Kinematyka

Bartosz Węgrzyn

23 grudnia 2023

1 Wprowadzenie

Ta notatka opisuje w najważniejsze zagadnienia w kinematyce: ruchy jednostajne i zmienne, w jednym i dwóch wymiarach, ruch po okręgu oraz względność ruchów.

2 Ruch w jednym wymiarze

2.1 Wiadomości wstępne

2.1.1 Położenie

Położeniem $\overrightarrow{x}$ punktu[1] w danym momencie nazywamy wektor rozpoczynający się w początku układu, a kończący się na tym punkcie (wektor wodzący).

Położeniem $\overrightarrow{x}$ ciała w danym momencie nazywamy wektor wodzący do środka masy tego ciała.

Położenie jest funkcją czasu.

2.1.2 Przemieszczenie

Przemieszczeniem nazywamy wektor:

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0}}, \tag{1}$$

gdzie $\overrightarrow{x_0}$ to położenie początkowe ciała, a $\overrightarrow{x_1}$ to położenie końcowe ciała.

2.1.3 Droga

Droga s to wielkość skalarna opisująca dystans pokonany w pewnym określonym czasie.

Zawsze zachodzą następujące zależności:

$$\boxed{s \geqslant 0 \land s(t_1) \geqslant s(t_0),\, t_1 > t_0} \tag{2}$$

[1] W dwóch i trzech wymiarach położenie i przemieszczenie są oznaczane literą r, aby nie mylić ich z osią x. Jednak w ruchu w jednym wymiarze poruszamy się po jednej osi (zazwyczaj x lub y) i wektor wodzący oznaczamy taką samą literą jak oś.

Pierwsza zależność mówi, że droga zawsze jest dodatnia - nie możemy pokonać ujemnego dystansu. Druga zależność mówi nam, że droga nigdy nie maleje - tak jak pokonany dystans na liczniku samochodu.

2.1.4 Prędkość średnia i chwilowa, szybkość

Prędkość średnia $\vec{v_s}$ jest równa:

$$\vec{v_s} = \frac{\Delta \vec{x}}{t}, \tag{3}$$

gdzie t to pewien przedział czasowy, w którym nastąpiło przemieszczenie $\Delta \vec{x}$.

Prędkość chwilowa $\vec{v}$ jest funkcją czasu i wynosi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} \tag{4}$$

Szybkość średnia v_{sr} to wielkość skalarna:

$$v_s = \frac{s}{t}, \tag{5}$$

gdzie t to czas, w którym została przebyta droga s.

Szybkość chwilowa v to wielkość skalarna:

$$\boxed{v = \left|\frac{dx}{dt}\right| = |\dot{x}| = |\vec{v}|} \tag{6}$$

Szybkość może dowolnie zmieniać swoją wartość, ale musi być zawsze $\geqslant 0$, ponieważ jest modułem wektora.

2.1.5 Przyspieszenie

Przyspieszenie chwilowe $\vec{a}$ to wektor:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{x}} \tag{7}$$

lub skalar:

$$\boxed{a = \left|\frac{dv}{dt}\right| = |\ddot{x}| = |\vec{a}|} \tag{8}$$

Przyspieszenie średnie a_s:

$$a_s = \left|\frac{\Delta v}{t}\right|, \tag{9}$$

gdzie t to czas, w którym nastąpiła zmiana prędkości $\Delta v = v_1 - v_0$.

2.1.6 Wzory całkowe

Z powyższych wzorów wynikają następujące:

$$\boxed{s = \int_0^t v\,dt} \qquad \boxed{v = \int_0^t \pm a\,dt} \tag{10}$$

Stałymi w tych całkach będą s_0 i v_0 (wartości początkowe). Znaczenie znaku $\pm$ zostanie omówione w następnym podrozdziale.

