

CH8.5寻求较公正的选举规则

1、群体决策

- 群体决策：若干人对某些对象的决策结果，综合处整个群体的决策结果的过程。
- 二次选举：根据每个人对评选对象所做的排序来确定整个群体对评选对象排序的决策过程。

2、简单选举规则

简单的选举规则 用 $I = (1, 2, \dots, n)$ 表示选民集合, 由 m 个字母构成的 $A = (x, y, z, u, v, \dots)$ 表示候选人集合. 选举要求每个选民 $i \in I$ 对全体候选人投票, 即对 A 的一个排序, 记作 p_i 所谓选举规则是根据 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 确定选举结果, 即群体对 A 的排序, 记作 p , 这种由 (p_1, p_2, \dots, p_n) 到 p 的对应关系在群体决策中称为**群体一致函数** (Group Consensus Function) ①.

- 公理1: 要么优于, 要么劣于, 要么等同
- 公理2: 可传递性

1) 简单多数规则

- 当且仅当过半数选同一种排序, 才作为结果有效. 但违反了可传递性。
- 【只考虑候选人的优劣顺序】

2) 记分规则

- 当且仅当候选人各自的Borda数满足某排序时, 结果才用该排序有效. 但可能采用少数人而违背多数人意愿。
- 【考虑候选人的优劣程度, 且用同一尺度】

设 $B_i(x)$ 为排序 p_i 中劣于 x 的候选人的数目, 定义

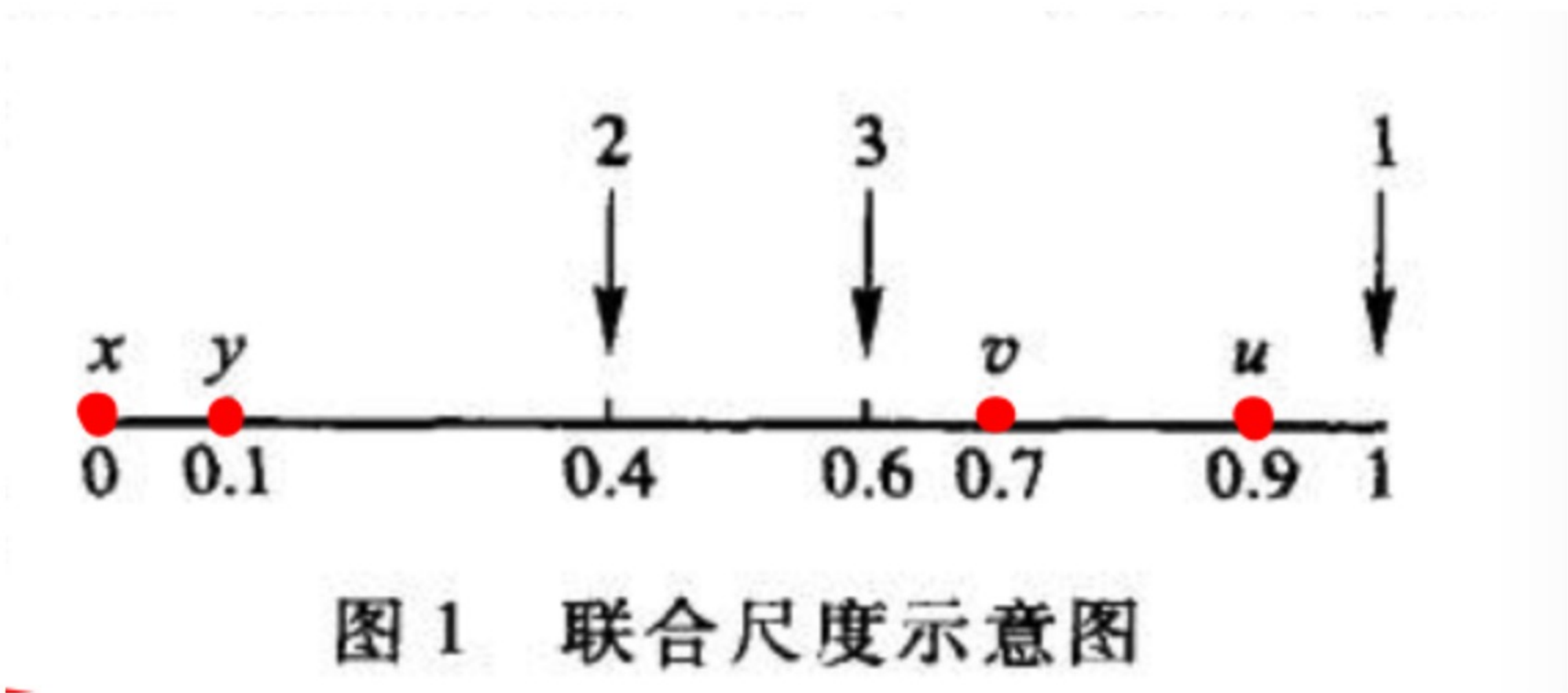
$$B(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x)$$

3) K.Arrow选举规则

- 先订下了5条公理:
 - 完全性
 - 结果与选民投票正相关
 - 无关候选人的独立性
 - 选民主权性
 - 选民非独裁性
- 定理: 当至少3位候选人2位选民时, 不存在满足Arrow公理的选举规则
- 公理3的不合理性举例分析

3、联合尺度下的选举规则

常用于颜色的深浅、口味的咸淡等物品的质量评定问题上。



- 联合尺度：结果往往与居中选民的投票相一致。
- 结论：

结论 设有奇数个 $(2k + 1)$ 个选民, 投票结果 $p_i (i = 1, 2, \dots, 2k + 1)$ 由选民和候选人的联合尺度得到 j 是联合尺度上居中的那位选民, 则简单多数规则确定的选举结果 p 与 p_j 一致, 并且简单多数规则符合 Arrow 公理①.

