

6.4 蛛网模型—Hy

情景引入

在自由贸易市场上你注意过这样的现象吗？一个时期以来某种消费品如猪肉的上市量远大于需求,由于销售不畅导致价格下降,生产者发现养猪赔钱,于是转而经营其他农副业;过一段时间猪肉上市量就会大减,供不应求将导致价格上涨;生产者看到有利可图,又重操旧业,这样下一个时期会重现供大于求、价格下降的局面. 在没有外界干预的情况下,这种现象将如此循环下去.

这种经济模型叫做蛛网模型，先设一些基本的参数，给出基本的方程。

蛛网模型 记第 k 时段商品的数量为 x_k , 价格为 $y_k, k = 1, 2, \cdots$. 这里我们把时间离散化为时段, 1 个时段相当于商品的 1 个生产周期, 如蔬菜、水果是一个种植周期, 肉类是牲畜的饲养周期.

同一时段商品的价格 y_k 取决于数量 x_k , 设

$$y_k = f(x_k) \tag{1}$$

它反映消费者对这种商品的需求关系, 称**需求函数**. 因为商品的数量越多价格越低, 所以在图 1 中用一条下降曲线 f 表示它, f 称需求曲线.

下一时段商品的数量 x_{k+1} 由上一时段价格 y_k 决定, 设

$$x_{k+1} = h(y_k) \text{ 或 } y_k = g(x_{k+1}) \tag{2}$$

这里 g 是 h 的反函数. h 或 g 反映生产者的供应关系, 称**供应函数**. 因为价格越高生产量(即下一时段的商品数量)越大, 所以在图中供应曲线 g 是一条上升曲线.

那么有两种解法:

1. 图解法

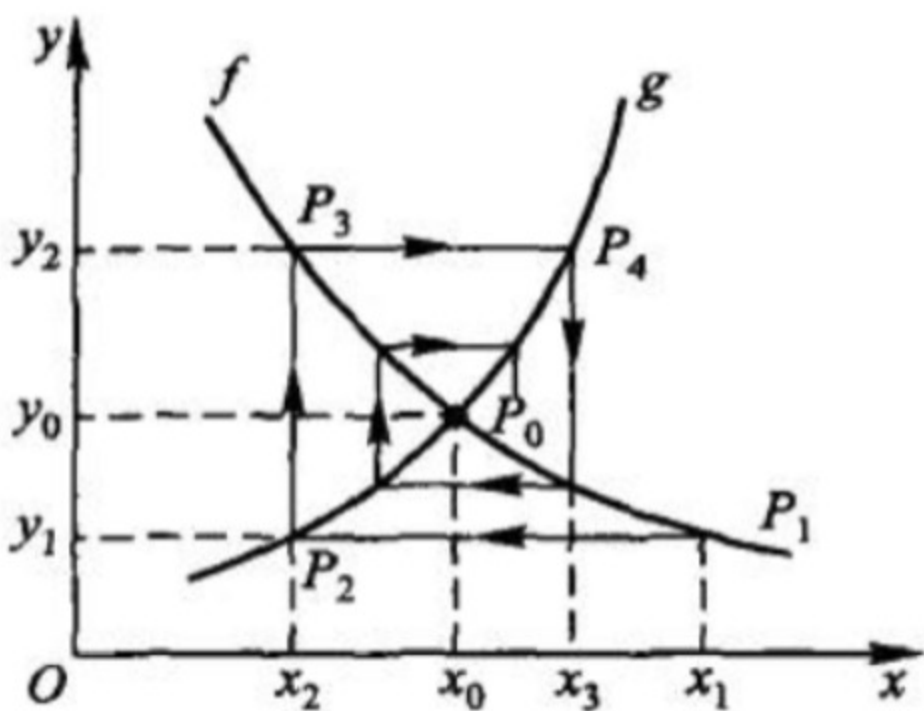


图 1 需求曲线 f 和供应曲线 g, P_0 是稳定平衡点

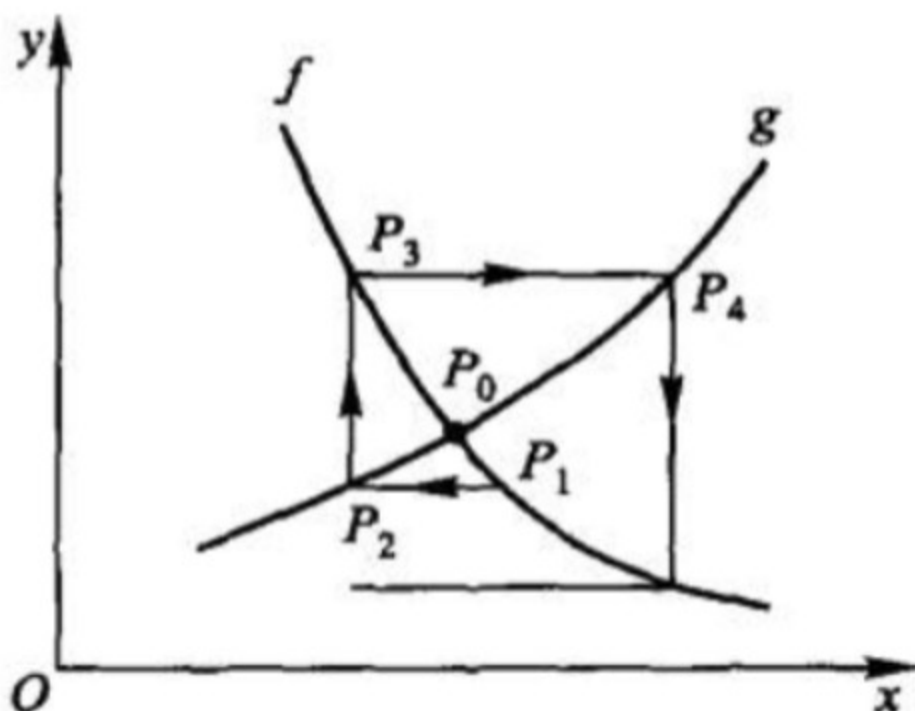


图 2 P_0 是不稳定平衡点

一旦需求曲线和供应曲线被确定下来, 商品数量和价格是否趋向稳定, 就完全由这两条曲线在平衡点 P_0 附近的形状决定. 只要分析一下图 1 和图 2 的不同之处就会发现, 在 P_0 附近, 图 1 的 f 比 g 平缓, 而图 2 的 f 比 g 陡峭. 记 f 在 P_0 点斜率的绝对值(因为它是下降的)为 K_f, g 在 P_0 点的斜率为 K_g , 图形的直观告诉我们, 当

$$K_f < K_g \tag{3}$$

时, P_0 点是稳定的(图 1), 当

$$K_f > K_g \tag{4}$$

2. 差分方程模型求解

$$\begin{aligned} y_k - y_0 &= -\alpha(x_k - x_0), \alpha > 0 \\ x_{k+1} - x_0 &= \beta(y_k - y_0), \beta > 0 \end{aligned}$$

从二式中消去 y_k , 可得

$$x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0), k = 1, 2, \cdots$$

(7) 是一阶线性常系数差分方程, 对 k 递推不难得到

$$x_{k+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^k(x_1 - x_0)$$

容易看出, 当 $k \rightarrow \infty$ 时 $x_k \rightarrow x_0$, 即 P_0 点稳定的条件是

$$\alpha\beta < 1 \text{ 或 } \alpha < \frac{1}{\beta}$$

而 $k \rightarrow \infty$ 时 $x_k \rightarrow \infty$, 即 P_0 点不稳定的条件是

$$\alpha\beta > 1 \text{ 或 } \alpha > \frac{1}{\beta} \tag{10}$$

注意到(5), (6)式中 α, β 的定义, 有 $K_f = \alpha, K_g = 1/\beta$, 所以条件(9), (10)与蛛网模型中的直观结果(3), (4)式是一致的.