

CH 7.2 军备竞赛

1、稳定性模型

建模的主要目的并不是寻求动摇过程每个瞬时的性态，而是研究某种意义上稳定状态的特征，特别是当时间充分以后动态过程的变化趋势。为了分析这种稳定与不稳定的规律，常常不要求解微分方程而可以利用微分方程稳定性理论，直接研究平衡状态的稳定性即可。

2、CH7.7

微分方程和差分方程稳定性理论简介

- 一阶微分方程的平衡点及稳定性
  - 自治方程
  - 平衡点
  - 稳定的+不稳定的
  - 间接法
  - 直接法:Talor展开一次项
- 二阶微分方程的平衡点和稳定性
  - 自治方程
  - 平衡点
  - 稳定的+不稳定的
  - 系数矩阵
  - 行列式
  - 特征方程
  - 根λ
$$\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(a_1 + b_2) \\ q = \det A \end{cases}$$
- 注意
  - 局部稳定
  - 全局稳定

3、CH7.2 军备竞赛

模型假设

- 军备：军事力量的总和
- 甲乙双方在时刻t的军备记作x(t),y(t)
  - 一方军备越大，另一方军备增加越快： 线性影响
  - 任一方军备越大，军备增长制约作用越大： 线性影响
  - 每一方都存在着增加军备固有潜力：常数
  - 方程：
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$$
    - 系数都≥0
    - k,l度量对方军备刺激程度
    - α,β度量己方经济实力制约程度
    - g,h己方军备竞赛的固有潜力

用微分方程稳定性理论讨论时间充分长以后x(t)和y(t)的变化趋势，即方程的平衡点稳定情况：令方程右端都为0，算出平衡点 ( x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>)

$$x_0 = \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \quad y_0 = \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}$$
 (2)

方程(1)的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$$

于是按照判断平衡点稳定性的方法计算(见 7.7 节(9) ~ (13)式)

$$p = -(a_{11} + a_{22}) = \alpha + \beta > 0$$
 (3)

$$q = \det A = \alpha\beta - kl$$
 (4)

由稳定性准则(见 7.7 节(15)式),当  $\alpha\beta > kl$  (5)

时,平衡点(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>)是稳定的;反之,是不稳定的. 这就是说,在(5)式的条件下,时间足够长以后双方的军备将分别趋向一个有限值,军备竞赛是稳定的.

模型的定性解释

- 条件(5)表明,当双方的经济制约程度 αβ 大于双方的军备刺激程度 kl 时,军备竞赛才会趋向稳定. 反之,x(t),y(t)将趋向无穷,竞赛无限地进行下去,可能导致战争.
- 由(2)式,如果 g=h=0,则 x<sub>0</sub>=0,y<sub>0</sub>=0 是方程(1)的平衡点,并且在条件(5)下它是稳定的. 于是如果在某个时候 t<sub>0</sub>,有 x(t<sub>0</sub>)=y(t<sub>0</sub>)=0,x,y 就永远保持为 0. 这种情况可以解释为双方不存在任何敌视和争端,通过裁军可以达到持久和平. 两个友好的邻国正是这样.
- 如果 g,h≠0,即使由于某种原因(如裁军协定)在某个时候双方军备大减,不妨设 x(t<sub>0</sub>)=y(t<sub>0</sub>)=0,那么因为  $\dot{x}=g, \dot{y}=h$  也将使双方重整军备. 这说明未经和解的裁军(即不消除敌视或领土争端)是不会持久的.
- 如果由于某种原因(如战败或协议),在某个时候一方的军备大减,不妨设 x(t<sub>0</sub>)=0,那么因为  $\dot{x}=ky+g$ ,也将使该方重整军备. 这说明存在不信任(k≠0)或固有争端(g≠0)的单方面裁军也不会持久.

模型参数的估计

1、估计k、l

设x(0)=0, 当t较小时, 忽略g和-αx的作用, 且近似假定y=y<sub>1</sub>, 那么  $\dot{x} = ky_1$

- 若当t=τ时, x=y<sub>1</sub>, 则k<sup>-1</sup>=τ
- k<sup>-1</sup>表示甲方军备从0赶上乙方军备y<sub>1</sub>所需的时间

2、估计α、β

设 g=0,y=0,由方程(1)可得 
$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t)$$
 以 t=α<sup>-1</sup>代入,算出 
$$x(\alpha^{-1}) = \frac{x(0)}{e}$$

这表示 α<sup>-1</sup>是在乙方无军备时甲方军备减少到原来的  $\frac{1}{e}$  所需的时间. Richardson 认为这大概是一个国家议会的任期,对于议会任期 5 年的国家来说,α≈0.2.

对模型和参数的粗略检验

难写难写，看书看书。