

# 这里换成你的论文的标题

## 摘要

开头段：需要充分概括论文内容，一般两到三句话即可，长度控制在三至五行。

问题一中，解决了什么问题；应用了什么方法；得到了什么结果。

问题二中，解决了什么问题；应用了什么方法；得到了什么结果。

问题三中，解决了什么问题；应用了什么方法；得到了什么结果。

结尾段：可以总结下全文，也可以介绍下你的论文的亮点，也可以对类似的问题进行适当的推广。

**关键词：**关键词一 关键词二 关键词三

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

粉碎矿料被广泛运用于建筑，矿业，化工等领域。在生产过程中，矿料被运送到不同的仓库中，每个仓库中矿料种类是唯一的。管理平台可以通过仓库中的摄像头对矿料情况进行监督，并且利用大小型号的自卸车堆放矿料。自卸车通过倒车卸下矿料，但卸下矿料具有不规则的形状。在这一背景下，我们需要研究矿料堆放的调度策略，提出合理的指派方案。

### 1.2 问题重述

经过分析整理，我们需要解决以下问题：

1. 考虑到卸下的矿料形状是不规则的，我们需要利用摄像头采集的照片信息，估计仓库中堆放矿料的体积，以及剩余空间。在此基础上估计堆满矿料需要的车型以及对应的次数。
2. 在自卸车种类一定，数量一定，矿料种类一定的情况下，合理调度自卸车，使得仓库中堆放矿料的体积尽可能大。我们需要给出具体调度策略。
3. 在第二问的基础上，我们需要将六个仓库都尽量堆放满，且优先满足低标号仓库。我们需要给出最优指派方案，使得总发车次数最小。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一的分析

针对矿料等形状不确定物体在仓库中的堆放体积，目前国内外有许多研究。主流解决方案有以下两种：使用 Lidar 扫描获得点云数据 [?]，基于多角度摄像头捕获关键点坐标 [?]

首先介绍第一种方法，该方法使用 Lidar 采样，从而构建堆放物体的点云模型，确定材料体积。这种方法优点在于采样精度高，可以对复杂的堆放形状精确建模。但是缺点也十分显著，Lidar 采样需要无人机搭载采样设备，以特定路径飞行，以进行多角度采样。这导致采样成本高，操作复杂，难以自动化管理。

基于多角度摄像机采样的方法采用了多对 CCD 照相机捕捉装料形状点特征，从而确定装料体积。该方法优点在于使用计算机视觉方式解决装料问题，具有较好的精准度。不足之处在于使用专业 CCD 相机采样，且事先定标后才可以计算相关镜头参数，不能满足灵活运用要求。

基于上述研究的启发，我们将利用俯视照相机以及水平照相机，以及仓库边缘处的基线分别对堆料边缘形状以及高度进行估计。再结合堆料种类对应的静止角等物理性质，估计矿料体积。之后我们可以通过原有仓库体积以及问题二中的具体调度策略，计算堆放矿料需要的车型以及对应次数。

### 2.2 问题二的分析

利用问题一所得堆料体积情况，我们需要调配自卸车使得尽可能装满仓库。这要求我们建立矿料的物理模型，模拟出矿料堆放在不同的地点时的形状特点。

由于矿料颗粒较小，稳定性不佳，在没有外界限制的条件下会坍塌为一定形状。其中最为典型的是锥形，细颗粒物在不断积累过程中会最终保持到一个特定的角度，该角被称为休止角。休止角定义为无侧限材料在可堆叠水平面上所能达到的最陡坡度。[?] 不同材料由于微粒的形状大小，摩擦力的差异，存在不同的休止角，因此考虑粗料和细料的休止角也有所不同。

