

Prawo Coulomba i pole elektryczne

Bartosz Węgrzyn

16 grudnia 2023

1 Prawo Coulomba

1.1 Wiadomości wstępne

1.1.1 Wektory położeń

Wektor położenia ładunku próbnego (takiego ładunku, który nie wpływa na pole elektryczne pozostałych ładunków, tzn. jest znikomy) Q oznaczamy \vec{r} . Wektor położenia ładunku punktowego (źródłowego) q oznaczany jest przez \vec{r}' .

Wektor różnicy tych położeń:

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (1)$$

Wektor jednostkowy wskazujący nam kierunek siły:

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

1.1.2 Przenikalność elektryczna próżni

Wielkość $\varepsilon_0 \approx 8,8541 \times 10^{-12} \text{F m}^{-1}$ jest nazywana przenikalnością elektryczną próżni.

Łatwym do zapamiętania jej przybliżeniem jest $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F m}^{-1}$.

1.2 Dwa ładunki

1.2.1 Prawo Coulomba dla dwóch ładunków

Prawo Coulomba dla dwóch ładunków ma następującą postać:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}} \quad (3)$$

1.2.2 Zależności wynikające z prawa Coulomba

Z równania (3) wynikają następujące zależności:

$$F \sim qQ \quad (4)$$

$$F \sim \frac{1}{R^2} \quad (5)$$

Zależność (5) jest niezwykle ważna, ponieważ występuje ona w wielu innych dziedzinach fizyki, np. w prawie powszechnego ciążenia lub w rozchodzeniu się jakichkolwiek fal, m. in. elektromagnetycznych.

1.2.3 Uwagi

Wersor $\hat{\mathcal{R}}$ w równaniu (3) wskazuje kierunek siły \vec{F} działającej na ładunek próbny Q .

Pamiętajmy, że w omawianym przypadku siła \vec{F} działająca na ładunek źródłowy q jest znikoma, ponieważ ładunek próbny Q jest znikomy. Stąd wynika, że ładunek q pozostaje w spoczynku.

1.3 Więcej ładunków

1.3.1 Zasada superpozycji

Kiedy mamy do czynienia z większą ilością ładunków źródłowych, warto sięgnąć do zasady superpozycji. Mówi ona, że siła wypadkowa działająca na ładunek próbny Q jest równa sumie indywidualnych sił działających na ładunek Q ze strony każdego ładunku źródłowego.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i Q}{R_i^2} \hat{\mathcal{R}} \quad (6)$$

1.3.2 Pole elektryczne

Zdefiniujmy nową wielkość - natężenie pola elektrycznego \vec{E} :

$$\vec{E} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{\mathcal{R}} \quad (7)$$

Wtedy

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (8)$$

Rysunek 1 przedstawia pole elektryczne wokół różnych konfiguracji ładunków.

Pole elektryczne można interpretować jako siłę na jednostkę ładunku (tzn. im ładunek większy, tym siła większa) działającą na ładunek próbny w danym punkcie w przestrzeni.

1.4 Ciągły rozkład ładunku

1.4.1 Postać ogólna

Dla ciągłego rozkładu ładunku mamy

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dq \quad (9)$$

Wiemy, że $\lambda = \frac{dq}{dl}$ (gęstość liniowa), $\sigma = \frac{dq}{da}$ (gęstość powierzchniowa) oraz $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ (gęstość objętościowa), więc

$$dq = \lambda dl, dq = \sigma da, dq = \rho d\tau$$

1.4.2 Ładunek ciągle rozłożony na krzywej

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle na pewnej krzywej gładkiej \mathcal{L} , prawo Coulomba w postaci całki krzywoliniowej

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(\vec{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} dl \quad (10)$$

1.4.3 Ładunek ciągle rozłożony na powierzchni

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle na pewnej powierzchni \mathcal{S} , prawo Coulomba w postaci całki powierzchniowej wygląda następująco:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\vec{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} da \quad (11)$$

1.4.4 Ładunek ciągle rozłożony w przestrzeni

Jeśli ładunek jest rozłożony ciągle wewnątrz pewnego obszaru \mathcal{V} , prawo Coulomba w postaci całki objętościowej ma następującą postać:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} d\tau \quad (12)$$

1.4.5 Uwagi

Jeśli gęstość λ , σ lub ρ jest stała, można wyciągnąć ją przed znak całki.