- 解释:

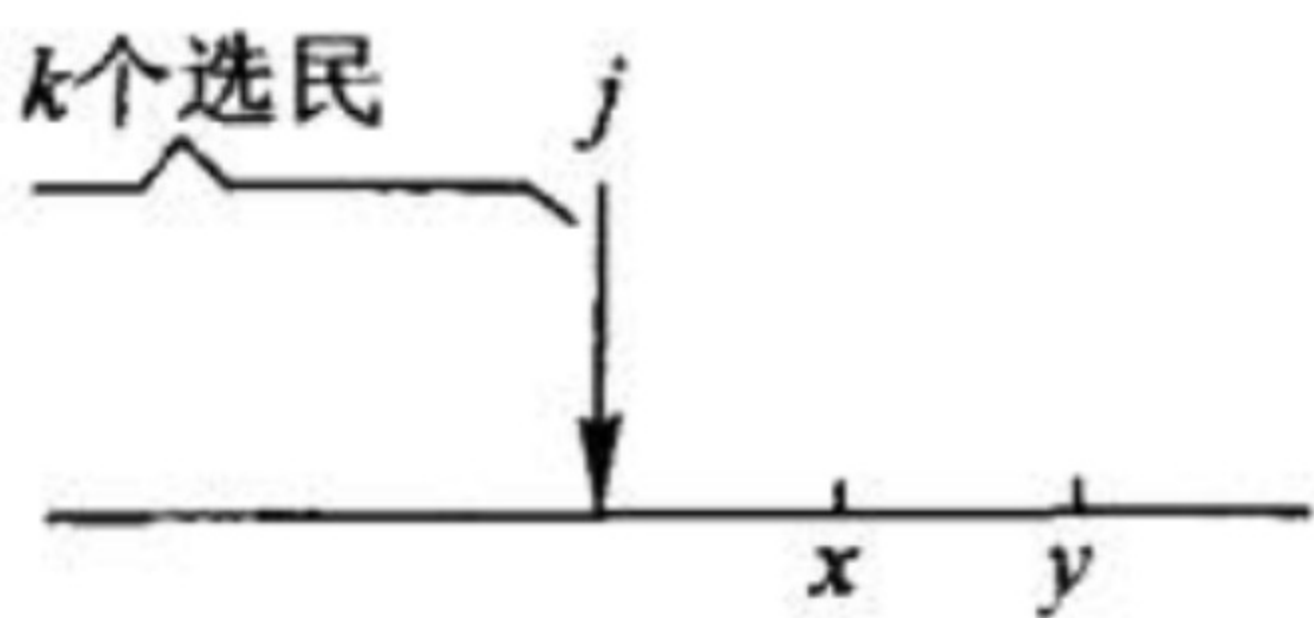


图2 联合尺度上居中选民 j 与 x, y 的位置

4、最小距离意义下的选举规则

- 与Arrow公理完全无关
- 合理地定义了两点 p_i 和 p_j 之间的距离关系来衡量接近程度

任一对候选人 x, y 在选民 i, j 的一次投票 p_i, p_j 中的距离为:

$$\delta_{(x,y)}(p_i, p_j) = \begin{cases} 0, & p_i, p_j \text{ 中 } x, y \text{ 的排序相同} \\ 1, & p_i, p_j \text{ 中一个含 } x \sim y, \text{ 另一个含 } x > y, \text{ 或 } x < y \\ 2, & p_i, p_j \text{ 中 } x, y \text{ 的排序相反} \end{cases} \quad (12)$$

p_i, p_j 之间的距离为

$$d(p_i, p_j) = \sum_{(x,y) \in A} \delta_{(x,y)}(p_i, p_j)$$

- 确定选举结果即寻求一个点 p 使它到 n 个点 p_1, p_2, \dots, p_n 的距离之和最小。

$$d(p_1, p_2) = \delta_{(x,y)}(p_1, p_2) + \delta_{(x,z)}(p_1, p_2) + \delta_{(y,z)}(p_1, p_2) = 0 + 1 + 2 = 3$$

对于一次投票 (p_1, p_2, \dots, p_n) , 确定选举结果 p 的原则通常有两种, 一是使

$\sum_{i=1}^n d(p, p_i)$ 最小 二是使 $\sum_{i=1}^n d^2(p, p_i)$ 最小. 前者平均地照顾各个选民的意愿, 后者对于与多数选民看法不同的少数选民的意見予以更多的考虑.