7.1稳定性模型（捕鱼业）

产量模型

在无捕捞条件下，服从logistics规律（阻滞增长模型）

1. 变量
   - $x(t)$:时刻t的鱼量
   - r :固有增长率
   - N :环境容许的最大鱼量
   - $f(x)$:单位时间的增长量
2. 模型

$$x(t)' = f(x) = rx(1-\frac{x}{N})$$

单位时间的捕捞量与渔场鱼量x(t)成正比

1. 变量
   - E :单位时间捕捞率，又称捕捞强度
   - $h(x)$:单位时间的捕捞量（产量）
   - $F(x)$:单位时间的增长量
2. 模型

$$h(x) = Ex$$

$$x(t)' = F(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - Ex$$

3. 平衡点

令

$$F(x) = rx\left(1-\frac{x}{N}\right) - Ex = 0$$

得到两个平衡点 ← 增长量等于捕捞量

$$x_0 = N\left(1-\frac{E}{r}\right), \quad x_1 = 0 \tag{4}$$

不难算出

$$F'(x_0) = E - r, \quad F'(x_1) = r - E$$

所以若

$$E < r \tag{5}$$

有 $F'(x_0)<0$, $F'(x_1)>0$，故 x_0 点稳定，x_1 点不稳定（判断平衡点稳定性的准则见 7.7 节）；若 $E>r$，则结果正好相反.

E 是捕捞率，r 是最大的增长率，上述分析表明，只要捕捞适度（$E<r$），就可使渔场鱼量稳定在 x_0，从而获得持续产量 $h(x_0)=Ex_0$；而当捕捞过度时（$E>r$），渔场鱼量将趋向 $x_1=0$，当然谈不上获得持续产量了.

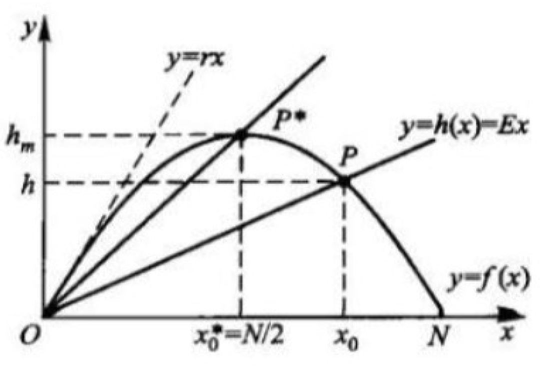


图 1　最大持续产量的图解法

进一步讨论渔场鱼量稳定在 x_0 的前提下，如何控制捕捞强度 E 使持续产量最大的问题. 用图解法可以非常简单地得到结果.

根据（1），（2）式作抛物线 $y=f(x)$ 和直线 $y=h(x)=Ex$，如图 1. 注意到 $y=f(x)$ 在原点的切线为 $y=rx$，所以在条件（5）下 $y=Ex$ 必与 $y=f(x)$ 有交点 P，P 的横坐标就是稳定平衡点 x_0.

根据假设 2，P 点的纵坐标 h 为稳定条件下单位时间的持续产量. 由图 1 立刻知道，当 $y=Ex$ 与 $y=f(x)$ 在抛物线顶点 P^* 相交时可获得最大的持续产量，此时的稳定平衡点为

$$x_0^* = \frac{N}{2} \tag{6}$$

且单位时间的最大持续产量为

$$h_m = \frac{rN}{4} \tag{7}$$

而由（4）式不难算出保持渔场鱼量稳定在 x_0^* 的捕捞率为

$$E^* = \frac{r}{2} \tag{8}$$

综上所述，产量模型的结论是将捕捞率控制在固有增长率 r 的一半，更简单一些，可以说使渔场鱼量保持在最大鱼量 N 的一半时，能够获得最大的持续产量.

效益模型

1. 变量：
   - p :鱼的销售单价
   - c :单位捕捞率的费用
   - T :单位时间的收入
   - R :单位时间的利润
2. 模型

效益模型　从经济角度看不应追求产量最大，而应考虑效益最佳. 如果经济效益用从捕捞所得的收入中扣除开支后的利润来衡量，并且简单地假设：鱼的销售单价为常数 p，单位捕捞率（如每条出海渔船）的费用为常数 c，那么单位时间的收入 T 和支出 S 分别为

$$T = ph(x) = pEx, \quad S = cE \tag{9}$$

单位时间的利润为

$$R = T - S = pEx - cE \tag{10}$$

在稳定条件 $x=x_0$ 下，以（4）代入（10）式，得

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE\left(1-\frac{E}{r}\right) - cE \tag{11}$$

