Dynamika. Energia, praca, moc

Bartosz Węgrzyn

16 stycznia 2024

1 Wprowadzenie

Ta notatka ma na celu podsumowanie najważniejszych zagadnień z dynamiki oraz pracy, energii i mocy.

2 Dynamika

2.1 Zasady dynamiki

2.1.1 Pierwsza zasada dynamiki Newtona

Jeśli siła wypadkowa działająca na ciało jest równa zeru, to będzie ono poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostanie w spoczynku.

$$F_w = 0 \iff v = 0 \vee v = const. \tag{1}$$

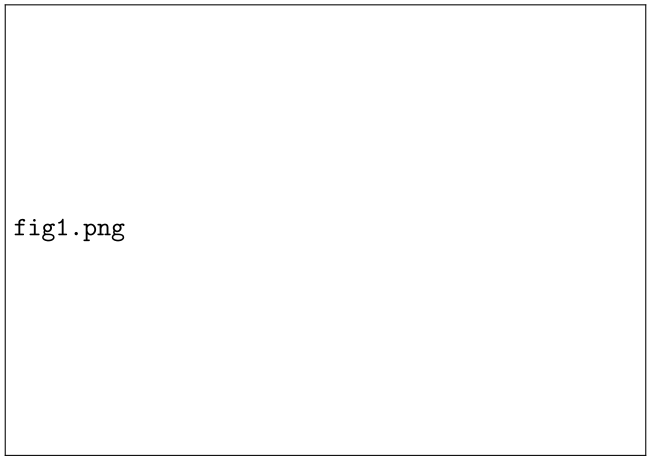
2.1.2 Druga zasada dynamiki Newtona

Siła wypadkowa działająca na ciało jest równa iloczynowi masy i przyspieszenia tego ciała

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2}$$

2.1.3 Trzecia zasada dynamiki Newtona

Gdy dwa ciała oddziałują ze sobą, siły jakimi działają one na siebie mają taki sam moduł, ale przeciwne zwroty (rysunek 1).



Rysunek 1: Ziemia działa na piłkę siłą o takiej samej wartości, jak ta którą piłka działa na ziemię. Ponieważ wartość tej siły jest znacznie mniejsza od masy Ziemi, przyspieszenie działające na planetę jest znikome. Stąd możemy przyjąć, że w tym przypadku Ziemia się nie porusza.

2.1.4 Zasada zachowania pędu

Nazwijmy iloczyn masy i prędkości ciała pędem. Wtedy

$$\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}} \tag{3}$$

Zróżniczkujmy obie strony

$$\dot{\overrightarrow{p}} = m\overrightarrow{a}$$

Prawa strona równania to po prostu siła

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \dot{\overrightarrow{p}}} \tag{4}$$

Z trzeciej zasady dynamiki, wiemy, że

$$\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$$

Zatem

$$\dot{\overrightarrow{p_1}} = -\dot{\overrightarrow{p_2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\right) = 0$$

$$\boxed{\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = 0} \tag{5}$$

Równanie (5) mówi nam, że całkowity pęd w każdym układzie izolowanym jest zachowany.

2.1.5 Popęd

Przekształcając równanie (4), mamy

$$\vec{F}dt = d\vec{p}$$

Scałkujmy obie strony

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{p}$$

Wielkość po lewej stronie równania nazywamy popędem $\vec{J}$ siły $\vec{F}$. Wtedy

$$\boxed{\vec{J} = \Delta\vec{p}} \tag{6}$$

2.2 Najważniejsze siły

2.2.1 Siła ciężkości

Siłą ciężkości $\vec{Q}$ nazywamy siłę

$$\boxed{\vec{Q} = m\vec{g}}, \tag{7}$$

gdzie $\vec{g}$ jest wektorem przyspieszenia ziemskiego ($g \approx 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$). Jest to siła, z jaką Ziemia oddziałuje grawitacyjnie na ciała.

2.2.2 Siła normalna

Załóżmy, że na stole leży książka. Na książkę działa siła ciężkości, a książka działa tą siłą na stół, a stół działa nią na Ziemię. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, stół musi działać na książkę siłą o takim samym module i o przeciwnym zwrocie. Siły działające na książkę się równoważą. Co ze stołem? Na stół działa siła ciężkości, a on działa nią na Ziemię. Ziemia zatem musi działać na stół siłą o tym samym module i przeciwnym zwrocie. Stół i książka również oddziałują grawitacyjnie. Książka przyciąga stół, a stół książkę. W tym przypadku siły również się równoważą, lecz to oddziaływanie jest tak małe, że można je zaniedbać. Co z Ziemią? Stół działa na nią siłą ciężkości, ale też przyciąga ją grawitacyjnie, zatem siły się równoważą i cały układ pozostaje w spoczynku (rysunek 2).