2.1.7 Wyższe pochodne położenia po czasie

Zryw $\vec{z}$ to trzecia pochodna położenia po czasie, można nazwać go "przyspieszeniem przyspieszenia":

$$\vec{z} = \dot{\vec{a}} = \ddot{\vec{v}} = \dddot{\vec{x}} \qquad z = \dot{a} = \ddot{v} = \dddot{x} \tag{11}$$

Udar $\vec{u}$ to czwarta pochodna położenia po czasie, "przyspieszenie zrywu":

$$\vec{u} = \dot{\vec{z}} = \ddot{\vec{a}} = \dddot{\vec{v}} = \ddddot{\vec{x}} \qquad u = \dot{z} = \ddot{a} = \dddot{v} = \ddddot{x} \tag{12}$$

Potraktujmy te wielkości jednak jako ciekawostki, ponieważ bardzo rzadko znajdują zastosowanie w fizyce.

2.2 Ruch jednostajny prostoliniowy

2.2.1 Definicja ruchu jednostajnego prostoliniowego

Ruch jednostajny prostoliniowy to taki ruch, gdzie torem ciała jest linia prosta oraz $v(t) = const.$

2.2.2 Wzory w ruchu jednostajnym prostoliniowym

Wyprowadźmy wzory opisujące ruch jednostajny prostoliniowy:

$$\boxed{s = \int_0^t v\,dt = s_0 + vt} \tag{13}$$

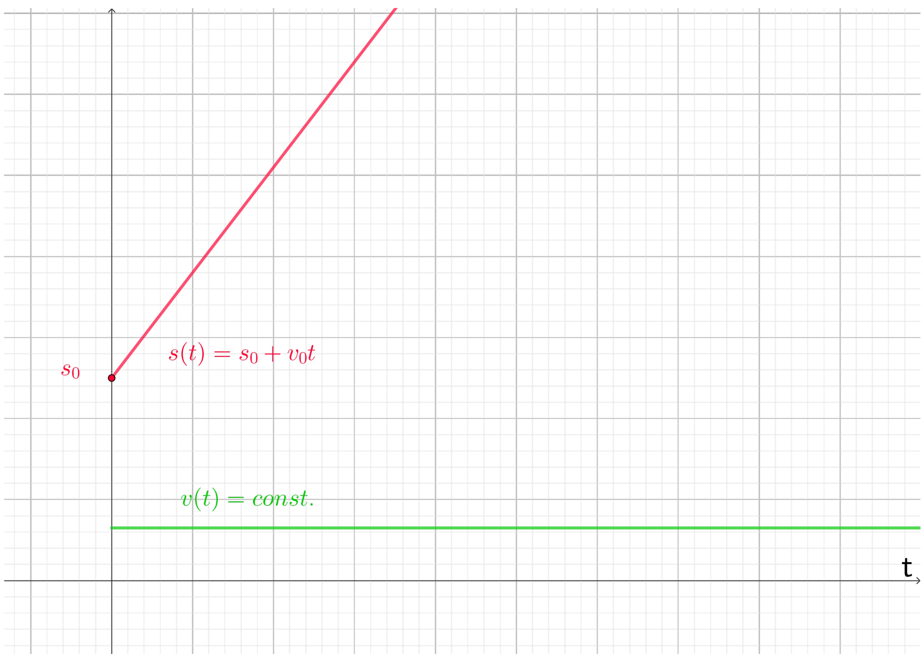
$$v = const. \implies a = 0 \qquad \implies \boxed{\Delta v = \int_0^t a\,dt - v_0 = 0} \tag{14}$$

Równanie ruchu ma postać:

$$\boxed{x(t) = x_0 \pm vt}, \tag{15}$$

gdzie gdy mamy $+$, $\vec{v}$ jest skierowany zgodnie z osią, a gdy mamy $-$, $\vec{v}$ jest skierowany przeciwnie do osi.

Na rysunku 1 widać wykres drogi oraz prędkości od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym.



Rysunek 1: Wykres s(t) i v(t) w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

2.3 Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

2.3.1 Definicja ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego

Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny to taki ruch, gdzie torem ciała jest linia prosta oraz $a = const. \wedge a \neq 0$.

