

CH4 4.4 接力队选拔+选课策略+销售代理

0-1规划模型/单目标规划/多目标规划

1、混合泳接力队选拔：

问题分析：5名队员选4人组成接力队。四中泳姿蝶泳、仰泳、蛙泳和自由泳个人百米平均成绩已给出。

决策变量：

- i, 队员编号1≤i≤5
- j, 泳姿编号1≤j≤4
- c_{ij}, 队员i的第j种泳姿最佳成绩（单位s）
- x_{ij}, 0-1变量，选择队员i参加泳姿j的比赛，即为x_{ij}=1；落选为x_{ij}=0

目标函数：
$$\min z = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

- c_{ij}x_{ij}表示队员i入选泳姿j比赛的成绩
- 接力队总成绩为求和

约束条件：
$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1, i=1,2,3,4,5 \\ & \sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, j=1,2,3,4 \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- 每人最多只能入选1/4泳姿比赛
- 每种泳姿必须有且仅有1人入选
- 0-1变量声明

LINGO编程：

利用题目所给数据,将这一模型输入 LINGO:

```
model:
sets:
  person/1..5/:
  position/1..4/:
  link(person,position):c,x;
endsets
data:
  c = 66.8,75.6,87.5,8.6,
      57.2,66.6,66.4,53,
      78.6,7.8,84.6,59.4,
      70.7,4.2,69.6,57.2,
      67.4,71.8,83.8,62.4;
enddata
min = @sum(link;c * x);
@for(person(i):@sum(position(j):x(i,j)) <= 1);
@for(position(i):@sum(person(j):x(j,i)) = 1);
@for(link:@bin(x));
end
```

i

j

C_{ij} x_{ij}

i=1,5

$\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1$

i=1,4

$\sum_{j=1}^5 x_{ji} = 1$

求解得到结果为: x₁₄=x₂₃=x₃₂=x₄₁=1,其他变量为 0,成绩为 253.2 s=4'13". 即应当选派甲乙丙丁4人组成接力队,分别参加自由泳、蝶泳、仰泳、蛙泳的比赛.

总结：

“指派问题”：有若干项任务，每一项任务必须有且仅有1人承担，每人仅能承担其中一项任务，不同人员承担不同任务的效益或成本不同——要求分派策略，使得各项任务总收益最大或总成本最小

常用0-1规划模型

敏感性分析只是对于编程输入参数的修改

2、选课策略

问题分析：某学校要求学生毕业时必须至少学习过两门数学课、三门运筹学课和两门计算机课。已给出课程编号、名称、学分、所属类别和先修课要求。不同学生可能对于最终选修的课程总数和获得的总学分期望都各异。

决策变量：

该学生选修了第i门课程，x_i=1；没选则x_i=0.

(1) 单目标规划

目标函数：
$$\min z = \sum_{i=1}^9 x_i$$
选修的课程总数最少

约束条件：
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 2 \\ x_3 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 &\geq 3 \\ x_4 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 2 \end{aligned}$$

- 每人至少选修2门数学课、3门运筹学和2门计算机课
- 先修课约束条件
$$\begin{aligned} 2x_3 - x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_4 - x_5 &\leq 0 \\ 2x_6 - x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_6 - x_7 &\leq 0 \\ x_8 - x_4 &\leq 0 \\ 2x_9 - x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

(2) 多目标规划

目标函数：

选修的课程总数最少且学分尽可能多：

$$\min z = \sum_{i=1}^9 x_i$$
$$\max w = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

- 目标函数相当于一个向量 V-min(z,-w)
- 其中“V-min”表示“向量最小化”
- 多目标函数通常需要知道决策者对每个目标的重视程度，称为偏好程度（即加权）：将权重记作λ₁和λ₂，且λ₁+λ₂=1,0≤λ₁, λ₂≤1.
- 得到0-1规划新目标min y=λ₁z-λ₂w

总结：

- “要选用必选乙”等价于，x_甲≤x_乙
- 多目标规划，加权组合出新目标函数，从而化为单目标规划
- 多目标规划还可优先考虑一个目标，再将其作为另一个目标的约束条件求解另一个目标的规划模型

w要取最大值，z要取最小值，所以w取负数

3、销售代理开发与中断

问题分析：已知4个候选代理的年最大业务量、一次性费用以及年运行费用。同时本公司未来5年的业务量也已知。4个代理的调整费用包括临时中断费用和重新恢复费用也已知。

(1) 建立代理关系并运行

决策变量：

假定公司可以在未来5年里任意一年开始和某候选代理建立关系。x_{it}=1 (i=1,2,3,4,5)，t表示第t年开始建立，i表示候选代理编号。不建立取x_{it}=0.