Siła, którą w naszym przypadku stół działał na książkę, a Ziemia na stół oraz zwróconą do góry nazywamy siłą normalną $\vec{N}$:

$$\boxed{\vec{N} = -\vec{Q} = -m\vec{g}} \tag{8}$$

fig2.png

Rysunek 2: Oddziaływania między książką, stołem i Ziemią.

2.2.3 Tarcie

Kiedy ciało zostaje wprawione w ruch ślizgowy na pewnej powierzchni (np. drewniany klocek ciągnięty po stole), ruchowi temu przeciwdziała oddziaływanie między ciałem a powierzchnią - tarcie.

fig3.png

Rysunek 3: Tarcie $\overrightarrow{F_t}$ między płaską powierzchnią a klockiem wprawionym w ruch ślizgowy przez siłę $\overrightarrow{F}$. W prawym dolnym rogu rysunku jest przybliżony wygląd powierzchni stykającej się z klockiem. Taka "chropowatość" na małych skalach jest przyczyną tarcia,

Siła tarcia jest przyłożone do ciała w miejscu jego styku z powierzchnią (rysunek 3). Tarcie można opisać za pomocą wzoru

$$\boxed{F_t = F_n \mu_k}, \tag{9}$$

gdzie μ_k jest pozbawionym jednostki współczynnikiem tarcia kinetycznego, a F_n jest siłą nacisku, czyli wypadkową siłą jaką ciało działa na podłoże (często, ale nie zawsze, jest to siła ciężkości).

Jeśli ciało porusza się ruchem jednostajnym, siła tarcia i siła wprawiająca je w ruch, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki równoważą się.

Jednak zanim ciało zostanie wprawione w ruch ślizgowy, aby je poruszyć należy zadziałać na nie siłą większą od F_t. Okazuje się, że wcześniejsze tarcie jest tarciem kinetycznym, tzn. występuje kiedy ciało się porusza. W tym przypadku mamy do czynienia z tarciem statycznym. Rośnie ono aż do pewnej skrajnej wartości, kiedy to ciało rusza i działać zaczyna tarcie kinetyczne. Maksymalną wartość tarcia statycznego opisuje wzór:

$$\boxed{F_{ts} = F_n \mu_s}, \tag{10}$$

gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego.

Wykres siły tarcia od czasu dla klocka, na którego działa coraz większa siła aż do momentu wprawienia w ruch, przedstawia rysunek 4.

`fig4.png`

Rysunek 4: Wykres tarcia od czasu.

2.2.4 Naprężenie

Gdy nić jest przymocowana do ciała i naciągnięta tak, że jest wyprostowana, działa ona na ciało siłą $\overrightarrow{T}$ zwaną naprężeniem skierowaną wzdłuż nici.

Gdy do klocka przymocujemy nić i zaczniemy ciągnąć ją z siłą $\overrightarrow{F}$, nić będzie ciągnąć klocek siłą $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{F}$ oraz zgodnie z trzecią zasadą dynamiki będzie działać na naszą dłoń siłą $\overrightarrow{T}$ zwróconą przeciwnie do siły działającej na klocek (rysunek 5).

`fig5.png`	`fig6.png`
(a)	(b)

Rysunek 5: Siła naprężenia (a) gdy klocek jest ciągnięty po płaskiej powierzchni (b) gdy dwa klocki o jednakowej masie są zawieszone na bloczku (wtedy $T = Q$).

2.2.5 Siła oporu powietrza

Jeśli ciało o kształcie obłym porusza się w powietrzu z prędkością wystarczającą, aby przepływ był turbulentny, siła oporu powietrza D działająca na ciało jest wyrażona wzorem:

$$\boxed{D = \frac{1}{2} C \rho S v^2}, \tag{11}$$

gdzie C jest pozbawionym jednostki współczynnikiem oporu aerodynamicznego, ρ jest gęstością powietrza, S jest polem przekroju poprzecznego ciała, a v jest prędkością ciała względem powietrza.

