Prawo Gaussa

Bartosz Węgrzyn

17 grudnia 2023

1 Prawo Gaussa

1.1 Postać prawa Gaussa

1.1.1 Strumień pola elektrycznego

Strumieniem Φ_E pola $\vec{E}$ przez powierzchnię $\mathcal{S}$ nazywamy całkę

$$\Phi_E = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} \tag{1}$$

Strumień $\vec{E}$ przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest miarą całkowitego ładunku zawartego w tej powierzchni. Jest tak, ponieważ wszystkie linie pola elektrycznego muszą albo przejść przez powierzchnię, zmieniając tym samym strumień, albo skończyć się na innym, przeciwnym ładunku, nie wnosząc nic do strumienia. Ponieważ natężenie pola elektrycznego jest skutkiem istnienia ładunku oraz jest ono wprost proporcjonalne co do jego wielkości, jest ono samo w sobie miarą tego ładunku.

1.1.2 Prawo Gaussa w postaci całkowej

Obliczmy strumień pewnego pola $\vec{E}$ wytwarzanego przez ładunek punktowy q znajdujący się w początku układu przez sferę o promieniu r:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$d\vec{a} = dl_\theta \times dl_\phi = r\,d\theta\,\hat{\theta} \times r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi} = r^2\sin\theta\,dr\,\hat{r}$$

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$\Phi_E = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\,d\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

Stąd mamy

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

Stosując zasadę superpozycji:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i} \implies \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E_i} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_0} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{wew}$$

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{wew} \tag{2}$$

Równanie (2) to prawo Gaussa w postaci całkowej.

1.1.3 Prawo Gaussa w postaci różniczkowej

Stosując na równaniu (2) podstawowe twierdzenie dla dywergencji mamy

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) d\tau$$

Jeśli ładunek q_{wew} jest rozłożony wewnątrz powierzchni $\mathcal{S}$ z gęstością ρ, mamy

$$q_{wew} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau \implies \iiint_{\mathcal{V}} \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d\tau$$

Funkcje wewnątrz całek muszą być równe, więc

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{3}$$

Równanie (3) to prawo Gaussa w postaci różniczkowej.

Prawo Gaussa w postaci różniczkowej możemy wyprowadzić również z użyciem delty Diraca:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{r^2} \hat{r} \, dV \\
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV \\
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} 4\pi \delta^3(\vec{r}) \rho \, dV \\
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \delta^3(\vec{r}) \rho \, dV \\
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho
\end{aligned}$$

1.1.4 Rotacja pola $\vec{E}$

Wyznaczmy przy okazji rotację pola $\vec{E}$. Aby to zrobić, obliczmy całkę krzywoliniową skierowaną po krzywej łączącej punkty a i b:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = \hat{r}\, dr + r\hat{\theta}\, d\theta + r \sin\theta \hat{\phi}\, d\phi$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}\, dr$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{q}{r^2}\, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$$

Z wyniku widać, że wartość tej całki nie zależy od drogi całkowania, a jedynie od punktu początkowego i końcowego. Wiemy, że takie pola wektorowe są zachowawcze, za czym idzie:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{4}$$

1.2 Zastosowania prawa Gaussa

1.2.1 Kiedy stosować prawo Gaussa?

Prawo Gaussa sprawdza się najlepiej, kiedy mamy do czynienia z pewną symetrią. W szczególności, kiedy mamy do czynienia z symetrią sferyczną, osiową lub względem płaszczyzny.

Kiedy mamy do czynienia z symetrią sferyczną, wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie sfery.

Kiedy mamy do czynienia z symetrią osiową, wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie walca, którego osią jest oś symetrii.

Kiedy mamy do czynienia z symetrią względem płaszczyzny, wybieramy powierzchnię Gaussa w kształcie pudełka obejmującego powierzchnię z obu stron.

Choć symetrie osiowa i względem płaszczyzny wymagają nieskończenie długich walców i płaszczyzn, stanowią one bardzo dobre przybliżenie dla długich walców i dużych płaskich powierzchni.

1.2.2 Izolowany przewodnik naładowany

Jeżeli izolowany przewodnik (to znaczy, że nie może wymieniać ładunku z innymi przewodnikami, np. zawieszony na nieprzewodzącej lince w powietrzu) nie posiada nadmiernego ładunku, to pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz niego jest zerowe. Co jednak jeśli jest on naładowany? Gdyby w jego wnętrzu występowało pole elektryczne, to zacząłby płynąć tam prąd, co jest niemożliwe (w przewodniku przez ułamek sekundy wprawdzie ładunki przemieszczają się, dopóki nie osiągną równowagi elektrostatycznej. Tutaj jednak, mamy na myśli nieprzerwany przepływ prądu). Dlatego wszystkie nadmierne ładunki przemieszczają się na powierzchnię przewodnika, przez co w jego wnętrzu $\vec{E} = 0$, a prąd nie płynie.

Weźmy kawałek powierzchni przewodnika $\mathcal{S}$ tak mały, że można uznać go za płaski. Wtedy mamy do czynienia z symetrią względem płaszczyzny, więc powierzchnią Gaussa będzie pudełko.

Wszystkie składowe $\vec{E}$ równoległe do $\mathcal{S}$ wzajemnie się znoszą, więc $\vec{E}$ zawsze będzie miało kierunek zgodny z kierunkiem wektora normalnego powierzchni $\mathcal{S}$, $\hat{n}$.