2.3.2 Wzory w ruchu prostoliniowym jednostajnie zmiennym

Wyprowadzając wzory dla ruchu jednostajnie zmiennego, mamy:

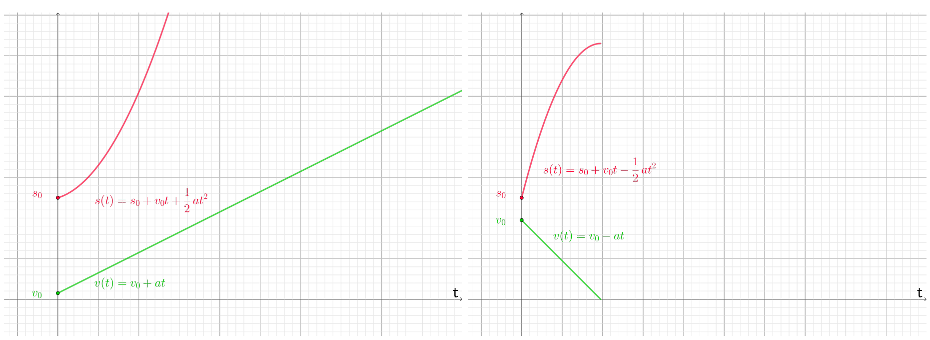
$$\boxed{v_1 = \int_0^t \pm a\, dt = v_0 \pm at} \tag{16}$$

$$\boxed{a = \frac{v_1 - v_0}{t} = \frac{\Delta v}{t}} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t v_0 + at\,dt = \\ = \boxed{s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2} \end{aligned} \tag{18}$$

Pojawiają się tu znaki $\pm$, dlatego że w zależności czy ruch jest przyspieszony, czy opóźniony, musimy przyspieszeniu nadać znak dodatni lub ujemny. Ruch nazywamy przyspieszonym, kiedy zwroty $\vec{v}$ i $\vec{a}$ są zgodne, a opóźnionym, kiedy ich zwroty są przeciwne. Zauważmy, że przez to dziedziną funkcji $v(t)$ i $s(t)$ w ruchu opóźnionym będą tylko takie nieujemne wartości t, dla których $v_0 - at \geqslant 0$ (do tego momentu droga będzie rosła, a nie malała, co byłoby niezgodne z założeniami (2)).

Drogę i prędkość jako funkcję czasu w tym ruchu pokazuje rysunek 2.



(a) (b)

Rysunek 2: Wykresy $v(t)$ i $s(t)$ w ruchu prostoliniowym jednostajnie (a) przyspieszonym (b) opóźnionym. Zauważmy, że wykres (b) ucina się od razu, gdy $v(t) = 0$, czyli wektor $\vec{v}$ zmienia swój zwrot. Wtedy droga zaczęłaby maleć, co jest niezgodne ze wcześniejszymi założeniami.

Równanie ruchu ma postać:

$$\boxed{x(t) = x_0 \pm v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2}, \tag{19}$$

gdzie znaki zależą od zwrotów $\vec{v}$ i $\vec{a}$ względem osi.

W ruchu przyspieszonym bez drogi początkowej:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Wyciągnijmy t przed nawias i podstawmy $at = \Delta v$:

$$s = t\left(v_0 + \frac{1}{2}at\right)$$
$$s = t\left(v_0 + \frac{1}{2}\Delta v\right)$$

Jak wiemy, w czasie t, $\Delta v = v_1 - v_0$:

$$s = t\left(v_0 + \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_0\right)$$
$$s = \frac{1}{2}t\left(v_1 + v_0\right)t = \frac{2s}{(v_1 + v_0)}$$

Wiemy również, że:

$$t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

Przyrównajmy zatem te dwa równania:

$$\frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{2s}{(v_1 + v_0)}$$
$$2sa = (v_1 - v_0)(v_1 + v_0)$$

Prawa strona tego równania to nic innego, jak wzór skróconego mnożenia. Mamy więc nasz ostateczny wzór:

$$\boxed{2sa = v_1^2 - v_0^2} \tag{20}$$

2.3.3 Rzut pionowy w dół i spadek swobodny

Ruch w rzucie pionowym w dół jest niczym innym, jak ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym, gdzie $a = g$ ($g \approx 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$).

Zatem opiszmy ten ruch poznanymi wcześniej równaniami:

$$h(t) = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{21}$$

gdzie $h(t)$ to wysokość ciała nad powierzchnią ziemi w danym momencie w czasie, h_0 to wysokość, z jakiej zostało rzucone ciało, a v_0 to prędkość, z jaką rzucono ciało. Zakładamy tutaj że wszystkie wektory są skierowane równolegle do osi y, której początkiem (zerem) jest ziemia oraz jest ona skierowana w górę (stąd minusy w równaniu - wektory $\vec{v}$ i $\vec{a}$ są skierowane w dół).

