Prawo Coulomba i pole elektryczne

Bartosz Węgrzyn

16 grudnia 2023

1 Prawo Coulomba

1.1 Wiadomości wstępne

1.1.1 Wektory położeń

Wektor położenia ładunku próbnego (takiego ładunku, który nie wpływa na pole elektryczne pozostałych ładunków, tzn. jest znikomy) Q oznaczamy $\vec{r}$. Wektor położenia ładunku punktowego (źródłowego) q oznaczany jest przez $\vec{r}'$.

Wektor różnicy tych położeń:

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' \tag{1}$$

Wektor jednostkowy wskazujący nam kierunek siły:

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2}$$

1.1.2 Przenikalność elektryczna próżni

Wielkość $\varepsilon_0 \approx 8,8541 \times 10^{-12} \mathrm{F\,m^{-1}}$ jest nazywana przenikalnością elektryczną próżni.

Łatwym do zapamiętania jej przybliżeniem jest $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \mathrm{F\,m^{-1}}$.

1.2 Dwa ładunki

1.2.1 Prawo Coulomba dla dwóch ładunków

Prawo Coulomba dla dwóch ładunków ma następującą postać:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} \tag{3}$$

1.2.2 Zależności wynikające z prawa Coulomba

Z równania (3) wynikają następujące zależności:

$$F \sim qQ \tag{4}$$

$$F \sim \frac{1}{\mathcal{R}^2} \tag{5}$$

Zależność (5) jest niezwykle ważna, ponieważ występuje ona w wielu innych dziedzinach fizyki, np. w prawie powszechnego ciążenia lub w rozchodzeniu się jakichkolwiek fal, m. in. elektromagnetycznych.

1.2.3 Uwagi

Wersor $\hat{\mathcal{R}}$ w równaniu (3) wskazuje kierunek siły $\vec{F}$ działającej na ładunek próbny Q.

Pamiętajmy, że w omawianym przypadku siła $\vec{F}$ działająca na ładunek źródłowy q jest znikoma, ponieważ ładunek próbny Q jest znikomy. Stąd wynika, że ładunek q pozostaje w spoczynku.

1.3 Więcej ładunków

1.3.1 Zasada superpozycji

Kiedy mamy do czynienia z większą ilością ładunków źródłowych, warto sięgnąć do zasady superpozycji. Mówi ona, że siła wypadkowa działająca na ładunek próbny Q jest równa sumie indywidualnych sił działających na ładunek Q ze strony każdego ładunku źródłowego.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i Q}{\mathcal{R}_i^2} \hat{\mathcal{R}} \tag{6}$$

1.3.2 Pole elektryczne

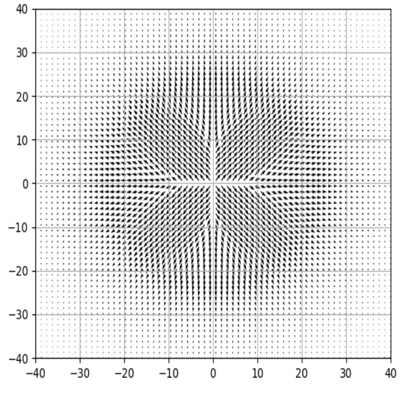
Zdefiniujmy nową wielkość - natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$:

$$\vec{E} := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\mathcal{R}_i^2} \hat{\mathcal{R}} \tag{7}$$

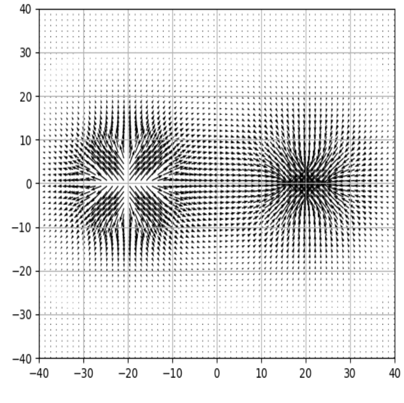
Wtedy

$$\vec{F} = Q\vec{E} \tag{8}$$

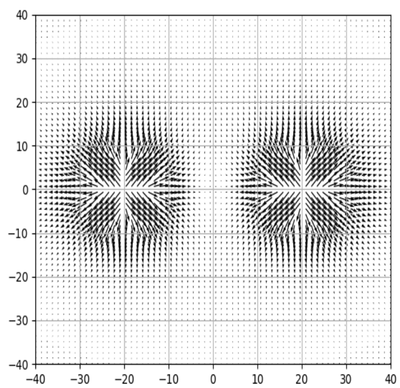
Rysunek 1 przedstawia pole elektryczne wokół różnych konfiguracji ładunków.



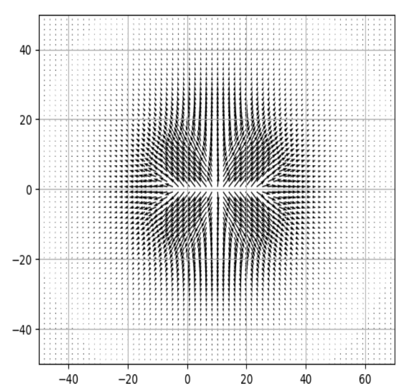
(a)



(b)



(c)



(d)

Rysunek 1: Pole elektryczne wokół (a) ładunku dodatniego, (b) ładunku dodatniego i ujemnego, (c) dwóch ładunków dodatnich, (d) jednorodnie naładowanej linii

Pole elektryczne można interpretować jako siłę na jednostkę ładunku (tzn. im ładunek większy, tym siła większa) działającą na ładunek próbny w danym punkcie w przestrzeni.

