

CH4 4.4 接力队选拔+选课策略+销售代理

0-1规划模型/单目标规划/多目标规划

1、混合泳接力队选拔：

问题分析：5名队员选4人组成接力队。四中泳姿蝶泳、仰泳、蛙泳和自由泳个人百米平均成绩已给出。

决策变量：

$i$

，队员编号

$1 \leq i \leq 5$

$j$

，泳姿编号

$1 \leq j \leq 4$

$c_{ij}$

，队员*i*的第*j*种泳姿最佳成绩（单位s）

$x_{ij}$

，0-1变量，选择队员*i*参加泳姿*j*的比赛，即为*x<sub>ij</sub>*=1；落选为*x<sub>ij</sub>*=0

目标函数：

$$\min z = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 c_{ij} x_{ij}$$

$c_{ij}x_{ij}$ 表示队员*i*入选泳姿*j*比赛的成绩

接力队总成绩为求和

约束条件：

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1, i=1,2,3,4,5$$

每人最多只能入选1/4泳姿比赛

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, j=1,2,3,4$$

每种泳姿必须有且仅有1人入选

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

0-1变量声明

LINGO编程：

利用题目所给数据,将这一模型输入 LINGO:

```
model:
sets:
  person/1..5/:
  position/1..4/:
  link(person,position):c,x;
endsets
data:
  c = 66.8,75.6,87.5,8.6,
      57.2,66.6,66.4,53,
      78.6,7.8,84.6,59.4,
      70.7,4.2,69.6,57.2,
      67.4,71.8,3.8,62.4;
enddata
min = @sum(link;c * x);
@for(person(i):@sum(position(j):x(i,j)) <= 1);
@for(position(j):@sum(person(i):x(i,j)) = 1);
@for(link:@bin(x));
end
```

$i=1,5$

$\sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq 1$

$i=1,4$

$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1$

求解得到结果为： $x_{14}=x_{21}=x_{32}=x_{43}=1$ ,其他变量为 0,成绩为 253.2 s = 4'13". 即应当选派甲乙丙丁 4 人组成接力队,分别参加自由泳、蝶泳、仰泳、蛙泳的比赛.

- 总结：

“指派问题”：有若干项任务，每一项任务必须有且仅有1人承担，每人仅能承担其中一项任务，不同人员承担不同任务的效益或成本不同——要求分派策略，使得各项任务总收益最大或总成本最小

常用0-1规划模型

敏感性分析只是对于编程输入参数的修改

2、选课策略

问题分析：某学校要求学生毕业时必须至少学习过两门数学课、三门运筹学课和两门计算机课。已给出课程编号、名称、学分、所属类别和先修课要求。不同学生可能对于最终选修的课程总数和获得的总学分期望都各异。

- 决策变量：

该学生选修了第*i*门课程，*x<sub>i</sub>*=1；没选则*x<sub>i</sub>*=0.

(1) 单目标规划

目标函数：

$$\min z = \sum_{i=1}^9 x_i$$

选修的课程总数最少

约束条件：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 2$$

$$x_3 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 3$$

$$x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 2$$

$2x_3 - x_1 - x_2 \leq 0$

$x_4 - x_7 \leq 0$

$2x_6 - x_1 - x_2 \leq 0$

$x_8 - x_7 \leq 0$

$x_8 - x_9 \leq 0$

$2x_9 - x_1 - x_2 \leq 0$

(2) 多目标规划

- 目标函数：

选修的课程总数最少且学分尽可能多：

$$\min z = \sum_{i=1}^9 x_i$$

$$\max w = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

目标函数相当于一个向量 V-min(z,-w)

其中“V-min”表示“向量最小化”

多目标函数通常需要知道决策者对每个目标的重视程度，称为偏好程度（即加权）：将权重记作λ<sub>1</sub>和λ<sub>2</sub>，且λ<sub>1</sub>+λ<sub>2</sub>=1,0≤λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub>≤1.

得到0-1规划新目标min y=λ<sub>1</sub>z-λ<sub>2</sub>w

总结:

“要选甲必选乙”等价于，*x<sub>甲</sub>*≤*x<sub>乙</sub>*

多目标规划，加权组合出新目标函数，从而化为单目标规划

多目标规划还可优先考虑一个目标，再将其作为另一个目标的约束条件求解另一个目标的规划模型
- 3、销售代理开发与中断
- 问题分析：已知4个候选代理的年最大业务量、一次性费用以及年运行费用。同时本公司未来5年的业务量也已知。4个代理的调整费用包括临时中断费用和重新恢复费用也已知。
- (1) 建立代理关系并运行
- 决策变量：

假定公司可以在未来5年里任意一年开始和某候选代理建立关系。*x<sub>it</sub>*=1（*i*=1,2,3,4,5），*t*表示第*t*年开始建立，*i*表示候选代理编号。不建立取*x<sub>it</sub>*=0.
- 决策目标：