Jeśli ciało spada swobodnie, siła $\overrightarrow{D}$ jest skierowana do góry. Jej wartość stopniowo wzrasta, aż staje się równa sile ciężkości. Wtedy:

$$D - Q = 0, \text{ przy założeniu, że siła wyporu jest zerowa}$$

$$\frac{1}{2} C \rho S v_g^2 - Q = 0$$

$$\boxed{v_g = \sqrt{\frac{2Q}{C \rho S}}} \tag{12}$$

Prędkość v_g nazywamy prędkością graniczną. Jest to maksymalna prędkość, jaką ciało może osiągnąć podczas spadku swobodnego.

2.2.6 Siła w ruchu jednostajnym po okręgu

Jak wiadomo:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Podstawiając $\frac{F}{m}$ za przyspieszenie:

$$\boxed{F_d = \frac{mv^2}{r}} \tag{13}$$

Siła F_d to tzw. siła dośrodkowa. Gdy obracamy pewne ciało na lince, siłą dośrodkową jest naprężenie linki. Gdy pewne ciało porusza się po orbicie wokół Ziemi, siłą dośrodkową jest siła przyciągania grawitacyjnego.

3 Energia, praca, moc

3.1 Energia

3.1.1 Energia kinetyczna

Energią kinetyczną ciała o masie m poruszającym się z prędkością v nazywamy wielkość

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2} \tag{14}$$

3.1.2 Energia potencjalna grawitacji

Jeśli ciało o masie m znajduje się na wysokości h nad Ziemią, jego energia potencjalna grawitacji wynosi:

$$\boxed{E_p = mgh} \tag{15}$$

3.1.3 Energia mechaniczna

Energią mechaniczną E_m układu nazywamy wielkość

$$\boxed{E_m = E_k + E_p}, \tag{16}$$

gdzie przez E_p rozumiemy wszystkie rodzaje energii potencjalnej (grawitacji, sprężystości).

Dla każdego układu izolowanego, gdzie nie ma strat na skutek oporów (np. w postaci dźwięku lub ciepła) zachodzi zależność:

$$E_m = const. \tag{17}$$

Energia może zmieniać swoją formę np. z kinetycznej na potencjalną, ale E_m zawsze jest stała.

Kiedy w powietrze zostaje podrzucona piłka, posiada ona energię kinetyczną. Zakładając, że nie ma strat na skutek oporów, cała energia kinetyczna piłki zostaje przekształcona w energię potencjalną grawitacji. Wtedy piłka osiąga maksymalną wysokość oraz jej prędkość wynosi zero. Następnie energia potencjalna grawitacji zmienia się w energię kinetyczną i piłka rusza w dół. Energia mechaniczna przez cały czas pozostaje stała (rysunek 6a).

Kiedy do sprężyny zostanie przymocowany klocek, a sprężyna naciągnięta, klocek ma energię potencjalną sprężystości. Na ciężarek działa siła sprężystości, więc energia potencjalna jest przekształcana w kinetyczną. Kiedy ciężarek znajduje się w punkcie równowagi sprężyny, jego prędkość jest maksymalna. Ponieważ posiada on pęd, mija punkt równowagi i kompresuje sprężynę tym samym spowalniając i zmieniając energię kinetyczną na potencjalną. Kiedy ciężarek zwalnia do zera, energia potencjalna znów jest przekształcana w kinetyczną i cykl się powtarza w nieskończoność przy założeniu, że nie ma oporów (rysunek 6b).

`fig7.png`

(a)

`fig8.png`

(b)

Rysunek 6: Energia kinetyczna i potencjalna podczas (a) rzutu pionowego (b) ruchu sprężyny.

3.1.4 Zasada zachowania energii

W każdym izolowanym układzie (np. wszechświecie) całkowita energia jest zachowana.

3.2 Praca i moc

3.2.1 Praca

Praca to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na ciało siłą. Jak pamiętamy:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2as$$
$$F = ma$$

Wyprowadzając z pierwszego wzoru przyspieszenie i podstawiając wynik do wzoru drugiego, mamy

$$Fs = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Zauważmy, że prawa strona równania jest zmianą energii kinetycznej, czyli energią przekazaną ciału na skutek działania na nie siły F. Jest to dokładnie definicja pracy, a więc

$$\boxed{W = Fs}, \tag{18}$$

gdzie wektor $\vec{F}$ jest zawsze styczny do toru ciała. To oznacza, że do pracy wkład ma tylko ta składowa wektora siły, która jest styczna do toru ciała. Dlatego pracę możemy zapisać też jako:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\theta}, \tag{19}$$

gdzie θ jest kątem między $\vec{F}$ i $\vec{s}$.