Wersora $\hat{\mathcal{R}}$ ani wielkości \mathcal{R}^2 nie wolno wyciągać przed znak całki, ponieważ zależą one od \vec{r} , którego poszczególne współrzędne są zmiennymi całkowania.

2 Zadania

1. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości z nad środkiem odcinka rozciągającego się od $x = -L$ do $x = L$ naładowanego jednorodnie gęstością liniową λ .

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że $\vec{r} = z\hat{j} \wedge \vec{r}' = x\hat{i}$. Stąd

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{j} - x\hat{i} \implies \mathcal{R}^2 = z^2 + x^2 \wedge \hat{\mathcal{R}} = \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

Podstawiając wszystko do równania (10) mamy

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl \quad (13)$$

Parametryzacja naszej krzywej wygląda następująco:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} y = 0 \\ -L \leq x \leq L \end{cases}$$

Obliczamy całkę

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl &= \int_{-L}^L \frac{z\hat{j} - x\hat{i}}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left[\frac{x\hat{i} + z\hat{j}}{z\sqrt{x^2 + z^2}} \right]_{-L}^L = \\ &= \frac{2L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \hat{j} \end{aligned} \quad (14)$$

Teraz podstawiamy wynik z (14) do równania (13) i otrzymujemy ostateczną odpowiedź:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \hat{j} \quad (15)$$

Wygląd pola wektorowego wokół jednorodnie naładowanej linii jest przedstawiony na rysunku 1d. Widać na nim, że nad środkiem linii pole elektryczne ma jedynie składową pionową, co zgadza się z naszymi obliczeniami.

2. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości z nad środkiem okręgu o promieniu r naładowanego jednorodnie gęstością λ .

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że $\vec{r} = z\hat{k} \wedge \vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j} \implies \vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}' = -x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$. Po dalszych obliczeniach mamy

$$\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podstawiając do równania (10) otrzymujemy

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{L}} \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dl \quad (16)$$

Teraz należy sparametryzować krzywą, która jest okręgiem o promieniu r

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Mając już wszystkie dane, przechodzimy do obliczenia całki

$$\begin{aligned} & \oint_{\mathcal{L}} \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dl = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r\hat{i} \cos t - r\hat{j} \sin t + z\hat{k}}{(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t + z^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\left(\frac{d}{dt} r \cos t\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} r \sin t\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-r(\hat{i} \cos t + \hat{j} \sin t) + z\hat{k}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} r dt = r \left[\frac{-r(\hat{i} \sin t - \hat{j} \cos t) + zt\hat{k}}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{2\pi r z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \end{aligned}$$

Podstawiamy wszystko do równania (16) i otrzymujemy nasz ostateczny wynik:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\lambda r z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{k} \quad (17)$$

3. Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości z nad środkiem koła o promieniu r z wyciętym środkiem o promieniu R ($R < r$) naładowanego jednorodnie gęstością σ .

Rozwiązanie:

Ponownie ustalamy, że

$$\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podstawiamy do równania (11)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} da \quad (18)$$

Parametryzujemy powierzchnię

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ R \leq u \leq r \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

Przed przystąpieniem do obliczenia całki powierzchniowej liczymy moduł iloczynu wektorowego

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| &= \left| (\cos v \hat{i} + \sin v \hat{j}) \times (-u \sin v \hat{i} + u \cos v \hat{j}) \right| = \\
&= \left| \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos v & \sin v \\ -u \sin v & u \cos v \end{bmatrix} \hat{k} \right| = \\
&= \left| (u \cos^2 v + u \sin^2 v) \hat{k} \right| = \left| u \hat{k} \right| = u
\end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć całkę

