

数学模型 2.1(光盘容量问题)心得——Hy

问题的引入

光盘的信息容量问题，分两种：1.恒定线速度(CLV) 2.恒定角速度(CAV)

1.恒定线速度

数据线密度不变 容量(C)公式：

$$C_{CLV} = \rho L_{CLV}$$

因此只需要计算L的长度

(1)假设

先做假设，由于信道间距d很小，螺旋线可以近似为同心圆

(2).设参数

接下来设参数：

模型建立 根据以上分析分别对 CLV 光盘和 CAV 光盘的信息容量建模.

记光盘上存储信息的环形区域内圆半径为 R_1 ,外圆半径为 R_2 ,信道间距为 d ,存储数据的线密度为 ρ . CLV 光盘的信息容量记作 C_{CLV} ,则

(3).建立模型

下面是方法：

同心圆周长之和来近似，即

$$L_{CLV} \approx \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi(R_1 + kd), n = \frac{R_2 - R_1}{d} \tag{2}$$

利用数项级数求和容易得到

$$L_{CLV} \approx \frac{\pi(R_2 - R_1)(R_2 + R_1 - d)}{d} \tag{3}$$

实际上，还可以建立更简单的模型来近似计算螺旋线的长度 L_{CLV} ，比如用环形区域面积除以信道间距，即

$$L_{CLV} \approx \frac{\pi(R_2^2 - R_1^2)}{d} \tag{4}$$

或者用同心圆的平均周长乘以总圈数，即

$$L_{CLV} \approx 2\pi \frac{R_2 + R_1}{2} \frac{R_2 - R_1}{d} \tag{5}$$

显然，(4)和(5)的结果是一样的，(3)与它们只有微小的差别

当然，这是在假设这些螺旋线近似为同心圆的前提下得出的结论

(4).完善模型

如果去掉假设条件，那么就要用到极坐标与曲线积分的知识：

首先建立螺旋线的方程.对于自内径 R_1 始，到外径 R_2 止，间距 d 不变的螺旋线，其在极坐标下的方程为(r 为向径， θ 为相角)

$$r(\theta) = R_1 + \frac{d}{2\pi}\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi(R_2 - R_1)}{d} \tag{8}$$

根据极坐标下曲线弧长的微分 $ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2}$ ，螺旋线长度

$$L_{LCV} = \int_0^{\frac{2\pi(R_2 - R_1)}{d}} \sqrt{\left(R_1 + \frac{d}{2\pi}\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} d\theta \tag{9}$$

对(9)式作变量代换 $u = R_1 + \frac{d}{2\pi}\theta$ 后再作定积分，可得

$$\begin{aligned} L_{LCV} &= \frac{2\pi}{d} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{u^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} du \\ &= \frac{2\pi}{d} \left[\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2 \ln \left(u + \sqrt{u^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} \right) \right] \Bigg|_{R_1}^{R_2} \end{aligned} \tag{10}$$

对于表1的3种激光器用(10)计算的结果为：红外激光器(CD)的 $L_{CLV} = 5\,611\,300\text{ mm}$ ，红色激光器(DVD)的 $L_{CLV} = 12\,132\,335\text{ mm}$ ，蓝色激光器(DVD)的 $L_{CLV} = 28\,055\,919\text{ mm}$. 与表2的 L_{CLV} 比较，红外激光器(CD)的近似计算误差仅约0.02%，其他的更小.

2.恒定角速度

数据线密度有变化 但单位时间读取的信息量固定 因此每一圈虽然p不一样，L不一样，但它们的乘积PL是一样的

对于 CAV 光盘，其螺旋线最内圈的长度可近似为 $2\pi R_1$ ，总圈数可视为

$\frac{R_2 - R_1}{d}$ ，于是 CAV 光盘的信道有效长度 L_{CAV} 和信息容量 C_{CAV} 为

$$L_{CAV} = 2\pi R_1 \frac{R_2 - R_1}{d}, C_{CAV} = \rho L_{CAV} \tag{6}$$

然后这个函数有极值：

p不一样，L不一样，但它们的乘积PL是一样的

对于由(6)给出的 CAV 光盘的有效长度 L_{CAV} 和信息容量 C_{CAV} ，初等数学的知识告诉我们，当 $R_1 = R_2/2$ ，即存储信息的环形区域的内圆半径是外圆半径一半时， L_{CAV} 和 C_{CAV} 最大，为

$$L_{CAV} = \frac{\pi R_2^2}{2d}, C_{CAV} = \rho L_{CAV} \tag{7}$$

心得总结

其实难点就是数学模型的近似，把螺旋线先近似为同心圆，然后也就成功的建立了数学模型，下面的求解就用到简单的数学图形计算即可。