

Zadanie 54. Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od wartości parametrów α, β :

$$y' = y^\alpha + \beta, \quad y(0) = 0,$$

Kiedy stosować można twierdzenie Picarda-Lindelöfa? Kiedy iteracje Picarda są zbieżne? Kiedy można stosować schemat Eulera? Policz kilka iteracji Picarda i kilka kroków w schemacie Eulera w odpowiednich przypadkach dla ustalonych, wybranych wartości parametrów.

Zadanie 55. Wykazać, że warunek ograniczoności pochodnej implikuje ciągłość oraz spełnienie warunku Lipschitza dla funkcji dwóch zmiennych.

Zadanie 56. Przypomnieć odpowiednie twierdzenie z analizy mówiące o tym, że funkcja ciągła na prostokącie przyjmuje wartości ekstremalne. Podać przykłady, że maksimum lub minimum przyjęte jest wewnątrz lub na brzegu prostokąta.

Zadanie 57. W jakich punktach dziedziny funkcji f może pojawić się niejednoznaczność rozwiązań odpowiedniego zagadnienia początkowego

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0.$$

Zobrazować tą niejednoznaczność przykładami.

Zadanie 58. Wykazać, że zagadnienie

$$y'(t) = (y(t))^{1/a}, y(0) = 0$$

posiada wiele rozwiązań określonych na całej prostej dla $a = 2$ lub $a = 4$. Zinterpretuj to w świetle twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności.

Zadanie 59. Wykazać, że zagadnienie

$$y'(t) = (y(t))^a, y(0) = 0$$

nie posiada rozwiązania określonego na całej prostej dla $a = 2$ lub $a = 4$. Porównaj z rozdziałem o przedłużaniu rozwiązań w Rozdziale 3, <http://im0.p.lodz.pl/bprzeradzki/rrzw.pdf>.

Zadanie 60. Przypomnij z analizy kryterium Weierstrassa o zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych. Do jakiego ciągu funkcji zastosowano je w dowodzie Twierdzenia Picarda-Lindelöfa? Podaj inne przykłady szeregów funkcyjnych zbieżnych jednostajnie oraz takich które zbieżne nie są.

Zadanie 61. Sformułuj oraz przeprowadź dowód tw. o przechodzeniu z granicą pod znak całki. Zobrazuj to przykładami oraz kontrprzykładami w zależności od tego czy założenia są spełnione. Czy założenia pojawiające się w Tw. Picarda-Lindelöfa dotyczące f mogą zostać osłabione aby w jego dowodzie przejść z granicą pod znak całki?

Zadanie 62. Przypomnij twierdzenie o wartości średniej i zobrazuj je kilkoma przykładami. W którym miejscu to twierdzenie zastosowano w dowodzie Twierdzenia Picarda-Lindelöfa?

Zadanie 63. Wykazać, że założenie regularności klasy C^1 po drugiej zmiennej nałożone na ciągłą funkcję $f = f(t, y)$ implikuje lokalnie warunek Lipschitza. Wsk. Skorzystaj z tw. o wartości średniej po drugiej zmiennej.

Zadanie 64. Porównaj Tw. Peano z książki A. Palczewskiego z Tw. Picarda-Lindelöfa.

Zadanie 65. Rozwiąż równania:

$$y''(t) - y(t) = e^{5t}, \quad y''(t) + y'(t) = e^{5t}, \quad y''(t) + y(t) = e^{5t},$$

a następnie sprowadź je do układu równań pierwszego rzędu.