9.3贮存问题—Hy

问题提出

商店在一周中的销售量是随机的. 每逢周末经理要根据存货的多少决定是否订购货物,以供下周的销售. 适合经理采用的一种简单的策略是制订一个下界 s 和一个上界 S,当周末存货不少于 s 时就不订货;当存货少于 s 时则订货,且订货量使得下周初的存量达到 S. 这种策略称为 **(s,S) 随机存贮策略**.

为使问题简化起见,像确定性存贮模型(3.1 节)一样,仍然只考虑费用:订货费、贮存费、缺货费和商品购进价格,存贮策略的优劣以总费用为标准. 显然,总费用(在平均意义下)与 (s,S) 策略、销售量的随机规律以及单项费用的大小有关.

模型建立

有关.

模型假设 为了叙述的方便,时间以周为单位,商品数量以件为单位.

1. 每次订货费为 c_0(与数量无关),每件商品购进价为 c_1,每件商品一周的贮存费为 c_2,每件商品的缺货损失为 c_3. c_3 相当于售出价,所以应有 $c_1 < c_3$.

2. 一周的销售量 r 是随机的. r 的取值很大,可视为连续变量,其概率密度函数为 $p(r)$.

3. 记周末的存货量为 x,订货量为 u,并且立即到货,于是周初的存货量为 $x+u$.

4. 一周的销售是集中在周初进行的,即一周的贮存量为 $x+u-r$,不随时间改变. 这条假设是为了计算贮存费用的方便,以后我们将考虑修改它.

注意蓝色的话，这里目标函数并不是盈利的费用，而是贮存的总开销。

建模

根据假设条件容易写出平均费用为

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x), & u=0 \end{cases} \qquad (1)$$

其中

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)\,\mathrm{d}r+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)\,\mathrm{d}r \qquad (2)$$

结论

令 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}u}=0$,记 $x+u=S$,并注意到 $\int_0^\infty p(r)\,\mathrm{d}r=1$,可得

$$\frac{\int_0^S p(r)\,\mathrm{d}r}{\int_S^\infty p(r)\,\mathrm{d}r}=\frac{c_3-c_1}{c_2+c_1} \qquad (4)$$

这就是说,令订货量 u 加上原来的存量 x 达到(4)式所示的 S,可使平均费用最小[1].

下面讨论确定 s 的方法. 当存货量为 x 时,若订货则由(1)式在 S 策略下平均费用为

$$J_1=c_0+c_1(S-x)+L(S)$$

若不订货则平均费用为 $J_2=L(x)$. 显然,当 $J_2\leqslant J_1$ 即

$$L(x)\leqslant c_0+c_1(S-x)+L(S) \qquad (5)$$

时应不订货. 记

$$I(x)=c_1x+L(x) \qquad (6)$$

则不订货的条件(5)式表为

$$I(x)\leqslant c_0+I(S) \qquad (7)$$

(7) 式右端为已知数. 于是 s 应为方程

$$I(x)=c_0+I(S) \qquad (8)$$

的最小正根.