

V44

Röntgenreflektometrie

Ben Werner Grobecker
ben.grobecker@tu-dortmund.de

Sebastian Rüßmann
sebastian.ruessmann@tu-dortmund.de

Durchführung: 30. Mai 2022

Abgabe: 27. September 2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Röntgenröhre	3
1.2	Brechungsindex	3
1.3	Fresnelsche Formeln	4
1.4	Kiessig-Oszillationen	5
1.5	Parratt-Algorithmus	6
2	Durchführung	7
2.1	Justierung	7
2.2	Messung	8
3	Auswertung	8
3.1	Detektorscan	8
3.2	Z-Scan	8
3.3	Rockingscan	9
3.4	Reflektivitätsscan	9
3.5	Parratt-Algorithmus	11
4	Diskussion	14
5	Anhang	15
	Literatur	17

1 Theorie

1.1 Röntgenröhre

Der schematische Aufbau einer Röntgenröhre ist in Abbildung 1 veranschaulicht. Die emittierten Elektronen einer Heizkathode werden in einer evakuierten Röhre durch Anlegen einer Spannung U in Richtung der Anode beschleunigt. Der Potentialunterschied trägt hierbei samt der Elementarladung e zur kinetischen Energie der auftreffenden Elektronen bei ($E_{kin} = e \cdot U$). Neben dem Großteil der Menge, die in Wärme umgewandelt wird,

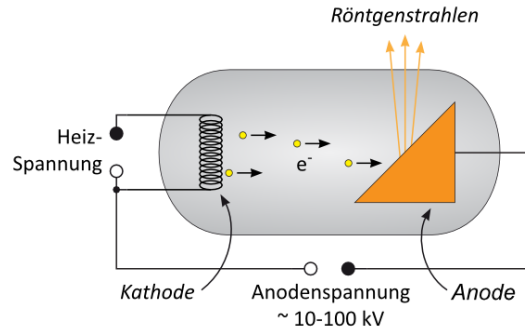


Abbildung 1: Schematischer Aufbau einer Röntgenröhre, mit Heizdraht und Anode, an der die Röntgenstrahlung emittiert wird. [6]

tritt durch entgegengerichteter Beschleunigung der geladenen Teilchen kontinuierliche Bremsstrahlung auf. Ein weiterer nicht-kontinuierlicher Anteil des Spektrums einer Röntgenröhre (s. Abb. 2) ist die charakteristische Strahlung, die starke Abhängigkeit des Anodenmaterials aufweist. Die einfallenden Elektronen schlagen dabei ein Elektron aus der Hülle der Atome und ionisieren diese dadurch. Das entstandene Loch schließt sich anschließend durch ein Elektron einer höheren Schale. Die Differenz der unterschiedlichen Energieniveaus wird dabei in Form eines Photons freigesetzt.

1.2 Brechungsindex

Grundlagen

Aus dem Reflexionsgesetz, das besagt, dass der Wellenvektor einer reflektierten Welle zum Lot der Grenzfläche den gleichen Winkel wie die einfallende Welle hat, folgt durch die Stetigkeit an einer Grenzfläche

$$k \sin \alpha_1 = k' \sin \alpha_2 \quad (1)$$

für eine gebrochene Welle. Durch Umstellen lässt sich das Snellius'sche Brechungsgesetz,

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2)$$

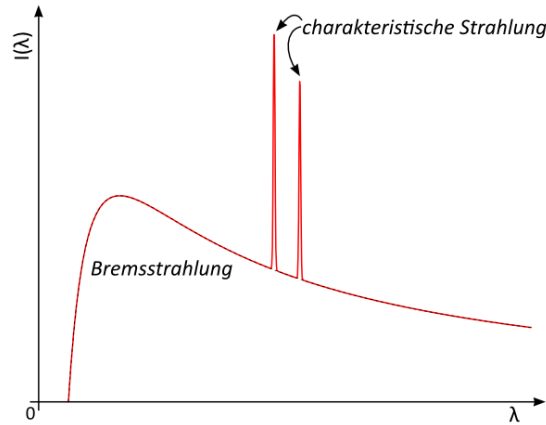


Abbildung 2: Spektrum einer Röntgenröhre. Zu erkennen ist die kontinuierliche Bremsstrahlung, sowie die Materialabhängige charakteristische Strahlung.[6]

aufstellen. Hierbei wird der Brechungsindex definiert durch

$$n := \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Materie}}}. \quad (3)$$

Neben des realen Brechungsindex N , der proportional zur Phasengeschwindigkeit ist, wird ein Teil der elektromagnetischen Wellen durch die Materie, die sie durchwandert, absorbiert. Demnachzufolge definiert man einen komplexen Brechungsindex

$$N = n - i\kappa. \quad (4)$$

Hierbei stellt κ den Absorptionskoeffizienten dar.

