

Mechanika Lagrange’a i Hamiltona

Bartosz Węgrzyn

7 kwietnia 2024

1 Mechanika Lagrange’a i Hamiltona

1.1 Rachunek wariacyjny

1.1.1 Funkcjonał

Funkcjonałem nazywamy funkcję o argumentie będącym również funkcją. W fizyce będą nas głównie interesować funkcyjonały przekształcające funkcję na liczbę rzeczywistą:

$$I[y] : y(t) \mapsto \mathbb{R} \quad (1)$$

Szczególnie funkcyjonały postaci:

$$I[y] = \int_a^b \mathcal{L}(t, y, \dot{y}) dx \quad (2)$$

Funkcja \mathcal{L} jest nazywana Lagrangianem

1.1.2 Równanie Lagrange’a-Eulera

Często potrzebujemy znaleźć wartość stacjonarną funkcyjonału (minimum lub maksimum). Funkcja, która wstawiona do funkcyjonału daje nam taką wartość jest nazywana ekstremum funkcyjonału.

Okazuje się, że istnieje jedna metoda na znajdowanie ekstremów funkcyjonałów typu (2).

Rozważmy funkcję y' będącą nieco inną od funkcji y . Możemy zapisać ją jako $y' = y + \varepsilon \eta$, gdzie ε jest bardzo małym współczynnikiem, a η jest funkcją t , dla której $\eta(a) = 0$ i $\eta(b) = 0$. Podstawiając y' do funkcji \mathcal{L} mamy:

$$\mathcal{L}(x, y', \dot{y}')$$

Zauważmy teraz, że jeśli znajdujemy się w ekstremum funkcyjonału I , to niewielka zmiana parametru ε nie powinna wpływać na jego wartość. Zatem:

$$\partial_\varepsilon I = 0$$

Zauważmy teraz, że:

$$\partial_\varepsilon I = \int_a^b \partial_\varepsilon \mathcal{L}(t, y', \dot{y}') dt$$

Z zasady łańcuchowej

$$\partial_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \frac{\partial \dot{y}'}{\partial \varepsilon}$$

Nie trudno zauważyć że pierwsze wyrażenie się wyzeruje, w drugim wyrażeniu $\partial_\varepsilon y' = \eta$ oraz w trzecim - $\partial_\varepsilon \dot{y}' = \dot{\eta}$.

$$\partial_\varepsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \dot{\eta}$$

Podstawmy do całki:

$$\partial_\varepsilon I = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \eta dt + \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \dot{\eta} dt$$

Zauważmy, że ostatnią całkę możemy przedstawić jako całkę przez części:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\text{U nas: } u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \text{ oraz } v = \eta$$

$$\int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \dot{\eta} dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \eta|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \right) dt$$

$$\text{A ponieważ } \eta(a) = \eta(b) = 0, \text{ mamy: } - \int_a^b \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \right) dt$$

Wracając:

$$\partial_\varepsilon I = \int_a^b \eta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \right) \right] dt$$

Jak pamiętamy, powyższe wyrażenie ma być równe zero. Będzie to prawdą dla dowolnego a i b , gdy wyrażenie wewnątrz całki zawsze będzie równe 0. Funkcja η spełnia jedynie warunek $\eta(a) = \eta(b) = 0$, więc nie jest ona wszędzie równa 0. Pozostaje nam tylko możliwość, aby wyrażenie w nawiasie kwadratowym zawsze było zerem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}'} \right) = 0$$

Podstawmy $y' \approx y$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (3)$$

Równanie (3) to równanie Lagrange'a-Eulera i stanowi ono ogólne rozwiązanie dla znajdowania ekstremów funkcjonalów postaci (2).

1.2 Mechanika Lagrange’a

1.2.1 Zasada najmniejszego działania

Niech będzie dana funkcja:

$$\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) = T(t, \dot{q}) - V(t, q) \quad (4)$$

gdzie T to energia kinetyczna pewnego układu mechanicznego, a V to jego energia potencjalna. q to współrzędne uogólnione. Jest ich tyle, ile stopniów swobody ma układ (np. dla wahała matematycznego mamy 1 współrzędną - θ , ale dla punktu na płaszczyźnie już 2 - x i y). Funkcję tę nazywamy Lagrangianem układu mechanicznego.

Zauważono, że spośród wszystkich dróg, które ciało mogło by obrać z punktu A do punktu B , ciało wybiera tę, dla której poniższy funkcjonal jest zminimizowany:

$$S = \int_a^b \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) dt \quad (5)$$

Funkcjonał ten nazywamy działaniem.

