# CH 7.2 军备竞赛

#### 1、稳定性模型

建模的主要目的并不是寻求动摇过程每个瞬时的性态,而是研究某种意义下稳定状态的特征,特别是当时间充分以后动态过程的变化趋势。 为了分析这种稳定与不稳定的规律,常常不需要求解微分方程而可以利用微分方程稳定性理论,直接研究平衡状态的稳定性即可。

#### 2, CH7.7

微分方程和差分方程稳定性理论简介

- 一阶微分方程的平衡点及稳定性
  - 。 自治方程
  - 。 平衡点
  - 。 稳定的+不稳定的
  - 。间接法
  - 。 直接法:Talor展开一次项
- 二阶微分方程的平衡点和稳定性
  - 。 自治方程
  - 。 平衡点
  - 。 稳定的+不稳定的
  - 。 系数矩阵
  - 。行列式
  - 。 特征方程
  - ・ 根入  $\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(a_1 + b_2) \end{cases}$
- $q = \det A$

注意

- 。 局部稳定
- 。 全局稳定

### 3、CH7.2 军备竞赛

#### 模型假设

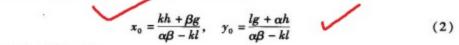
- 军备:军事力量的总和
- 甲乙双方在时刻t的军备记作x(t),y(t)
  - 一方军备越大,另一方军备增加越快:线性影响
  - 。 任一方军备越大,军备增长制约作用越大: 线性影响
  - 。 每一方都存在着增加军备固有潜力:常数
  - 。 方程:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases} \checkmark$$

- 系数都≥0
- k,l度量对方军备刺激程度
- α,β度量己方经济实力制约程度
- g,h己方军备竞赛的固有潜力

用微分方程稳定性理论讨论时间充分长以后x(t)和y(t)的变化趋势,即方程的平衡点稳定情况:

令方程右端都为0,算出平衡点(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>)



方程(1)的系数矩阵为

于是按照判断平衡点稳定性的方法计算 见 7.7 节 (9) ~ (13)式)  $p = -(a_{11} + a_{22}) = \alpha + \beta > 0$  (3)  $q = \det A = \alpha\beta - kl$  (4) 由稳定性准则 见 7.7 节 (15)式),当  $-\alpha\beta > kl$  (5) 时,平衡点  $(x_0, y_0)$  是稳定的; 反之,是不稳定的.

这就是说,在(5)式的条件下,时间足够长以后双方的军备将分别趋向一个 有限值,军备竞赛是稳定的.

## 模型的定性解释

- 1. 条件(5)表明,当双方的经济制约程度  $\alpha\beta$  大于双方的军备刺激程度 kl 时,军备竞赛才会趋向稳定. 反之,x(t),y(t)将趋向无穷,竞赛无限地进行下去,可能导致战争.
- 2. 由(2)式,如果 g = h = 0,则  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  是方程(1)的平衡点,并且在条件(5)下它是稳定的.于是如果在某个时候  $t_0$ ,有  $x(t_0) = y(t_0) = 0$ ,x,y,就永远保持为 0. 这种情况可以解释为双方不存在任何敌视和争端,通过裁军可以达到持久和平.两个友好的邻国正是这样.
- 3. 如果 $g,h\neq 0$ ,即使由于某种原因(如裁军协定)在某个时候双方军备大减,不妨设 $x(t_0)=y(t_0)=0$ ,那么因为x=g,y=h 也将使双方重整军备 这说明未经和解的裁军(即不消除敌视或领土争端)是不会持久的.
- 4. 如果由于某种原因(如战败或协议),在某个时候一方的军备大减,不妨设 $x(t_0)=0$ ,那么因为  $\dot{x}=ky+g$ ,也将使该方重整军备. 这说明存在不信任  $(k\neq 0)$  或固有争端 $(g\neq 0)$ 的单方面裁军也不会持久.

# 模型参数的估计

1、估计*k*、*l* 

设x(0)=0,当t较小时,忽略g和-lpha x的作用,且近似假定 $y=y_1$ ,那么  $\overset{\dot{x}=ky}{}$ 

- 若当t= au时, $x=y_1$ ,则 $k^{-1}= au$
- $k^{-1}$ 表示甲方军备从0赶上乙方军备 $y_1$ 所需的时间

2、估计
$$\alpha$$
、 $\beta$   
设  $g=0,y=0$ ,由方程(1)可得  
 $x(t)=x(0)e^{-\alpha t}$   
以  $t=\alpha^{-1}$ 大人,算出

 $x(\alpha^{-1}) = \frac{x(0)}{e}$ 

这表示  $\alpha^{-1}$  是在乙方无军备时甲方军备减少到原来的  $\frac{1}{e}$  所需的时间. Richardson 认为这大概是一个国家议会的任期,对于议会任期 5 年的国家来说, $\alpha \approx 0.2$ .

对模型和参数的粗略检验

难写难写,看书看书。