

## Sprawozdanie – metoda elementów skończonych, wersja podstawowa

Data wykonania: 17.01.2020	Kierunek, grupa: IS, 2
Imię i nazwisko: Krzysztof Klimczyk	

### 1. Wstęp teoretyczny:

Celem programu jest wyznaczenie temperatur w poszczególnych węzłach badanego elementu rozwiązując poniższy układ równań.

$$[H]\{t\} + \{P\} = 0$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy niejawną schemat wyznaczenia poszukiwanych temperatur  $\{t_1\}$

$$\left( [H] + \frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_1\} - \left( \frac{[C]}{\Delta\tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0$$

Wartość  $\Delta\tau$  jest nieprzypadkowa i liczona jest, aby uzyskać czas stabilnego rozwiązania ze wzoru:

$$\Delta\tau = \left( \frac{B}{nB} \right)^2 : \left( \frac{k}{2cp \cdot ro} \right)$$

gdzie, k(przewodność), cp(ciepło właściwe), ro(gęstość) – stałe materiałowe

B – wielkość elementu

nB – ilość węzłów elementu

Pierwsza część wzoru po wykonaniu wszystkich operacji jest macierzą i wymaga obliczenia dwóch mniejszych elementów, a dokładniej macierzy H i C.

$$\left( [H] + \frac{[C]}{\Delta\tau} \right)$$

Macierz H zostaje obliczona, korzystając z poniższego wzoru, który składa się z całki iloczynu współczynnika k (oznaczającego przewodność materiału) i sumy macierzy powstałych z przemnożenia wektora zawierającego pochodne funkcji kształtu po odpowiednich współrzędnych i wektora transponowanego.

$$[H] = \int_V k \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV$$

Dodatkowo na elementy mające bezpośredni kontakt z otoczeniem (boki elementu) oddziałuje warunek brzegowy strumienia ciepła. Zostaje on podzielony na dwie części, pierwsza z nich jest przedstawiona poniższym wzorem jako macierz, którą należy uwzględnić przez dodanie jej wartości do macierzy H.

$$\int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS$$

Drugą częścią warunku brzegowego stanowi poniżej przedstawiona całka:

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_{\infty} dS$$

Macierz C jest wykorzystywana w obu częściach równania i opisana jest w następujący sposób:

$$[C] = \int_V c \rho \{N\} \{N\}^T dV$$

Drugą część równania uzyskuje się po zsumowaniu wektora obciążeń P i iloczynu wektora początkowych temperatur elementu z macierzą C po uwzględnieniu optymalnego czasu rozwiązania.

$$\left( \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_0\} + \{P\}$$

Po tych przekształceniach końcowy wynik jest wektorem.

Następnie rozwiązując zestaw równań, otrzymujemy poszukiwany wektor temperatur po określonym kroku czasowym.

## 2. Charakterystyka kodu:

Program wczytuje podstawowe dane z pliku o nazwie „data.txt”, które następnie zostaną przypisane do odpowiednich zmiennych w obiektach. Program realizuje dwa schemat całkowania (2 punktowy i 3 punktowy), które również należy określić w pliku. Po wczytaniu danych pierwszym krokiem jest wygenerowanie siatki elementów. Każdy z nich posiada cztery wierzchołki. Jako pierwsze tworzone są węzły, które posiadają dwie współrzędne, temperaturę początkową i zmienną określającą czy na dany węzeł będzie wpływał warunek brzegowy. Następnie utworzone zostają elementy składające się z czterech węzłów, lokalnych macierzy H, C i wektora P. Kolejnym krokiem jest policzenie optymalnego czasu obliczeń dla danego przypadku, który będzie wykorzystywany w dalszych obliczeniach.

Kolejne kroki powtarzają się określoną ilość razy. Na każdym elemencie zostają wykonane obliczenia mające na celu wygenerowanie macierzy H i C wykorzystując metodę całkowania Gaussa. Jeżeli na dany element będzie oddziaływał warunek brzegowy, to dla odpowiednich powierzchni zostaje obliczony wektor P i macierz warunku brzegowego z wykorzystaniem metody całkowania Gaussa. Następnie macierz warunku brzegowego zostaje dodana do macierzy H i wszystkie wartości macierzy lokalnych i wektora P zostają przepisane w odpowiednie miejsca w odpowiadających strukturach

globalnych. Później następuje obliczenie szukanych wartości temperatur, wykorzystując metodę eliminacji Gaussa, a otrzymane rozwiązania zastępują poprzednie temperatury początkowe występujące w węzłach na potrzeby kolejnej iteracji.

