

Piotr Biler, Instytut Matematyczny UW

### **Równania różniczkowe B1** (czwarty semestr studiów matematycznych)

W semestrze wiosennym będę prowadził zajęcia z

*Równań różniczkowych B1*; wykład planowany jest w piątki, 9–12, sala B; ćwiczenia we wtorki.

Wykład (45 g. + 30 g. ćw.) jest adresowany do studentów wszystkich specjalności (zwłaszcza teoretycznej)

W programie zawarte jest przedstawienie podstawowych zagadnień teorii równań różniczkowych zwyczajnych w nowoczesnym ujęciu, w podejściu analitycznym i geometrycznym. Tematyka obejmuje również analizę fundamentalnych przykładów równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego (równania Laplace’a i Poissona), parabolicznego (równanie przewodnictwa ciepła) i hiperbolicznego (równanie falowe) pojawiających się w teorii i zastosowaniach. Użyte zostaną metody klasyczne jak również przykłady zastosowania narzędzi analizy funkcjonalnej.

Zajęcia mają dostarczyć – oprócz podstawowych wiadomości – informacje o zastosowaniach równań różniczkowych w modelowaniu zjawisk fizycznych, w teorii prawdopodobieństwa itp., a także o związkach z innymi dziedzinami matematyki (geometria różniczkowa, analiza funkcjonalna).

W szczególności omawiane są następujące tematy:

#### **Równania różniczkowe zwyczajne**

- zagadnienia fizyczne prowadzące do równań różniczkowych (1 g.): [A] 1.1, [B] 1.2–1.7, [P] 1.1–1.4,
- całkowanie elementarnych typów równań różniczkowych zwyczajnych (2 g.): [A] 1.2, [P] 3.1–3.3,
- twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych wraz z informacją o najprostszych metodach numerycznych (tw. Picarda – metodą kolejnych przybliżeń i tw. Peano – metodą łamanych Eulera; uzupełnienia z analizy: tw. Banacha o kontrakcji); informacja o tw. Knesera (5 g.): [A] 2.7, 4.30, [P] 2.1, 3.4, [H] 2.4,
- przedłużanie rozwiązań do rozwiązania wysyczonego; rozwiązanie maksymalne i minimalne, tw. o nierównościach różniczkowych (2 g.): [P] 3.5, [H] 3.1–3.4,
- równania liniowe o stałych i zmiennych współczynnikach (macierzowa funkcja wykładnicza, układ fundamentalny rozwiązań, metoda uzmienniania parametrów), równania różniczkowe rzędu  $k > 1$  (wrońskian, metoda Lagrange’a), równania o stałych współczynnikach (wykładniki charakterystyczne), równania o zmiennych współczynnikach (rozwiązanie przy pomocy szeregów potęgowych i metodą Frobeniusa) (6 g.): [A] 3.13–3.29, [P] 4.1–4.3, 6.1–6.3,

- zagadnienie Sturma–Liouville’a i funkcja Greena (2 g.): [P] 4.6,
- transformacja Laplace’a i zastosowania do zagadnień początkowych (2 g.): [B] 2.9,
- punkty osobliwe układów równań zwyczajnych na płaszczyźnie; portrety fazowe; pojęcie potoku fazowego; całkowanie równań typu Newtona na płaszczyźnie, twierdzenie Poincaré’go–Bendixsona (3 g.): [A] 1.3–1.5, 2.12, 5.4, [P] 9.1–9.3, 10.2, [AP] 3.9,
- stabilność rozwiązań, tw. Lapunowa (funkcja Lapunowa, nierówności typu Gronwalla–Bellmana) (2 g.): [A] 3.23, [P] 7.1–7.3,
- ciągła i gładka zależność rozwiązań od warunków początkowych i parametrów, (1 g.): [A] 4.31–4.32,

### **Równania różniczkowe cząstkowe**

- równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu (liniowe i quasilineowe; powierzchnie charakterystyczne, zagadnienie Cauchy’ego) (2 g.): [A] 2.11,
- wyprowadzenie podstawowych równań różniczkowych cząstkowych fizyki matematycznej (równanie Laplace’a, falowe, przewodnictwa cieplnego, Fokkera–Plancka) (1 g.): [E] 1.1–1.2, 2.1, [Fa] 2.4, 3.16, 4.31,
- klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych liniowych drugiego rzędu; charakterystyki (1 g.): [M] 2.3, 2.6,
- zagadnienie Cauchy’ego; zagadnienie dobrze postawione w sensie Hadamarda; twierdzenie Cauchy’ego–Kowalewskiej; przykłady Hadamarda i Kowalewskiej (2 g.): [M] 3.1, 3.2, 3.6,
- równania typu hiperbolicznego; zagadnienie Cauchy’ego dla równania falowego; wzory D’Alemberta, Kirchhoffa i Poissona i wnioski (zasada Huygensa i propagacja fal); metoda energetyczna dowodu jednoznaczności rozwiązań; metoda Fouriera dla równania struny (4 g.): [M] 2.7, 5.1, 5.4, [E] 2.4,
- funkcje harmoniczne; zasada maksimum dla operatorów eliptycznych; zagadnienie Dirichleta na kole i całka Poissona; funkcja Greena (3 g.): [M] 4.1, 4.2, [E] 2.2,
- zagadnienia Dirichleta i Neumanna dla równania Laplace’a i Poissona w dowolnym obszarze (1 g.): [M] 4.2,
- informacja o potencjałach objętościowym, warstwy pojedynczej i podwójnej; sprowadzenie zagadnień brzegowych do równań całkowych – alternatywa Fredholma (2 g.): [M] 4.3, 4.4, 2.5, [Mn] 7, 15,
- wartości i funkcje własne Laplasjanu (1 g.): [Fa] 3.30, [E] 6.5, [Mn] 18,

- równanie ciepła; zasada maksimum; całka Gaussa–Weierstrassa; metoda Fouriera dla zagadnień brzegowych (2 g.): [M] 6.1–6.3, [E] 2.3.

### Literatura

- [A] **W.I. Arnold**, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa, 1975.
- [AP] D.K. Arrowsmith, C.M. Place, *Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall, London, 1982 (jest też tłumaczenie rosyjskie).
- [B] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications, An Introduction to Applied Mathematics*, Springer, New York, 1983.
- [E] **L.C. Evans**, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.
- [Fa] S. Farlow, *Partial Differential Equations*, tłum. ros. Moskwa 1985.
- [H] Ph. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964 (jest też tłumaczenie rosyjskie).
- [M] **H. Marcinkowska**, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa, 1986.
- [Mn] S.G. Mikhlin, *Lineinye uravnenia v častnykh proizvodnykh*, V. sh., Moskva, 1977.
- [P] **A. Palczewski**, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa, 1999.
- [Po] L.S. Pontriagin, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa, 1964.
- [TS] A.N. Tichonow, A.A. Samarski, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1983.
- [BN] P. Biler, T. Nadzieja, *Problems and Examples in Differential Equations*, M. Dekker, New York, 1992.

**Pierwsze zajęcia: 23 lutego 2018, 9–12, s. B**

Serdecznie zapraszam! *Piotr Biler*