Röntgenstrahlung

Im Röntgenspektrum von elektromagnetischen Wellen ist der Realteil des Brechungsindex wenig kleiner als 1 ($n = 1 - \delta$), weil die Oszillationsfrequenz der äußeren Elektronen der bestrahlten Atome, die durch das elektrische Feld der Röntgenstrahlung zu Schwingungen oberhalb ihrer Resonanzfrequenz gezwungen werden, geringer als die Schwingungsfrequenz des Röntgenbereiches ist. Somit werden Röntgenstrahlen bei senkrechtem Auftreffen auf eine Grenzfläche im Gegensatz zu gewöhnlichem Licht vom Lot weg gebrochen.

1.3 Fresnelsche Formeln

Für eine quantitative Aussage über das Verhalten der Amplituden bei Reflexion und Brechung ist ein Fallunterschied der Polarisation der einfallenden Welle zur Einfallsebene zu berücksichtigen. Jegliche andere Fälle kann man als Linearkombination dieser sehen.[2]

Senkrechte Polarisation

Zwischen den Amplituden der reflektierten bzw. der gebrochenen und der einfallenden Welle besteht der Zusammenhang

$$\left(\frac{E_{0,R}}{E_0} \right)_{\perp} = \frac{\frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_1 - \frac{N_2}{\mu_2} \cos \alpha_2}{\frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_1 + \frac{N_2}{\mu_2} \cos \alpha_2} \quad (5)$$

und

$$\left(\frac{E_{0,T}}{E_0} \right)_{\perp} = \frac{2 \frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_1}{\frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_1 + \frac{N_2}{\mu_2} \cos \alpha_2}. \quad (6)$$

Parallele Polarisation

Zwischen den Amplituden der reflektierten bzw. der gebrochenen und der einfallenden Welle besteht der Zusammenhang

$$\left(\frac{E_{0,R}}{E_0} \right)_{\parallel} = -\frac{\frac{N_2}{\mu_2} \cos \alpha_1 - \frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_2}{\frac{N_2}{\mu_2} \cos \alpha_1 + \frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_2} \quad (7)$$

und

$$\left(\frac{E_{0,T}}{E_0} \right)_{\parallel} = -\frac{2 \frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_1}{\frac{N_2}{\mu_2} \cos \alpha_1 + \frac{N_1}{\mu_1} \cos \alpha_2}. \quad (8)$$

Röntgenstrahlung

Mit $n_1 = 1$ und $n_2 < 1$ bei der Grenzfläche Luft-Materie ist $n_2 < n_1$ und somit sind ab einem bestimmten Winkel die Amplitudenverhältnisse komplex.[8] Dadurch unterziehen sich Röntgenstrahlen, die unter einem kritischen Winkel zum Lot auf der Grenzfläche treffen, bei Materieeinfall einer externen Totalreflexion.[1] Dies ist gegeben, wenn $\alpha_2 = 90^\circ$ erreicht und somit $\sin \alpha_2 = 1$. Der kritische Winkel kann mit Gleichung 2 bestimmt werden durch

$$\alpha_{krit} = \arcsin n_2. \quad (9)$$

1.4 Kiessig-Oszillationen

Nach Überschreiten des Grenzwinkels α_{krit} der Totalreflexion sind Maxima und Minima der reflektierten Intensität zu beobachten. Diese Erscheinung ist ein Konstrukt der Interferenz der reflektierten Röntgenstrahlen an Oberfläche und Unterseite der verschiedenen Grenzflächenschichten (vgl. Abb. 3). Durch die Lage der Minima und Maxima lassen sich mit den Ordnungszahlen m und den Winkeln zweier Extremstellen sowohl die Dicke der

Schichten als auch der Brechungsindex berechnen: [7]

$$d = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{m_2^2 - m_1^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}} \quad (10)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1^2 m_2^2 - \alpha_2^2 m_1^2}{m_2^2 - m_1^2} \quad (11)$$

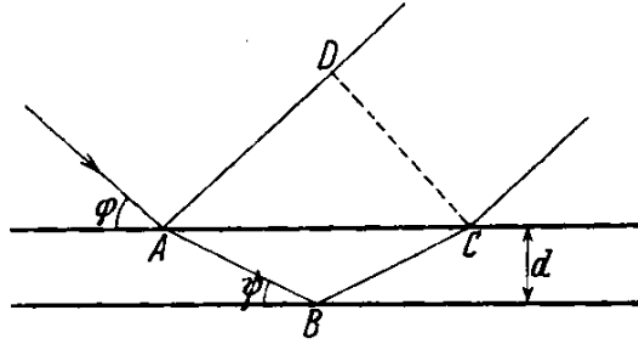


Abbildung 3: Darstellung des Strahlenganges bei den Röntgeninterferenzen an dünnen Schichten. [7]

