

Zasada maksimum Pontriagina

Bartosz Wróblewski

25.04.2015

Abstrakt

Wiele zagadnień praktycznych dotyczących układów dynamicznych wymaga optymalizacji pewnych wielkości. Jednakże zwykła teoria gładkich układów dynamicznych zajmuje się jednak tylko opisem ewolucji układu w czasie. Zakłada, że jesteśmy jedynie biernymi obserwatorami.

Aby móc szukać odpowiedzi na problemy w których możemy wpływać na rozwój wydarzeń wprowadzamy funkcję kontroli $\alpha(t)$ za pomocą której wpływamy na rozwój wydarzeń i rozważamy układ $\dot{x} = f(x, \alpha)$. Dziedzina zajmująca się badaniem tego typu zagadnień nazywa się teorią sterowania. Gdy z pomocą kontroli α mamy na celu optymalizację pewnej wielkości zależnej od trajektorii układu to mówimy o sterowaniu optymalnym.

W referacie przedstawię podstawowe idee teorii sterowania optymalnego, przykłady rozważanych problemów i zagadnień. Głównym punktem prezentacji będzie zasada maksimum Pontryagina wyrażająca warunki konieczne jakie spełniać musi kontrola optymalna.



Możliwe do rozważenia sytuacje praktyczne:

- Jak dojechać do stacji benzynowej przy najmniejszym zużyciu paliwa?
- Jak wylądować sondą na Marsie w najkrótszym czasie?
- Jak zarządzać produkcją w fabryce aby uzyskać największy zysk?

Gładkim układem dynamicznym nazywamy równanie różniczkowe w postaci:

Układ dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Gdzie $t \geq 0$ a f jest funkcją ciągłą $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że w postaci tej można zapisać równanie różniczkowe dowolnego rzędu. Układy dynamiczne dobrze sprawdzają się jako modele matematyczne zjawisk fizycznych.

Przykład: Kamień spadający na Marsa

Modelujemy upadek kamienia w atmosferze Marsa. Upuszczamy go swobodnie z wysokości H nad powierzchnią. Niech $h(t)$ będzie wysokością nad powierzchnią Marsa w chwili t .

$$\begin{cases} m\ddot{h} = -mg + kh \\ h(0) = H \quad \dot{h}(0) = 0 \end{cases}$$



Przyjmujemy możliwość kontrolowania zachowania układu dynamicznego. Założmy, że funkcja f zależy od dodatkowego parametru $\alpha \in A \subset \mathbb{R}^n$ który możemy zmieniać w czasie:

Układ sterowalny

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \alpha(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

gdzie $\alpha \in \mathcal{A} \subset \{\alpha : [0, \infty) \mapsto A : \alpha \text{ mierzalna}\}$.

Funkcję α nazywamy funkcją kontroli a zbiór \mathcal{A} zbiorem funkcji dopuszczalnych. Trajektorię układu dla ustalonej kontroli α oznaczamy przez x_α .

Przykład: Lądownie na Marsie

Modelujemy lądownie statku kosmicznego na powierzchni Marsa.
Upuszczamy go swobodnie z wysokości H nad powierzchnią. Niech:

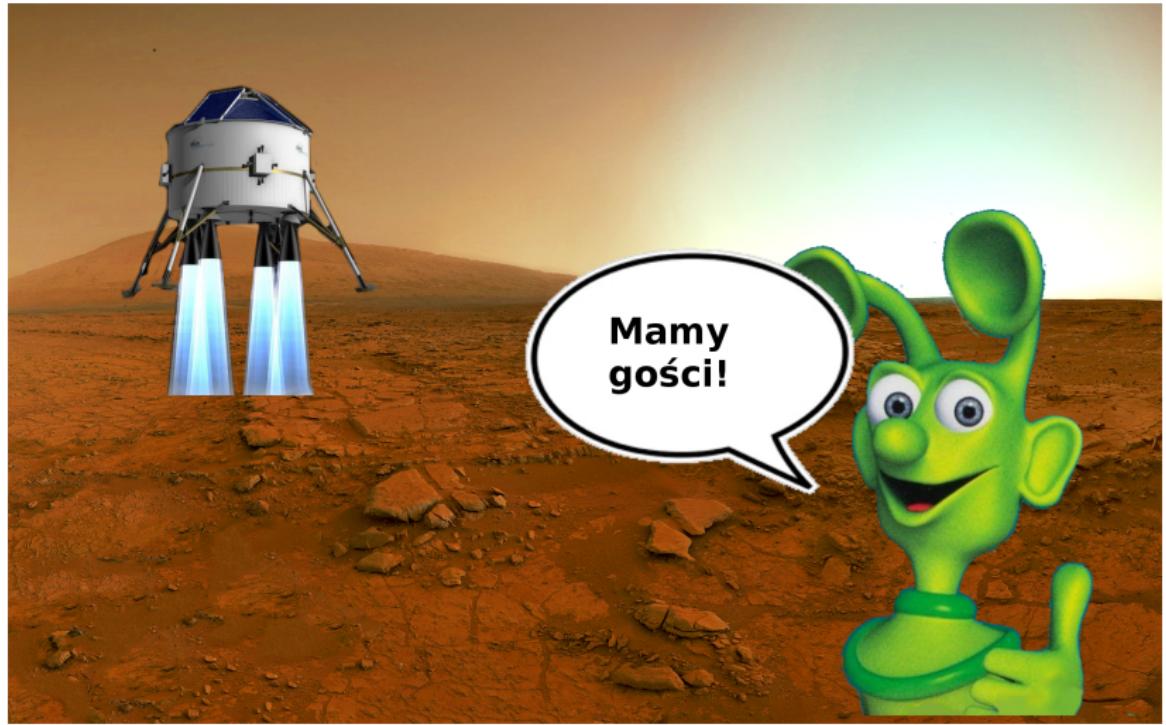
$h(t)$ – wysokość nad powierzchnią Marsa w chwili t