1.2.2 Równanie Lagrange’a-Eulera w mechanice

Jak widzimy, napotykamy problem znalezienia ekstremum funkcjonału. Zauważmy, że funkcjonal S jest postaci (2), zatem jego ogólnym rozwiązaniem będzie wcześniej wyprowadzone równanie Lagrange’a-Eulera. Stąd mamy:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (6)$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe otrzymamy równanie ruchu dla ciała. Jeśli jest wiele współrzędnych, każde z nich możemy rozważać oddzielnie.

1.3 Przykłady

1.3.1 Przykład 1

Wyznaczyć równanie ruchu dla ciała o masie m spadającego swobodnie z wysokości h nad powierzchnią z prędkością początkową v_0 .

Układ ma jeden stopień swobody, y . Niech ciało znajduje się na początku w $y = 0$, a oś y będzie skierowana w dół.

Rozpoczynamy od obliczenia energii kinetycznej i potencjalnej ciała:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y} + v_0)^2$$
$$V = mg(h - y)$$

Stąd obliczamy Lagrangian:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{y} + v_0)^2 + mg(y - h)$$

Obliczmy teraz pochodne w równaniu Lagrange'a-Eulera:

$$\begin{aligned}\partial_y \mathcal{L} &= mg \\ \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{y}} \mathcal{L}) &= \frac{d}{dt} [m(\dot{y} + v_0)] = m\ddot{y}\end{aligned}$$

Wstawmy teraz wyniki do równania:

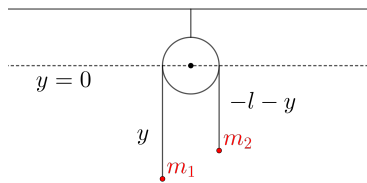
$$\begin{aligned}mg &= m\ddot{y} \\ \ddot{y} &= g \\ \dot{y} &= gt + v_0 \\ y(t) &= \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h\end{aligned}$$

Stałe całkowania zostały zastąpione przez v_0 i h . Wynik jest identyczny jak w przypadku użycia mechaniki Newtona. Mechanika Lagrange'a okazuje się jednak niezwykle przydatna w bardziej skomplikowanych przypadkach.

1.3.2 Przykład 2

Wyznaczyć przyspieszenie klocków o masach m_1 i m_2 zawieszonych po dwóch stronach na idealnej maszynie Atwooda.

Niech klocek o masie m_1 znajduje się po lewej stronie (rysunek 1). Układ ma jeden stopień swobody, zatem wybierzmy oś y skierowaną do góry. Niech $y = 0$ będzie wysokością osi obrotu bloczka, na którym zamocowana jest linka z klockami. Niech bloczek pierwszy znajduje się na wysokości y , a linka ma długość l . Wtedy położenie drugiego bloczka jest dane jako $-l - y$ (pamiętajmy, że bloczki znajdują się pod punktem $y = 0$).



Rysunek 1

Obliczmy zatem energię potencjalną i kinetyczną układu:

$$\begin{aligned}V &= m_1gy - m_2g(l + y) \\ T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 \text{ (prędkości obu ciał są takie same)}\end{aligned}$$

Wyznaczmy Lagrangian:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 + m_2 g(l + y) - m_1 g y$$

I obliczmy pochodne w równaniu Lagrange'a-Eulera:

$$\begin{aligned} \partial_y \mathcal{L} &= g(m_2 - m_1) \\ \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{y}} \mathcal{L}) &= \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{y}] = (m_1 + m_2) \ddot{y} \end{aligned}$$

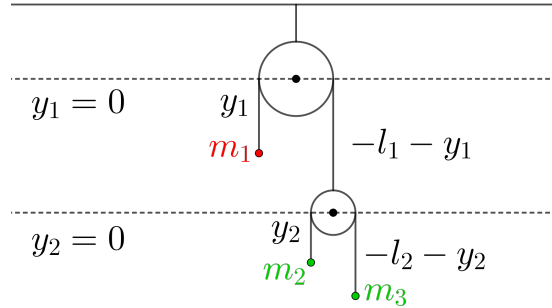
Wstawiając wszystko do równania mamy ostateczny wynik (szukaliśmy przyspieszenia):

$$\ddot{y} = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Znak wyniku decyduje o zwrocie wektora przyspieszenia. Zauważmy, że wynik jest ujemny, gdy $m_1 > m_2$, zerowy gdy $m_1 = m_2$ oraz dodatni, gdy $m_1 < m_2$, wszystko zgodnie z oczekiwaniami.

1.3.3 Przykład 3

Wyznaczyć przyspieszenie klocka o masie $m_3 < m_2$ z rysunku 2, przy założeniu braku oporów ruchu. Przyjąć, że bloczki są pomijalnie małe.