1.5 Parratt-Algorithmus

Der Parratt-Algorithmus beschäftigt sich mit der Form der Kurve von reflektierter Röntgenstrahlung gegenüber ihrem Glanzwinkel um die Materialbeschaffenheit der Spiegeloberfläche zu bestimmen. Das Hauptaugenmerk ist dabei auf den Vergleich einer aufgenommenen Intensität mit der berechneten idealen Kurve oder vor und nach Anpassung des Materials. Bei einem mehrschichtigen System (vgl. Abb. 4) wird durch den Parratt-Algorithmus rekursiv die Reflektivität berechnet. Dabei wird die Annahme getroffen, dass die Schicht N+1 eine unendliche Dicke besitzt und somit Transmission verhindert. Die Rekursionsformel des Verhältnisses von reflektierter und transmittierter Welle an der i-ten Grenzfläche lautet

$$X_j = \frac{R_j}{T_j} = \exp(-2ik_{z,j}z_j) \cdot \frac{r_{j,j+1} + X_{j+1} \exp(2ik_{z,j+1}z_j)}{1 + r_{j,j+1}X_{j+1} \exp(2ik_{z,j+1}z_j)} \quad (12)$$

mit der Fresnelreflektivität $r_{i,i+1} = \frac{k_{z,i} - k_{z,i+1}}{k_{z,i} + k_{z,i+1}}$, die aus der Z-Komponente des Wellenvektors $k_{z,i} = k\sqrt{n_i^2 - \cos^2 \alpha_i}$ berechnet wird.

Diese muss jedoch bei einer realen Oberfläche mit mikroskopischen Unebenheiten modifiziert werden. Folglich wird in der Rekursionsformel durch $\tilde{r}_{i,i+1} = r_{i,i+1} \exp(-2k_{z,i}k_{z,i+1}\sigma_i^2)$ ersetzt um die geringere reflektierte Intensität der rauen Oberflächen zu berücksichtigen.

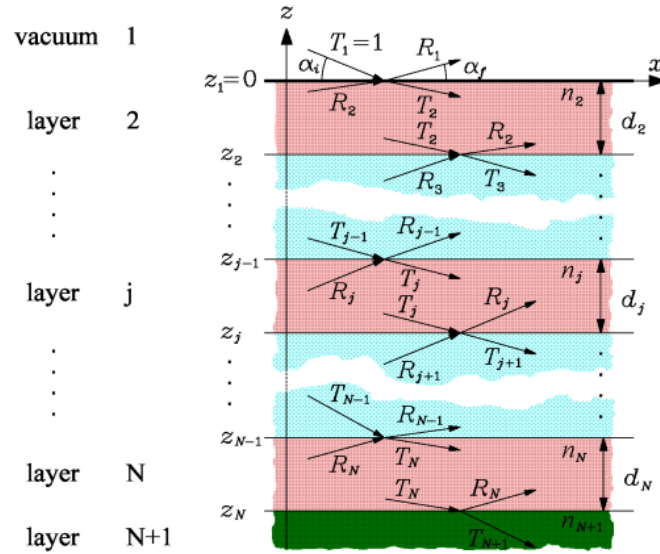


Abbildung 4: N+1 Mehrschichtsystem mit verschiedenen Brechungsindizes und N Grenzflächen. [11]

2 Durchführung

Der Versuch wurde an einem D8-Labordiffraktometer durchgeführt. Eine Röntgenröhre, die mit 40 kV und 35 mA in Betrieb ist, bestrahlt eine Probe. Ein Detektor erfasst dabei die reflektierte Strahlung. Die Probe, ein mit Polymerfilm beschichteter Siliziumwafer, muss durch eine Vielzahl von Scans zunächst justiert werden

2.1 Justierung

Detektorscan

Unabhängig von der Probe werden Röhre und Detektor auf eine Ebene gebracht. Nun fährt der Detektor einen kleinen Winkelbereich um den Strahl der Röhre ab. Das Maximum der aufgenommenen Intensität, die einer Gaußglocke ähnelt, ist fortan der neue Nullpunkt der Detektorausrichtung.