$m(t)$ – masa statku w chwili t

$\alpha(t)$ – procent wykorzystania mocy odrzutu silnika w chwili t

$$\begin{cases} m\ddot{h} = -mg + k\dot{h} + W\alpha \\ \dot{m} = -k\alpha \\ x(0) = H \quad \dot{h}(0) = v \quad m(0) = m_0 \end{cases}$$

gdzie $\alpha[0, \infty) \mapsto [0, 1]$, $h(t) \geq 0$, $m(t) \geq m_0 - m_s$.



Przykładowe problemy w teorii sterowania:

- Chcemy znaleźć kontrolę α taką, aby zmusić układ do przybrania ustalonej trajektorii (sterowalność układu).
- Mamy zadany podzbiór C przestrzeni fazowej. Chcemy sprawdzić, czy istnieje kontrola α , sprowadzająca układ w zbiór C w skończonym czasie (wyznaczanie zbioru osiągalnego).
- Mamy zadany funkcjonał, zależny od trajektorii układu. Szukamy kontroli α będącej punktem ekstremalnym tego układu (sterowanie optymalne).

Wprowadzamy dodatkowy funkcjonał $P : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ (nieliniowy) w postaci $P[\alpha] = F[x_\alpha]$ dla pewnego odwzorowania, określonego na możliwych trajektoriach układu. Funkcjonał ten nazywamy funkcjonałem zysku (*payoff functional*). Rozważać będziemy funkcjonały postaci:

Funkcjonał zysku

$$P[\alpha] = \int_0^{T_\alpha} r(x_\alpha, \alpha) dt + g(x_\alpha(T_\alpha))$$

Funkcję r nazywamy zyskiem bieżącym (*running payoff*) a g zyskiem końcowym (*terminal payoff*). Naszym celem jest znalezienie kontroli α^* maksymalizującej zysk (Jesteśmy chciwi/przedsiębiorczy). Funkcję α^* nazywamy kontrolą optymalną. W przykładach często można spotkać się z problemem maksymalizacji kosztów dla ustalenia terminologii - w takim przypadku zyskiem nazywamy brak starty.

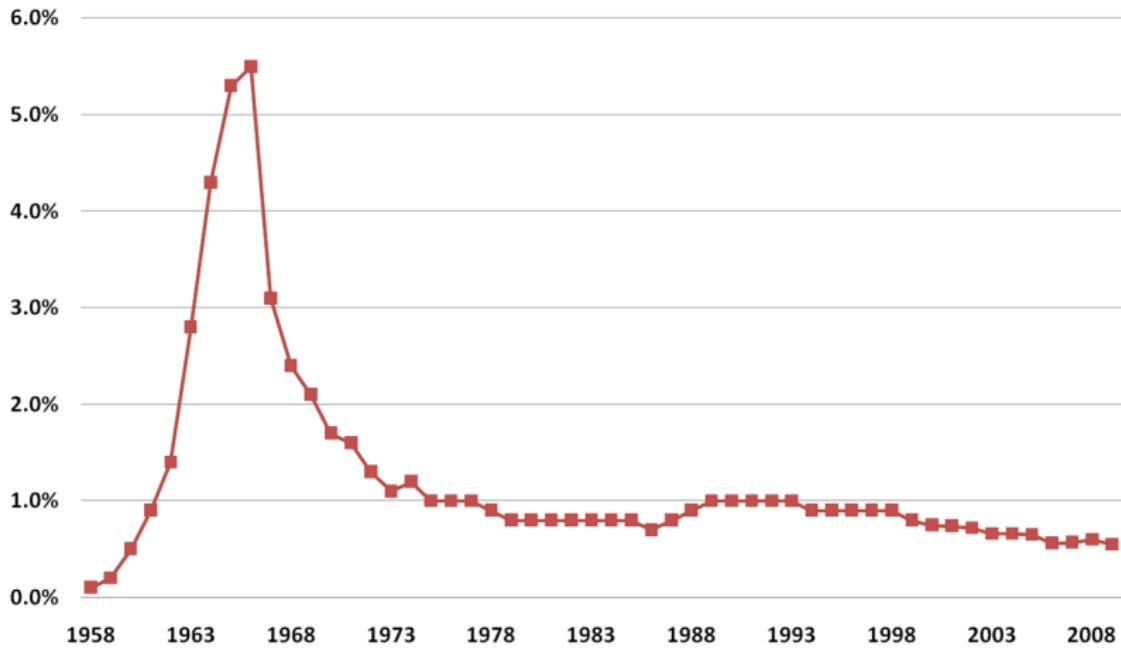
Przykład: Lądowanie na Marsie przy ograniczonym budżecie

