Elektrostatyka

Bartosz Węgrzyn

20 lutego 2025

1 Podstawowe wielkości w elektrostatyce

Cała elektrostatyka opiera się na prawie Coulomba. Mówi ono, że siła, z jaką ładunek q działa na Q jest dana wzorem

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\mathcal{R}^2}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}, \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ to wektor zaczynający się w q i kończący w Q.

Wprowadźmy wielkość zwaną natężeniem pola elektrycznego:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathcal{R}^2}\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}. \tag{2}$$

Wtedy siła działająca na ładunek Q to

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}.$$

$\mathbf{E}$ jest wygodne w użyciu, ponieważ zależy *tylko* od ładunku wytwarzającego pole.

Doświadczalnie stwierdzonym faktem jest zasada superpozycji mówiąca, że

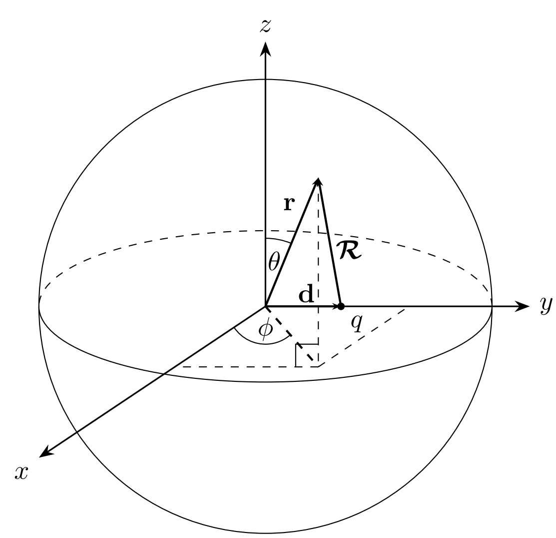
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots, \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{E}$ to całkowite natężenie pola elektrycznego w danym punkcie w przestrzeni. Możemy zatem uogólnić wzór (2) na dowolny rozkład ładunków:

$$\mathbf{E} = \int \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2}\,dq. \tag{4}$$

.

2 Równania Maxwella dla elektrostatyki



Rozważmy ładunek punktowy q umieszczony w odległości d wzdłuż osi y od początku układu współrzędnych. Wytwarza on pole elektryczne dane wzorem (2). Obliczmy dywergencję $\mathbf{E}$ pochodzącego od tego ładunku w punkcie $\mathbf{r}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}),$$

gdzie $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{d}$. Pocałkujmy teraz dywergencję po całej objętości kuli umieszczonej w początku układu i o promieniu R:

$$\int_{\text{kula}} (\nabla \cdot \mathbf{E})\, dV = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\text{kula}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{d})\, dV = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Zauważmy, że

$$\int_{\text{kula}} (\nabla \cdot \mathbf{E})\, dV = \int_{\text{sfera}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} \implies \int_{\text{sfera}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

oraz

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{kula}} \rho\, dV \implies \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Na mocy zasady superpozycji możemy uogólnić ten wynik na dowolny rozkład ładunku. Możemy też uogólnić go na powierzchnię, która ten ładunek w sobie zawiera, co da nam:

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{5}$$

gdzie q to całkowity ładunek *wewnątrz* powierzchni całkowania oraz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{6}$$

gdzie ρ to objętościowa gęstość ładunku w danym punkcie. Jest to prawo Gaussa w postaci różniczkowej i całkowej.

Bez straty ogólności umieśćmy ładunek w początku układu, wtedy $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\mathcal{R}} = \mathbf{r}$. Aby wyznaczyć rotację $\mathbf{E}$, obliczmy najpierw całkę krzywoliniową po dowolnej krzywej łączącej punkty $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ po $\mathbf{E}$.

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (E_r, E_\theta, E_\phi) \cdot (dr, r\, d\theta, r \sin\theta\, d\phi).$$

Ponieważ $E_\theta = E_\phi = 0$, to

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} E_r\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a_r} - \frac{1}{b_r} \right). \tag{7}$$

Jak widzimy, całka *nie zależy* od wybranej drogi, oraz wynosi 0, gdy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Twierdzenie Stokes'a mówi, że

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{dS},$$

zatem

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{8}$$

dla ładunku punktowego oraz na mocy zasady superpozycji dla wszystkich rozkładów ładunków.

