

**Zadanie 157.** Doprowadzić do postaci kanonicznej równania zamieniając zmienne przy pomocy otrzymanych charakterystyk oraz rozwiązać jeśli

- a)  $u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0$ ,
- b)  $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0$ ,
- c)  $u_{xx} + xyu_{xy} = 0$ ,
- d)  $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$ ,
- e)  $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$ ,
- f)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y + 27u = 0$ .

**Zadanie 158.** Rozważmy równanie

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + e(x, y)u_x + f(x, y)u_y + g(x, y)u = h(x, y).$$

Wykazać, że zamiana zmiennych  $u(x, y) = v(\xi, \eta)$ , gdzie  $\xi(x, y)$  jest charakterystyką, a funkcja  $\eta$  jest drugą z charakterystyk w przypadku eliptycznym (dokładniej  $\xi$  część rzeczywista charakterystyki zespolonej, a  $\eta$  część urojona) bądź hiperbolicznym oraz dowolną liniowo niezależną funkcją w przypadku parabolicznym, pozwala sprowadzić równanie do postaci kanonicznej. W postaci kanonicznej część główna (z pochodnymi drugiego rzędu) składa się z odpowiednio z laplasjanu, z pochodnej mieszanej, z pochodnej podwójnej, w przypadku odpowiednio równania eliptycznego, hiperbolicznego, parabolicznego.

**Zadanie 159.** Rozwiązać równanie Laplace'a w prostokącie z podanymi warunkami brzegowymi

- a)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $u(0, y) = u(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = x(a - x)$ ,  $u(x, b) = 0$ ,
- b)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $u(0, y) = u(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = x(a - x)$ ,  $u(x, b) = x(a - x)$ ,
- c)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $u(0, y) = u(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, b) = x(a - x)$ .

**Zadanie 160.** Rozwiązać niejednorodne równanie przewodnictwa cieplnego

- a)  $u_t - u_{xx} = \sin(t)$ ,  $u(x, 0) = x(1 - x)$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,
- b)  $u_t - u_{xx} = t$ ,  $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,
- c)  $u_t - u_{xx} = \sin(t) \sin(x)$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,

oraz zbadać zachowanie rozwiązań gdy  $t \rightarrow \infty$ .

**Zadanie 161.** Rozwiązać niejednorodne równanie falowe

- a)  $u_{tt} - u_{xx} = \sin(x)$ ,  $u(x, 0) = x(1 - x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,
- b)  $u_t - u_{xx} = t$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,
- c)  $u_t - u_{xx} = \sin(t) \sin(x)$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ .