5.1传染病模型

模型1

1. 变量
    - x(t):时刻t的病人人数
    - t：时间
    - λ:每天每个病人的有效接触

2. 模型

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\lambda x(t)\Delta t$$

再设 $t=0$ 时有 x_0 个病人，即得微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\quad x(0)=x_0$$

导数等于本身

方程(1)的解为

$$x(t)=x_0 e^{\lambda t} \tag{2}$$

3. 问题
   病人人数无限增长。没有考虑有效接触的人群中也包含病人

模型2（SI模型）

1. 变量
    - S(t)：健康人在总人数中的**比例**
    - i(t)：病人在总人数中的**比例**
    - λ:每天每个病人的有效接触
    - N：总人数

2. 模型
   根据假设，**每个病人**每天可使$\lambda s(t)$个健康人变为病人。病人总人数为$Ni(t)$,所以

$$N\frac{di}{dt}=\lambda Nsi \tag{3}$$

又因为

$$s(t)+i(t)=1 \tag{4}$$

再记初始时刻($t=0$)病人的比例为 i_0，则

$$\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i),\quad i(0)=i_0 \tag{5}$$

方程(5)是 logistic 模型(详细描述参见 5.6 节). 它的解为

137

$$i(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}} \tag{6}$$

（图）

$i(t)\sim t$ 和 $\frac{di}{dt}\sim i$ 的图形如图 1 和图 2 所示.

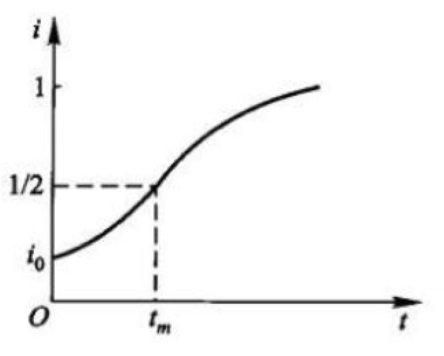

图 1　SI 模型的 $i\sim t$ 曲线

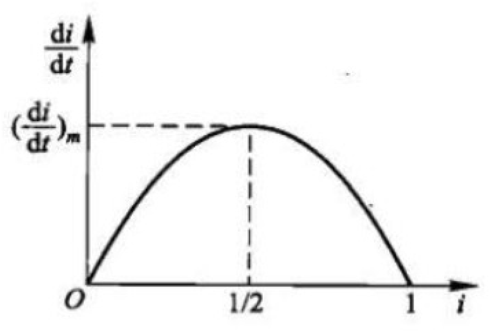

图 2　SI 模型的 $\frac{di}{dt}\sim i$ 曲线

3. 存在的问题
   $t\to\infty$时$i\to 1$,即所有人都被传染，不符合实际情况，原因是没考虑病人可以治愈

模型3（SIS模型）

1. 变量
    - μ:每天被治愈的病人数占病人总数的**比例**，称为日治愈率。则$\frac{1}{\mu}$是这种传染病的平均传染期
    - σ: $\sigma=\lambda/\mu$,指整个传染期内每个病人有效接触的平均人数，称为接触数

2. 模型

$$\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i, i(0)=i_0$$

代入σ,得

$$\frac{di}{dt}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$

(图)

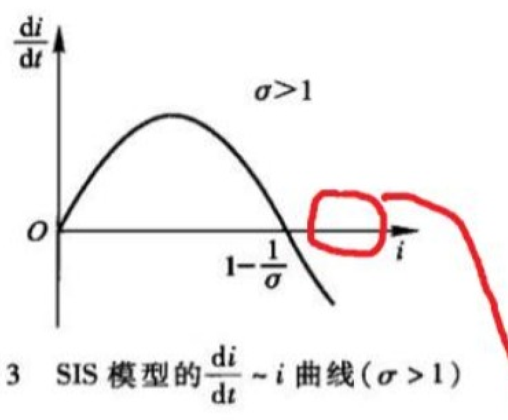

图 3　SIS 模型的 $\frac{di}{dt}\sim i$ 曲线($\sigma>1$)