3 Potencjał elektryczny

Potencjał elektryczny φ w punkcie $\mathbf{r}$ względem punktu odniesienia $\mathbf{O}$ (gdzie $E = 0$) definiujemy jako

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}. \tag{9}$$

Całkę dla ładunku punktowego obliczyliśmy już w (7):

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{O} - \frac{1}{r} \right). \tag{10}$$

Często $O = \infty$ i wtedy

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}. \tag{11}$$

Uogólniając na dowolny rozkład ładunków:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}}\, dq. \tag{12}$$

4 Równanie Laplace'a i Poissona

Równanie (8) pozwala nam zapisać $\mathbf{E}$ jako

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{13}$$

Aby to udowodnić, obliczmy gradient:

$$-\nabla\varphi = -\nabla\left(-\int_{\mathbf{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl}\right) = \int_{\mathbf{O}}^{\mathbf{r}} \nabla E\, dr = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{O}),$$

a ponieważ $E = 0$ w $\mathbf{O}$:

$$-\nabla\varphi = \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Wstawmy (13) do (6):

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot(-\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi,$$

zatem

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{14}$$

Jest to równanie Poissona. W szczególności, gdy ρ w pewnym obszarze wynosi 0, mamy równanie Laplace'a:

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{15}$$

Funkcje, które są rozwiązaniami równania Laplace'a nazywamy harmonicznymi.

- **W 1 wymiarze**
  Równanie Laplace'a w 1 wymiarze sprowadza się do:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

  więc jego rozwiązania są trywialnie postaci $\varphi = ax + b$. Zauważmy, że

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-r) + \varphi(x+r)\right],$$

  ponieważ

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x-r) + \varphi(x+r)\right] = \frac{1}{2}\left[a(x-r) + b + a(x+r) + b\right] = \frac{1}{2}\left[2ax + 2b\right] = ax + b.$$

  Zauważmy, że jeśli $x \in [\alpha, \beta]$, to $\varphi(x)$ osiąga ekstremalne wartości w $x = \alpha$ i $x = \beta$.

- **W 2 wymiarach**
  Wtedy mamy

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

  Umieśćmy teraz ładunek punktowy q w $(0,0)$. Niech $\mathcal{O}$ to okrąg o promieniu r i środku w (x_0, y_0). Niech $\mathcal{R} = \sqrt{x^2+y^2}$. Zdefiniujmy funkcję

$$g(r) \equiv \frac{1}{2\pi r}\oint_{\mathcal{O}} \varphi(x,y)\, dl = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x,y)\, d\theta.$$

  Zauważmy, że

$$\frac{dg}{dr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{dr}\, d\theta,$$

  a ponieważ φ w żaden sposób *nie zależy* od r, to pochodna ta wszędzie się zeruje, zatem $g(r) = \text{const.}$. Wyznaczmy teraz $\lim_{r\to 0} g(r)$. Gdy r jest małe, φ na okręgu $\mathcal{O}$ jest w przybliżeniu równe φ w środku tego okręgu, zatem całka krzywoliniowa może być przybliżona jako $2\pi r\varphi(x_0, y_0)$. Zatem

$$\lim_{r\to 0} g(r) = \frac{1}{2\pi r} 2\pi r\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0),$$

  a skoro $g'(r) = 0$, to

$$\varphi(x_0, y_0) = g(r).$$

  dla $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ (w tej sytuacji). Jest to rozszerzenie własności średniej z 1 wymiaru. Analogicznie oznacza ona, że funkcja osiąga ekstrema na granicy obszaru.

- **W 3 wymiarach**
  Analogiczne własności można dowieść w podobny sposób dla 3 wymiarów:

  $$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\mathcal{S}} \varphi(x, y, z)\, dS,$$

  gdzie $\mathcal{S}$ to sfera o promieniu r oraz środku w (x_0, y_0, z_0) oraz $\varphi(x, y, z)$ przyjmuje wartości ekstremalne na brzegach obszaru.

5 Twierdzenia o jednoznaczności

Twierdzenia o jednoznaczności brzmią następujaco:

- W obszarze $\mathcal{V}$, gdzie znane jest ρ oraz znana jest wartość φ na $\partial\mathcal{V}$ istnieje *tylko jedno* rozwiązanie równania Poissona.