Z-Scan

Der Z-Scan dient zur Höhenausrichtung der Probe. Dabei wird die Probe leicht in der Höhe verschoben. Richtig justiert ist sie, wenn sie parallel zum Strahl steht (siehe Detektorscan) und die halbe Intensität des Primärstrahls abschattet. Die Intensität des Strahls nimmt desto mehr ab, je weiter sich die Probe im Strahl befindet. Die Probe wird soweit in den Strahl gefahren, bis eine halbe Abschattung zu erkennen ist.

Rockingscan

Dennoch besteht die Möglichkeit, dass die Probe nicht parallel zur Ausbreitungsrichtung des Röntgenstrahls steht. Demnach wird die Probe ungleichmäßig getroffen. Um auch diese Hürde zu bewältigen drehen sich beim Rockingscan Röhre und Detektor mit konstanter Winkelsumme um die Probe um diese im Drehpunkt des Diffraktometers zu zentrieren.

Feinjustierung

Nach den ersten drei Scans folgt ein weiterer Z-Scan um nach der Drehung wieder die Hälfte abzudecken. Anschließend wird noch einmal der Rockingscan mit einem abschließendem Z-Scan wiederholt um endgültig mit der Messung anzufangen.

2.2 Messung

Gemessen werden ein Reflektivitätsscan und ein diffuser Scan. Hierzu wird das eingerichtete Programm, XRD Commander, gemäß der Anleitung[3] genutzt.

Beim Reflektivitätsscan sind der Röhren- und Detektorwinkel gleich groß. Es wird in einem Bereich von 0° bis $2,5^\circ$ mit einer Schrittweite von $0,005^\circ$ und einer Messzeit von 5 s gemessen. Bei dem diffusen Scan ist der Detektorwinkel um $0,1^\circ$ gegenüber dem Röhrenwinkel verschoben. Jedoch bleibt der Vorgang der gleiche. Durch diesen Scan, kann später die wahre Reflektivität berechnet werden.

3 Auswertung

3.1 Detektorscan

Um aus dem Detektorscan die Halbwertsbreite und die maximale Intensität bestimmen zu können wird eine Gaußfunktion

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13)$$

an die Messwerte genährt. Die gemessene Werte mit der dazugehörigen Gaußdistribution sind in Abbildung 5 dargestellt. Daraus ergibt sich mittels *SciPy* [5] eine Amplitude von $I_{max} = (11,1 \pm 0,3) \cdot 10^5$ und eine Halbwertsbreite von $(0,246 \pm 0,003)^\circ$.

3.2 Z-Scan

Der Z-Scan ist in Abbildung 6 dargestellt. Zu erkennen ist die abfallende Intensität, wenn die Probe in den Strahl gefahren wird. Dies dient neben dem Justieren der Z-Achse ebenfalls zur Bestimmung der Strahlenbreite d_0 . Dies lässt sich als die Differenz zwischen Intensitätsmaximum und Intensitätsminimum ablesen. Wie in der Abbildung zu erkennen ergibt diese sich zu $d_0 \approx 1,9$ mm.

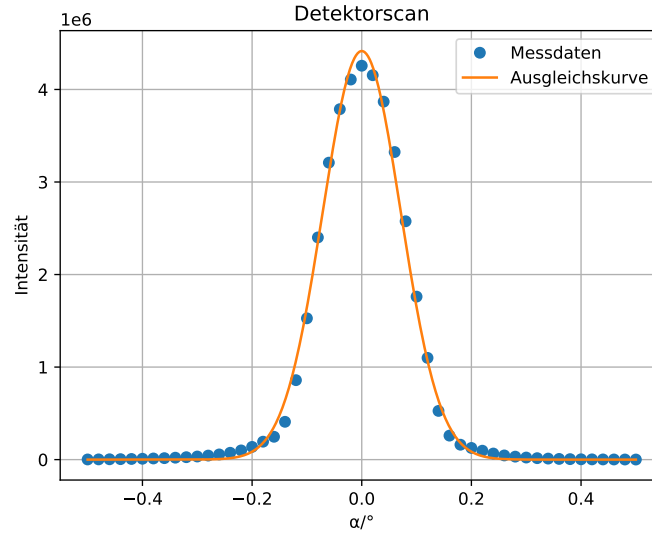


Abbildung 5: Messdaten des Detektorscans mit angelegter Gaußdistribution.

3.3 Rockingscan

Der durchgeführte Rockingscan ist in Abbildung 7 dargestellt.

Daraus lässt sich wie dargestellt der Geometriewinkel $\alpha_g = 0.4$ ablesen.

