B. WRÓBLEWSKI

Metoda Fouriera – rozdzielanie zmiennych

Zadanie 1. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne z warunkami brzegowymi:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Funkcja $y(x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego zagadnienia. Czy jest to jedyne rozwiązanie? Czy odpowiedź zależy od L?

Zadanie 2. Dla jakich wartości λ zagadnienie

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

ma nietrywialne rozwiązanie?

Zadanie 3. Znajdź szereg Fouriera funkcji

a) $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$ b) $f(x) = |x|$ na $(-\pi, \pi)$ c) $f(x) = e^x$ na $(0, 2\pi)$

Zadanie 4. Skonstruuj rozwiązanie następujących zagadnień metodą rozdzielania zmiennych:

a) $u_t = u_y$, $u(0, y) = e^y + e^{-2y}$;

b) $u_t = u_y + u$, $u(0, y) = 2e^{-y} - e^{2y}$;

c) $u_t = u_{xx} + u$, $x \in (0, 1)$, $u(x, 0) = \cos x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Zadanie 5. Rozdzielając zmienne rozwiąż równanie $tu_t = u_{xx} + 2u$ z warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Udowodnij, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających warunek początkowy $u(x, 0) = 0$. Wniosek: brak jednoznaczności rozwiązań.

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie równania $u_{xx} + u_{yy} = 0$ w prostokącie $0 < x < a$, $0 < y < b$ spełniające następujące warunki brzegowe:

$$u_x = -a \text{ dla } x = 0, \quad u_x = 0 \text{ dla } x = a, \quad u_y = b \text{ dla } y = 0, \quad u_y = 0 \text{ dla } y = b.$$

WSKAZÓWKA: To zadanie można zrobić na dwa sposoby: metodą Fouriera rozdzielania zmiennych lub można szukać rozwiązania w postaci wielomianu.

Zadanie 7. Rozwiąż zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania ciepła $u_t = u_{xx}$ w prostokącie $(0, 1) \times (0, T)$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = g(x)$ oraz warunkami brzegowymi $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Pokaż, że rozwiązanie jest gładkie wewnątrz prostokąta $(0, 1) \times (0, T)$ jeżeli $g \in C^1(0, 1)$, oraz $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0$ i istnieją pochodne jednostronne $g'(0), g'(1)$. Zbadaj, co się dzieje w przypadku gdy $g(x) = 0$ dla $0 < x < a$ i $b < x < 1$, $g(x) = 1$ dla $a \le x \le b$ $(0 < a < b < 1)$.

Zadanie 8. Rozwiąż metodą Fouriera zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania struny $u_{tt} = u_{xx}$ w $\{(x,t)\ :\ 0 < x < 1,\ \ t > 0\}$ z warunkami:

a) $u(x,0) = 2x$ dla $0 < x < 1/2$, $u(x,0) = 2(1-x)$ dla $1/2 < x < 1$ oraz $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$;

b) $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ dla $0 < x < a$ i dla $b < x < 1$, $u_t(x,0) = 1$ dla $a \leq x \leq b$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Czy otrzymane szeregi Fouriera można dwukrotnie różniczkować?

Zadanie 9. Rozwiązać zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w pierścieniu

$$A = \{(x,y) :\ R_1 < r = (x^2 + y^2)^{1/2} < R_2\}$$

z warunkami brzegowymi $u(R_1,\theta) = g_1(\theta), u(R_2,\theta) = g_2(\theta)$.Co należy zmodyfikować w otrzymanych wzorach (i jakie przyjąć warunki brzegowe) w przypadkach granicznych: $R_1 = 0$ albo $R_2 = \infty$?

WSKAZÓWKA: Użyj metody rozdzielania zmiennych we współrzędnych biegunowych. We współrzędnych biegunowych zagadnienie to ma postać

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Zadanie 10. Znajdź rozwiązanie stacjonarne $U = U(x)$ równania $u_t = u_{xx} + 1$ z warunkami brzegowymi $u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 1$. Zbadaj, czy $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U(x)$.