Rysunek 2

Zauważmy, że tym razem układ ma 2 stopnie swobody y_1 i y_2 . Obliczmy jednak najpierw Lagrangian:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 + m_3 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 \right] \quad (+ \text{ i - wynikają z warunku, że } m_3 < m_2) \\ V &= m_1 g y_1 + m_2 g (-l_1 - y_1 + y_2) - m_3 g (l_1 + y_1 + l_2 + y_2) \\ \mathcal{L} = T - V &= \frac{1}{2} \left[m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 + m_3 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 \right] - m_1 g y_1 - m_2 g (-l_1 - y_1 + y_2) + \\ &\quad + m_3 g (l_1 + y_1 + l_2 + y_2) \end{aligned}$$

Dla każdego ze stopni swobody tworzymy oddzielne równanie Lagrange'a-Eulera, dlatego tym razem musimy wyznaczyć cztery pochodne:

$$\begin{aligned}\partial_{y_1} \mathcal{L} &= g(m_2 + m_3 - m_1) \\ \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{y}_1} \mathcal{L}) &= \ddot{y}_1(m_1 + m_2 + m_3) \\ \partial_{y_2} \mathcal{L} &= g(m_3 - m_2) \\ \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{y}_2} \mathcal{L}) &= \ddot{y}_2(m_2 + m_3)\end{aligned}$$

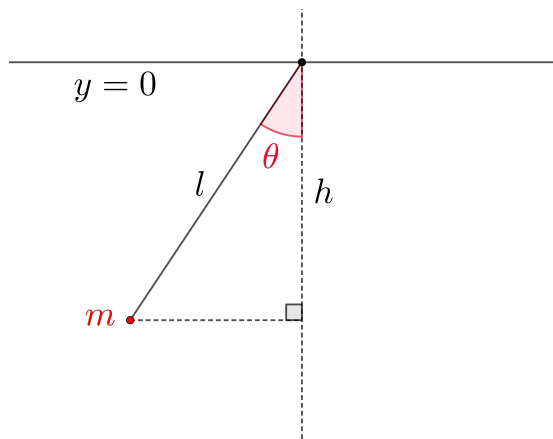
Podstawiając do obu równań Lagrange'a-Eulera mamy:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = g \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \ddot{y}_2 = g \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} \end{cases}$$

gdzie $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2$ jest szukany przez nas przyspieszeniem.

1.3.4 Przykład 4

Wyznaczyć równanie ruchu dla wahadła matematycznego.



Rysunek 3

Wahadło matematyczne ma jeden stopień swobody - θ (rysunek 3). Niech linka ma długość l a zawieszona masa wynosi m . Obliczmy Lagrangian:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ I &= m l^2 \\ T &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \\ V &= mgh = -mgl \cos \theta \\ \mathcal{L} = T - V &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta\end{aligned}$$

Następnie obliczmy pochodne:

$$\begin{aligned}\partial_\theta \mathcal{L} &= -mgl \sin \theta \\ \frac{d}{dt}(\partial_\theta \mathcal{L}) &= ml^2 \ddot{\theta}\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$-g \sin \theta = l \ddot{\theta}$$

Powyższe równanie jest bardzo ciężko rozwiązać, więc można przyjąć, że $\sin \theta \approx \theta$. Następnie zgadując, że rozwiązanie jest postaci $Ae^{\alpha t}$, gdzie α jest pewnym współczynnikiem, i biorąc część rzeczywistą rozwiązania otrzymujemy równanie ruchu dla wahadła. Ze względu na przybliżenie, równanie ruchu jest poprawne tylko dla małych kątów.

1.4 Mechanika Hamiltona

1.4.1 Hamiltonian

Całkowita energia układu mechanicznego jest dana jako:

$$E_c = T + V$$

Zauważmy, że $V = T - \mathcal{L}$. Podstawiając:

$$E_c = 2T - \mathcal{L}$$

Ogólna postać T to $\frac{1}{2}m\dot{q}^2$:

$$E_c = m\dot{q}^2 - \mathcal{L}$$

Zauważmy teraz, że pierwszy wyraz po prawej stronie jest po prostu równy $\dot{q}\partial_{\dot{q}}\mathcal{L}$:

$$E_c = \dot{q}\partial_{\dot{q}}\mathcal{L} - \mathcal{L}$$

Znając ogólną postać T nie trudno zauważyć, że $\partial_{\dot{q}}\mathcal{L} = p$ i stąd

$$E_c = p\dot{q} - \mathcal{L}$$

lub uogólniając na wiele stopni swobody:

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \sum p_i \dot{q}^i - \mathcal{L} \quad (7)$$

Powyższe wyrażenie nazywamy Hamiltonianem układu mechanicznego. \dot{q} możemy pozyskać rozwiązując równanie $p = \partial_{\dot{q}}\mathcal{L}$. Hamiltonian przeważnie jest równy całkowitej energii układu, lecz nie zawsze (np. w przypadku naładowanej cząstki w polu potencjalnym).

