

# Zastosowania twierdzeń o punktach stałych

Bartosz Wróblewski

16 kwietnia 2016

## Abstrakt

Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną. Ustalmy odwzorowanie ciągłe  $f : X \mapsto X$ . Twierdzeniem o punkcie stałym nazywamy prawdę matematyczną postulującą – pod pewnymi warunkami – istnienie punktu  $x \in X$  takiego, że  $f(x) = x$ . Najbardziej popularnym twierdzeniem tego typu jest zasada kontrakcji Banacha, jednakże znane jest dużo więcej podobnych twierdzeń. Ich zastosowanie daje nam istnienie różnego rodzaju matematycznych obiektów, na przykład rozwiązań pewnych równań różniczkowych, miar Haara na grupach, czy też równowag Nasha. W referacie przedstawię szybki przegląd twierdzeń o punktach stałych wraz z ich zastosowaniami.

## Punkt stały odwzorowania

Punktem stałym odwzorowania  $F : X \mapsto X$  nazywamy  $\tilde{x} \in X$  taki, że:

$$F(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

## Punkt stały odwzorowania

Punktem stałym odwzorowania  $F : X \mapsto X$  nazywamy  $\tilde{x} \in X$  taki, że:

$$F(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

## Własność punktu stałego

Niech  $(X, \tau)$  będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że  $X$  ma *topologiczną własność punktu stałego* (TWPS), jeżeli każde odwzorowanie ciągłe  $F : X \mapsto X$  posiada punkt stały.

## Przypomnienie:

Przestrzeń metryczną  $(X, d)$  nazywamy zupełną, jeżeli każdy ciąg  $(x_n)$  spełniający warunek Cauchy'ego:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M \in \mathbb{N}) (\forall n, m > M) d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

jest ciągiem zbieżnym.

## Przypomnienie:

Przestrzeń metryczną  $(X, d)$  nazywamy zupełną, jeżeli każdy ciąg  $(x_n)$  spełniający warunek Cauchy'ego:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M \in \mathbb{N}) (\forall n, m > M) d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

jest ciągiem zbieżnym.

## Zasada kontrakcji Banacha

Niech  $(X, d)$  będzie zupełną przestrzenią metryczną,  $F : X \mapsto X$  będzie *kontrakcją*, tzn. istnieje  $L < 1$  dla  $x, y \in X$  zachodzi:

$$d(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y)$$

Odwzorowanie  $F$  ma wtedy *dokładnie jeden punkt stały*  $\tilde{x}$ .

Szkic dowodu:

- wybieramy dowolny  $x_0 \in X$ , definiujemy  $x_n = F^{(n)}(x_0)$
- pokazujemy, że  $x_n$  jest ciągiem Cauchy'ego
- stwierdzamy, że granica ciągu jest punktem stałym
- jedyność wynika ze sprzeczności:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(F(\tilde{x}_1), F(\tilde{x}_2)) < d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Szkic dowodu:

- wybieramy dowolny  $x_0 \in X$ , definiujemy  $x_n = F^{(n)}(x_0)$
- pokazujemy, że  $x_n$  jest ciągiem Cauchy'ego
- stwierdzamy, że granica ciągu jest punktem stałym
- jedyność wynika ze sprzeczności:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(F(\tilde{x}_1), F(\tilde{x}_2)) < d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Z dowodu twierdzenia można wynieść dużo więcej informacji:

- wystarczy, że dla pewnego  $n$  odwzorowanie  $F^{(n)}$  jest kontrakcją
- oszacowanie a priori

$$d(\tilde{x}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$



## Twierdzenie Brouwera

Niepusty podzbiór  $\mathbb{R}^n$ , który jest domknięty, ograniczony i wypukły, ma TWPS.

## Twierdzenie Brouwera

Niepusty podzbiór  $\mathbb{R}^n$ , który jest domknięty, ograniczony i wypukły, ma TWPS.

Istnieją różne podejścia do dowodu:

- przez teorię stopnia topologicznego odwzorowań
- topologicznie, przez twierdzenie Titzego i zasadę retrakcji
- kombinatorycznie, przez lemat Spernera
- przez twierdzenie Stokes'a

## Przypomnienie:

Przestrzeń unormowaną  $(B, \|\cdot\|)$  nazywamy *przestrzenią Banacha*, jeżeli metryka indukowana przez normę jest zupełna.

