

Kinematyka

Bartosz Węgrzyn

23 grudnia 2023

1 Wprowadzenie

Ta notatka opisuje najważniejsze zagadnienia w kinematyce: ruchy jednostajne i zmienne, w jednym i dwóch wymiarach, ruch po okręgu oraz względność ruchów.

2 Ruch w jednym wymiarze

2.1 Wiadomości wstępne

2.1.1 Położenie

Położeniem \vec{r} punktu w danym momencie nazywamy wektor rozpoczynający się w początku układu, a kończący się na tym punkcie (wektor wodzący).

Położeniem \vec{r} ciała w danym momencie nazywamy wektor wodzący do środka masy tego ciała.

Położenie jest funkcją czasu.

2.1.2 Przemieszczenie

Przemieszczeniem nazywamy wektor

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \quad (1)$$

gdzie \vec{r}_0 to położenie początkowe ciała, a \vec{r}_1 to położenie końcowe ciała.

2.1.3 Droga

Droga s to wielkość skalarna opisująca dystans pokonany w pewnym określonym czasie.

Zawsze zachodzą następujące zależności

$$s \geq 0 \wedge s(t_1) \geq s(t_0), t_1 > t_0 \quad (2)$$

Pierwsza zależność mówi, że droga zawsze jest dodatnia - nie możemy pokonać ujemnego dystansu. Druga zależność mówi nam, że droga nigdy nie maleje - tak jak pokonany dystans na liczniku samochodu.

2.1.4 Prędkość średnia i chwilowa, szybkość

Prędkość średnia \vec{v}_s jest równa

$$\vec{v}_s = \frac{\Delta \vec{r}}{t}, \quad (3)$$

gdzie t to pewien przedział czasowy, w którym nastąpiło przemieszczenie $\Delta \vec{r}$.

Prędkość chwilowa \vec{v} jest funkcją czasu i wynosi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (4)$$

Szybkość średnia v_{sr} to wielkość skalarna

$$v_s = \frac{s}{t}, \quad (5)$$

gdzie t to czas, w którym została przebyta droga s .

Szybkość chwilowa v to wielkość skalarna

$$v = \left| \frac{dr}{dt} \right| = |\dot{r}| = |\vec{v}| \quad (6)$$

Szybkość może dowolnie zmieniać swoją wartość, ale musi być zawsze ≥ 0 , ponieważ jest modulem wektora.

2.1.5 Przyspieszenie

Przyspieszenie chwilowe \vec{a} to wektor

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} \quad (7)$$

lub skalar

$$a = \left| \frac{dv}{dt} \right| = |\ddot{r}| = |\vec{a}| \quad (8)$$

Przyspieszenie średnie a_s

$$a_s = \left| \frac{\Delta v}{t} \right|, \quad (9)$$

gdzie t to czas, w którym nastąpiła zmiana prędkości $\Delta v = v_1 - v_0$.

2.1.6 Wzory całkowe

Z powyższych wzorów wynikają następujące

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t v \, dt \\ v &= \int_0^t \pm a \, dt \end{aligned} \quad (10)$$

Stałymi całkowania będą s_0 i v_0 (wartości początkowe). Znaczenie znaku \pm zostanie omówione w następnym podrozdziale.

2.1.7 Wyższe pochodne położenia po czasie

Zryw \vec{z} to trzecia pochodna położenia po czasie, można nazwać go "przyspieszeniem przyspieszenia"

$$\begin{aligned}\vec{z} &= \dot{\vec{a}} = \ddot{\vec{v}} = \dddot{\vec{r}} \\ z &= \dot{a} = \ddot{v} = \ddot{r}\end{aligned}\tag{11}$$

Udar \vec{u} to czwarta pochodna położenia po czasie, "przyspieszenie zrywu"

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \dot{\vec{z}} = \ddot{\vec{a}} = \ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \\ u &= \dot{z} = \ddot{a} = \ddot{v} = \ddot{r}\end{aligned}\tag{12}$$

Potraktujmy te wielkości jednak jako ciekawostki, ponieważ bardzo rzadko znajdują zastosowanie w fizyce.