自卸车卸货过程中也应当考虑矿料的上述特性，以及卸货方式，设计卸下矿料的基本物理模型，从而使用元胞自动机等手段进行模拟，得到单次卸货的矿料形状。

在这一基础上，我们根据大小自卸车的参数，以及车辆的限制条件，设计合理的堆放策略，使仓库中矿料体积占仓库体积比例最大，也就是尽可能装满仓库。

2.3 问题三的分析

三、模型假设

- 1. 矿料与仓库之间的界限明晰，颜色差异较大。  
**原因：**本文采用边缘检测的方式估计矿料体积，当矿料与仓库颜色差异较大时才可以采集计算边缘信息，从而完成后续工作。
- 2. 矿料顶部较为平整，可以根据正面投影计算矿料高度信息。  
**原因：**考虑到现实中取用矿料都是从仓库正面进行的，取用矿料只影响前方边缘形状。该简化工作可以保证模型简洁明了。
- 3. 自卸车卸货时货箱与地面垂直，相当于一个垂直放置的、位置固定的开口为矩形的“漏斗”。  
**原因：**大多数自卸车的最大倾角都能达到 70 度，且我们所选的粗砂和细砂与货箱的摩擦因子都较小，所以可以认为货箱逐渐达到 70 度后，货物全都可以落下；且在没有到最大倾角时，因为卸货时间较短，所以货物不会碰到货车及货箱，货物只受重力的影响。经过查阅资料，因货车的载重较大，所以卸货时移动会带来危险，并且货车完全有能力在不移动的的前提下完成货物的卸载，因此可认为漏斗位置不变。
- 4. 假设 3 中所述的“漏斗”高度大于 3m  
**原因：**无论大车还是小车，当其倾角达到最大时，货箱的最高点都比 3m 高，说明土堆的最高点都可以达到 3m，而且卸货的高度是随着卸货的时间而增加的，所以一开始货箱顶端没有到达 3m 时，货物只受重力影响，卸货高度并不影响货物形态分布。

四、符号说明

符号	说明	单位
$\int$	积分符号	
$W_0$	区分高峰和低峰的一个临界值	
$M_t$	简单移动平均项	

本部分是对模型中使用的重要变量进行说明，一般排版时要放到一张表格中。

注意：第一：不需要把所有变量都放到这个表里面，模型中用到的临时变量可以不放。第二：下文中首次出现这些变量时也要进行解释，不然会降低文章的可读性。

## 五、模型的建立与求解

以下将对提出的三个问题进行建模求解。

### 5.1 问题一模型的建立与求解

#### 5.1.1 矿料体积模型

传统的摄像机只能捕捉图像的色彩，以及对应的通道信息，就相机本身而言不具有采集距离信息的能力。在没有事先标定点的情况下，通过图片信息确定空间中某个点的位置坐标较为困难。但是在矿料和地面或是墙壁的交界处具有明暗对比，可以通过边缘检测算法提取边缘信息，再结合矿料的物理性质建立矿料体积模型。

考虑仓库中的矿料堆放情况，如图（1）所示。仓库后侧为墙体，左右两侧为高为  $h_0$  的隔墙，左右围墙之间距离为  $d$ ，前方为矿料流动形成的斜坡，斜坡底部与地面形成地面边缘  $E_G$ 。由于存在采用矿料的情况，地面边缘  $E_G$  可能呈现不规则的形状。

