Algoritmer (datastrukturer) och komplexitet
våren 2009

Mästarprov 2: Komplexitet

Mästarprovet ska lösas **individuellt** och redovisas både skriftligt och muntligt. Inget samarbete är tillåtet, se vidare hederskodexen.

Skriftliga lösningar ska lämnas senast **måndag 27 april klockan 10.15** på föreläsningen eller senast klockan 10.00 samma dag i kursens inlämningslåda på studentexpeditionen på Osquars backe 2, plan 2. Det är viktigt att du lämnar in i tid! Skriv ditt namn och personnummer överst på framsidan. Se till att spara en kopia av dina lösningar så att du kan läsa på inför den **muntliga redovisningen** som kommer att ske 29 april–5 maj för någon av lärarna. Boka tid för en femton minuters muntlig redovisning med kommandot `bok new adk09`
Redovisningstider kommer att läggas upp senast 23 april. Gör helst bokningen före inlämningsdagen 27 april. Du kan alltid avboka din bokning.

Mästarprov 2 är ett obligatoriskt och betygsatt moment i kursen. Det består av tre uppgifter med stigande svårighetsgrad. För godkänt (betyg E) krävs helt rätt på en av uppgifterna. Helt rätt på två av uppgifterna ger betyg C och alla rätt ger betyg A. Ett mindre fel på en uppgift sänker betyget ett steg. Läs mer om betygskriterier och slutbetyg i kurs-PM eller på kursens webbsida.

Läs uppgifterna mycket noga. Lösningar som bygger på missförstånd av uppgifterna kan tyvärr inte godkännas. Om något är oklart, fråga en lärare! Titta också gärna på kurshemsidan regelbundet; där kommer vi publicera eventuella förtydliganden.

1. **Hållbart kommunikationsnät**
   Betygskriterium: förklara principerna, utföra enklare reduktioner mellan givna problem.

   I detta problem finns n stycken kommunikationsnoder numrerade $1, \ldots, n$ som på bästa sätt ska bindas samman med kablar till ett sammanhängande nät. Man vill att den sammanlagda kabelkostnaden ska vara så liten som möjligt. Därför har man mätt upp vad kostnaden blir att förbinda varje par av noder $\{i, j\}$ med en kabel. Kostnaderna är positiva heltal. Dessutom har man på förhand bestämt hur många kablar som ska gå till varje nod. (Tanken är att noder med stort kommunikationsbehov ska ha många kablar, men det är inte relevant för denna uppgift.)

   Indata är en $n \times n$-matris K, som anger kostnader för att förbinda alla par av noder, och en array $A[1..n]$, där $A[i]$ anger antalet kablar som ska gå till nod i. Arrayen består av positiva heltal. Matrisen är symmetrisk och har positiva heltal utom på diagonalen som består av nollor.

Problemet är alltså att hitta det billigaste kommunikationsnätet som förbinder alla noder på ett sånt sätt att alla noder har exakt så många kablar som anges av A.

Formulera detta minimeringsproblem som ett beslutsproblem genom att införa ett mål M för kostnaden. Visa sedan att beslutsproblemet ligger i NP, och bevisa att det är NP-fullständigt genom att reducera det generella Handelsresandeproblemet.

2. **Energisnålt garage för tåg**
   Betygskriterium: visa NP-fullständighet och oavgörbarhet.

   I mästarprov 1 beskrevs hur SJ vill minimera storleken på ett kvadratiskt tåggarage. I denna uppgift ska vi studera samma problem, men vi släpper på kravet att tågen måste följa en speciell regel då dom parkerar.

   Indata är n stycken positiva heltal $t_1, \ldots, t_n$ där t_i anger längden på tågsätt nr i, samt ett mål K. Längden anges i tågbredder. Varje tågsätt är mellan 1 och n tågbredder långt. Om garaget är M långt så består det av M stycken parallella spår av längden M.

   Beslutsproblemet är att avgöra ifall det finns något sätt att parkera tågsätten i ett garage med sidan K.

   Visa att detta problem är NP-svårt.

3. **Konstruktion av parkering i energisnålt tåggarage**
   Betygskriterium: göra konstruktionsreduktioner.

   Anta att det finns en algoritm som löser beslutsproblemet i förra uppgiften i tid $B(n)$ (som är en positiv funktion som växer med n). Gör en polynomisk reduktion av konstruktionsproblemet till beslutsproblemet. Visa alltså hur man, med polynomiskt antal anrop av beslutsproblemsalgoritmen, kan konstruera en optimal lösning, det vill säga beskriva vilka tågsätt som ska parkera på samma spår för att garaget ska bli så litet som möjligt. Även om det finns flera optimala lösningar så ska bara en beskrivas.

   Analysera tidskomplexiteten för din algoritm och motivera att algoritmen är korrekt. Tidskomplexiteten för reduktionen, förutom anropen till beslutsproblemsalgoritmen, ska vara polynomisk i n.