

Zadanie 10. Ciśnienie atmosferyczne w danym punkcie nad powierzchnią Ziemi określony jest przez ciężar warstwy powietrza leżącej powyżej tego punktu, zgodnie z równaniem gazu doskonałego opisane jest następującym równaniem o rozdzielonych zmiennych

$$RTp'(h) = Mgp(h)$$

gdzie niewiadoma funkcja $p(h)$ oznacza ciśnienie na wysokości h a stałe T, R, M, g to odpowiednio temperatura, uniwersalna stała gazowa, masa molowa powietrza i przyspieszenie ziemskie. Całkując równanie różniczkowe wyprowadzić tzw. wzór barometryczny $p(h) = p(0) \exp(MGh/(RT))$.

Zadanie 11. Kula poruszająca się z prędkością początkową $v(0) = 400m/s$ przebija ścianę o grubości $h = 20cm$ i wylatuje z niej z prędkością $v(T) = 100m/s$. Zakładając, że siła oporu ściany jest proporcjonalna do kwadratu prędkości kuli $v(t)$, korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$mv'(t) = -k(v(t))^2$$

znaleźć czas ruchu kuli w ścianie. Przyjąć $x(0) = 0, x(T) = h, x'(t) = v(t), l = k/m$.

Zadanie 12. Równania postaci $y' = f(y/t)$, gdzie f jest daną funkcją, nazywamy równaniem jednorodnym. Udowodnij, jeżeli y jest rozwiązaniem równania jednorodnego, to funkcja $v(t) = y(t)/t$ spełnia równanie o zmiennych rozdzielonych $tv' + v = f(v)$.

Zadanie 13. Rozwiązać równania jednorodne:

a) $2y + t - ty' = 0$, b) $ty' = y - te^{y/t}$, c) $ty' = y \cos(\ln \frac{y}{t})$.

Zadanie 14. Scałkować następujące równania różniczkowe:

a) $y' = \cos^2 t$ b) $y' = \frac{2t}{t^2+1}$ c) $y' = \sqrt{1-t^2}$ d) $y' = \frac{t}{1+t^2+\sqrt{1+t^2}}$.

Zadanie 15. Scałkować równanie i wyznaczyć rozwiązanie, którego wykres przechodzi przez dany punkt: a) $y' = 2te^{-t^2}$, $M = (0, -1)$, b) $y' = -\frac{1}{t^2}$, $M = (1, 1)$, c) $y' = -2t \sin(t^2)$, $M = (0, 1)$.

Zadanie 16. Scałkować równania:

a) $y' = \cos y$, b) $y' = y \ln y$, c) $y' = y^2 + a$, d) $y' = 1 + \frac{1}{y}$, e) $y' = ky^n$, f) $y' = \operatorname{tg} y$.

Zadanie 17. Znaleźć rozwiązanie, którego wykres przechodzi przez dany punkt:

a) $y' = -y^2$, $M_1 = (0, 0)$, $M_2 = (1, 1)$, b) $y' = y - 1$, $M = (1, 1)$ c) $y' = \sqrt{y}$, $M = (-1, 1)$.

Zadanie 18. Znaleźć rozwiązanie ogólne równań liniowych mnożąc je przez odpowiedni czynnik:

a) $y' + y \cos t = 0$, b) $y' + t^2 y = t^2$, c) $y' + \frac{2t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2}$, d) $y' + y = te^t$.

Zadanie 19. Rozwiązać następujące zagadnienia początkowe bez znajdowania rozwiązania ogólnego: a) $y' + \sqrt{1+t^2} y = 0$, $y(0) = \sqrt{5}$, b) $y' + ty = 1 + t$, $y(3/2) = 0$, c) $t^2 y' + 2ty = 1 - t$, $y(0) = 0$.

Zadanie 20. Rozwiązać równania:

a) $y' - y \sin t = \sin t \cos t$, b) $(1 + t^2)y' - 2ty = (1 + t^2)^2$, c) $y' + y \cos t = \sin t \cos t$.

Zadanie 21. Rozwiązać równania:

a) $y + 2(t + y)y' = 0$, b) $(t - 2ty - y^2)y' + y^2 = 0$, c) $y - (t + 2y)y' = 0$.

Zadanie 22. Rozwiązać równania liniowe metodą czynnika całkującego:

a) $y' - \frac{1}{t}y = t$, b) $y' - \frac{2}{t}y = t^3$, c) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$