W przypadku szczególnym, kiedy $v_0 = 0$:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \tag{22}$$

Taki ruch nazywamy wtedy spadkiem swobodnym.

W rzucie pionowym w dół oraz w spadku swobodnym, prędkość ciała tuż przed uderzeniem w ziemię możemy wyprowadzić ze wzoru (20):

$$v_1 = \sqrt{2h_0 g + v_0^2} \tag{23}$$

dla rzutu pionowego oraz:

$$v_1 = \sqrt{2h_0 g} \tag{24}$$

dla spadku swobodnego.

Przekształcając wzory, mamy:

$$\boxed{h_0 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}} \tag{25}$$

oraz:

$$\boxed{h_0 = \frac{v_1^2}{2g}} \tag{26}$$

2.3.4 Rzut pionowy w górę

Rzut pionowy w górę jest po prostu ruchem prostoliniowym jednostajnie opóźnionym. Zatem możemy go opisać równaniem:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{27}$$

gdzie h to wysokość ciała nad ziemią w danym momencie t w czasie, h_0 to wysokość nad ziemią, z jakiej ciało zostało rzucone, a v_0 to prędkość jaka została nadana ciału przy wyrzucie.

Aby obliczyć h_{max}, obliczmy maksimum funkcji $h(t)$:

$$\begin{gathered} \dot{h} = v_0 - gt \\ v_0 - gt = 0 \\ v_0 = gt \implies \text{funkcja osiąga ekstremum, kiedy } t = \frac{v_0}{g} \\ \ddot{h} = -g < 0 \implies \text{tym ekstremum jest maksimum} \end{gathered}$$

Podstawmy więc nasz wynik do równania (27):

$$\boxed{h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}} \tag{28}$$

Jak pamiętamy, w tym przypadku $v_0 = g t_{max}$. Podstawmy to więc do powyższego równania:

$$h_{max} = h_0 + \frac{1}{2} g t_{max}^2$$

$$\boxed{t_{max} = \sqrt{\frac{2(h_{max} - h_0)}{g}}} \tag{29}$$

W tym ruchu całkowity czas lotu t jest równy:

$$\boxed{t = t_{max} + t_s,} \tag{30}$$

gdzie t_s jest czasem spadania ciała, który można łatwo wyliczyć ze wzorów w spadku swobodnym. Jest on równy czasowi wznoszenia (t_{max}), jeśli wysokość z jakiej zostało rzucone ciało i na jakiej ono wylądowało są równe. Wtedy $t = 2t_{max}$.

2.4 Ruchy niejednostajnie zmienne

Jeśli mamy dane położenie, prędkość lub przyspieszenie jako dowolną funkcję czasu, nie koniecznie wpasowującą się w poprzednie ruchy, możemy z łatwością dokonać obliczeń używając wzorów z paragrafów 2.1.4, 2.1.5 i 2.1.6.

3 Ruch w dwóch wymiarach

W przypadku, gdy mamy do czynienia z ruchem w dwóch wymiarach, najłatwiej jest rozdzielić wektory na poszczególne składowe i traktować je jako niezależne od siebie.

3.1 Rzut poziomy

3.1.1 Podział ruchu na dwie składowe

W rzucie poziomym mamy do czynienia z dwoma ruchami - jednostajnym prostoliniowym w osi x oraz spadkiem swobodnym w osi y. Zatem:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \tag{31}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} \tag{32}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}, \tag{33}$$

gdzie $\hat{\imath}$ oraz $\hat{\jmath}$ to wersory w kierunku odpowiednio osi x i y.

Dzięki takiemu podziałowi, możemy oddzielnie analizować ruch w osi x oraz y, a następnie nałożyć je na siebie.

