

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego metodą rozdzielonych zmiennych

Bartosz Węgrzyn

21 grudnia 2023

1 Wprowadzenie

Równania różniczkowe opisują całą fizykę - od mechaniki newtonowskiej do mechaniki kwantowej. Pozwalają nam przewidzieć ruch oscylatorów harmoniczych, tory ciał i zachowanie cząsteczek.

2 Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu metodą rozdzielonych zmiennych

2.1 Postać równań różniczkowych pierwszego rzędu

2.1.1 Czy jest równanie różniczkowe pierwszego rzędu?

Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci:

$$\boxed{f(x, y, y') = 0}, \quad (1)$$

gdzie y' występuje zawsze, ale x i y niekoniecznie. Takimi równaniami są na przykład

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y \\ \cos^2 x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

2.1.2 Rozwiązania równań różniczkowych pierwszego rzędu

Rozwiązaniem (całą) ogólnym pierwszego równania (2) jest

$$y = Ce^{2x}$$

Jego rozwiązaniami (całkami) szczególnymi dla $C = -5$ oraz $C = 7$ są

$$\begin{aligned} C = -5 &\iff y = -5e^{2x} \\ C = 7 &\iff y = 7e^{2x} \end{aligned}$$

2.2 Postać równań różniczkowych pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych

2.2.1 Czym jest równanie różniczkowe pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych?

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych to równanie postaci:

$$\boxed{p(y) \frac{dy}{dx} = q(x)}, \quad (3)$$

gdzie $p(y) \neq 0$. Takim równaniem jest na przykład

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \sin \frac{1}{x} \quad (4)$$

Zauważmy, że w równaniu (4)

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{dy}{dx} \\ q(x) &= x^{-2} \sin \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (5)$$

dla $x \neq 0$, zatem jest to równanie o rozdzielonych zmiennych.

2.2.2 Rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych

Jako przykład, weźmy pierwsze równanie (2). Jest ono równaniem o rozdzielonych zmiennych, ponieważ

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} \\ q(x) &= 0 \end{aligned}$$

dla $y \neq 0$. Przystępujemy do rozwiązania

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y \\ \frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} &= 1, \quad y \neq 0 \\ \frac{1}{2y} dy &= dx \\ \int \frac{1}{2y} dy &= \int dx \end{aligned}$$

$$\ln |y| = 2x + C$$

$$|y| = Ce^{2x}$$

$$\boxed{y = Ce^{2x}}$$

Zauważmy, że stała całkowania $\int \frac{1}{2y} dy$ została wchłonięta w stałą całkowania $\int dx$. Potem, mnożąc obustronnie, również wchłonęliśmy 2 do C . Dlaczego? Skoro C_y to jakaś stała i C_x to jakaś stała, oznaczmy sumę $C_y + C_x$ jako C . Jeśli C jest jakąś stałą oraz 2 jest jakąś stałą, oznaczmy $2C$ jako C .

Spójrzmy jeszcze raz na warunek $y \neq 0$. Podstawiając 0 do naszego równania wszystko się zgadza, a więc 0 również jest rozwiązaniem.

Rozwiążmy teraz drugie równanie (2). Z (5) wiemy, że jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, więc

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \sin \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{-2} \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$dy = x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$\int dy = \int x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$y + C_y = \int \sin u du$$

$$\boxed{y = \cos \frac{1}{x} + C} \tag{6}$$

Pamiętajmy, że jest to rozwiązanie ogólne. Wiemy, że krzywa funkcji y ma przejść przez taki punkt (x_0, y_0) , że $x_0 \neq 0$. Zatem obliczamy stałą C

$$y_0 = \cos \frac{1}{x_0} + C$$

$$C = y_0 - \cos \frac{1}{x_0}$$

Podstawiamy wynik do (6) i mamy ostateczną odpowiedź:

$$\boxed{y = \cos \frac{1}{x} + y_0 - \cos \frac{1}{x_0}}$$

3 Zadania

1. Rozwiązać drugie równanie (2).

Rozwiązanie:

Mamy

$$\cos^2 x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

Z tożsamości trygonometrycznej wiemy, że

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \frac{dy}{dx} = \sin x \vee \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

Zatem

$$\boxed{y = \cos x + C \vee y = -\cos x + C}$$

2. Rozwiązać równanie $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx} = 0$.

Rozwiązanie:

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1+y^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \sqrt{x} \geq 0 \implies \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$u = 1 + y^2, v = 1 + x^2$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{v}} dv$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C$$

$$1+y^2 = \left(-\sqrt{1+x^2} + C\right)^2$$

$$\boxed{y = \pm \sqrt{\left(-\sqrt{1+x^2} + C\right)^2 - 1}}$$

3. Rozwiązać równanie $\frac{dy}{dx} = xy + ax + by + ab$.

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{dx} = xy + ax + by + ab$$

$$\frac{dy}{dx} = x(y+a) + b(y+a)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+b)(y+a)$$

$$\int \frac{dy}{y+a} = \int (x+b) dx$$

$$\ln |y + a| = \frac{1}{2}x^2 + bx + C$$

$$\boxed{y = Ce^{\frac{1}{2}x^2 + bx} - a}$$

4. Rozwiązać równanie $x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

Rozwiązanie:

$$x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int dy = \pm \int \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$y = \pm \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C, x^2 \leq 1 \implies x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\boxed{y = \pm \left(\frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + y_0 - \frac{\arcsin(x_0) + x_0\sqrt{1 - x_0^2}}{2} \right), x_0 \in \langle -1, 1 \rangle}$$

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
2	Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu metodą rozdzielonych zmiennych	1
2.1	Postać równań różniczkowych pierwszego rzędu	1
2.1.1	Czym jest równanie różniczkowe pierwszego rzędu?	1
2.1.2	Rozwiązania równań różniczkowych pierwszego rzędu . . .	1
2.2	Postać równań różniczkowych pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych	2
2.2.1	Czym jest równanie różniczkowe pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych?	2
2.2.2	Rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych	2
3	Zadania	4

Bibliografia

- [1] L. Włodarski W. Kryszicki. *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 2*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1998.