Kinematyka

Bartosz Węgrzyn

5 kwietnia 2024

1 Kinematyka

1.1 Pojęcia wstępne

1.1.1 Położenie, przemieszczenie, tor, droga

Położeniem ciała nazywamy wektor łączący początek układu współrzędnych z tym ciałem (środkiem masy tego ciała):

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{1}$$

Przemieszczeniem ciała nazywamy różnicę wektorową jego położenia końcowego i początkowego:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 \tag{2}$$

Torem ciała nazywamy krzywą, po której się ono porusza.

Drogą s przebytą przez ciało nazywamy odległość jaką przebył wzdłuż toru. Droga nigdy nie jest ujemna.

1.1.2 Prędkość, szybkość

Prędkością średnią nazywamy

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3}$$

Prędkością chwilową nazywamy

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4}$$

Szybkość jest modułem z prędkości.

1.1.3 Przyspieszenie

Przyspieszeniem średnim nazywamy

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{5}$$

Przyspieszeniem chwilowym nazywamy

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{6}$$

1.1.4 Ruch jednostajny prostoliniowy

Ruchem jednostajnym prostoliniowym nazywamy taki ruch, gdzie $\vec{v} = const.$, z czego wynika że tor jest linią prostą.

W takim ruchu:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \tag{7}$$

Ponieważ ruch odbywa się w jednym wymiarze, załóżmy że po osi x, możemy rozpisać cały ruch na składowej x:

$$x(t) = x_0 + v_x t \tag{8}$$

Droga w tym ruchu jest równa:

$$s(t) = s_0 + |v_x|t \tag{9}$$

1.2 Ruch w 1 wymiarze

1.2.1 Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

W ruchu prostoliniowym jednostajnie zmiennym, $\vec{a} = const.$, a torem ruchu jest linia prosta.

Gdy wektory $\vec{v}$ i $\vec{a}$ są zgodne, ruch nazywamy przyspieszonym, a gdy są zwrócone przeciwnie, ruch nazywamy opóźnionym.

Wtedy:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{10}$$

oraz

$$s(t) = s_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{11}$$

Należy pamiętać jednak, że droga nie może być ujemna i w razie potrzeby należy podzielić ruch na kilka części (np. gdy wektor $\vec{v}_0$ jest skierowany przeciwnie do wektora $\vec{a}$, należy podzielić ruch na opóźniony i przyspieszony).

Okazuje się, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej zachodzi następująca zależność: droga przebyta w kolejnych sekundach ruchu ma się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste.

Oznacza to, że:

$$\begin{gathered} \frac{s_{01}}{s_{12}} = \frac{1}{3} \\ \frac{s_{12}}{s_{23}} = \frac{3}{5} \\ \frac{s_{23}}{s_{34}} = \frac{5}{7} \text{ itd.} \end{gathered} \tag{12}$$

1.2.2 Spadek swobodny i rzut pionowy

W spadku swobodnym ciało spada swobodnie tzn. bez prędkości początkowej, a jedynym przyspieszeniem jest przyspieszenie grawitacyjne $g \approx 9.81 \mathrm{m\,s^{-2}}$. Jest to ruch jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej.

Rzut pionowy w dół jest podobny do spadku swobodnego, ale ciało ma nadaną prędkość początkową w dół.

Rzut pionowy w górę to złożenie dwóch ruchów: jednostajnie opóźnionego w górę i jednostajnie przyspieszonego w dół (spadku swobodnego). Przyspieszeniem jest przyspieszenie grawitacyjne.

1.3 Ruch w 2 i 3 wymiarach

1.3.1 Postać ogólna

Postać ogólna równania ruchu ma postać:

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)\, dt \tag{13}$$

Również mamy

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t)\, dt \tag{14}$$

oraz

$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(t)|\, dt \tag{15}$$

W 2 lub 3 wymiarach ruch na każdym z kierunków możemy rozważać oddzielnie upraszczając sytuację do ruchu w 1 wymiarze.

1.3.2 Ruch po okręgu

W ruchu po okręgu torem ciała jest okrąg. Jeśli ruch jest jednostajny, oznacza to że szybkość jest stała.

W ruchu jednostajnym po okręgu θ jest kątem jaki ciało zatoczyło względem pewnego punktu początkowego. Jest mierzony w radianach. Kąt ten zeruje się po osiągnięciu wartości 2π.

$$s = \theta r \tag{16}$$

gdzie s to droga przebyta przez ciało, θ to zatoczony kąt, a r to promień okręgu po którym się ono porusza.