3.1.2 Składowa x w rzucie poziomym

W rzucie poziomym prędkość nadana ciału na początku ma tylko składową x. Pomijamy też opory powietrza, więc składowa x naszej prędkości pozostaje bez zmian. Zatem mamy do czynienia z ruchem jednostajnym prostoliniowym (prostoliniowy, ponieważ rozważamy ruch jedynie wzdłuż jednej osi). Przyjmujemy, że ciało zostało rzucone z zera osi x, więc pozbywamy się x_0. Wtedy:

$$\boxed{v_x = v_0 = const.} \tag{34}$$

$$\boxed{x = v_x t} \tag{35}$$

3.1.3 Składowa y w rzucie poziomym

W rzucie poziomym prędkość początkowa ciała nie posiada składowej y. Nadaje ją dopiero grawitacja, zatem mamy do czynienia ze spadkiem swobodnym. Zakładamy, że ciało zostało rzucone na wysokości h_0 nad ziemią. Zatem:

$$\boxed{v_y = gt} \tag{36}$$

$$\boxed{y = h_0 - \frac{1}{2}gt^2} \tag{37}$$

Możemy stosować tu wszystkie wzory poznane w paragrafie 2.3.3.

3.1.4 Łączenie dwóch składowych

Zasięgiem d rzutu poziomego (oraz później ukośnego) nazywamy odległość, jaką podczas lotu przebędzie ciało w osi x:

$$d = v_0 t \tag{38}$$

Mając dany zasięg i prędkość początkową, możemy wyliczyć czas:

$$\boxed{t = \frac{d}{v_0}} \tag{39}$$

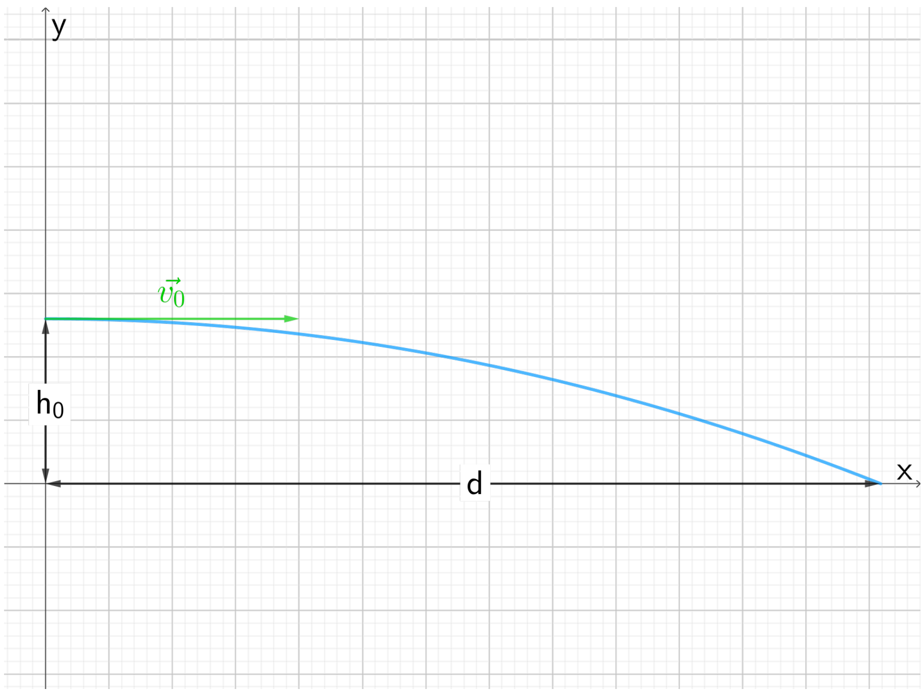
Teraz możemy np. obliczyć wysokość, na jakiej rzucono ciało:

$$\boxed{h_0 = \frac{1}{2}\frac{gd^2}{v_0^2}} \tag{40}$$

Możemy również połączyć dwie składowe położenia w jeden wektor:

$$\boxed{\overrightarrow{r} = (v_0 t)\hat{i} + \left(h_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}} \tag{41}$$

Tor ciała w rzucie poziomym widać na rysunku 3.



Rysunek 3: Tor ciała w rzucie poziomym z zaznaczonym zasięgiem, wysokością początkową i prędkością początkową.