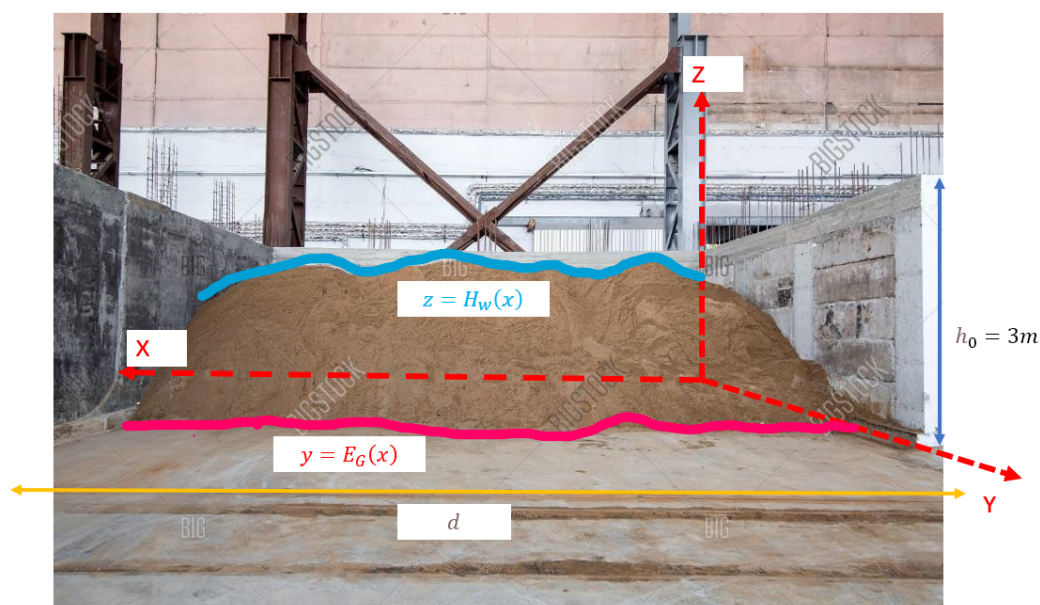


图 1: 矿料仓库示意图

首先我们需要指定摄像头在仓库中的位置。为了实时检测仓库的矿料体积，我们使用两个摄像头获取图像信息，上传至管理平台。两个摄像头分别位于仓库顶部以及仓库正面，分别拍摄仓库的俯视图与正视图。如图（2）中所示：

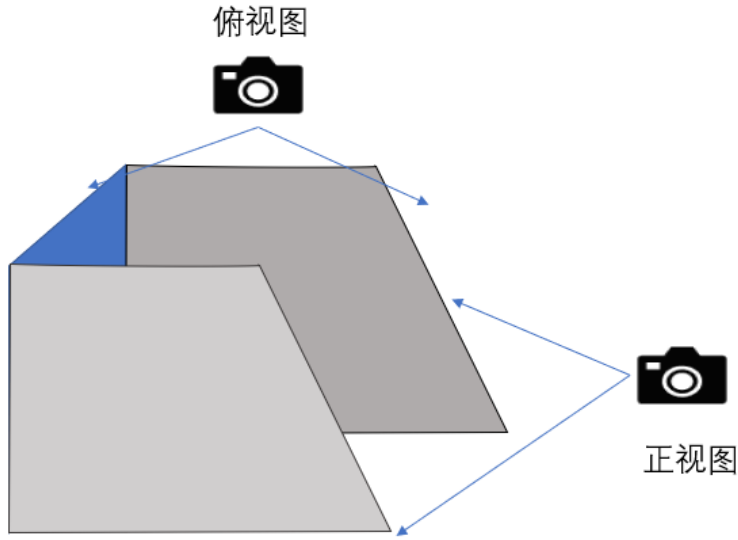


图 2: 相机放置示意图

在得到正视图以及俯视图后，我们需要进行边缘提取工作。边缘提取是计算机视觉领域较为成熟的一个领域，相当多边缘检测的算法被投入使用。考虑到现有条件下建立精确三维模型的困难之处，我们利用俯视图以及正视图中的边缘信息，还原矿料堆放的形状。从正视图中可以提取出矿料在后方墙体上的边缘投影  $z = H_W(x)$ ，这有利于我们得到矿料整体高度。从俯视图中可以提取矿料的地面边缘信息  $y = E_G(x)$ 。

常见的边缘检测算法 [?] 有：使用 Robert, Laplace, Sobel 算子作为卷积核，在图像上进行滑动从而提取出边缘响应。此外还有若干基于模糊推理以及小波检测的方法，鉴于计算复杂性，我们采用 Sobel 算子（如图 3）进行边缘信息提取。