Chcemy zminimalizować zużyte paliwo, a zatem zmaksymalizować jego ilość pozostałą po lądowaniu. Wprowadzamy zatem funkcjonał:

$$P[\alpha] = m(\tau_\alpha)$$

gdzie τ_α jest pierwszym momentem w którym $x_\alpha(t) = 0$. Szukamy kontroli α^* , będącej punktem minimalnym funkcjonału.

NASA Budget History (% of total federal budget)



Rysunek : Spadek budżetu NASA od czasów złotej ery kosmicznej pokazuje, jak ważny jest to problem.



Omówimy teraz warunek konieczny na to, aby kontrola była kontrolą optymalną – Zasadę Maksimum Pontriagina

Lew Semenowicz Pontriagin (1908-1988)

W roku 1922 roku, w wieku 14 lat, uległ wypadkowi, w wyniku którego stracił wzrok. Mimo to, dzięki pomocy matki, skończył w wieku 21 lat Uniwersytet Moskiewski i stał się jednym z najwybitniejszych matematyków XX wieku. Zajmował się głównie topologią i równaniami różniczkowymi.

Rozważać będziemy przypadek, gdy $T_\alpha = T$ jest ustalone, ale zmienia się punkt końcowy $x_\alpha(t)$ (*fixed time, free endpoint problem*).

Hamiltonianem teorii sterowania nazwiemy funkcję:

$$H(x, p, a) = \langle f(x, a), p \rangle + r(x, a)$$

Zasada Maksimum Pontriagina

Niech α^* będzie kontrola optymalną dla układu sterowalnego z funkcjonałem zysku i $x^* = x_{\alpha^*}$. Istnieje funkcja $p^* : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ taka, że:

$$\begin{cases} (ODE) & \dot{x}^* = \nabla_p H(x^*, p^*, \alpha^*) \\ (ADJ) & \dot{p}^* = -\nabla_x H(x^*, p^*, \alpha^*) \end{cases}$$

Ponadto spełniona jest zasada maksimum:

$$(MAX) \quad H(x^*, p^*, \alpha^*) = \max\{H(x^*, p^*, a) : a \in A\} \quad 0 \leq t \leq T$$

oraz hamiltonian jest całką pierwszą trajektorii x^* .

Wartość końcowa funkcji p^* wyznaczona jest przez:

$$(TR) \quad p^*(T) = \nabla g(x^*(T))$$

Równania (ODE) i (ADJ) nazywamy równaniami sprzężonymi a (TR) warunkiem transwersalności. Funkcję p nazywamy kostanem.

Kontrola produkcji i konsumpcji

Produkujemy pewne dobro. W każdej chwili zużywamy część produkcji na bieżące potrzeby, a resztę inwestujemy. Tempo wzrostu produkcji jest proporcjonalne do inwestowanej części. Chcemy zmaksymalizować konsumpcję na przedziale czasowym $[0, T]$.

$x(t)$ – ilość wyprodukowana w czasie t

$\alpha(t)$ – część środków przeznaczana na inwestycję w chwili t

Ewolucją układu rządzi równanie:

$$\dot{x} = \alpha x$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Maksymalizujemy funkcjonał zysku w postaci:

$$P[\alpha] = \int_0^T (1 - \alpha)x(t) \, dt$$

Hamiltonian ma postać:

$$H(x, p, a) = f(x, a)p + r(x, a) = axp + (1 - a)x = x + ax(p - 1)$$

Zasada maksimum wygląda następująco:

$$H(x, p, \alpha) = \max\{x + ax(p - 1) : 0 \leq a \leq 1\}$$

Zatem funkcja kontroli jest postaci:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } p(t) > 1 \\ 0 & \text{gdy } p(t) \leq 1 \end{cases}$$

Układ opisujący kostan:

$$\begin{cases} \dot{p} = -1 - \alpha(p - 1) \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

Zatem kostan jest w postaci:

$$p(t) = \begin{cases} e^{T-1-t} & \text{gdy } 0 \leq t \leq T-1 \\ T-t & \text{gdy } T-1 < t \leq T \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy funkcję kontroli:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 0 \leq t \leq T-1 \\ 0 & \text{gdy } T-1 < t \leq T \end{cases}$$

Pamiętajmy, że zasada maksimum pozwala nam wyznaczyć jedynie "kandydatów" na kontrolę optymalną.

W tym przypadku jednak, z pomocą innych metod, dowodzi się że funkcja α jest kontrolą optymalną.

Funkcje kontroli w tej postaci nazywamy kontrolami typu "bang-bang".

Literatura

Teoria sterowania optymalnego – Zdzisław Wyderka

An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory –

Lawrence C. Evans