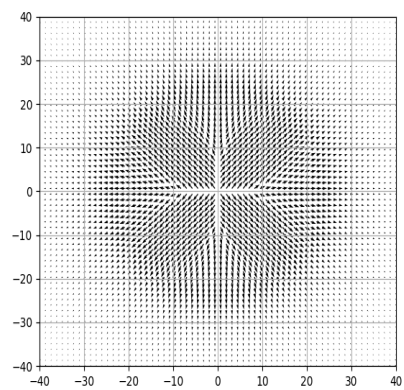
$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} da &= \int_R^r \int_0^{2\pi} \frac{-u(\hat{i} \cos v + \hat{j} \sin v) + z\hat{k}}{(u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + z^2)^{\frac{3}{2}}} u dv du = \\
&= 2\pi z \hat{k} \int_R^r \frac{u}{(z^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} du = 2\pi z \hat{k} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right)
\end{aligned}$$

Podstawiamy do (18) i otrzymujemy wynik końcowy

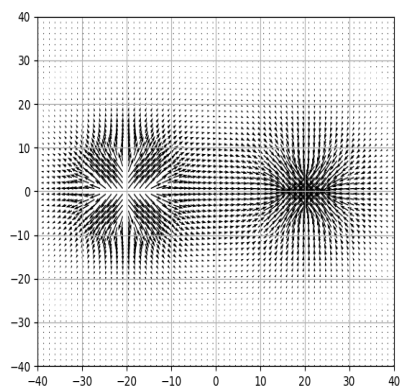
$$\vec{E} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma z \hat{k} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right) \quad (19)$$

Spis treści

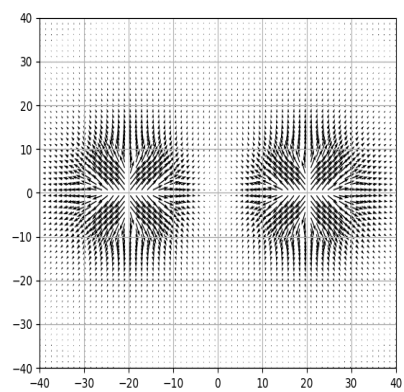
1	Prawo Coulomba	1
1.1	Wiadomości wstępne	1
1.1.1	Wektory położenia	1
1.1.2	Przenikalność elektryczna próżni	1
1.2	Dwa ładunki	1
1.2.1	Prawo Coulomba dla dwóch ładunków	1
1.2.2	Zależności wynikające z prawa Coulomba	2
1.2.3	Uwagi	2
1.3	Wiele ładunków	2
1.3.1	Zasada superpozycji	2
1.3.2	Pole elektryczne	2
1.4	Ciągły rozkład ładunku	3
1.4.1	Postać ogólna	3
1.4.2	Ładunek ciągle rozłożony na krzywej	3
1.4.3	Ładunek ciągle rozłożony na powierzchni	3
1.4.4	Ładunek ciągle rozłożony w przestrzeni	3
1.4.5	Uwagi	3
2	Zadania	4



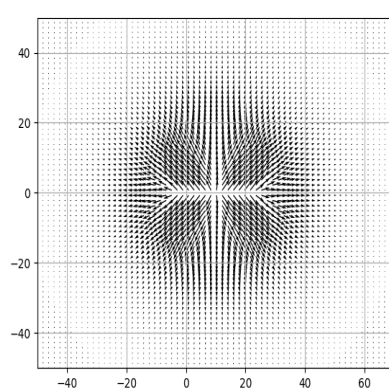
(a)



(b)



(c)



(d)

Rysunek 1: Pole elektryczne wokół (a) ładunku dodatniego, (b) ładunku dodatniego i ujemnego, (c) dwóch ładunków dodatnich, (d) jednorodnie naładowanej linii