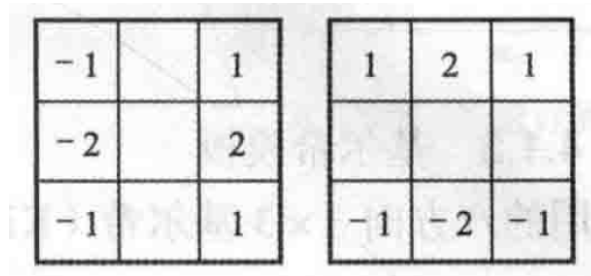


图 3: sobel 算子示意图

在提取矿料边缘之后，我们将利用矿料地面边缘  $E_G$ ，矿料墙体边缘  $E_W$  建立矿料体积模型。考虑到矿料位于四个平面之间，有两个面形状不规则，但利用矿料地面边缘  $E_G$  与墙壁信息可以计算出矿料的底面积大小，利用矿料墙体边缘  $H_W$  可以估计矿料堆放高度。再利用已知矿料的体

止角  $\theta$  大小，可以建立以下体积计算公式：

$$V = 0.5 * \int_0^d H_W(x) * (2E_G(x) - \frac{H_W(x)}{\tan(\theta)}) \quad (1)$$

，其中  $V$  是矿料体积， $x$  轴沿垂直于两面隔墙的方向， $\theta$  是不同矿料的休止角。

### 5.1.2 堆放余量模型建立

我们首先考虑仓库中没有任何矿料的情况，此时  $V = 0$ 。在这一情况下，矿料装满后仓库侧视图如图 (4 a) 所示，此时  $H_W(x) = h_0$  且  $E_G(x) = L_0$ ， $L_0$  是仓库长度。

在仓库不空的情况下，由于已有的矿料占据了仓库空间，使得已经堆放的矿料上方的空间得不到利用。此时仓库剩余体积  $V_{remain}$  不能使用总体积  $V_0$  与矿料体积  $V$  相减获得。此时剩余体积如图 (4 b) 中的红色部分所示。矿车在地面边缘  $E_G$  部分下料，填补原有矿料角度（部分 1），在填平之后继续堆放高度至  $h_0$ ，此时产生高低界面之间的斜坡（部分 2），最终将仓库靠近出口处的剩余体积补齐（部分 3），此时装填整个仓库。

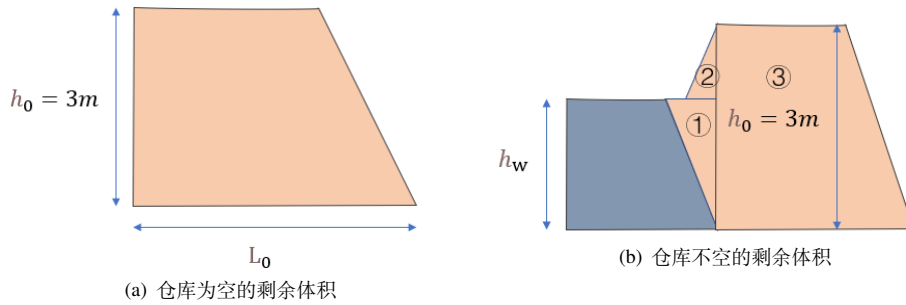


图 4: 不同情况下的矿料剩余体积（侧视图）

综合上述分析，我们提出矿料剩余体积计算公式：

$$V_{remain} = \begin{cases} V_0 = 0.5 * d * h_0 * (2L_0 - \frac{h_0}{\tan(\theta)}), \\ \frac{h_0^2}{2 * \tan \theta} + 0.5 * \int_0^d H_W(x) * (2(L_0 - E_G(x)) - \frac{h_0}{\tan \theta}) * \end{cases} \quad (2)$$