用微分法容易求出使利润 $R(E)$ 达到最大的捕捞强度为

$$E_R = \frac{r}{2}\left(1-\frac{c}{pN}\right) \tag{12}$$

将 E_R 代入（4）式，可得最大利润下的渔场稳定鱼量 x_R 及单位时间的持续产量 h_R 为

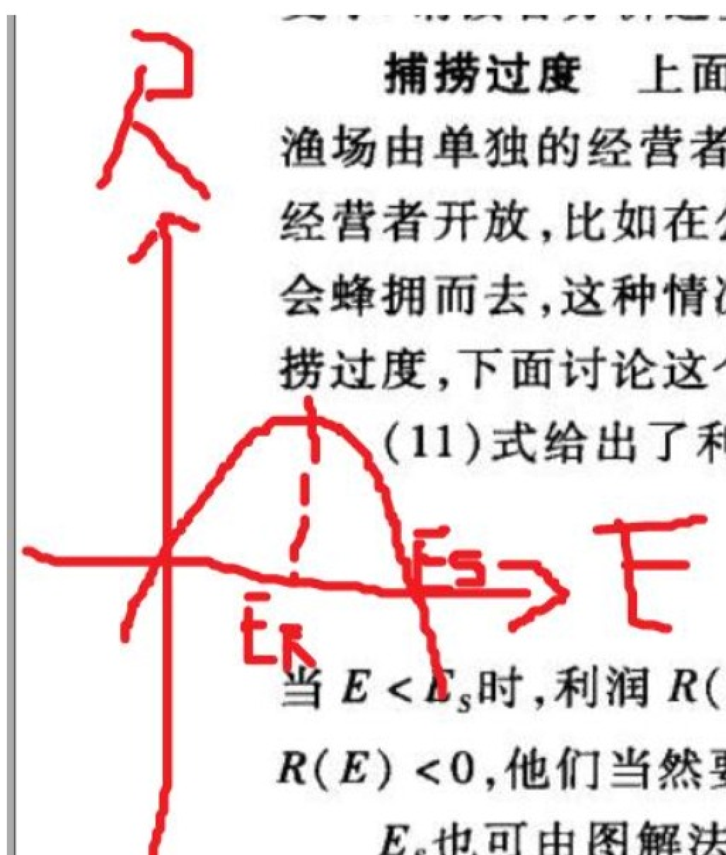
$$x_R = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p} \tag{13}$$

$$h_R = rx_R\left(1-\frac{x_R}{N}\right) = \frac{rN}{4}\left(1-\frac{c^2}{p^2N^2}\right) \tag{14}$$

二次函数求最值，求导即可

217

捕捞过度



捕捞过度　上面的效益模型是以计划捕捞（或称封闭式捕捞）为基础的，即渔场由单独的经营者有计划地捕捞，可以追求最大利润. 如果渔场向众多盲目的经营者开放，比如在公海上无规则地捕捞，那么即使只有微薄的利润，经营者也会蜂拥而去，这种情况称为盲目捕捞（或开放式捕捞）. 这种捕捞方式将导致捕捞过度，下面讨论这个模型.

（11）式给出了利润与捕捞强度的关系 $R(E)$，令 $R(E)=0$ 的解为 E_S，可得

$$E_S = r\left(1-\frac{c}{pN}\right) \tag{15}$$

当 $E<E_S$ 时，利润 $R(E)>0$，盲目的经营者们会加大捕捞强度；若 $E>E_S$，利润 $R(E)<0$，他们当然要减小强度. 所以 E_S 是盲目捕捞下的临界强度.

E_S 也可由图解法确定. 在图 2 中以 E 为横坐标，按（11）式画出 $T(E)$ 和 $S(E)$，它们交点的横坐标即为 E_S（图 2 中的 E_{S1} 或 E_{S2}）. 由（15）式或图 2 容易知道，E_S 存在的必要条件（即 $E_S>0$）是

$$p > \frac{c}{N} \tag{16}$$

即售价大于（相对于总量而言）成本. 并且由（15）式可知，成本越低，售价越高，则 E_S 越大.

T(E)

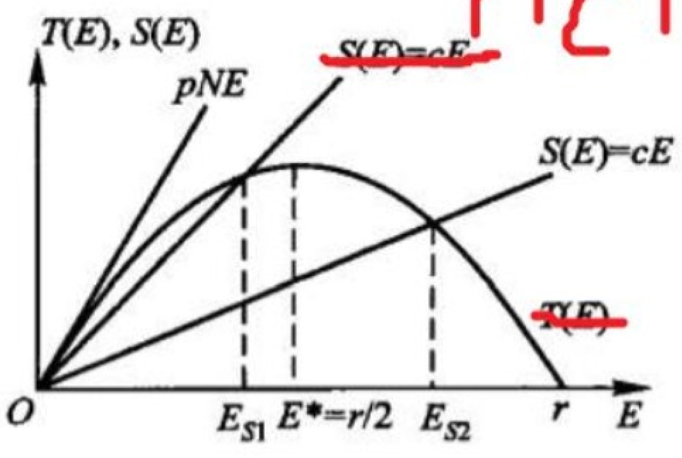


图 2　盲目捕捞强度的图解法

将（15）代入（4）式，得到盲目捕捞下的渔场稳定鱼量为

$$x_S = \frac{c}{p} \tag{17}$$

x_S 完全由成本－价格比决定，随着价格的上升和成本的下降，x_S 将迅速减少，出现捕捞过度.

比较（12）和（15）式可知，$E_S=2E_R$，即盲目捕捞强度比最大效益下捕捞强度大一倍.

从（15）式和图 2 还可以得到，当 $\frac{c}{N}<p<2\frac{c}{N}$ 时，$(E_R<)E_S<E^*$，如图 2 中 E_{S1}，称经济学捕捞过度；当 $p>2\frac{c}{N}$ 时，$E_S>E^*$，如图 2 中 E_{S2}，称生态学捕捞过度.