### 3. Wyniki działania programu:

Dane wykorzystane do przeprowadzenia obliczeń:

$N = 0.1$

$W = 0.1$

$npc$  (metoda całkowania) = 2

$k = 25$

$ro = 7800$

$cp = 700$

$t0 = 100$

$\alpha = 300$

$t_{otoczenia} = 1200$

Test numer 1 –  $nH$  i  $nW = 4$ , ilość iteracji = 10, krok iteracji = 50s

```
C:\> Konsola debugowania programu Microsoft Visual Studio
Iteration 0 - Min & Max: 110.038, 365.815
Iteration 1 - Min & Max: 168.837, 502.592
Iteration 2 - Min & Max: 242.801, 587.373
Iteration 3 - Min & Max: 318.615, 649.387
Iteration 4 - Min & Max: 391.256, 700.068
Iteration 5 - Min & Max: 459.037, 744.063
Iteration 6 - Min & Max: 521.586, 783.383
Iteration 7 - Min & Max: 579.034, 818.992
Iteration 8 - Min & Max: 631.689, 851.431
Iteration 9 - Min & Max: 679.908, 881.058
```

Test numer 2 –  $nH$  i  $nW = 31$ , ilość iteracji = 20, krok iteracji = 1s

```
C:\> Konsola debugowania programu Microsoft Visual Studio
Iteration 0 - Min & Max: 100, 149.557
Iteration 1 - Min & Max: 100, 177.445
Iteration 2 - Min & Max: 100, 197.267
Iteration 3 - Min & Max: 100, 213.153
Iteration 4 - Min & Max: 100, 226.683
Iteration 5 - Min & Max: 100, 238.607
Iteration 6 - Min & Max: 100, 249.347
Iteration 7 - Min & Max: 100, 259.165
Iteration 8 - Min & Max: 100, 268.241
Iteration 9 - Min & Max: 100, 276.701
Iteration 10 - Min & Max: 100.001, 284.641
Iteration 11 - Min & Max: 100.002, 292.134
Iteration 12 - Min & Max: 100.003, 299.237
Iteration 13 - Min & Max: 100.005, 305.997
Iteration 14 - Min & Max: 100.009, 312.451
Iteration 15 - Min & Max: 100.014, 318.631
Iteration 16 - Min & Max: 100.021, 324.564
Iteration 17 - Min & Max: 100.032, 330.271
Iteration 18 - Min & Max: 100.046, 335.772
Iteration 19 - Min & Max: 100.064, 341.085
```

Wszystkie obliczenia i końcowe wyniki otrzymane z programu są identyczne w porównaniu do wyników testowych dostępnych na stronie przedmiotu. Wykorzystanie wariantu z 3 punktowym schematem całkowania prowadzi do uzyskania identycznych wyników.

#### **4. Wnioski:**

W obydwu testach można zauważyć, że w całej objętości badanego elementu następuje wymiana ciepła przez przewodzenie. Z każdym kolejnym krokiem iteracji zmniejsza się przyrost temperatury powierzchni badanego elementu, ponieważ różnica temperatury powierzchni i temperatury strumienia ciepła maleje z upływem czasu. W drugim teście czas przeprowadzanej symulacji jest na tyle mały, że temperatura w samym środku elementu zmienia się w nieznaczący sposób. Najszybciej nagrzewają się elementy z dwoma powierzchniami kontaktu z warunkiem brzegowym czyli rogi badanego obiektu. Czas potrzebny na wykonanie obliczeń w pierwszym teście wynosi ok 1 sekundy, natomiast drugi potrzebuje około minuty. W przypadku 3 punkowego schematu całkowania wykonanie wszystkich obliczeń jest nieznacznie krótsze (w teście nr 2 jest to kilka sekund mniej).