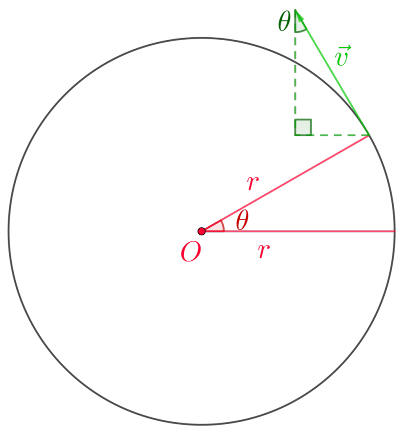
Prędkość kątowa:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{s}{r} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r} \tag{17}$$

Przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{v}{r} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt} = \frac{a}{r} \tag{18}$$

W ruchu jednostajnym po okręgu wektor prędkości zmienia swój kierunek, ale nie wartość. Innymi słowy, prędkość kątowa jest stała. Aby taka sytuacja zachodziła, musi działać na niego przyspieszenie skierowane zawsze prostopadle do niego.



Rysunek 1

Z rysunku 1 widzimy, że:

$$\vec{v} = -v\sin\theta\,\hat{i} + v\cos\theta\,\hat{j}$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \hat{i}\frac{d}{dt}(-v\sin\theta) + \hat{j}\frac{d}{dt}(v\cos\theta) = -v\omega\cos\theta\,\hat{i} - v\omega\sin\theta\,\hat{j}$$
$$a^2 = v^2\omega^2\cos^2\theta + v^2\omega^2\sin^2\theta = v^2\omega^2$$
$$a = v\omega$$
$$\omega = \frac{v}{r}$$

i ostatecznie:

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{19}$$

Podstawiając $v = \omega r$:

$$a = \omega^2 r \tag{20}$$

W ruchu zmiennym po okręgu, oprócz składowej skierowanej wzdłuż promienia, wektor przyspieszania posiada składową styczną to toru ruchu, a przyspieszenie kątowe jest niezerowe.

1.3.3 Rzut poziomy

Rzut poziomy to złożenie ruchu jednostajnego na osi x oraz spadku swobodnego na osi y. Ciało zostaje rzucone z pewnej wysokości H z prędkością początkową v_0 posiadającą jedynie składową na osi x.

Ruch na osi x:

$$x(t) = v_0 t \tag{21}$$

Ruch na osi y:

$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \tag{22}$$

Prędkość chwilowa:

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} \tag{23}$$

Czas lotu (aż do $y = 0$):

$$\begin{aligned} H - \frac{1}{2}gt_l^2 &= 0 \\ \frac{1}{2}gt_l^2 &= H \\ t_l &= \sqrt{\frac{2H}{g}} \end{aligned} \tag{24}$$

Zasięg rzutu poziomego:

$$d = v_0 t_l \tag{25}$$

1.3.4 Rzut ukośny

W rzucie ukośnym ciału zostaje nadana prędkość początkowa v_0 o składowych v_{0x} i v_{0y} na wysokości H_0. Na osi x mamy ruch jednostajny, a na osi y rzut pionowy w górę

Ruch na osi x:

$$x(t) = v_{0x}t \tag{26}$$

Ruch na osi y:

$$y(t) = H + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{27}$$

Prędkość początkowa:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \tag{28}$$

Prędkość chwilowa:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{29}$$

Składowe prędkości:

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos\theta \\ v_y &= v\sin\theta \end{aligned} \tag{30}$$

gdzie θ jest kątem nachylenia wektora $\vec{v}$ do osi x.

Czas lotu (do $y = 0$):

$$\begin{aligned} H_0 + v_{0y}t_l - \frac{1}{2}gt_l^2 &= 0 \\ t_l &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gH_0}}{2H_0} \end{aligned} \tag{31}$$

powyższe równanie ma 2 rozwiązania jeśli $H_0 = 0$ (wtedy należy stwierdzić, które jest poprawne), 1 rozwiązanie jeśli $H_0 > 0$ lub $H_0 < 0$ oraz v_{0y} jest dostatecznie duże, aby ciało doleciało do $y = 0$, oraz 0 rozwiązań, jeśli $H_0 < 0$

oraz v_{0y} nie jest wystarczająco duże. Pamiętajmy, że rozwiązania nie tylko muszą być rzeczywiste, ale też nieujemne (czas nie może być ujemny).

Dla $H_0 = 0$ mamy prostszy przypadek:

$$\begin{aligned} v_{0y}t_l - \frac{1}{2}gt_l^2 &= 0 \\ v_{0y} &= \frac{1}{2}gt_l \\ t_l &= \frac{2v_{0y}}{g} \end{aligned} \tag{32}$$

Zasięg rzutu ukośnego:

$$d = v_{0x}t_l = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \tag{33}$$

Najwyższa wysokość, na którą wzniesie się ciało:

$$\begin{gathered} H_{max} = y(t_max) \\ v_y(t_{max}) = 0 \\ v_{0y} - gt_{max} = 0 \\ v_{0y} = gt_{max} \\ t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} \\ H_{max} = H_0 + \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = H_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} \end{gathered} \tag{34}$$

Spis treści