3.4 Reflektivitätsscan

Die Hauptuntersuchung der Probe findet per Reflektivitätsscan statt. Um Effekte durch Rückstreuung zu verhindern wird der diffuse Scan vom Reflektivitätsscan subtrahiert. Dies ist in Abbildung 8 dargestellt. Dabei ist zu beachten das neben dem Winkel die Reflektivität

$$R = \frac{I}{5 \cdot I_{max}}$$

aufgetragen wird. Zusätzlich ist auch die Korrektur durch den Geometriefaktor aufgetragen, der berücksichtigt, dass erst ab einem gewissen Winkel der komplette Strahl die Oberfläche trifft. Ebenso ist die Reflektivität einer glatten Silizium Oberfläche dargestellt, die mittels

$$R = \left(\frac{\alpha_c}{2\alpha_i} \right)^4 \quad (14)$$

berechnet wird. Der Literaturwert für den kritischen Winkel α_c liegt für Silizium bei $\alpha_{Si} = 0,223^\circ$ [12]

Die Schichtdicke lässt sich mithilfe der Kiesling-Oszillation aus der gemessenen Reflektivität bestimmen. Dazu werden die auftretenden Minima untersucht und der gemittelte Abstand zwischen ihnen bestimmt. Relevant sind hierbei nur die deutlichen ersten Minima (vg. Tabelle v1)

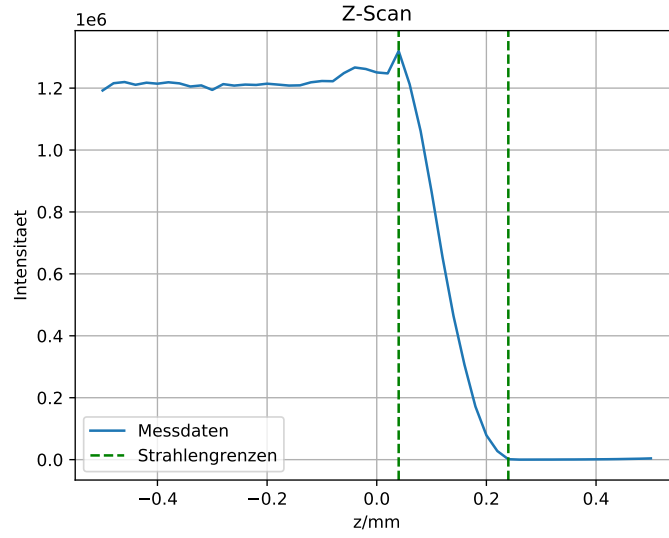


Abbildung 6: Messdaten des durchgeführten Z-Scans, sowie die dadurch bestimmten Strahlengrenzen.

Tabelle 1: Ermittelte deutliche Minima des Rockingscans

Winkel [$\alpha/^\circ$]	R
0.345	0.0077
0.39	0.0043
0.435	0.0027
0.485	0.0016
0.53	0.0011
0.585	0.0007

Der gemittelte Abstand dieser ergibt sich zu

$$\Delta\alpha = (0.045 \pm 0,003)^\circ. \quad (15)$$

Mittels der Gleichung

$$d = \frac{\lambda}{2\Delta\alpha_i} \quad (16)$$

ergibt sich daraus eine Schichtdicke von

$$(882,4 \pm 20)\text{\AA}. \quad (17)$$

Dabei ist zu beachten, dass die gemessenen Winkel im Bogenmaß eingesetzt werden, da ansonsten die Dimensionen nicht stimmen.

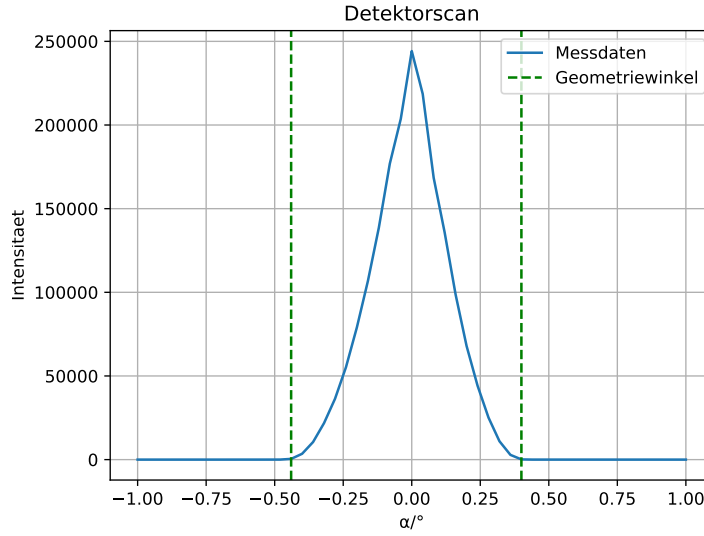


Abbildung 7: Messdaten des Rockingscans, sowie der dadurch bestimmte Geometrie-
winkel