2.2 Ruch jednostajny prostoliniowy

2.2.1 Definicja ruchu jednostajnego prostoliniowego

Ruch jednostajny prostoliniowy to taki ruch, gdzie torem ciała jest linia prosta oraz $v(t) = \text{const.}$

2.2.2 Wzory w ruchu jednostajnym prostoliniowym

Wprowadźmy wzory opisujące ruch jednostajny prostoliniowy

$$\boxed{s = \int_0^t v dt = s_0 + vt}\tag{13}$$

$$v = \text{const.} \implies a = 0$$

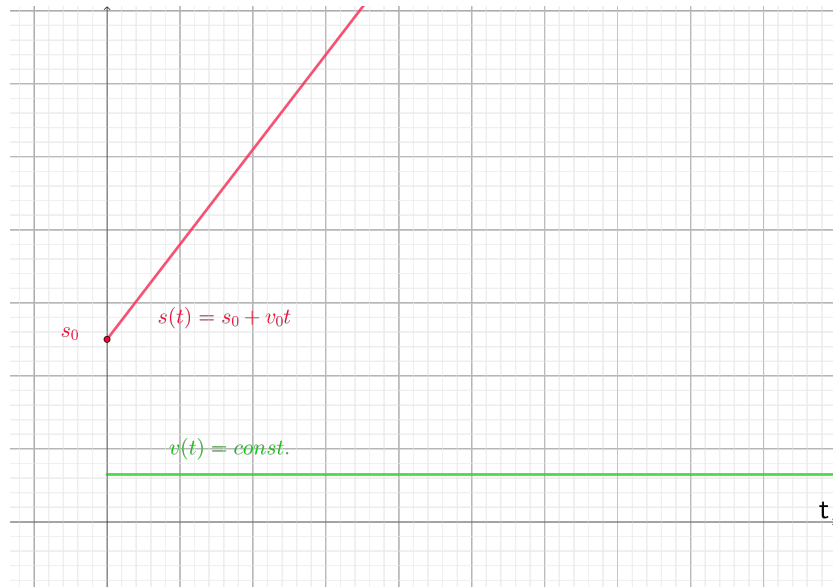
$$\implies \boxed{\Delta v = \int_0^t a dt - v_0 = 0}\tag{14}$$

Równanie ruchu ma postać

$$\boxed{x(t) = x_0 \pm vt},\tag{15}$$

gdzie gdy mamy $+$, \vec{v} jest skierowany zgodnie z osią, a gdy mamy $-$, \vec{v} jest skierowany przeciwnie do osi.

Na rysunku 1 widać wykres drogi oraz prędkości od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym.



Rysunek 1: Wykres $s(t)$ i $v(t)$ w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

2.3 Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

2.3.1 Definicja ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego

Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny to taki ruch, gdzie torem ciała jest linia prosta oraz $a = \text{const.} \wedge a \neq 0$.

2.3.2 Wzory w ruchu prostoliniowym jednostajnie zmiennym

Wyprowadzając wzory dla ruchu jednostajnie zmiennego, mamy

$$v_1 = \int_0^t \pm a \, dt = v_0 \pm at \quad (16)$$

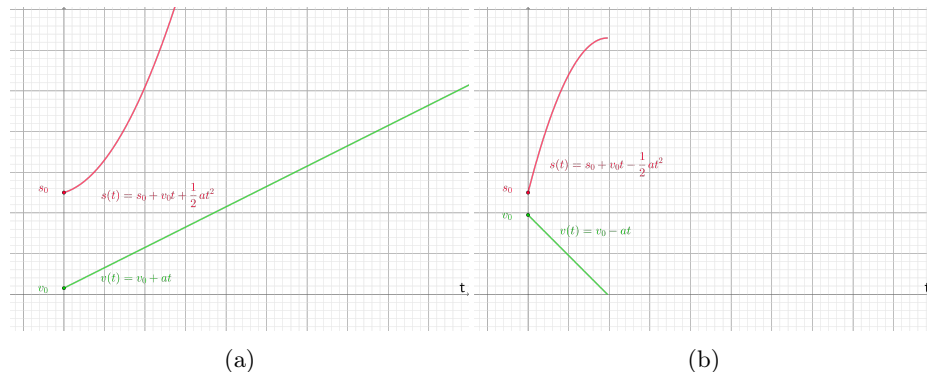
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t} = \frac{\Delta v}{t} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t v \, dt = \int_0^t v_0 + at \, dt = \\ &= s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Pojawiają się tu znaki \pm , dlatego że w zależności czy ruch jest przyspieszony, czy opóźniony, musimy przyspieszeniu nadać znak dodatni lub ujemny. Ruch

nazywamy przyspieszonym, kiedy zwroty \vec{v} i \vec{a} są zgodne, a opóźnionym, kiedy ich zwroty są przeciwne. Zauważmy, że przez to dziedziną funkcji $v(t)$ i $s(t)$ w ruchu opóźnionym będą tylko takie nieujemne wartości t , dla których $v_0 - at \geq 0$ (do tego momentu droga będzie rosła, a nie malała, co byłoby niezgodne z założeniami (2)).