### 5.1.3 数量调配模型建立

TODO

### 5.1.4 模型的求解

## 5.2 问题二模型的建立与求解

### 5.2.1 矿料形态模型建立

考虑自卸车卸下矿料的过程，在模型假设中，我们将自卸车看作是一个高度大于 3 米的漏斗。我们若是考虑矿料为刚性材料，那么卸下后形状不会发生变化，此时矿料形状为一个均匀的长方

体，如图（5）所示。事实上，考虑矿料的静止角等因素，该状态可以作为矿料堆放的初始状态。也就是说，在矿料倾倒下来的瞬间，矿料是长方体，在随后的一小段时间内遵循物理规律下落坍塌，形成坡面。

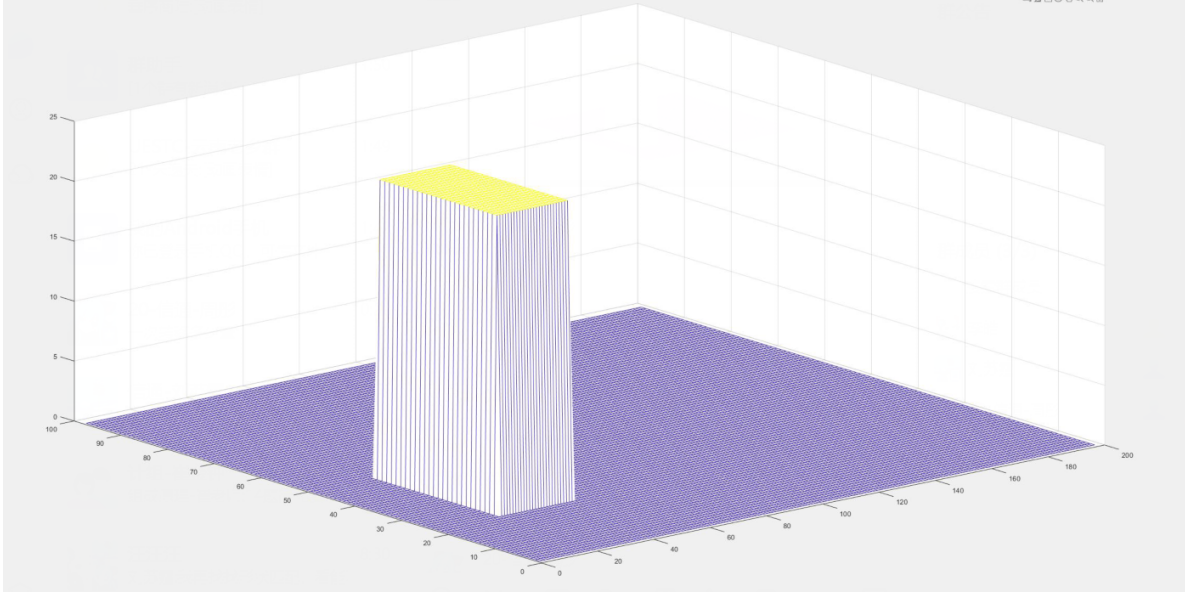


图 5: 矿料堆放瞬间示意图

该长方体的几何尺寸取决于大小自卸车的货厢参数，我们将在模型求解中给出具体尺寸。

前人在矿料等微粒集合体体现出的宏观形状做出了许多研究，Yamakita[?] 等人在使用挖掘机模型转移土壤的过程中，利用二维高斯函数拟合现实中沙子的堆放形状，Nuca[?] 等人提出退化的抛物线模型，对模拟沙子流动的行为做出了较好的建模，Song[?] 等人考虑了在河流冲刷外力作用的情况下沙子堆放形状问题。