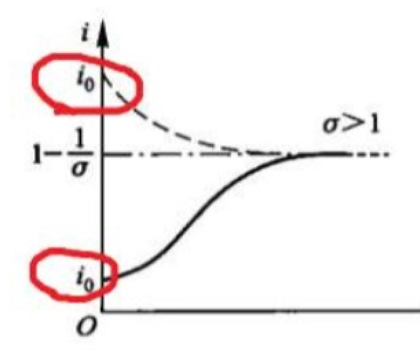

图 4　SIS 模型的 $i\sim t$ 曲线($\sigma>1$)，其中虚线是 $i_0>1-\frac{1}{\sigma}$ 的情况

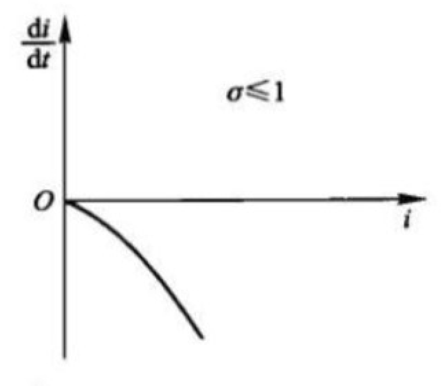

图 5　SIS 模型的 $\frac{di}{dt}\sim i$ 曲线($\sigma\leqslant 1$)

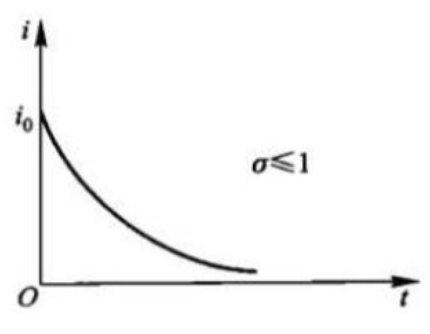

图 6　SIS 模型的 $i\sim t$ 曲线($\sigma\leqslant 1$)

不难看出，接触数 $\sigma=1$ 是一个阈值. 当 $\sigma>1$ 时 $i(t)$ 的增减性取决于 i_0 的大小(见图 4)，但其极限值 $i(\infty)=1-\frac{1}{\sigma}$ 随 σ 的增加而增加(试从 σ 的含义给

3. 问题
   这个模型已经较为完备

4. $\mu=0,\sigma=\infty$, SIS模型变为SI模型

模型4（SIR模型）

1. 增加第三类人：免疫者，既不属于健康者也不属于病人

2. 变量：
    - s_0 :健康人在总人数的**比例**
    - i_0 :病人在总人数的**比例**
    - r_0 :移出者在总人数的**比例**(免疫)
    - λ: 感染人数
    - μ: 恢复**比例**
    - σ:同上

3. 模型

模型构成

由假设 1 显然有

$$s(t)+i(t)+r(t)=1 \tag{12}$$

根据条件 2 方程(8)仍成立. 对于病愈免疫的移出者而言应有

$$N\frac{dr}{dt}=\mu Ni \tag{13}$$

再记初始时刻的健康者和病人的比例分别是 $s_0(s_0>0)$ 和 $i_0(i_0>0)$(不妨设移出者的初始值 $r_0=0$)，则由(8)，(12)，(13)式，SIR 模型的方程可以写作

$$\begin{cases}\frac{di}{dt}=\lambda si-\mu i, & i(0)=i_0\\ \frac{ds}{dt}=-\lambda si, & s(0)=s_0\end{cases} \tag{14}$$

方程(14)无法求出 $s(t)$ 和 $i(t)$ 的解析解，我们先作数值计算.

$$\frac{dr}{dt}=\mu i$$

利用数值计算解析

再探讨s与i的关系（相轨线）
第一个方程除以第二个，消去t，得

$$\frac{di}{ds}=\frac{1}{\sigma s}-1,\quad i|_{s=s_0}=i_0 \tag{16}$$

容易求出方程(16)的解为

$$i=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0} \tag{17}$$

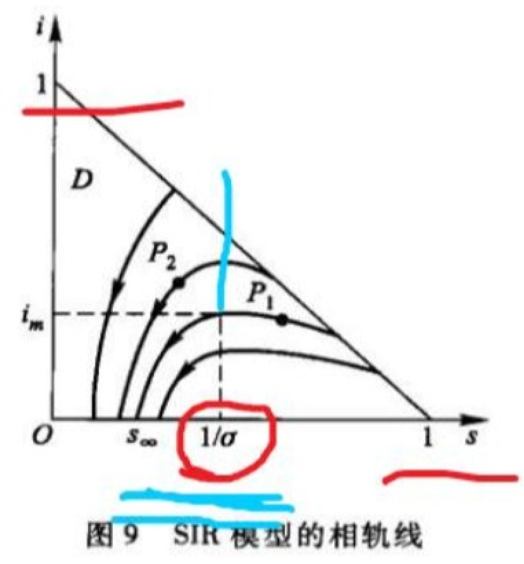

图 9　SIR 模型的相轨线