DAY 1-25 《数学建模姜启源版》

CH3_3.6 血管分支

1、问题描述

- 为了维持血液循环需要供给能量，能量，一部分供给血管壁以营养【1】，一部分用来客服血液流动受到的阻力【2】。
- 研究动物血管分支处粗细血管半径的比例（r/r_1） 和 分岔角度(θ取值范围)，使得消耗能量最小。

2、模型假设

几何假设1：

一个粗血管分为两个细血管，分支处三血管必在**同一平面**上。（若不在同一平面上，血管总长度会增加，导致能量消耗增加）

物理假设2：

在考察受阻时，视血液为粘性液体，在刚性管道中运动。

生理假设3：

血液的对血管壁供给营养的能量【1】随血管壁内表面积和管壁所占体积的增加而增加，管壁体积取决于管壁厚度，厚度和血管半径成正比。

- 几何假设1：

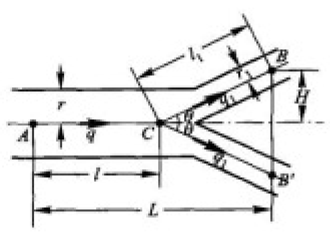

图 1 血管分支示意图

  - 设血液在粗细血管中单位时间的流量分别为q和q_1，显然q=2q_1
- 物理假设2：
  - 流体力学关于粘性流体在刚性管道中流动时能量消耗定律，Poiseuille定律
  - 流量：管道半径r，长l，AC两点间压力差△p，血液粘性系数μ

    $$q=\frac{\pi r^4\Delta p}{8\mu l}$$

  - 克服阻力消耗的能量E_1=q*△p，代入△p得

    $$E_1=\frac{8\mu q^2 l}{\pi r^4}$$

- 生理假设3：
  - 半径r，长度l，管壁内表面积s=2πrl，**管壁**所占体积v=s’ l（s’ 为管壁截面积）
  - 管壁厚度d，s’ =π[(r+d)^2-r^2]=π(d^2+2rd)，设d和r近似成正比，则v∝r^2,又s∝r,故供给血管壁营养消耗能量为

    $E_2=br^\alpha l$,

    1≤α≤2，b为比例系数

3、模型建立

总消耗能量E = E_1+E_2 = $\left(\frac{kq^2}{r^4}+br^\alpha\right)l+\left(\frac{kq_1^2}{r_1^4}+br_1^\alpha\right)2l_1$

又 $l=L-\frac{H}{\tan\theta}$, $l_1=\frac{H}{\sin\theta}$ ，且q_1=q/2，故

$$E(r,r_1,\theta)=\left(\frac{kq^2}{r^4}+br^\alpha\right)\left(L-\frac{H}{\tan\theta}\right)+\left(\frac{kq^2}{4r_1^4}+br_1^\alpha\right)\frac{2H}{\sin\theta}$$

由$\frac{\partial E}{\partial r}=0$ 和$\frac{\partial E}{\partial r_1}=0$ 可以得到

$$\begin{cases}-\frac{4kq^2}{r^5}+b\alpha r^{\alpha-1}=0\\ -\frac{kq^2}{r_1^5}+b\alpha r_1^{\alpha-1}=0\end{cases}$$

$$\frac{r}{r_1}=4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

再由$\frac{\partial E}{\partial\theta}=0$,并利用(8)式可得

$$\cos\theta=2\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4}$$

将(8)代人(9)式,则

$$\cos\theta=2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}}$$

1≤α≤2,可以算出$\frac{r}{r_1}$和 θ 的大致范围为

$$1.26\leq\frac{r}{r_1}\leq1.32,\quad 37°\leq\theta\leq49°$$

结果解释 生物学家认为,上述结果与经验观察吻合得相当好. 由此还可以导出一个有趣的推论.

记动物的大动脉和最细的毛细血管的半径分别为 r_{max} 和 r_{min},设从大动脉到毛细血管共有 n 次分岔,将(8)式反复利用 n 次可得

$$\frac{r_{max}}{r_{min}}=4^{\frac{n}{\alpha+4}} \qquad (12)$$

r_{max}/r_{min}的实际数值可以测出,例如对狗而言有 $r_{max}/r_{min}\approx1\,000\approx4^5$,由(12)式可知 $n\approx5(\alpha+4)$. 因为 1≤α≤2,所以按照这个模型,狗的血管应有 25 ~ 30 次分岔. 又因为当血管有 n 次分岔时血管总条数为 2^n,所以估计狗应约有 2^{25} ~ 2^{30},即 3×10^7 ~ 10^9 条血管. 这个估计不可过于认真看待,因为血管分支很难是完全对称的.