Drogę i prędkość jako funkcję czasu w tym ruchu pokazuje rysunek 2.



Rysunek 2: Wykresy $v(t)$ i $s(t)$ w ruchu prostoliniowym jednostajnie (a) przyspieszonym (b) opóźnionym. Zauważmy, że wykres (b) ucina się od razu, gdy $v(t) = 0$, czyli wektor \vec{v} zmienia swój zwrot. Wtedy droga zaczęłaby maleć, co jest niezgodne ze wcześniejszymi założeniami.

Równanie ruchu ma postać

$$\boxed{x(t) = x_0 \pm v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2}, \quad (19)$$

gdzie znaki zależą od zwrotów \vec{v} i \vec{a} względem osi.

W ruchu przyspieszonym bez drogi początkowej

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Wyciągnijmy t przed nawias i podstawmy $at = \Delta v$

$$s = t \left(v_0 + \frac{1}{2} at \right)$$

$$s = t \left(v_0 + \frac{1}{2} \Delta v \right)$$

Jak wiemy, w czasie t , $\Delta v = v_1 - v_0$

$$s = t \left(v_0 + \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_0 \right)$$

$$s = \frac{1}{2} t (v_1 + v_0) t = \frac{2s}{(v_1 + v_0)}$$

Wiemy również, że

$$t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

Przyrównajmy zatem te dwa równania

$$\frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{2s}{(v_1 + v_0)}$$

$$2sa = (v_1 - v_0)(v_1 + v_0)$$

Prawa strona tego równania to nic innego, jak wzór skróconego mnożenia. Mamy więc nasz ostateczny wzór

$$\boxed{2sa = v_1^2 - v_0^2} \quad (20)$$

2.3.3 Rzut pionowy w dół i spadek swobodny

Ruch w rzucie pionowym w dół jest niczym innym, jak ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym, gdzie $a = g$ ($g \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$).

Zatem opiszmy ten ruch poznanymi wcześniej równaniami

$$h(t) = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (21)$$

gdzie $h(t)$ to wysokość ciała nad powierzchnią ziemi w danym momencie w czasie, h_0 to wysokość, z jakiej zostało rzucone ciało, a v_0 to prędkość, z jaką rzucono ciało. Zakładamy tutaj że wszystkie wektory są skierowane równolegle do osi y, której początkiem (zerem) jest ziemia oraz jest ona skierowana w górę (stąd minusy w równaniu - wektory \vec{v} i \vec{a} są skierowane w dół).

W przypadku szczególnym, kiedy $v_0 = 0$:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (22)$$

Taki ruch nazywamy wtedy spadkiem swobodnym.

W rzucie pionowym w dół oraz w spadku swobodnym, prędkość ciała tuż przed uderzeniem w ziemię możemy wyprowadzić ze wzoru (20)

$$v_1 = \sqrt{2h_0g + v_0^2} \quad (23)$$

dla rzutu pionowego oraz

$$v_1 = \sqrt{2h_0g} \quad (24)$$

dla spadku swobodnego.

Przekształcając wzory, mamy

$$\boxed{h_0 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}} \quad (25)$$

oraz

$$\boxed{h_0 = \frac{v_1^2}{2g}} \quad (26)$$

2.3.4 Rzut pionowy w górę

Rzut pionowy w górę jest po prostu ruchem prostoliniowym jednostajnie opóźnionym. Zatem możemy go opisać równaniem

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (27)$$

gdzie h to wysokość ciała nad ziemią w danym momencie t w czasie, h_0 to wysokość nad ziemią, z jakiej ciało zostało rzucone, a v_0 to prędkość jaka została nadana ciału przy wyrzucie.