3.2 Rzut ukośny

3.2.1 Składowa x w rzucie ukośnym

Podobnie jak w rzucie poziomym, składowa x prędkości pozostaje stała przez cały czas. To oznacza, że mamy do czynienia z ruchem jednostajnym prostoliniowym w osi x. Dlatego tutaj obliczenia będą wyglądały tak samo jak w rzucie poziomym. Jednak pamiętajmy, że $v_x \neq v_0$, ponieważ v_x nie jest jedyną składową wektora $\vec{v_0}$.

3.2.2 Składowa y w rzucie ukośnym

Teraz w osi y mamy do czynienia z rzutem pionowym w górę z prędkością początkową v_{0y}. Jeśli ciało zostało rzucone z wysokości h_0, to:

$$\boxed{y = h_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2} \tag{42}$$

Jeżeli ciało ląduje na takiej samej wysokości, z jakiej zostało rzucone (np.

na płaskiej polanie):

$$t = 2t_{max} = 2\sqrt{\frac{2(h_{max} - h_0)}{g}} \tag{43}$$

Możemy też obliczyć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się to ciało:

$$\boxed{h_{max} = h_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}} \tag{44}$$

3.2.3 Łączenie składowych

Skoro v_x i v_{0y} są składowymi wektora $\vec{v_0}$, mamy:

$$\begin{gathered} \boxed{v_x = v_0 \cos\theta_0} \\ \boxed{v_{0y} = v_0 \sin\theta_0}, \end{gathered} \tag{45}$$

gdzie θ_0 to kąt zawarty między osią x a wektorem $\vec{v_0}$. Stąd mamy również:

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{v_{0y}}{v_x}\right) \tag{46}$$

Jeżeli ciało ląduje na takiej samej wysokości jak h_0, $v_y = v_{0y}$ oraz $\theta = -\theta_0$. Czas ponownie możemy wyliczyć nie tylko z y, ale też z x:

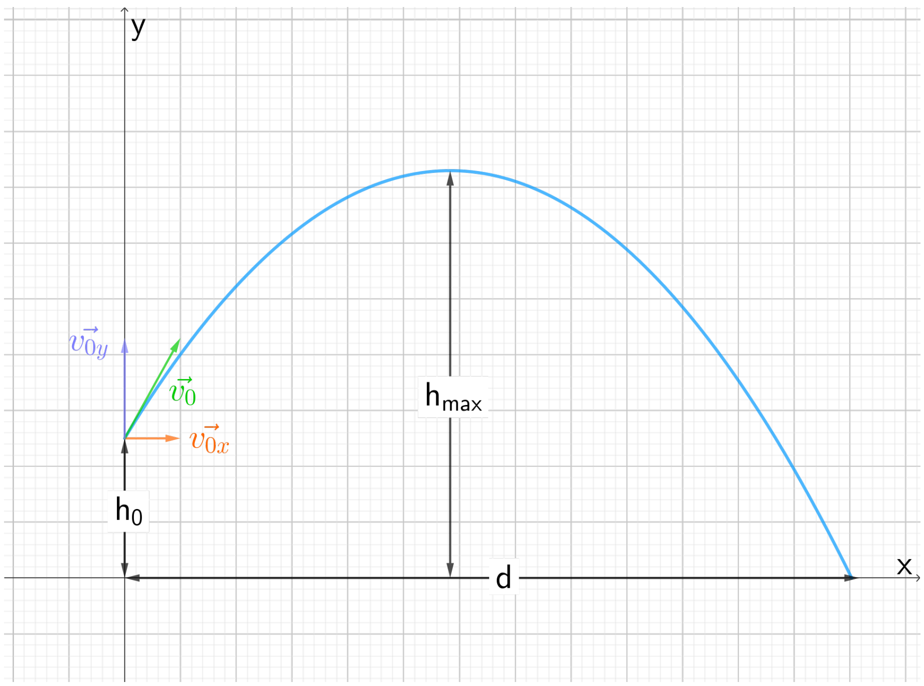
$$\boxed{t = \frac{d}{v_0 \cos\theta_0}} \tag{47}$$

Łącząc obie składowe w jeden wektor, mamy:

$$\boxed{\vec{r} = (v_0 t \cos\theta_0)\,\hat{i} + \left(h_0 + v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}} \tag{48}$$

Tor w rzucie ukośnym został przedstawiony na rysunku 4 (następna strona).