3.5 Parratt-Algorithmus

Mit Hilfe des Parratt-Algorithmus lässt sich das Dispersionsprofil bestimmen, wie auch die kritischen Winkel von Silizium und Polystyrol. Verwendet werden dazu die modifizierten Fresnelkoeffizienten. Das Modell funktioniert mit zwei Schichten, eine aus Polystyrol und eine aus Silizium. Die Umgebungsluft wird als eine Schicht mit der Schichtdicke und der Dispersion von $d = \delta = 0$ angenommen. Die entsprechende Kurve ist in Abbildung 9 dargestellt. Mittels der Gleichung (9) lässt sich der kritische Winkel der beiden Schichten jeweils bestimmen als:

$$\alpha_{Pol} = 0,068^\circ \quad (18)$$

$$\alpha_{Si} = 0,214^\circ \quad (19)$$

Die Parameter der Schichtdicke d_2 , der Dispersion δ und der Rauigkeit σ müssen per Hand so bestimmt werden, dass die Parrattkurve eine möglichst große Übereinstimmung zeigt. Demnachzufolge sind:

$$\begin{aligned} d_2 &= 860 \text{Å} \\ \delta_{Poly} &= 0.3 \cdot 10^{-6} m \\ \delta_{Si} &= 6.3 \cdot 10^{-6} m \\ \sigma_{Poly} &= 1.0 \cdot 10^{-10} \\ \sigma_{Si} &= 5.5 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

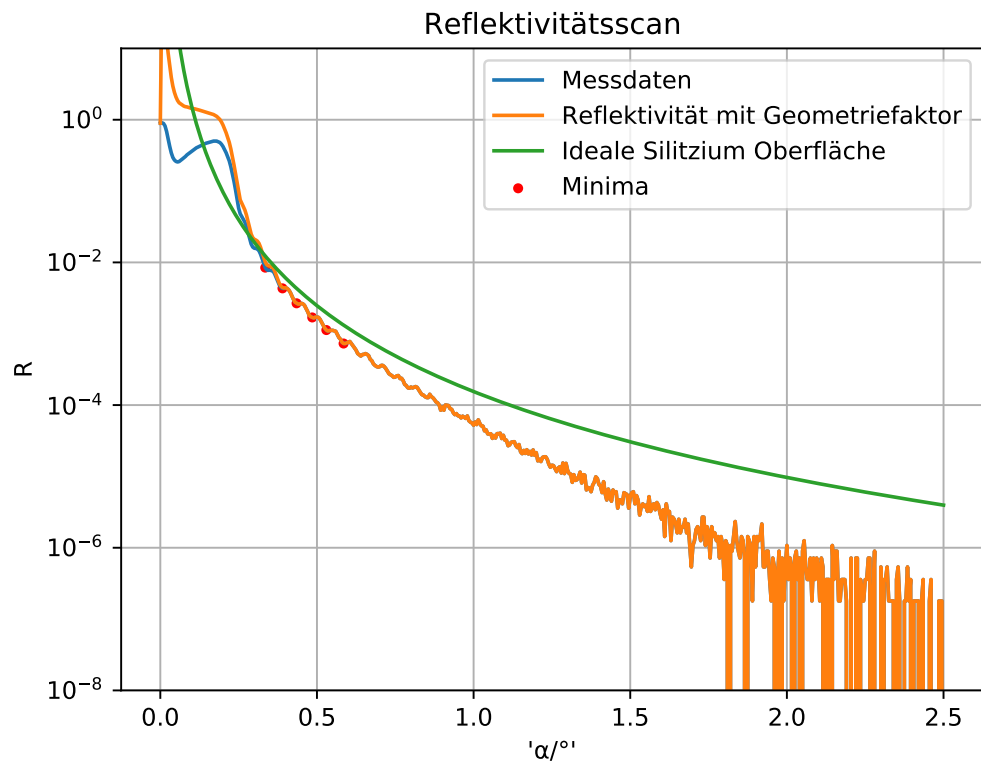


Abbildung 8: Messwerte des Reflexivitätsscans mit und ohne Korrektur durch den Geometriefaktor im Vergleich zur idealen Siliziumoberfläche, sowie die Minima der Kiessig-Oszillation.