Aby obliczyć h_{max} , obliczmy maksimum funkcji $h(t)$

$$\dot{h} = v_0 - gt$$

$$v_0 - gt = 0$$

$$v_0 = gt \implies \text{funkcja osiąga ekstremum, kiedy } t = \frac{v_0}{g}$$

$$\ddot{h} = -g < 0 \implies \text{tym ekstremum jest maksimum}$$

Podstawmy więc nasz wynik do równania (27)

$$\boxed{h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}} \quad (28)$$

Jak pamiętamy, w tym przypadku $v_0 = gt_{max}$. Podstawmy to więc do powyższego równania

$$h_{max} = h_0 + \frac{1}{2} g t_{max}^2$$

$$\boxed{t_{max} = \sqrt{\frac{2(h_{max} - h_0)}{g}}} \quad (29)$$

W tym ruchu całkowity czas lotu t jest równy

$$\boxed{t = t_{max} + t_s,} \quad (30)$$

gdzie t_s jest czasem spadania ciała, który można łatwo wyliczyć ze wzorów w spadku swobodnym. Jest on równy czasowi wznoszenia (t_{max}), jeśli wysokość z jakiej zostało rzucone ciało i na jakiej ono wylądowało są równe. Wtedy $t = 2t_{max}$.

2.4 Ruchy niejednostajnie zmienne

Jeśli mamy dane położenie, prędkość lub przyspieszenie jako dowolną funkcję czasu, nie koniecznie wpasowującą się w poprzednie ruchy, możemy z łatwością dokonać obliczeń używając wzorów z paragrafów 2.1.4, 2.1.5 i 2.1.6.

3 Ruch w dwóch wymiarach

W przypadku, gdy mamy do czynienia z ruchem w dwóch wymiarach, najłatwiej jest rozdzielić wektory na poszczególne składowe i traktować je jako niezależne od siebie.

3.1 Rzut poziomy

3.1.1 Podział ruchu na dwie składowe

W rzucie poziomym mamy do czynienia z dwoma ruchami - jednostajnym prostoliniowym w osi x oraz spadkiem swobodnym w osi y . Zatem

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (31)$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (32)$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}, \quad (33)$$

gdzie \hat{i} oraz \hat{j} to wersory w kierunku odpowiednio osi x i y .

Dzięki takiemu podziałowi, możemy oddzielnie analizować ruch w osi x oraz y , a następnie nałożyć je na siebie.

3.1.2 Składowa x w rzucie poziomym

W rzucie poziomym prędkość nadana ciału na początku ma tylko składową x . Pomijamy też opory powietrza, więc składowa x naszej prędkości pozostaje bez zmian. Zatem mamy do czynienia z ruchem jednostajnym prostoliniowym (prostoliniowy, ponieważ rozważamy ruch jedynie wzdłuż jednej osi). Przyjmujemy, że ciało zostało rzucone z zera osi x , więc pozbywamy się x_0 . Wtedy:

$$\boxed{v_x = v_0 = \text{const.}} \quad (34)$$

$$\boxed{x = v_x t} \quad (35)$$

3.1.3 Składowa y w rzucie poziomym

W rzucie poziomym prędkość początkowa ciała nie posiada składowej y . Nadaje ją dopiero grawitacja, zatem mamy do czynienia ze spadkiem swobodnym. Zakładamy, że ciało zostało rzucone na wysokości h_0 nad ziemią. Zatem

$$\boxed{v_y = gt} \quad (36)$$

$$\boxed{y = h_0 - \frac{1}{2}gt^2} \quad (37)$$

Możemy stosować tu wszystkie wzory poznane w paragrafie 2.3.3.

3.1.4 Łączenie dwóch składowych

Zasięgiem d rzutu poziomego (oraz później ukośnego) nazywamy odległość, jaką podczas lotu przebędzie ciało w osi x

