Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego metodą rozdzielonych zmiennych

Bartosz Węgrzyn

21 grudnia 2023

1 Wprowadzenie

Równania różniczkowe opisują całą fizykę - od mechaniki newtonowskiej do mechaniki kwantowej. Pozwalają nam przewidzieć ruch oscylatorów harmonicznych, tory ciał i zachowanie cząsteczek.

2 Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu metodą rozdzielonych zmiennych

2.1 Postać równań różniczkowych pierwszego rzędu

2.1.1 Czym jest równanie różniczkowe pierwszego rzędu?

Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci:

$$\boxed{f(x, y, y') = 0}, \tag{1}$$

gdzie y' występuje zawsze, ale x i y niekoniecznie.

Takimi równaniami są na przykład:

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dx} = 2y \\ \cos^2 x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \end{gathered} \tag{2}$$

2.1.2 Rozwiązania równań różniczkowych pierwszego rzędu

Rozwiązaniem (całką) ogólnym pierwszego równania (2) jest:

$$y = Ce^{2x}$$

Jego rozwiązaniami (całkami) szczegółowymi dla $C = -5$ oraz $C = 7$ są:

$$C = -5 \iff y = -5e^{2x}$$
$$C = 7 \iff y = 7e^{2x}$$

2.2 Postać równań różniczkowych pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych

2.2.1 Czym jest równanie różniczkowe pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych?

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych to równanie postaci:

$$\boxed{p(y)\frac{dy}{dx} = q(x)}, \tag{3}$$

gdzie $p(y) \neq 0$.

Takim równaniem jest na przykład:

$$x^2\frac{dy}{dx} = \sin\frac{1}{x} \tag{4}$$

Zauważmy, że w równaniu (4):

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{dy}{dx} \\ q(x) &= x^{-2}\sin\frac{1}{x} \end{aligned} \tag{5}$$

dla $x \neq 0$, zatem jest to równanie o rozdzielonych zmiennych.

2.2.2 Rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych

Jako przykład, weźmy pierwsze równanie (2). Jest ono równaniem o rozdzielonych zmiennych, ponieważ:

$$p(y) = \frac{1}{2y}\frac{dy}{dx}$$
$$q(x) = 0$$

dla $y \neq 0$.

Przystępujemy do rozwiązania:

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$
$$\frac{1}{2y}\frac{dy}{dx} = 1,\ y \neq 0$$
$$\frac{1}{2y}dy = dx$$
$$\int \frac{1}{2y}\,dy = \int dx$$

$$
\begin{aligned}
\ln|y| &= 2x + C \\
|y| &= Ce^{2x} \\
&\boxed{y = Ce^{2x}}
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że stała całkowania $\int \frac{1}{2y}\, dy$ została wchłonięta w stałą całkowania $\int dx$. Potem, mnożąc obustronnie, również wchłonęliśmy 2 do C. Dlaczego? Skoro C_y to jakaś stała i C_x to jakaś stała, oznaczmy sumę $C_y + C_x$ jako C. Jeśli C jest jakąś stałą oraz 2 jest jakąś stałą, oznaczmy $2C$ jako C.

Spójrzmy jeszcze raz na warunek $y \neq 0$. Podstawiając 0 do naszego równania wszystko się zgadza, a więc 0 również jest rozwiązaniem.

Rozwiążmy teraz drugie równanie (2). Z (5) wiemy, że jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, więc:

$$
\begin{aligned}
x^2 \frac{dy}{dx} &= \sin \frac{1}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= x^{-2} \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0 \\
dy &= x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx \\
\int dy &= \int x^{-2} \sin \frac{1}{x}\, dx \\
y + C_y &= \int \sin u \, du
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{y = \cos \frac{1}{x} + C} \tag{6}
$$

Pamiętajmy, że jest to rozwiązanie ogólne. Wiemy, że krzywa funkcji y ma przejść przez taki punkt (x_0, y_0), że $x_0 \neq 0$. Zatem obliczamy stałą C:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \cos \frac{1}{x_0} + C \\
C &= y_0 - \cos \frac{1}{x_0}
\end{aligned}
$$

Podstawiamy wynik do (6) i mamy ostateczną odpowiedź:

$$
\boxed{y = \cos \frac{1}{x} + y_0 - \cos \frac{1}{x_0}}
$$

3 Zadania

1. Rozwiązać drugie równanie (2).
Rozwiązanie:
Mamy:

$$cos^2 x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

Z tożsamości trygonometrycznej wiemy, że:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \frac{dy}{dx} = \sin x \lor \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

Zatem:

$$\boxed{y = \cos x + C \lor y = -\cos x + C}$$

2. Rozwiązać równanie $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx} = 0$.
Rozwiązanie:

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1+y^2}$$
$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\sqrt{x} \geqslant 0 \implies \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$u = 1+y^2,\ v = 1+x^2$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv$$
$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C$$
$$1+y^2 = \left(-\sqrt{1+x^2}+C\right)^2$$
$$\boxed{y = \pm\sqrt{\left(-\sqrt{1+x^2}+C\right)^2 - 1}}$$

3. Rozwiązać równanie $\frac{dy}{dx} = xy + ax + by + ab$.
Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{dx} = xy + ax + by + ab$$
$$\frac{dy}{dx} = x\left(y+a\right) + b\left(y+a\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = \left(x+b\right)\left(y+a\right)$$
$$\int \frac{dy}{y+a} = \int \left(x+b\right)\,dx$$

$$\ln|y+a| = \frac{1}{2}x^2 + bx + C$$

$$\boxed{y = Ce^{\frac{1}{2}x^2+bx+C} - a}$$

4. Rozwiązać równanie $x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

Rozwiązanie:

$$x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$\int dy = \pm\int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$y = \pm\frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C,\ x^2 \leqslant 1 \implies x \in \langle -1, 1\rangle$$

$$\boxed{y = \pm\left(\frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}}{2} + y_0 - \frac{\arcsin(x_0) + x_0\sqrt{1-x_0^2}}{2}\right),\ x_0 \in \langle -1, 1\rangle}$$

Spis treści

Bibliografia

[1] L. Włodarski W. Krysicki. *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 2.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 1998.