

i stąd:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos \omega t \quad (14)$$

gdzie  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Przypadek ten nazywamy oscylatorem słabo tłumionym. Rysunek 2 przedstawia wykresy oscylatora słabo tłumionego i bez tłumienia.



Rysunek 2

#### 1.2.4 Oscylator krytycznie tłumiony

Gdy  $\beta = \omega_0 \iff \zeta = 1$ :

$$x_c(t) = x(t) = Ae^{-\beta t} \quad (15)$$

Mamy do czynienia z oscylatorem krytycznie tłumionym. Nie wykonuje on drgań, lecz jak najszybciej wraca do stanu równowagi.

#### 1.2.5 Oscylator przetłumiony

Gdy  $\beta > \omega_0 \iff \zeta > 1$  otrzymujemy dwa przypadki:

$$x_c(t) = x(t) = A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

oraz

$$x_c(t) = x(t) = A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

Aby otrzymać jedno rozwiązanie, posłużmy się zasadą superpozycji i dodajmy do siebie wcześniejsze rozwiązania:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} \right) \quad (16)$$

Oscylator przetłumiony nie wykonuje drgań i powoli wraca do stanu równowagi.

#### 1.2.6 Wymuszony oscylator harmoniczny z tłumieniem

W przypadku wymuszonego oscylatora z tłumieniem, naszym celem jest rozwiązanie równania

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x} + \frac{1}{m}F(t) \quad (17)$$

Oscylator będzie drgał z pewną częstotliwością  $\omega$ :

$$x_c(t) = Ae^{i\omega t}$$

Obliczając pochodne i wstawiając je do równania (17) otrzymujemy:

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} = -A\omega_0^2 e^{i\omega t} - 2\beta Ai\omega e^{i\omega t} + \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

Podzielmy obustronnie przez  $e^{i\omega t}$ :

$$\begin{aligned} -A\omega^2 &= -A\omega_0^2 - 2\beta Ai\omega + \frac{F_0}{m} \\ A(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta Ai\omega) &= \frac{F_0}{m} \\ A &= \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta i\omega]} \end{aligned}$$

Zauważmy, że amplituda okazuje się być liczbą zespoloną. Przekształcając ją w postaci  $\rho e^{i\theta}$  możemy wywnioskować, że zawiera ona w sobie również pewne przesunięcie fazowe  $\theta$ . Aby przedstawić ją w postaci polarnej, zapiszmy ją w inny sposób:

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta i\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

Widzimy, że promieniowi wodzącemu odpowiada

$$\rho = \frac{F_0}{m \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \right]} \quad (18)$$

a wyrażeniu  $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta i\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

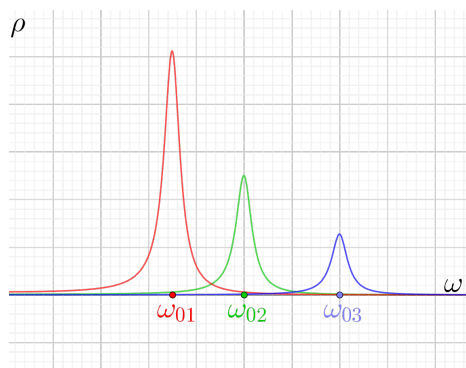
skąd możemy wyznaczyć  $\theta$ :

$$\cos \theta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{-2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Na podstawie powyższych obliczeń możemy dojść do wniosku, że wymuszony tłumiony oscylator harmoniczny będzie wykonywał drgania o amplitudzie wyrażonej wzorem (18) z przesunięciem fazowym względem siły wymuszającej drgania. Przesunięcie fazowe będzie rosło wraz z wzrostem tłumienia, a maksymalna amplituda zostanie osiągnięta, gdy  $\omega = \omega_0$ . Rysunek 3 przedstawia wykres zależności  $\rho$  od  $\omega$  dla różnych wartości  $\omega_0$ . Zauważmy, że  $\rho$  maksymalne jest tym mniejsze, im większe jest  $\omega_0$ .



Rysunek 3

### 1.2.7 Energia oscylatora

Rozważmy moc oscylatora wymuszonego. Praca wykonana przez siłę wymuszającą w czasie  $dt$  wynosi  $F dx$ , zatem moc siły jest równa  $P = F \frac{dx}{dt}$ . Wiedząc,

że siła jest dana wzorem

$$F(t) = m\ddot{x} + 2\beta m\dot{x} + m\omega_0^2 x$$

i stąd mamy:

$$P = \frac{dx}{dt} \left( m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta m \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x \right)$$

Zauważmy, że po wymnożeniu pierwszy i ostatni wyraz możemy zapisać w postaci

$$\frac{dx}{dt} \left( m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right]$$

Jak widzimy, wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej oscylatora, która nie ulega zmianie, zatem całe wyrażenie jest równe 0. Możemy teraz zapisać, że:

$$P = 2\beta m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (19)$$

Jest to chwilowa wartość mocy siły  $F$ . Wyznamy moc średnią:

$$\langle P \rangle = \langle 2\beta m \rho^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \theta) \rangle$$

Wartość średnia funkcji  $\cos^2 x$  to  $\frac{1}{2}$ , zatem

$$\langle P \rangle = \beta m \rho^2 \omega^2 \quad (20)$$

Jest to nie tylko średnia moc siły  $F$ , ale też średnia tracona energia.



## Spis treści

<b>1</b>	<b>Oscylator harmoniczny</b>	<b>1</b>
1.1	Oscylator bez tłumienia . . . . .	1
1.1.1	Masa na sprężynie . . . . .	1
1.1.2	Wahadło fizyczne i matematyczne . . . . .	2
1.1.3	Wymuszony oscylator harmoniczny . . . . .	3
1.2	Oscylator z tłumieniem . . . . .	4
1.2.1	Postać ogólna . . . . .	4
1.2.2	Oscylator bez tłumienia . . . . .	5
1.2.3	Oscylator słabo tłumiony . . . . .	5
1.2.4	Oscylator krytycznie tłumiony . . . . .	6
1.2.5	Oscylator przetłumiony . . . . .	6
1.2.6	Wymuszony oscylator harmoniczny z tłumieniem . . . . .	6
1.2.7	Energia oscylatora . . . . .	7