决策目标：

一次性费用：
$$z_1 = 100 \sum_{t=1}^5 x_{1t} + 80 \sum_{t=1}^5 x_{2t} + 90 \sum_{t=1}^5 x_{3t} + 70 \sum_{t=1}^5 x_{4t}$$
根据 x_{it} 的定义,对候选代理 i 来说,x_{1t}+⋯+x_{5t}表示的是第 t 年时公司是否与该候选代理已经建立了代理关系.例如,对候选代理 1 来说,5 年的总运行费用为
$$7.5[x_{11} + (x_{11} + x_{12}) + (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15})]$$
$$= 7.5(5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15})$$
于是,对所有候选代理来说,5 年的总运行费用为
$$z_2 = 7.5(5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15}) + 4.0(5x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + x_{25}) + 6.5(5x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} + x_{35}) + 3.0(5x_{41} + 4x_{42} + 3x_{43} + 2x_{44} + x_{45}) \quad (22)$$

运行费用：
$$\min z = z_1 + z_2$$
$$= 137.5x_{11} + 130x_{12} + 122.5x_{13} + 115x_{14} + 107.5x_{15} + 100x_{21} + 96x_{22} + 92x_{23} + 88x_{24} + 84x_{25} + 122.5x_{31} + 116x_{32} + 109.5x_{33} + 103x_{34} + 96.5x_{35} + 85x_{41} + 82x_{42} + 79x_{43} + 76x_{44} + 73x_{45}$$

总费用=建立代理关系的一次性费用+每年运行费用

约束条件：
$$350x_{11} + 250x_{21} + 300x_{31} + 200x_{41} \geq 400 \quad (24)$$

对于第 2 年,这一条件为
$$350(x_{11} + x_{12}) + 250(x_{21} + x_{22}) + 300(x_{31} + x_{32}) + 200(x_{41} + x_{42}) \geq 500 \quad (25)$$

类似地,对于第 3 ~ 5 年,这一条件为
$$350(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 250(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 300(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 200(x_{41} + x_{42} + x_{43}) \geq 600 \quad (26)$$
$$350(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 250(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + 300(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) + 200(x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44}) \geq 700 \quad (27)$$
$$350(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) + 250(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) + 300(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35}) + 200(x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45}) \geq 800 \quad (28)$$

公司每年业务量得由足够的代理承担。

(2) 决定临时中断或重新恢复

决策变量：

x_{it}=1，公司允许代理i从第t年运行代理。不允许=0

y_{it}=1，公司在第t年初和代理i中断关系。不中断=0

z_{it}=1，公司在第t年初恢复和代理i的关系。不恢复=0

决策目标：

目标函数仍然是 5 年的总费用,包括运行费、业务中断费、业务恢复费三项

因此,问题的决策目标为
$$\min z = 7.5 \sum_{t=1}^5 x_{1t} + 4.0 \sum_{t=1}^5 x_{2t} + 6.5 \sum_{t=1}^5 x_{3t} + 3.0 \sum_{t=1}^5 x_{4t} + 5 \sum_{t=1}^5 y_{1t} + 3 \sum_{t=1}^5 y_{2t} + 4 \sum_{t=1}^5 y_{3t} + 2 \sum_{t=1}^5 y_{4t} + 5 \sum_{t=1}^5 z_{1t} + 4 \sum_{t=1}^5 z_{2t} + \sum_{t=1}^5 z_{3t} + 9 \sum_{t=1}^5 z_{4t} \quad (29)$$

约束条件：

业务量约束：公司每年业务量得由足够的代理承担。
$$350x_{11} + 250x_{21} + 300x_{31} + 200x_{41} \geq 400$$
$$350x_{12} + 250x_{22} + 300x_{32} + 200x_{42} \geq 500$$

$$350x_{13} + 250x_{23} + 300x_{33} + 200x_{43} \geq 600$$
$$350x_{14} + 250x_{24} + 300x_{34} + 200x_{44} \geq 700$$
$$350x_{15} + 250x_{25} + 300x_{35} + 200x_{45} \geq 800$$

业务中断约束：某一年代理在运行x_{it}=1，下一年不运行x_{i,t+1}≤0，需要中断y_{i,t+1}=1。即x_{it}-x_{i,t+1}≤y_{i,t+1}，(i=1,2,3,4; t=0,1,2,3,4)

业务恢复约束：某一年代理不运行x_{it}=0，下一年就运行x_{i,t+1}=1，需要恢复z_{i,t+1}=1。即x_{i,t+1}-x_{it}≤z_{i,t+1},(i=1,2,3,4; t=1,2,3,4)