在前人研究的启发之下，我们提出一种基于离散迭代的元胞自动机方法，建立矿料形状的物理模型。其理论基础如下：

矿料某点处的矿料稳定与否，取决于矿料在这点处的方向导数  $\frac{\partial h}{\partial l}$  与休止角正切值的大小关系  $\tan\theta$ 。若方向导数值大于休止角正切值，则该点不稳定，会发生坍塌。

$$\frac{\partial h}{\partial l} \leq \tan\theta \quad (3)$$

我们定义坍塌为矿料不稳定点与相邻矿料点之间的物质转移情况。该转移过程中保持矿料体积不变，转移的方向沿该点高度值的负梯度方向。每次转移直到该点不会向周围再次滑动为止。而且在转移过程中需要保持矿料体积恒定，转移之后转移点不会比周围点都低。

我们对目前矿料上的每个点计算方向导数，按照方向导数从大到小的顺序进行坍塌结果计算。上述步骤称为一次形状迭代，形状迭代之后可能仍然不能使所有点都满足休止角的条件。因此迭代过程可能还需要再进行数次。

在迭代终止之后，我们便获得矿料堆放的最终形状。

考虑连续模型计算的困难性，我们结合元胞自动机的基本理论，提出离散的矿料物理模型。该模型将连续的矿料立方体网格化，将其分割为离散格点，格点上具有高度信息。我们利用格点高



度矩阵  $H$  存储高度信息，如图 (6a)。对于每个格点，根据其周围格点的相对高度，具有以下行为特征：

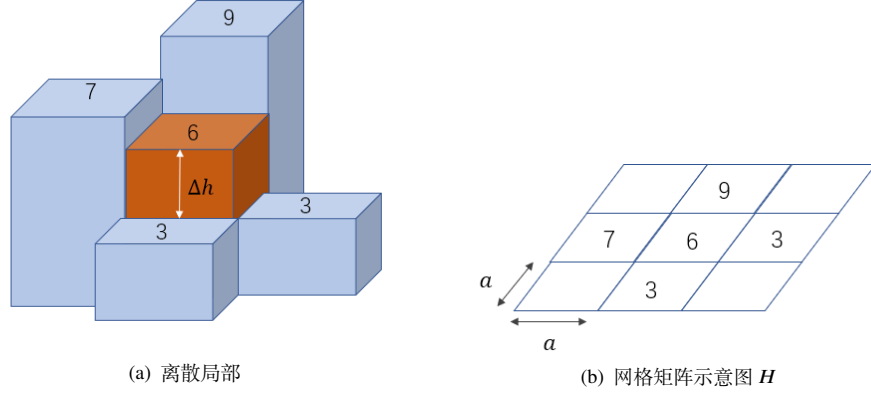


图 6: 离散矿料模型示意图

离散化梯度计算，使用差分代替求导。某个格点  $V_0$  在各个方向的梯度使用各个方向上的高度差  $\Delta h$  与网格边长  $a$  之比计算，我们称之为离散梯度  $p$  格点是否发生坍塌，依然取决于下式：

$$p = \frac{\Delta h}{a} \leq \tan\theta \quad (4)$$

在网格边界处设置边界高度为无穷，此时离散梯度  $\frac{\Delta h}{a}$  恒小于休止角  $\tan\theta$ ，也就是不会坍塌至边界以外。

考虑到元胞自动机的有限行为特点，坍塌时候发生物质转移只在当前网格的四邻域方向进行。基于当前点和周围点的高度信息，我们可以计算并记录四个方向的离散梯度，我们使用梯度数组  $P$  维护：

$$P = \left[ \frac{\Delta h_{up}}{a}, \frac{\Delta h_{down}}{a}, \frac{\Delta h_{left}}{a}, \frac{\Delta h_{right}}{a} \right] \quad (5)$$

我们对每个方向上的离散梯度  $p$  与休止角正切值  $\tan\theta$  比较，得到坍塌方向数  $N$ ：

$$N = |\{p | p > \tan\theta, p \in P\}| \quad (6)$$

若梯度数组中数值都小于休止角正切值  $\tan\theta$ ，也就是  $N = 0$  的情况下，该点不发生坍塌。下面重点讨论  $1 \leq N$  的情况：