1.4.2 Równania Hamiltona

Obliczmy różniczkę zupełną Lagrangianu:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} dq^i + p_i d\dot{q}^i \right) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} dq^i + d(p_i \dot{q}^i) - \dot{q}^i dp_i \right) \end{aligned}$$

Odejmując $d(p_i \dot{q}^i)$ obustronnie:

$$d \left(\mathcal{L} - \sum p_i \dot{q}^i \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} dq^i - \dot{q}^i dp_i \right)$$

Wyrażenie po lewej stronie to po prostu $-\partial \mathcal{H}$

$$\partial \mathcal{H} = \sum \left(\dot{q}^i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} dq^i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\text{Mamy też: } \partial \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right)$$

Przyrównując odpowiadające sobie wyrazy z obu wyrażeń na $\partial \mathcal{H}$ otrzymujemy równania Hamiltona:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = -\dot{p}_i \quad (\text{wynika to z równania Lagrange'a-Eulera}) \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} &= \dot{q}^i \end{aligned} \tag{8}$$

1.5 Przykłady

1.5.1 Przykład 1

Rozważmy ponownie ruch wahadła matematycznego. Ze wcześniejszych przykładów znamy energie i Lagrangian:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \\ V &= -mgl \cos \theta \\ \mathcal{L} = T - V &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \end{aligned}$$

Zatem możemy obliczyć Hamiltonian:

$$\mathcal{H} = p\dot{\theta} - \mathcal{L} = p\dot{\theta} - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

pamiętając, że $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$:

$$p = ml^2 \dot{\theta}$$

Różniczkując mamy: $\dot{p} = ml^2 \ddot{\theta}$

Mamy też:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = mgl \sin \theta \approx mgl \theta$$

Przyrównując dwa ostatnie równania:

$$l \ddot{\theta} = g \theta$$

Taki sam wynik otrzymaliśmy przy użyciu mechaniki Lagrange'a.

1.5.2 Przykład 2

Wyznaczyć przyspieszenie masy zawieszanej pionowo na sprężynie przy powierzchni Ziemi.

Obliczmy Lagrangian, Hamiltonian i pęd:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = mg(h + x) + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mg(h + x) - \frac{1}{2} k x^2 \quad (h \text{ jest położeniem punktu równowagi})$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$\mathcal{H} = p \dot{x} - \mathcal{L} = p \dot{x} - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mg(h + x) + \frac{1}{2} k x^2$$

Z równań Hamiltona mamy:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -mg - kx$$

oraz różniczkując wyrażenie na pęd:

$$\dot{p} = m \ddot{x}$$

Przyrównując oba wyrażenia otrzymujemy

$$m \ddot{x} + kx + mg = 0$$

co jest wynikiem identycznym jak w przypadku mechaniki Lagrange'a.

Mechanika Hamiltona może wydawać się niepotrzebna, ale pozwala ona na łatwe tworzenie portretów fazowych.

Przedstawmy Hamiltonian jako funkcję wyłącznie p i x :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + mg(h + x) + \frac{1}{2} k x^2$$

\mathcal{H} w naszym przypadku jest równy całkowitej energii i zatem jest stały. Widzimy teraz, że powyższe wyrażenie jest równaniem dla elipsy. Stąd portret fazowy również będzie miał taki kształt.

Znając równania parametryczne dla elipsy i przyjmując czas za zmienną parametryzującą, możemy z łatwością stwierdzić, że równanie ruchu będzie postaci:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \Delta$$

gdzie A , ω , ϕ i Δ są pewnymi stałymi, które można z łatwością wyznaczyć.

Spis treści

1	Mechanika Lagrange’a i Hamiltona	1
1.1	Rachunek wariacyjny	1
1.1.1	Funkcjonał	1
1.1.2	Równanie Lagrange’a-Eulera	1
1.2	Mechanika Lagrange’a	3
1.2.1	Zasada najmniejszego działania	3
1.2.2	Równanie Lagrange’a-Eulera w mechanice	3
1.3	Przykłady	3
1.3.1	Przykład 1	3
1.3.2	Przykład 2	4
1.3.3	Przykład 3	5
1.3.4	Przykład 4	6
1.4	Mechanika Hamiltona	7
1.4.1	Hamiltonian	7
1.4.2	Równania Hamiltona	8
1.5	Przykłady	8
1.5.1	Przykład 1	8
1.5.2	Przykład 2	9