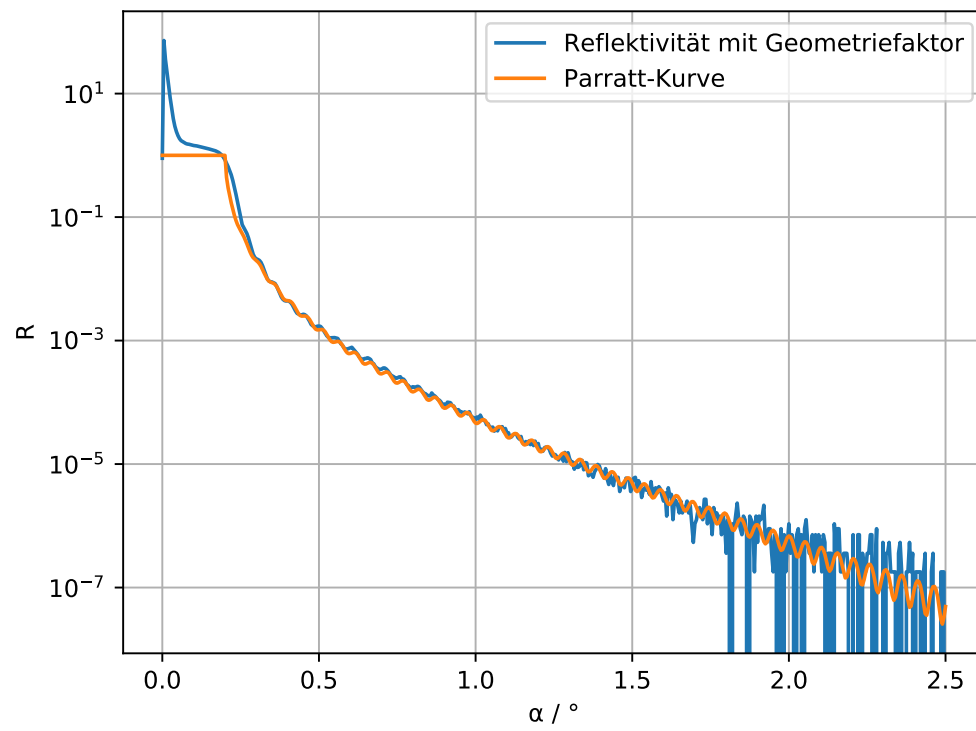


Abbildung 9: Die Parrat-Kurve im Vergleich zur gemessenen Reflexivität.

4 Diskussion

Der bei der Justierung des Strahls gemessene Geometriewinkel $\alpha = 0.4^\circ$ weicht leicht vom Literaturwert $\alpha_t = 0,687^\circ$ ab. Somit war die Justierung erfolgreich, wenn auch nicht optimal. Auch die über die Kiessig-Oszillation berechnete Schichtdicke weicht nur geringfügig zwischen dem gemessenen und den durch Parrat berechneten Werten ab.

$$\begin{aligned}d_{Kiessig} &= 882,4 \text{ \AA} \\d_{Parrat} &= 860 \text{ \AA}\end{aligned}$$

Dies folgt wohl der Verbesserungsmöglichkeit der Justierung. Ebenso ist die zerkratzte Wafer-Oberfläche nicht zu vernachlässigen. Gerade beim Einstellen der Rauigkeitsparameter des Parrat Algorithmus spielt sie eine entscheidene Rolle. Dies lässt sich auch an den Dispersionswerten erkennen.

$$\begin{aligned}\delta_{Poly} &= 0.3 \cdot 10^{-6} \\ \delta_{Si} &= 6.3 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Die Literaturwerte [12] liegen bei:

$$\begin{aligned}\delta_{Poly} &= 3.5 \cdot 10^{-6} \\ \delta_{Si} &= 7.6 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Während die Abweichung von Silizium bei 20 % liegt, beträgt die von Polystrol fas 1000 %, was auf einen systematischen Fehler hinweist. Diese hohe Unsicherheit bei der Dispersion von Polystrol erkennt man auch im Vergleich der kritischen Winkel.

$$\begin{aligned}\alpha_{Poly} &= 0,068^\circ \\ \alpha_{Si} &= 0,214^\circ\end{aligned}$$

Die Literaturwerte [12] liegen bei:

$$\begin{aligned}\alpha_{Poly} &= 0,153^\circ \\ \alpha_{Si} &= 0,223^\circ\end{aligned}$$

Insgesamt liegt eine gewisse Fehleranfälligkeit auf das Einstellen der Parratt-Parameter per Hand. Viel erheblicher fällt die nicht optimal glatte Oberfläche der Probe ins Gewicht, welche durch ihre hohe Rauigkeit für Messfehler sorgt. Die Parrat-Kurve beschreibt die gemessene Reflektivität aber genau genug, so dass dem Ergebnis eine Aussagekraft zugeschrieben werden kann.