1.4 Ciągły rozkład ładunku

1.4.1 Postać ogólna

Dla ciągłego rozkładu ładunku mamy

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}\, dq \tag{9}$$

Wiemy, że $\lambda = \frac{dq}{dl}$ (gęstość liniowa), $\sigma = \frac{dq}{da}$ (gęstość powierzchniowa) oraz $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ (gęstość objętościowa), więc

$$dq = \lambda\, dl,\ dq = \sigma\, da,\ dq = \rho\, d\tau$$

1.4.2 Ładunek ciągle rozłożony na krzywej

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle na pewnej krzywej gładkiej $\mathcal{L}$, mamy prawo Coulomba w postaci całki krzywoliniowej

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}\, dl \tag{10}$$

1.4.3 Ładunek ciągle rozłożony na powierzchni

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle na pewnej powierzchni $\mathcal{S}$, prawo Coulomba w postaci całki powierzchniowej wygląda następująco:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}\, da \tag{11}$$

1.4.4 Ładunek ciągle rozłożony w przestrzeni

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle wewnątrz pewnego obszaru $\mathcal{V}$, prawo Coulomba w postaci całki objętościowej ma następującą postać:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}\, d\tau \tag{12}$$

1.4.5 Uwagi

Jeśli gęstość λ, σ lub ρ jest stała, można wyciągnąć ją przed znak całki.

Wersora $\hat{\mathcal{R}}$ ani wielkości $\mathcal{R}^2$ nie wolno wyciągać przed znak całki, ponieważ zależą one od $\vec{r}$, którego poszczególne współrzędne są zmiennymi całkowania.

2 Zadania

1. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości z nad środkiem odcinka rozciągającego się od $x = -L$ do $x = L$ naładowanego jednorodnie gęstością liniową λ.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że $\vec{r} = z\hat{j} \wedge \vec{r}' = x\hat{i}$. Stąd

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{j} - x\hat{i} \implies \mathcal{R}^2 = z^2 + x^2 \wedge \hat{\mathcal{R}} = \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

Podstawiając wszystko do równania (10) mamy

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dl \tag{13}$$

Parametryzacja naszej krzywej wygląda następująco:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} y = 0 \\ -L \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

Obliczamy całkę

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dl = \int_{-L}^{L} \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx = \left[\frac{x\hat{i} + z\hat{j}}{z\sqrt{x^2 + z^2}} \right] \Bigg|_{-L}^{L} = \\ = \frac{2L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \hat{j} \end{aligned} \tag{14}$$

Teraz podstawiamy wynik z (14) do równania (13) i otrzymujemy ostateczną odpowiedź:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \hat{j} \tag{15}$$

Wygląd pola wektorowego wokół jednorodnie naładowanej linii jest przedstawiony na rysunku 1d. Widać na nim, że nad środkiem linii pole elektryczne ma jedynie składową pionową, co zgadza się z naszymi obliczeniami.

2. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości z nad środkiem okręgu o promieniu r naładowanego jednorodnie gęstością λ.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że $\vec{r} = z\hat{k} \wedge \vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} \implies \vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' = -x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$. Po dalszych obliczeniach mamy

$$\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podstawiając do równania (10) otrzymujemy

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\mathcal{L}} \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dl \tag{16}$$

Teraz należy sparametryzować krzywą, która jest okręgiem o promieniu r

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Mając już wszystkie dane, przechodzimy do obliczenia całki

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{-x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dl =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r\hat{\imath}\cos t - r\hat{\jmath}\sin t + z\hat{k}}{(r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} r\cos t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} r\sin t\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r(\hat{\imath}\cos t + \hat{\jmath}\sin t) + z\hat{k}}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} r\, dt = r \left[\frac{-r(\hat{\imath}\sin t - \hat{\jmath}\cos t) + zt\hat{k}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\pi r z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

Podstawiamy wszystko do równania (16) i otrzymujemy nasz ostateczny wynik:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\lambda r z}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \tag{17}$$

3. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości z nad środkiem koła o promieniu r z wyciętym środkiem o promieniu R ($R < r$) naładowanego jednorodnie gęstością σ.

Rozwiązanie:

Ponownie ustalamy, że

$$\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = \frac{-x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podstawiamy do równania (11)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{-x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, da \tag{18}$$

Parametryzujemy powierzchnię

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ R \leqslant u \leqslant r \\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Przed przystąpieniem do obliczenia całki powierzchniowej liczymy moduł iloczynu wektorowego

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| = \left|(\cos v\hat{i}+\sin v\hat{j})\times(-u\sin v\hat{i}+u\cos v\hat{j})\right| =$$
$$= \left|\det\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}\cos v & \sin v\\ -u\sin v & u\cos v\end{bmatrix}\hat{k}\right| =$$
$$= \left|(u\cos^2 v + u\sin^2 v)\hat{k}\right| = \left|u\hat{k}\right| = u$$

Teraz możemy obliczyć całkę

$$\iint_{\mathcal{S}}\frac{-x\hat{i}-y\hat{j}+z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,da = \int_R^r\int_0^{2\pi}\frac{-u(\hat{i}\cos v+\hat{j}\sin v)+z\hat{k}}{(u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v+z^2)^{\frac{3}{2}}}u\,dv\,du =$$
$$= 2\pi z\hat{k}\int_R^r\frac{u}{(z^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du = 2\pi z\hat{k}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)$$

Podstawiamy do (18) i otrzymujemy wynik końcowy

$$\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma z\hat{k}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right) \tag{19}$$

Spis treści