  Dowód: Załóżmy, że istnieją dwa rozwiązania, φ_1 i φ_2. Niech $\varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1$. Wtedy:

  $$\nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = \nabla^2 \varphi_2 - \nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0.$$

  Zatem φ_3 spełnia równanie Laplace'a w $\mathcal{V}$. Ponieważ na $\partial\mathcal{V}$ $\varphi_2 = \varphi_1$, to φ_3 wynosi tam 0. Skoro φ_3 osiąga swoje ekstremalne wartości na $\partial\mathcal{V}$ i jest harmoniczna, to $\varphi_3 = 0$ w $\mathcal{V}$. Zatem $\varphi_1 = \varphi_2$.

- Jeśli w danym obszarze znajdują się przewodniki i jest znany całkowity ładunek na nich oraz w obszarze między nimi znana jest ρ, to $\mathbf{E}$ jest w tym obszarze określone jednoznacznie.

  Dowód: Niech $\mathbf{E_1}$ i $\mathbf{E_2}$ będą rozwiązaniami problemu. Niech $\mathbf{E_3} = \mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}$. Najpierw zauważmy, że w obszarze między przewodnikami

  $$\nabla \cdot \mathbf{E_1} = \nabla \cdot \mathbf{E_2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

  oraz

  $$\oint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{E_1} \cdot \mathbf{dS} = \oint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{E_2} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0},$$

  gdzie $\mathcal{S}_i$ to powierzchnia otaczająca i-ty przewodnik, a Q_i to ładunek na nim zgromadzony, oraz

  $$\oint_{\mathcal{S}_c} \mathbf{E_1} \cdot \mathbf{dS} = \oint_{\mathcal{S}_c} \mathbf{E_2} \cdot \mathbf{dS} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0},$$

  gdzie $\mathcal{S}_c$ to powierzchnia otaczająca cały rozważany obszar (obejmująca wszystkie przewodniki), a Q_c to całkowity ładunek na wszystkich przewodnikach. Z tych równań możemy wyprowadzić, że

  $$\nabla \cdot \mathbf{E_3} = 0,$$

  $$\oint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{E_3} \cdot \mathbf{dS} = 0$$

  oraz

  $$\oint_{\mathcal{S}_c} \mathbf{E_3} \cdot \mathbf{dS} = 0.$$

  Naszym celem jest dowieść, że $\mathbf{E_3} = \mathbf{0}$, więc przydałaby się całka z E_3^2. Zauważmy, że w ogólności

  $$\nabla \cdot (V\mathbf{E}) = \mathbf{E}\nabla V + V\nabla \cdot \mathbf{E} = -E^2.$$

  Na powierzchni przewodnika $V = \text{const.}$, czyli

  $$V_i \oint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{E_3} \cdot \mathbf{dS} = \oint_{\mathcal{S}_i} V_i \mathbf{E_3} \cdot \mathbf{dS} = \int_{\mathcal{V}_i} \nabla \cdot (V_i \mathbf{E_3})\, dV = -\int_{\mathcal{V}_i} E_3^2\, dV = 0,$$

  gdzie $\mathcal{V}_i$ to objętość ograniczona przez $\mathcal{S}_i$. Skoro całka z kwadratu wynosi 0, to kwadrat musi być równy 0, zatem $E_3 = 0$ na powierzchni każdego z przewodników. Jeśli wybierzemy $\mathcal{S}_c$, takie że potencjał na nim jest stały, poprzez analogiczny argument otrzymamy, że $E_3 = 0$ na granicy obszaru. Skoro zarówno wewnątrz, jak i na granicy obszaru $E_3 = 0$ oraz $\nabla \cdot \mathbf{E_3} = 0$, $\mathbf{E_3} = \mathbf{0}$ w całym obszarze, to $\mathbf{E_1} = \mathbf{E_2}$.

Te twierdzenia oznaczają, że jeśli znajdziemy w *jakikolwiek* sposób *jakiekolwiek* rozwiązanie równania Laplace'a lub Poissona przy zadanych warunkach brzegowych, jest to jedyne i poprawne rozwiązanie.