此时约束条件有以下三条：

1. 当前格点处可能向周围不满足休止角的方向进行坍塌，坍塌至  $p < \tan\theta$ 。
2. 每个方向上都可能发生坍塌，且当前格点  $V_0$  的高度  $h_{v,0}$  不会因为坍塌而低于周围格点。
3. 当前格点以及周围格点的高度之和不会发生改变，这是因为物质守恒原理。



在上述约束条件下，我们得到高度更新公式：

$$h_{v0} + a * \sum p = h_{v0}^* + N^*(h_{v0}^* - \tan\theta) \quad (7)$$

$$h^* = h_{v0}^* - \tan\theta \quad (8)$$

，其中  $h_{v0}^*$  代表坍塌后当前网格点的高度。

### 5.2.2 调度策略模型建立

### 5.3 问题三模型的建立与求解

公式(9)是我们使用的速度公式。

$$p_n = \rho^n p_0, \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

$$v_{in}(t) = \begin{cases} CA\sqrt{\frac{2AP}{\rho(t)}}, & A \text{处单项阀开启} \\ 0, & A \text{处单项阀关闭} \end{cases} \quad (10)$$

## 六、模型的分析与检验

模型的分析与检验的内容也可以放到模型的建立与求解部分，这里我们单独抽出来进行讲解，因为这部分往往是论文的加分项，很多优秀论文也会单独抽出一节来对这个内容进行讨论。

**模型的分析：**在建模比赛中模型分析主要有两种，一个是灵敏度(性)分析，另一个是误差分析。灵敏度分析是研究与分析一个系统（或模型）的状态或输出变化对系统参数或周围条件变化的敏感程度的方法。其通用的步骤是：控制其他参数不变的情况下，改变模型中某个重要参数的值，然后观察模型的结果的变化情况。误差分析是指分析模型中的误差来源，或者估算模型中存在的误差，一般用于预测问题或者数值计算类问题。

**模型的检验：**模型检验可以分为两种，一种是使用模型之前应该进行的检验，例如层次分析法中一致性检验，灰色预测中的准指数规律的检验，这部分内容应该放在模型的建立部分；另一种是使用了模型后对模型的结果进行检验，数模中最常见的是稳定性检验，实际上这里的稳定性检验和前面的灵敏度分析非常类似。

## 七、模型的评价、改进与推广

注：本部分的标题需要根据你的内容进行调整，例如：如果你没有写模型推广的话，就直接把标题写成模型的评价与改进。很多论文也把这部分的内容直接统称为“模型评价”部分，也是可以的。

### 7.1 模型的优点

优缺点是必须要写的内容，改进和推广是可选的，但还是建议大家写，实力比较强的建模者可以在这一块充分发挥，这部分对于整个论文的作用在于画龙点睛。

## 7.2 模型的缺点

缺点写的个数要比优点少

## 7.3 模型的改进

主要是针对模型中缺点有哪些可以改进的地方 [?];

## 7.4 模型的推广

将原题的要求进行扩展 [?], 进一步讨论模型的实用性和可行性 [?].

(所有引用他人或公开资料 (包括网上资料) 的成果必须按照科技论文的规范列出参考文献, 并在正文引用处予以标注。

常见的三种参考文献的表达方式 (标准不唯一): 书籍的表述方式为: [编号] 作者, 书名, 出版地: 出版社, 出版年月。期刊杂志论文的表述方式为: [编号] 作者, 论文名, 杂志名, 卷期号: 起止页码, 出版年。网上资源 (例如数据库、政府报告) 的表述方式为: [编号] 作者, 资源标题, 网址, 访问时间。)

## 附录

### 附录 1

介绍：支撑材料的文件列表

### 附录 2

介绍：该代码是某某语言编写的，作用是什么

除了支撑材料的文件列表和源程序代码外，附录中还可以包括以下内容：

- 某一问题的详细证明或求解过程；
- 自己在网上找到的数据；
- 比较大的流程图；
- 较繁杂的图表或计算结果