Delta Diraca

Bartosz Węgrzyn

14 maja 2024

1 Delta diraca

1.1 Motywacja i definicja

1.1.1 Dywergencja $\hat{r}/r^2$

Niech będzie dane pole elektryczne $\vec{E} = \frac{\hat{r}}{r^2}$ przez ładunek punktowy. Chcąc obliczyć dywergencję tego pola mamy:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E_r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(1) = 0$$

Wstawiając ten wynik do prawa Gaussa wynika, że gęstość ładunku w całej przestrzeni jest równa 0, co nie może być prawdą. Obliczmy strumień pola elektrycznego przez sferę o promieniu R wokół ladunku:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\hat{r}}{R^2}\right) \cdot (\hat{r}\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi$$

Z czego wynika, że $q = 4\pi\varepsilon_0$, co tym bardziej dowodzi, że $\rho \neq 0$

Problemy wynikają z punktu $r = 0$, gdzie $E = \infty$, przez który obliczając dywergencję pola $\vec{E}$ podzieliliśmy przez 0.

1.1.2 Definicja delty

Delta diraca jest dystrybujcą (choć będzie nazywana potem funkcją) zdefiniowaną jako:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } x \neq 0 \\ \infty, \text{ gdy } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{2}$$

"Pik" nie koniecznie musi znajdować się w punkcie $x = 0$. Możemy uogólnić funkcję delta:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } x \neq a \\ \infty, \text{ gdy } x = a \end{cases} \tag{3}$$

Funkcję delta można również przybliżyć jako:

$$\delta(x) = \frac{1}{|a|\sqrt{\pi}} e^{-(x/a)^2} \text{ jak } a \to 0 \tag{4}$$

Wiedząc, że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

możemy udowodnić, że całka z delty jest równa 1. Podczas całkowania funkcji delta możemy wykonać podstawienie $u = x/|a|$ i stąd $dx = |a|\, du$:

$$|a| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = |a|\sqrt{\pi}$$

Dalej mamy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = \frac{1}{|a|\sqrt{\pi}} |a|\sqrt{\pi} = 1 \tag{5}$$

Deltę można przybliżyć również na inny sposób:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } |x| > h \\ \frac{1}{2}h, \text{ gdy } -h \leqslant x \leqslant h \end{cases} \quad \text{jak } h \to 0 \tag{6}$$

Zauważmy, że pole tej figury również będzie równe 1. Wyznaczmy teraz poniższą całkę z użyciem tego przybliżenia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą. Przedział całkowania możemy zawęzić do $\langle -h, h \rangle$, ponieważ miejsca, gdzie $\delta(x) = 0$ nie mają wkładu do całki. Mamy stąd:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2} h \int_{-h}^{h} f(x)\, dx = \lim_{h \to 0} \frac{(F(h) - F(-h))}{2h} = f(0)$$

gdzie $F(x)$ jest całką $f(x)$. W granicy jak $h \to 0$ przedostatnie wyrażenie jest pochodną $\frac{d}{dh} F(h) = f(h)$, co równa się $f(0)$.

Uogólniając mamy:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \tag{7}$$

jeśli $a \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Jeśli a nie zawiera się w tym przedziale, to całka jest równa 0.

1.1.3 Funkcja delta w 3 wymiarach

Funkcję delta możemy uogólnić na 3 wymiary w następujący sposób:

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{8}$$

gdzie $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Widzimy wtedy, że:

$$\delta^3(\vec{r}) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } \vec{r} \neq 0 \\ \infty, \text{ gdy } \vec{r} = 0 \end{cases}$$

oraz

$$\iiint_{\text{cała przestrzeń}} \delta^3(\vec{r})\, dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z)\, dx\, dy\, dz = 1$$

Uogólniając:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{a}) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } \vec{r} \neq \vec{a} \\ \infty, \text{ gdy } \vec{r} = \vec{a} \end{cases} \tag{9}$$

$$\iiint_{\text{cała przestrzeń}} f(\vec{r})\delta^3(\vec{r} - \vec{a})dV = f(\vec{a}) \tag{10}$$

1.1.4 Dywergencja $\hat{r}/r^2$ za pomocą delty

Możemy teraz obliczyć dywergencję wcześniejszego pola $\vec{E}$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\delta^3(\vec{r})$$

Czynnik 4π zapewnia, że całka powierzchniowa będzie równa 4π.

Spis treści

1 Delta diraca **1**

1.1 Motywacja i definicja 1

1.1.1 Dywergencja $\hat{r}/r^2$ 1

1.1.2 Definicja delty 1

1.1.3 Funkcja delta w 3 wymiarach 3

1.1.4 Dywergencja $\hat{r}/r^2$ za pomocą delty 3