Álgebra Lineal
Inteligencia Artificial

Nombre: Bárbara Rossana Pérez Silva
Grupo: 031 **2015576**

1 Operacions con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F' = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$F' = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F \cdot F' = 1$$

$$F \cdot F' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

2. Demuestre que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

Para dos matrices cuadradas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se cumple:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Sea A y B matrices de $n \times n$, utilizando la definición del determinante mediante la expansión de Laplace, tenemos que:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$

Aplicando esta propiedad a la multiplicación de ambas matrices, AB , y utilizando la linealidad del determinante:

$$\det(AB) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj}C_{1j}$$

Dado que la matriz B actúa como una transformación lineal sobre las columnas de A, podemos factorizar los términos y obtener:

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Demostrando el teorema del teorema de la multiplicación de matrices.

2 Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Verificando que efectivamente el sistema de ecuaciones sea diagonalmente dominante para una solución más rápida, continuamos con la aplicación de la fórmula de Gauss Seidel:

$$x_i = \frac{c_i - a_{ij} - \ldots - a_{in}x_n}{a_{ij}}$$

$$x = \frac{7 + y - z}{4} \quad y = \frac{1 + 2x + 2z}{4} \quad z = \frac{5 - x + y}{3}$$

Sustituyendo las variables de la primer ecuación a cero, tenemos:

$$x = \frac{7 + 0 - 0}{4} = \frac{7}{4}$$

Sustituimos "x" con el valor obtenido y Z=0, tenemos:

$$y = \frac{1 + 2(\frac{7}{4}) + 2(0)}{4} = \frac{9}{8}$$

Y ahora sustituimos ambos valores en la última ecuación:

$$z = \frac{5 - (\frac{7}{4}) + \frac{9}{8}}{3} = \frac{35}{24}$$

Ahora comenzamos la primera iteración con los valores obtenidos:

$$x = \frac{7 + \frac{9}{8} - \frac{35}{24}}{4} = \frac{5}{3} = 1.6$$

$$y = \frac{1 + 2(\frac{5}{3}) + 2(\frac{35}{24})}{4} = \frac{29}{16} = 1.81$$

$$z = \frac{5 - (\frac{5}{3}) + \frac{29}{16}}{3} = \frac{247}{144} = 1.71$$

Obtenemos los resultados finales de:

$$x = 1.6 \quad y = 1.81 \quad z = 1.71$$

---

2. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases}$$

Transformamos el sistema de ecuaciones a una matriz, utilizando sus coeficientes y resultados:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

Comenzamos a resolver por Gauss, multiplicando la primera fila por 2 y restandola a la segunda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora, multiplicamos la primera fila por 3 y se la restamos a la tercer fila, obteniendo así los ceros que buscamos debajo en la primera columna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Después de hacer esto, obtenemos unicamente una fila de valores, convirtiendola a ecuación, tenemos lo siguiente:

$$x+2y+3z=0$$

$$(x,y,z)=(1,2,3)$$

3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

1. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores $(1,2,3),(2,4,6),(3,6,9)$

Pasamos los vectores a una matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Transformamos la matriz para obtener una matriz triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{(1,2,3)\}$$

Así, obtenemos un único vector, por lo que la dimensión es de 1 y la base queda como:

$$B=\{(1,2,3)\}$$

---

2. Determine los autovalores y autovectores de la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Autovalores:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$|G-\lambda I| = (5-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21$$

$$P(\lambda) = (\lambda-7)(\lambda-3)$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 7$$

Autovectores:

$\lambda_1 = 3:$

$$(G-\lambda I)\cdot X = 0 \quad \begin{bmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad ; \quad 2x_1 - 2x_2 = 0 \quad ; \quad x_1 = x_2$$

$$v_1 = (1,1)$$

$\lambda_2 = 7:$

$$(G-\lambda I)\cdot X = 0 \quad \begin{bmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad ; \quad -2x_1 - 2x_2 = 0 \quad ; \quad x_1 = -x_2$$

$$v_2 = (1,-1)$$

4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

1. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.

El PCA utiliza el álgebra lineal como ayuda para reducir dimensiones de la información, pero manteniendo la mayor cantidad de datos posible, esto haciendo uso de los autovectores y autovalores.

2. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz.

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Primero necesitamos calcular los los autovectores para obtener la matriz de esta misma:

$$V = \begin{bmatrix} 3.0966 & 0.6408 \\ 2.7336 & -0.726 \end{bmatrix}$$

Y con ayuda de los autovalores, obtendremos la matriz de la misma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{bmatrix}$$

Despejando U de la fórmula de descomposición tenemos:

$$U = HV\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8649 & 0.5019 \\ 0.5019 & -0.8649 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.209 & 0.1214 \\ 0.5087 & -0.8766 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos que la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz.

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Es la siguiente:

$$H = \begin{bmatrix} 0.209 & 0.1214 \\ 0.5087 & -0.8766 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8649 & 0.5019 \\ 0.5019 & -0.8649 \end{bmatrix}$$

3. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

El álgebra lineal es utilizado dentro del aprendizaje profundo con redes neuronales para modelar y optimizar sistemas complejos. Un ejemplo de ello son las redes neuronales convolucionales (CNN o ConvNets) que se emplean principalmente en aplicaciones de visión artificial y clasificación de imágenes, aquí el álgebra lineal, específicamente la multiplicación de matrices, se pone en uso para identificar patrones dentro de una imagen.

4. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.

Los espacios vectoriales ayudan a modelar información de manera cuantitativa y estructurada en dimensiones matemáticas, así pudiendo procesar datos no estructurados, como textos e imágenes, transformando estos en vectores que capturan relaciones semánticas y patrones subyacentes.