Na podstawie równań z ruchu jednostajnego prostoliniowego oraz z rzutu pionowego w górę jesteśmy w stanie wyprowadzać wiele równań i zależności, które są w pełni dostosowane do potrzeb problemu.



Rysunek 4: Tor ciała w rzucie ukośnym z zaznaczonym zasięgiem, wysokością początkową i maksymalną oraz prędkością początkową i jej składowymi.

3.3 Ruch po okręgu

3.3.1 Prędkość i przyspieszenie kątowe

θ to kąt, jaki wektor wodzący ciała poruszającego się po okręgu tworzy z osią x.

ω to prędkość kątowa, czyli pierwsza pochodna θ po czasie (szybkość jego zmian):

$$\boxed{\omega = \dot{\theta}} \tag{49}$$

ε to przyspieszenie kątowe, czyli druga pochodna θ po czasie:

$$\boxed{\varepsilon = \ddot{\theta}} \tag{50}$$

Częstość kołowa f to częstotliwość obrotów (tzn. ile razy ciało poruszające się po okręgu zatoczy kąt 2π rad w danej jednostce czasu):

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}} \tag{51}$$

3.3.2 Definicja ruchu jednostajnego po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu, to taki ruch, gdzie wartość wektora prędkości ciała pozostaje stała, a ciało zakreśla tor po okręgu. Ruch jednostajny po okręgu jest w pewnym sensie ruchem zmiennym - wektor prędkości zmienia swój kierunek, a więc musi działać na ciało przyspieszenie.

3.3.3 Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu

Aby wektor prędkości ciała $\vec{v}$ zmieniał swój kierunek bez zmiany swojej wartości, musimy dodawać do niego inny, nieskończenie mały oraz prostopadły wektor prędkości $d\vec{v}$. Jak pamiętamy:

$$\vec{v} = \vec{a}t \tag{52}$$

zatem aby nasz wektor był nieskończenie mały i prostopadły do $\vec{v}$, wektor przyspieszenia również prostopadły do wektora $\vec{v}$ musimy pomnożyć przez nieskończenie mały czas dt. Z tego powodu wektor $\vec{a}$ w ruchu jednostajnym po okręgu zawsze jest prostopadły do wektora $\vec{v}$ - tylko wtedy $\vec{v}$ będzie zmieniał swój kierunek bez zmiany swojej wartości (rysunek 5).

(a) (b)

Rysunek 5: Na rysunku (a) przedstawiono dodawanie wektora $d\vec{v}$ do $\vec{v}$. Jak $|d\vec{v}| \to 0$, $|\vec{v} + d\vec{v}| \to |\vec{v}|$, ale wektor wypadkowy jest obrócony. Na rysunku (b) przedstawiono wektory przyspieszenia dośrodkowego i prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu. Zaznaczono też kąt θ i promień okręgu.

Przyspieszenie w tym ruchu można obliczyć ze wzoru:

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}}, \tag{53}$$

gdzie r jest zarówno długością wektora wodzącego ciała poruszającego się po okręgu, jak i promieniem okręgu.

3.4 Względność ruchu

Jeżeli układ R' porusza się ruchem jednostajnym z prędkością u względem układu R, a ciało porusza się z prędkością $\vec{v}'$ względem układu R', to ciało porusza się z prędkością $\vec{v}$ względem układu R, która jest równa:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}} \tag{54}$$

Wtedy położenie tego ciała względem układu R wynosi:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r_0}' + \vec{v}t}, \tag{55}$$

gdzie $\vec{r_0}$ to położenie początkowe układu R' względem układu R, a $\vec{r_0}'$ to położenie początkowe ciała względem układu R'.

Układy nie przyspieszają, a więc są układami inercjalnymi, tzn. działają w nich zasady dynamiki Newtona. Przeciwieństwem układów inercjalnych są układy nieinercjalne.

Powyższe zależności są prawdziwe jedynie, gdy:

$$v,\ v',\ u \ll c \tag{56}$$

oraz gdy czas płynie tak samo we wszystkich układach, tzn. $t = t'$.

Ruch ciał w przypadkach, gdy ich prędkości są porównywalne do c bada szczególna teoria względności.

Spis treści