Kolokwium 2

Zadanie 1. Zbadaj stabilność rozwiązania zagadnienia początkowego:

$$\begin{cases} y'(t) = 2t(y+1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE:
Rozwiązujemy zagadnienie rozdzielając zmienne. Otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$y(t) = -1 + Ce^{t^2},$$

zatem zagadnienie początkowe $y(0) = y_0$ ma rozwiązanie

$$y(t) = -1 + (y_0 + 1)e^{t^2}.$$

Szukane rozwiązanie zagadnienia z zadania to

$$\widetilde{y}(t) = -1 + e^{t^2},$$

zatem dla każdego y_0 mamy

$$|y(t) - \widetilde{y}(t)| = |y_0|e^{t^2}.$$

Wynika z tego, że $\widetilde{y}$ nie jest rozwiązaniem stabilnym, ponieważ funkcja e^{t^2} jest nieograniczona.

Zadanie 2. Rozważamy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} x' = xy + x, \\ y' = xy - y + y^2. \end{cases}$$

Znajdź punkty stacjonarne układu. Określ ich charakter i narysuj przybliżony portret fazowy.

ROZWIĄZANIE:
Punktami stacjonarnymi układu są

a) $(0, 0)$, b) $(0, 1)$, c) $(2, -1)$.

Liczymy macierz linearyzacji:

$$\mathrm{D}f(x, y) = \begin{pmatrix} y + 1 & x \\ y & x + 2y - 1 \end{pmatrix}$$

zatem macierz ta w punktach stacjonarnych jest postaci:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Wielomiany charakterystyczne tych macierzy to:

a) $W(\lambda) = (\lambda - 1)(1 + \lambda)$; b) $W(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)$; c) $W(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$.

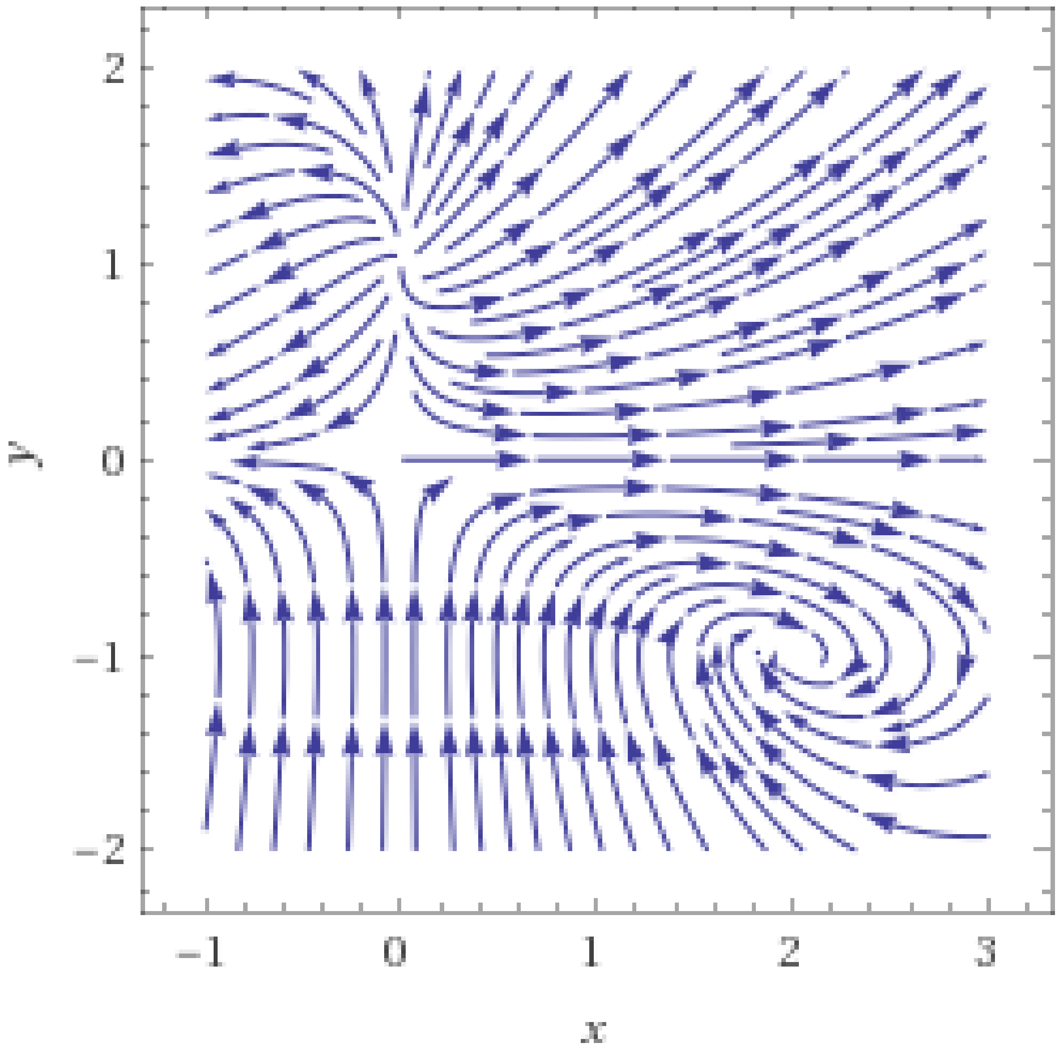
Wartości własne to:

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$; b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$; c) $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$.

Zatem wszystkie trzy punkty stacjonarne są punktami hiperbolicznymi i z twierdzenia Grobmana-Hartmana potoki fazowe rozważanego układu są równoważne potokom linearyzacji. Charaktery punktów stacjonarnych to kolejno:

a) punkt stacjonarny niestabilny, siodło; b) punkt stacjonarny niestabilny, węzeł; c) punkt stacjonarny asymptotycznie stabilny, ognisko.

Portret fazowy wygląda mniej więcej tak:



Zadanie 3. Wyznacz (o ile istnieje) rozwiązanie zagadnienia:

$$\begin{cases} xu_x + 2u_y = 1, \\ u(x,1) = x. \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE:
Oznaczając $z(t) = u(x(t), y(t))$ piszemy układ równań na charakterystyki:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2, \\ z' = 1. \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę warunek brzegowy dodajemy warunki początkowe:

$$\begin{cases} x(0) = \alpha, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = \alpha, \end{cases}$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_\alpha(t) = \alpha e^t, \\ y_\alpha(t) = 2t + 1, \\ z_\alpha(t) = t + \alpha. \end{cases}$$

Ponieważ

$$u(x_\alpha(t), y_\alpha(t)) = t + \alpha$$

to odwracając parametryzację mamy

$$u(x,y) = \frac{y-1}{2} + xe^{\frac{1-y}{2}}.$$

Zadanie 4. Rozwiąż metodą Fouriera następujące zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$\begin{cases} u_t + u = u_{xx} & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 & t \geq 0, \\ u_x(1,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ u(x,0) = 0 & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE:
Szukamy rozwiązania $u(x,t)$ w postaci szeregu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Podstawiając dowolny składnik szeregu do równania otrzymujemy:

$$T_n'(t)X_n(x) + T_n(t)X_n(x) = T_n(t)X_n''(x),$$

czyli

$$\frac{T_n'(t) + T_n(t)}{T_n(t)} = \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \lambda.$$

Zatem $X_n(x)$ będą funkcjami własnymi zagadnienia:

$$\begin{cases} y'' = \lambda y & 0 < x < 1, \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Zagadnienie to ma rozwiązanie jedynie dla $\lambda = \lambda_n = -n\pi$ i jest ono w postaci $X_n(x) = \cos(n\pi x)$. Wyznaczamy zatem postaci T_n:

$$T_n(t) = Ce^{(-1-n^2\pi^2)t}$$

Czyli ogólne rozwiązanie to:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x) e^{-(n^2\pi^2+1)t}.$$

Współczynniki wyznaczamy z relacji:

$$\int_0^1 u(x,0)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = c_n \int_0^1 \cos^2(n\pi x)\,\mathrm{d}x = c_n \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{c_n}{2}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2}, \\ c_{2k} = 0 & \text{dla } k \in \mathbb{N}_+, \\ c_{2k-1} = 2 \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} & \text{dla } k \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

Zadanie 5. Rozważamy zagadnienie początkowe dla równania fali na prostej:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = (1-x^2)^2 & |x| \leq 1, \\ u(x,0) = 0 & |x| > 1, \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Określ na jakim podzbiorze $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ zachodzi $u(x,t) = 0$.

ROZWIĄZANIE:
Przypomnijmy wzór d'Alemberta na rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

W przypadku tego konkretnego zagadnienia $g \equiv 0$ i f jest nieujemne. Zatem $u(x,t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x-ct) = 0$ i $f(x+ct) = 0$, czyli

$$\begin{cases} |x - ct| \geq 1, \\ |x + ct| \geq 1. \end{cases}$$

Dla $0 < t < 1/c$ mamy zatem warunek

$$x \in (-\infty, -1-ct) \cup (1+ct, +\infty),$$

a dla $t \geq 1/c$ mamy

$$x \in (-\infty, -1-ct) \cup (1-ct, -1+ct) \cup (1+ct, +\infty).$$