$$d = v_0 t \quad (38)$$

Mając dany zasięg i prędkość początkową, możemy wyliczyć czas

$$\boxed{t = \frac{d}{v_0}} \quad (39)$$

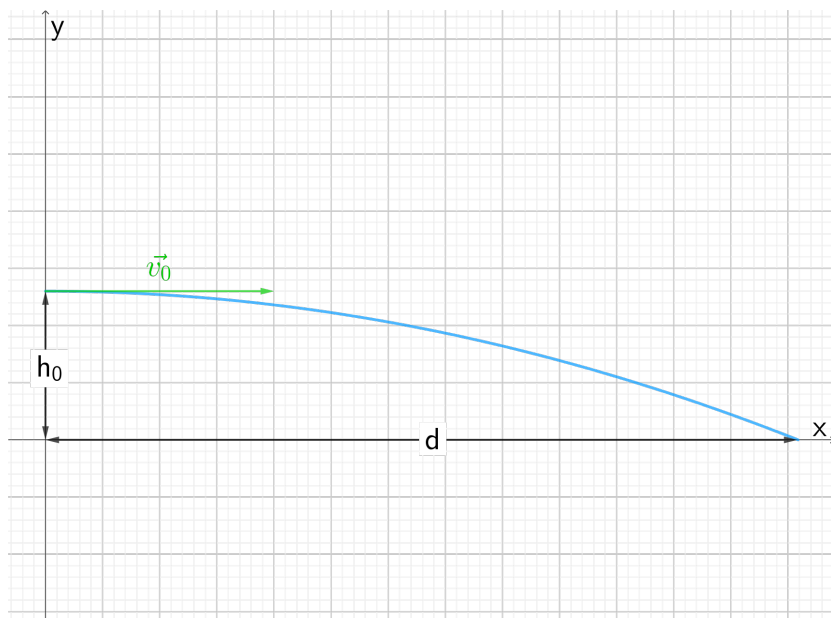
Teraz możemy np. obliczyć wysokość, na jakiej rzucono ciało

$$\boxed{h_0 = \frac{1}{2} \frac{gd^2}{v_0^2}} \quad (40)$$

Możemy również połączyć dwie składowe położenia w jeden wektor

$$\boxed{\vec{r} = (v_0 t) \hat{i} + \left(h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}} \quad (41)$$

Tor ciała w rzucie poziomym widać na rysunku 3.



Rysunek 3: Tor ciała w rzucie poziomym z zaznaczonym zasięgiem, wysokością początkową i prędkością początkową.

3.2 Rzut ukośny

3.2.1 Składowa x w rzucie ukośnym

Podobnie jak w rzucie poziomym, składowa x prędkości pozostaje stała przez cały czas. To oznacza, że mamy do czynienia z ruchem jednostajnym prostoliniowym w osi x . Dlatego tutaj obliczenia będą wyglądały tak samo jak w rzucie poziomym. Jednak pamiętajmy, że $v_x \neq v_0$, ponieważ v_x nie jest jedyną składową wektora \vec{v}_0 .

3.2.2 Składowa y w rzucie ukośnym

Teraz w osi y mamy do czynienia z rzutem pionowym w górę z prędkością początkową v_{0y} . Jeśli ciało zostało rzucone z wysokości h_0 , to

$$y = h_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (42)$$

Jeżeli ciało ląduje na takiej samej wysokości, z jakiej zostało rzucone (np. na płaskiej polanie)

$$t = 2t_{max} = 2\sqrt{\frac{2(h_{max} - h_0)}{g}} \quad (43)$$

Możemy też obliczyć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się to ciało

$$\boxed{h_{max} = h_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}} \quad (44)$$

3.2.3 Łączenie składowych

Skoro v_x i v_{0y} są składowymi wektora \vec{v}_0 , mamy

$$\begin{aligned} \boxed{v_x = v_0 \cos \theta_0} \\ \boxed{v_{0y} = v_0 \sin \theta_0}, \end{aligned} \quad (45)$$

gdzie θ_0 to kąt zawarty między osią x a wektorem \vec{v}_0 . Stąd mamy również

$$\theta_0 = \arctan \left(\frac{v_{0y}}{v_x} \right) \quad (46)$$

Jeżeli ciało ląduje na takiej samej wysokości jak h_0 , $v_y = v_{0y}$ oraz $\theta_1 = -\theta_0$. Czas możemy wyliczyć również następująco:

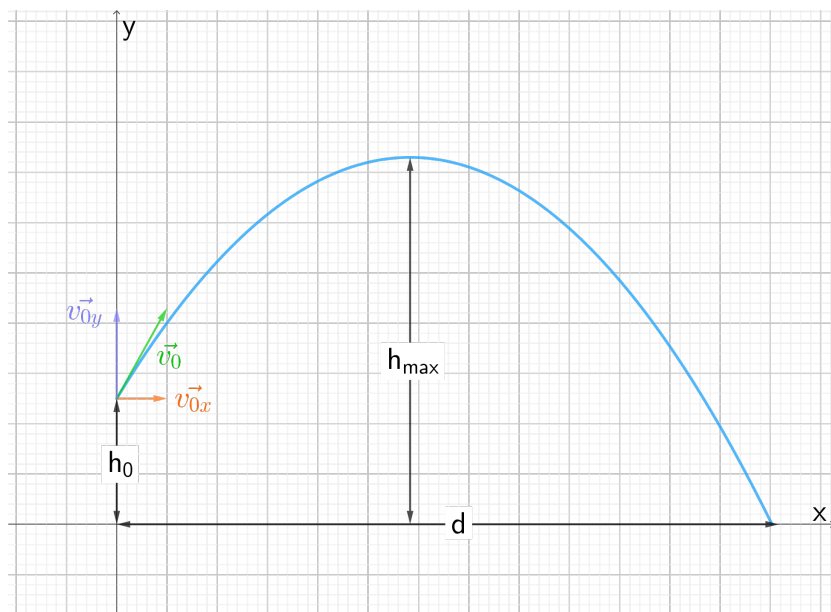
$$\boxed{t = \frac{d}{v_0 \cos \theta_0}} \quad (47)$$

Łącząc obie składowe w jeden wektor, mamy

$$\boxed{\vec{r} = (v_0 t \cos \theta_0) \hat{i} + \left(h_0 + v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}} \quad (48)$$

Tor w rzucie ukośnym został przedstawiony na rysunku 4.

Na podstawie równań z ruchu jednostajnego prostoliniowego oraz z rzutu pionowego w górę jesteśmy w stanie wyprowadzać wiele równań i zależności, które są w pełni dostosowane do potrzeb problemu.



Rysunek 4: Tor ciała w rzucie ukośnym z zaznaczonym zasięgiem, wysokością początkową i maksymalną oraz prędkością początkową i jej składowymi.

3.3 Ruch po okręgu

3.3.1 Prędkość i przyspieszenie kątowe

θ to kąt, jaki wektor wodzący ciała poruszającego się po okręgu tworzy z osią x .

ω to prędkość kątowna, czyli pierwsza pochodna θ po czasie (szybkość jego zmian)

$$\boxed{\omega = \dot{\theta}} \quad (49)$$

ε to przyspieszenie kątowne, czyli druga pochodna θ po czasie

$$\boxed{\varepsilon = \ddot{\theta}} \quad (50)$$

Częstość kołowa f to częstotliwość obrotów (tzn. ile razy ciało poruszające się po okręgu zatoczy kąt 2π rad w danej jednostce czasu)

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}} \quad (51)$$

Okres to czas potrzebny do zatoczenia kąta pełnego przez ciało

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}} \quad (52)$$

3.3.2 Definicja ruchu jednostajnego po okręgu

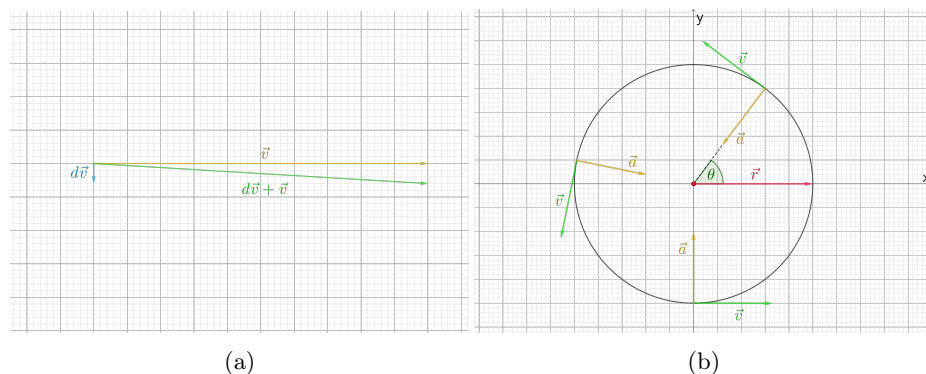
Ruch jednostajny po okręgu, to taki ruch, gdzie wartość wektora prędkości ciała pozostaje stała, a ciało zakreśla tor po okręgu. Ruch jednostajny po okręgu jest w pewnym sensie ruchem zmiennym - wektor prędkości zmienia swój kierunek, a więc musi działać na ciało przyspieszenie.