Zauważmy, że strumień przez część pudełka Gaussa znajdującą się wewnątrz przewodnika będzie zerowy, ponieważ tam $\vec{E} = 0$. Strumień przez boki prostopadłe do $\mathcal{S}$ jest równy 0, więc zostaje tylko strumień przez zewnętrzny bok równoległy do $\mathcal{S}$. Powierzchnia tego boku będzie taka sama jak powierzchnia fragmentu $\mathcal{S}$ wewnątrz pudełka Gaussa, $d\mathcal{S}$. Wtedy strumień wynosi

$$\Phi_E = E\, d\mathcal{S} \tag{5}$$

Zakładamy, że całą powierzchnia przewodnika jest naładowana jednorodnie z gęstością σ. Wtedy całkowity ładunek zawarty wewnątrz pudełka Gaussa wynosi

$$q_{wew} = \sigma\, d\mathcal{S} \tag{6}$$

Podstawiamy wielkości do równania (2)

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \tag{7}$$

$\vec{E}$ będzie miało zwrot zgodny z $\hat{n}$, gdy przewodnik będzie naładowany dodatnio, a przeciwny, gdy przewodnik będzie miał ładunek ujemny.

1.3 Zadania

1. Znaleźć pole na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu R i gęstości ładunku ρ.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczamy całkowity ładunek zawarty w kuli

$$q_{wew} = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Następnie podstawiamy do równania (2)

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wiemy, że $\vec{E}$ będzie zawsze skierowane radialnie na zewnątrz kuli, czyli będzie zawsze równoległe do wektora normalnego $\hat{n}$ naszej powierzchni Gaussa $\mathcal{S}$. Stąd

$$\vec{E} \cdot d\vec{a} = E\, da \implies E \oiint_{\mathcal{S}} da = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\oiint_{\mathcal{S}} da$ to po prostu powierzchnia naszej kuli

$$4\pi R^2 E = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{1}{3\varepsilon_0} R\rho$$

Jak wspomniano wcześniej, $\vec{E}$ jest skierowane radialnie od wewnątrz kuli, więc

$$\vec{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0} R\rho\hat{n} \tag{8}$$

Co ciekawe, podstawiając q_{wew}/V za ρ, otrzymujemy

$$\vec{E} = \frac{q_{wew}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{n}, \tag{9}$$

co jest niczym innym jak podstawową definicją pola elektrycznego.

2. Nieskończenie długi drut jest naładowany jednorodnie gęstością liniową λ. Znaleźć pole elektryczne na zewnątrz tego druta.

Rozwiązanie:

Ponieważ drut jest nieskończenie długi, możemy otoczyć go walcem Gaussa o promieniu R i długości l. Obliczamy ładunek zawarty w części druta

$$q_{wew} = \lambda l$$

Wszystkie poziome składowe $\vec{E}$ będą się znosić, a więc będzie ono skierowane radialnie od środka druta. Dlatego $\vec{E}$ będzie zawsze równoległe do wektora normalnego $\hat{n}$ powierzchni $\mathcal{S}$. Zatem

$$\vec{E} \cdot d\vec{a} = E\, da$$

Podstawiamy wszystko do wzoru (2)

$$E \oiint_{\mathcal{S}} da = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

$\oiint_{\mathcal{S}} da$ to pole powierzchni naszego walca Gaussa (nie bierzemy tutaj pod uwagę pola powierzchni podstaw, ponieważ jak zostało wspomniane wcześniej, poziome składowe $\vec{E}$ będą się znosić, a wtedy Φ_E przez podstawy $= 0$):

$$2\pi R l E = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l \implies E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

Jak pamiętamy, $\vec{E}$ jest wszędzie równoległe do $\hat{n}$, więc

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\hat{n}} \tag{10}$$

3. Wyznaczyć pole elektryczne nad płytką jednorodnie naładowaną z gęstością σ. W obliczeniach przyjąć, że płytka jest nieskończenie wielka, nieskończenie cienka i idealnie płaska.

Rozwiązanie:

Mamy do czynienia z symetrią względem płaszczyzny, a więc użyjemy tu pudełka Gaussa o wymiarach $a \times a \times h$.

Wszystkie składowe równoległe do powierzchni się skracają i zostajemy z polem prostopadłym do niej. Przyjmujemy, że zwrot $\vec{E}$ jest zgodny ze zwrotem $\hat{n} = \hat{k}$.

Ładunek q_{wew} możemy wyrazić następująco:

$$q_{wew} = a^2\sigma$$

Wtedy, podstawiając do równania (2) mamy

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} a^2\sigma$$

Ponieważ $\vec{E} \cdot d\vec{a} = E\,da$, E wyciągamy przed całkę

$$E \oiint_{\mathcal{S}} da = \frac{1}{\varepsilon_0} a^2\sigma$$

$\oiint_{\mathcal{S}} da$ to nic innego jak pole powierzchni pudełka Gaussa (tak jak we wcześniejszym zadaniu, nie bierzemy pod uwagę boków prostopadłych do płytki, ponieważ przez nie $\Phi_E = 0$)

$$2a^2E = \frac{1}{\varepsilon_0} a^2\sigma \implies E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma$$

Ponieważ $\vec{E}$ ma zwrot taki sam jak $\hat{k}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\hat{k} \tag{11}$$

Spis treści