一次性费用：

$$z_1 = 100 \sum_{t=1}^5 x_{1t} + 80 \sum_{t=1}^5 x_{2t} + 90 \sum_{t=1}^5 x_{3t} + 70 \sum_{t=1}^5 x_{4t}$$

根据*x<sub>it</sub>*的定义,对候选代理*i*来说,*x<sub>i1</sub>*+...+*x<sub>i5</sub>*表示的是第*i*年时公司是否与该候选代理已经建立了代理关系.例如,对候选代理1来说,5年的总运行费用为

$$7.5[x_{11} + (x_{11} + x_{12}) + (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15})]$$

= 7.5(5*x<sub>11</sub>* + 4*x<sub>12</sub>* + 3*x<sub>13</sub>* + 2*x<sub>14</sub>* + *x<sub>15</sub>*)

于是,对所有候选代理来说,5年的总运行费用为

$$z_2 = 7.5(5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + x_{15}) + 4.0(5x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} + x_{35}) + 6.5(5x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} + x_{35}) + 3.0(5x_{41} + 4x_{42} + 3x_{43} + 2x_{44} + x_{45}) \quad (22)$$

运行费用：

$$\min z = z_1 + z_2$$

$$= 137.5x_{11} + 130x_{12} + 122.5x_{13} + 115x_{14} + 107.5x_{15} + 100x_{21} + 96x_{22} + 92x_{23} + 88x_{24} + 84x_{25} + 122.5x_{31} + 116x_{32} + 109.5x_{33} + 103x_{34} + 96.5x_{35} + 85x_{41} + 82x_{42} + 79x_{43} + 76x_{44} + 73x_{45}$$

总费用=建立代理关系的一次性费用+每年运行费用

约束条件：

$$350x_{11} + 250x_{21} + 300x_{31} + 200x_{41} \geq 400 \quad (24)$$
- 对于第2年,这一条件为

$$350(x_{11} + x_{12}) + 250(x_{21} + x_{22}) + 300(x_{31} + x_{32}) + 200(x_{41} + x_{42}) \geq 500 \quad (25)$$

类似地,对于第3~5年,这一条件为

$$350(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 250(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 300(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 200(x_{41} + x_{42} + x_{43}) \geq 600 \quad (26)$$

$$350(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 250(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + 300(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) + 200(x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44}) \geq 700 \quad (27)$$

$$350(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) + 250(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) + 300(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35}) + 200(x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45}) \geq 800 \quad (28)$$
- (2) 决定临时中断或重新恢复
- 决策变量：

*x<sub>it</sub>*=1，公司允许代理*i*从第*t*年运行代理。不允许=0

*y<sub>it</sub>*=1，公司在第*t*年初和代理*i*中断关系。不中断=0

*z<sub>it</sub>*=1，公司在第*t*年初恢复和代理*i*的关系。不恢复=0

决策目标：

目标函数仍然是5年的总费用,包括运行费、业务中断费、业务恢复费三项

因此,问题的决策目标为

$$\min z = 7.5 \sum_{t=1}^5 x_{1t} + 4.0 \sum_{t=1}^5 x_{2t} + 6.5 \sum_{t=1}^5 x_{3t} + 3.0 \sum_{t=1}^5 x_{4t} + 5 \sum_{t=1}^5 y_{1t} + 3 \sum_{t=1}^5 y_{2t} + 4 \sum_{t=1}^5 y_{3t} + 2 \sum_{t=1}^5 y_{4t} + 5 \sum_{t=1}^5 z_{1t} + 4 \sum_{t=1}^5 z_{2t} + 3 \sum_{t=1}^5 z_{3t} + 9 \sum_{t=1}^5 z_{4t} \quad (29)$$

约束条件：

业务量约束：公司每年业务量得由足够的代理承担。

$$350x_{11} + 250x_{21} + 300x_{31} + 200x_{41} \geq 400$$

$$350x_{12} + 250x_{22} + 300x_{32} + 200x_{42} \geq 500$$
- $$350x_{13} + 250x_{23} + 300x_{33} + 200x_{43} \geq 600$$

$$350x_{14} + 250x_{24} + 300x_{34} + 200x_{44} \geq 700$$

$$350x_{15} + 250x_{25} + 300x_{35} + 200x_{45} \geq 800$$

业务中断约束：某一年代理在运行*x<sub>it</sub>*=1，下一年不运行*x<sub>i,t+1</sub>*≤0，需要中断*y<sub>i,t+1</sub>*=1。即*x<sub>it</sub>*-*x<sub>i,t+1</sub>*≤*y<sub>i,t+1</sub>*，（*i*=1,2,3,4; *t*=0,1,2,3,4）

业务恢复约束：某一年代理不运行*x<sub>it</sub>*=0，下一年就运行*x<sub>i,t+1</sub>*=1，需要恢复*z<sub>i,t+1</sub>*=1。即*x<sub>i,t+1</sub>*-*x<sub>it</sub>*≤*z<sub>i,t+1</sub>*,(*i*=1,2,3,4; *t*=1,2,3,4)