3.3.3 Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu

Aby wektor prędkości ciała \vec{v} zmieniał swój kierunek bez zmiany swojej wartości, musimy dodawać do niego inny, nieskończenie mały oraz prostopadły wektor prędkości $d\vec{v}$. Jak pamiętamy

$$\vec{v} = \vec{a}t \quad (53)$$

zatem aby nasz wektor był nieskończenie mały i prostopadły do \vec{v} , wektor przyspieszenia również prostopadły do wektora \vec{v} musimy pomnożyć przez nieskończenie mały czas dt . Z tego powodu wektor \vec{a} w ruchu jednostajnym po okręgu zawsze jest prostopadły do wektora \vec{v} - tylko wtedy \vec{v} będzie zmieniał swój kierunek bez zmiany swojej wartości (rysunek 5).



Rysunek 5: Na rysunku (a) przedstawiono dodawanie wektora $d\vec{v}$ do \vec{v} . Jak $|d\vec{v}| \rightarrow 0$, $|\vec{v} + d\vec{v}| \rightarrow |\vec{v}|$, ale wektor wypadkowy jest obrócony. Na rysunku (b) przedstawiono wektory przyspieszenia dośrodkowego i prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu. Zaznaczono też kąt θ i promień okręgu.

Przyspieszenie w tym ruchu można obliczyć ze wzoru

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad (54)$$

gdzie r jest zarówno długością wektora wodzącego ciała poruszającego się po okręgu, jak i promieniem okręgu.

3.4 Względność ruchu

Jeżeli układ R' porusza się ruchem jednostajnym z prędkością u względem układu R , a ciało porusza się z prędkością \vec{v}' względem układu R' , to ciało porusza się z prędkością \vec{v} względem układu R , która jest równa

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}} \quad (55)$$

Wtedy położenie tego ciała względem układu R wynosi

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_0' + \vec{v}t}, \quad (56)$$

gdzie \vec{r}_0 to położenie początkowe układu R' względem układu R , a \vec{r}_0' to położenie początkowe ciała względem układu R' .

Układy nie przyspieszają, a więc są układami inercjalnymi, tzn. działają w nich zasady dynamiki Newtona. Przeciwnieństwem układów inercjalnych są układy nieinercjalne.

Powyższe zależności są prawdziwe jedynie, gdy

$$v, v', u \ll c \quad (57)$$

oraz gdy czas płynie tak samo we wszystkich układach, tzn. $t = t'$.

Ruch ciał w przypadkach, gdy ich prędkości są porównywalne do c bada szczególna teoria względności.

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
2	Ruch w jednym wymiarze	1
2.1	Wiadomości wstępne	1
2.1.1	Położenie	1
2.1.2	Przemieszczenie	1
2.1.3	Droga	1
2.1.4	Prędkość średnia i chwilowa, szybkość	2
2.1.5	Przyspieszenie	2
2.1.6	Wzory całkowite	2
2.1.7	Wyższe pochodne położenia po czasie	3
2.2	Ruch jednostajny prostoliniowy	3
2.2.1	Definicja ruchu jednostajnego prostoliniowego	3
2.2.2	Wzory w ruchu jednostajnym prostoliniowym	3
2.3	Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny	4
2.3.1	Definicja ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego	4
2.3.2	Wzory w ruchu prostoliniowym jednostajnie zmiennym	4
2.3.3	Rzut pionowy w dół i spadek swobodny	6
2.3.4	Rzut pionowy w górę	7
2.4	Ruchy niejednostajnie zmienne	7
3	Ruch w dwóch wymiarach	8
3.1	Rzut poziomy	8
3.1.1	Podział ruchu na dwie składowe	8
3.1.2	Składowa x w rzucie poziomym	8
3.1.3	Składowa y w rzucie poziomym	8
3.1.4	Łączenie dwóch składowych	9
3.2	Rzut ukośny	10
3.2.1	Składowa x w rzucie ukośnym	10
3.2.2	Składowa y w rzucie ukośnym	10
3.2.3	Łączenie składowych	11
3.3	Ruch po okręgu	12
3.3.1	Prędkość i przyspieszenie kątowe	12
3.3.2	Definicja ruchu jednostajnego po okręgu	13
3.3.3	Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu	13
3.4	Względność ruchu	14