5 Anhang

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def parratt(a_i, delta_1, delta_2, sigma_1, sigma_2, d_2, b_1, b_2):
    n_2 = 1.0 - delta_1 + b_1
    n_3 = 1.0 - delta_2 + b_2
    a_i = np.deg2rad(a_i)
    k = 2 * np.pi / wl
    kd_1 = k * np.sqrt(n_1 ** 2 - np.cos(a_i, dtype = np.complex) ** 2)
    kd_2 = k * np.sqrt(n_2 ** 2 - np.cos(a_i, dtype = np.complex) ** 2)
    kd_3 = k * np.sqrt(n_3 ** 2 - np.cos(a_i, dtype = np.complex) ** 2)

    r_12 = (kd_1 - kd_2) / (kd_1 + kd_2) * np.exp(-2 * kd_1 * kd_2 *
                                                    sigma_1 ** 2)
    r_23 = (kd_2 - kd_3) / (kd_2 + kd_3) * np.exp(-2 * kd_2 * kd_3 *
                                                    sigma_2 ** 2)

    x_2 = np.exp(-2j * kd_2 * d_2) * r_23
    x_1 = (r_12 + x_2) / (1 + r_12 * x_2)

    return np.abs(x_1) ** 2

#Import Messwerte
ref_x, ref_y = np.genfromtxt('Messwerte/omega_tet.txt', unpack=True)
diff_x, diff_y = np.genfromtxt('Messwerte/diffusor.txt', unpack=True)

#Reflektivität
I_0 = 1114508.0792544584
R_ref = ref_y / (5 * I_0)
R_diff = diff_y / (5 * I_0)
R = R_ref - R_diff

#Parratt Parameter
n_1 = 1.0 #Brechungsindex Luft
d_1 = 0.0 #Schichtdicke Luft
d_2 = 8.6 * 10 ** (-8) #Schichtdicke der Probe
wl = 1.54e-10 #Wellenlänge

delta_1 = 0.3 * 10 ** (-6)
delta_2 = 6.3 * 10 ** (-6)
sigma_1 = 1.0 * 10 ** (-10)
sigma_2 = 5.5 * 10 ** (-10)
b_1 = (delta_1 / 200) * 1j # Aus L. G. Parratt. „Surface Studies of
                           Solids by Total Reflection of X-
                           "Rays.
b_2 = (delta_2 / 40) * 1j

print(delta_1, delta_2, sigma_1, sigma_2, d_2, b_1, b_2)
par = parratt(ref_x, delta_1, delta_2, sigma_1, sigma_2, d_2, b_1, b_2)
```

```

#Kritischer Winkel
a_Poly = np.rad2deg(np.sqrt(2 * delta_1))
a_Si = np.rad2deg(np.sqrt(2 * delta_2))
print('Kritischer Winkel Polys:', a_Poly)
print('Kritischer Winkel Silicium: ', a_Si)

#Plot
plt.plot(ref_x, R, '-', label = 'Reflektivität mit Geometriefaktor')
plt.plot(ref_x, par, '-', label = 'Parratt-Kurve')
plt.xlabel('\u03B1 / °')
plt.ylabel('R')
plt.yscale('log')
plt.grid()
plt.legend()
plt.savefig('Graphen/Parrat_Algorithmus.pdf')

```


Literatur

- [1] Arndtlast. *Röntgenreflexion*. URL: <http://www.x-ray-optics.de/index.php/physik/reflexion> (besucht am 03.06.2022).
- [2] Matthias Bartelmann u. a. *Theoretische Physik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. ISBN: 978-3-642-54617-4.
- [3] TU Dortmund. *V44 Röntgenreflektometrie*. 2022.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [5] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [6] Sebastian Kiehlmann. *Röntgenröhre*. 2010. URL: <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6639> (besucht am 02.06.2022).
- [7] Heinz Kiessig. „Interferenz von Röntgenstrahlen an dünnen Schichten“. In: *Annalen der Physik* 402.7 (1931).
- [8] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*. Springer-Verlag Berlin, 2002. ISBN: 3-540-20509-8.
- [9] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [10] L. G. Parratt. „Surface Studies of Solids by Total Reflection of X-Rays“. In: *Phys. Rev.* 95 (1954).
- [11] Jochim Stettner. „Charakterisierung von rauen MBE- CoSi_2 -/ Si Schichtsystemen mittels Röntgenstreuung“. Diss. Universität Kiel, 1995.
- [12] Metin Tolan. „X-Ray Scattering from Soft-Matter Thin Films“. In: *Springer* (1999).