Odwzorowanie  $T : B \mapsto B$  nazywamy *pełnociągłym*, jeżeli jest ono ciągłe, oraz obrazy zbiorów ograniczonych są warunkowo zwarte.

## Przypomnienie:

Przestrzeń unormowaną  $(B, \|\cdot\|)$  nazywamy *przestrzenią Banacha*, jeżeli metryka indukowana przez normę jest zupełna.

Odwzorowanie  $T : B \mapsto B$  nazywamy *pełnociągłym*, jeżeli jest ono ciągłe, oraz obrazy zbiorów ograniczonych są warunkowo zwarte.

## Twierdzenie Schaudera

Niepusty podzbiór przestrzeni Banacha, który jest zwarty i wypukły, ma TWPS.

Inna, często użyteczna wersja:

Niech  $C$  będzie ograniczonym, wypukłym i domkniętym podzbiorem  $B$  i  $T$  będzie odwzorowaniem pełnociągłym. Wtedy  $T$  ma punkt stały.

Idea dowodu:

- korzystając ze zwartości i wypukłości zbioru, skonstruować  $T_\varepsilon$ , takie że  $\dim \operatorname{lin} T[C]$  jest skończone i  $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$
- operator  $T_\varepsilon$  ma punkt stały  $\tilde{x}_\varepsilon$  z twierdzenia Brouwera
- ze zwartości  $C$  mamy istnienie punktu stałego  $T$

Twierdzenia typu Lerraya-Schaudera:

Niech  $S, T$  będą operatorami pełnociągłymi i  $S$  ma punkt stały. Jeżeli jesteśmy w stanie w kontrolowany sposób przekształcić  $S$  w  $T$  to  $T$  także ma punkt stały.

Twierdzenia typu Lerraya-Schaudera:

Niech  $S, T$  będą operatorami pełnociągłymi i  $S$  ma punkt stały. Jeżeli jesteśmy w stanie w kontrolowany sposób przekształcić  $S$  w  $T$  to  $T$  także ma punkt stały.

Najprostsze twierdzenie tego typu:

### Twierdzenie Shaefera

Niech  $T : B \mapsto B$  będzie odwzorowaniem pełnociągłym. Załóżmy, że istnieje  $C$  takie, że dla każdego  $u \in B$  mamy zawieranie:

$$\{u : \exists \lambda \in [0, 1] \ u = \lambda T(u)\} \subset B(0, C)$$

Wówczas  $T$  ma punkt stały w  $B$ .

## Twierdzenie

Niech  $T(\lambda, u)$  będą operatorami pełnociągłymi, zależnymi w sposób ciągły od  $0 \leq \lambda \leq 1$  w silnej topologii operatorowej, oraz:

- 1 dla wszystkich punktów stałych  $\tilde{x}(\lambda)$  zachodzi
$$\|\tilde{x}(\lambda)\| \leq a < \infty$$
- 2 istnieje  $b > a$  takie, że dla  $\|x\| = b$  mamy  $\|T(0, x)\| \leq b$

Wtedy  $T(1, x)$  ma punkt stały  $\|\tilde{x}\| \leq a$



## Twierdzenie

Niech  $T(\lambda, u)$  będą operatorami pełnociągłymi, zależnymi w sposób ciągły od  $0 \leq \lambda \leq 1$  w silnej topologii operatorowej, oraz:

- 1 dla wszystkich punktów stałych  $\tilde{x}(\lambda)$  zachodzi  
$$\|\tilde{x}(\lambda)\| \leq a < \infty$$
- 2 istnieje  $b > a$  takie, że dla  $\|x\| = b$  mamy  $\|T(0, x)\| \leq b$

Wtedy  $T(1, x)$  ma punkt stały  $\|\tilde{x}\| \leq a$

## Uwagi:

- warunek 2) zapewnia istnienie punktu stałego operatora  $T(0, x)$ .
- powyższe twierdzenie wynika z twierdzenia Shaudera. Do bardziej zaawansowanych twierdzeń potrzebna jest teoria stopnia topologicznego.