Jeśli tor nie jest linią prostą, a krzywą gładką C, pracę możemy wyrazić jako całkę krzywoliniową:

$$\boxed{W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}} \tag{20}$$

3.2.2 Siły zachowawcze i niezachowawcze

Jeśli siła działa na ciało bez strat energii mechanicznej, taką siłę nazywamy zachowawczą.

Jeśli siła działa na ciało, a część energii jest tracona np. w postaci ciepła, taką siłę nazywamy niezachowawczą.

W kontekście analizy wektorowej, zachowawcze pole wektorowe jest gradientem pewnej funkcji, oraz całkując po nim, bez znaczenia jaki tor obierzemy między dwoma punktami, zawsze otrzymamy taki sam wynik. Jak wiemy, dla każdego zachowawczego pola wektorowego $\vec{F}$ i krzywej gładkiej C takiej, że $a \leqslant t \leqslant b$:

$$\int_C \nabla\vec{F} \cdot d\vec{r} = F(\vec{r}(b)) - F(\vec{r}(a))$$

Widzimy teraz, że jeśli C jest zamknięta, powyższa całka równa się zero. Jeśli $\vec{F}$ jest zatem polem sił, praca wykonana w tym polu przemieszczając się z punktów $\vec{r}(a)$ do $\vec{r}(b)$, takich że $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, będzie wynosić 0.

W przypadku wcześniej omawianego rzutu pionowego i sprężyny, siła grawitacji i siła sprężystości były zachowawcze. Bez względu na wybór toru ciała w polu grawitacyjnym zawsze wykonamy taką samą pracę, aby wynieść je na daną wysokość.

Tarcie czy opór powietrza są siłami niezachowawczymi - obierając dłuższą trasę więcej energii jest traconej, więc nad ciałem trzeba wykonać większą pracę.

3.2.3 Praca wykonana przez siłę ciężkości

Ponieważ pole grawitacyjne jest polem zachowawczym, praca wykonana przez siłę ciężkości nie będzie zależeć od toru obranego przez ciało, a jedynie od wysokości ciała nad Ziemią.

Praca wykonana nad spadającym ciałem przez siłę grawitacji będzie równa zmianie energii kinetycznej tego ciała:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

Wiemy, że

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh$$

Podstawiając do pierwszego wzoru mamy

$$\boxed{W = mgh = \Delta E_p}, \tag{21}$$

gdzie h jest wysokością przebytą przez ciało. Wynik jest taki sam, jakby podstawiać do wzoru (18), ponieważ mamy $F = Q = mg$.

3.2.4 Prawo Hooke'a

Prawo Hooke'a dla sprężyn mówi, że:

Siła działająca na rozciągniętą sprężynę jest wyrażona wzorem

$$\overrightarrow{F_s} = -k\overrightarrow{x}, \tag{22}$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości (o jednostce $\mathrm{N\,m^{-1}}$), a $\overrightarrow{x}$ jest wektorem wychylenia sprężyny z punktu równowagi. Znak minus oznacza, że siła sprężystości będzie zwrócona przeciwnie do wektora $\overrightarrow{x}$.

3.2.5 Praca wykonana przez siłę sprężystości

Z równania (22) wiemy, że wartość siły sprężystości to

$$F = kx \tag{23}$$

Obliczmy zatem pracę wykonaną przez sprężynę poruszającą ciało bez oporów ruchu:

$$W = \int_{x_0}^{x} F\,dx = \int_{x_0}^{x} kx\,dx = \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2} \tag{24}$$

Jeżeli sprężyna ma wychylenie początkowe x, jej energia potencjalna sprężystości jest równa pracy wykonanej przez nią poruszając ciało z położenia x do położenia 0:

$$\boxed{E_s = \frac{1}{2}kx^2} \tag{25}$$

Spis treści

Bibliografia

[1] J. Walker D. Halliday R. Resnick. *Podstawy fizyki, cz.1, wydanie II.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2021.

[2] Matthew Sands Richard P. Feynman Robert B. Leighton. *Feynmana wykłady z fizyki, cz. 1.1.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2014.