CAPÍTULO VI

Sea $j: A \xhookrightarrow{\text{inclusión}} A[t]$, $\mathfrak{a}$ ideal de A (p.130)

Entonces $\mathfrak{a}A[t] = \{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in A[t] : a_k \in \mathfrak{a}\}$ es ideal primo de $A[t] \iff \mathfrak{a}$ ideal primo de A

$$A \text{ DFU} \overset{\text{obs (p.131)}}{\underset{\text{Th. Gauss (p.134)}}{\iff}} A[t] \text{ DFU}$$

■ Sea A DFU, $f(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in A[t]$ (p.132)

- $c_A(f) := \operatorname{mcd}(a_0, \dots, a_n)$ (p.132) — es un contenido (no tiene aquí por qué ser único)
- Si $c_A(f) = 1$, f primitivo
- $\exists f_1$ primitivo t.q. $f = c(f) f_1$
- $c(bf) = b\,c(f)$
- $\underset{\neq 0}{a} f = b g$, $a, b \in A$, $f, g \in A[t]$ primitivos $\Rightarrow a = b$ & $f = g$ (salvo prod. unidades)
- Todo $f \in A[t]\setminus A$ irreducible es primitivo
- A cuerpo $\Rightarrow$ todo $f \neq \overset{0_{A[t]}}{(0,0,\dots)} \in A[t]$ es primitivo en $A[t]$

$\overset{\neq 0}{a} \in A$ reducible en A

$\Updownarrow$ (p.131)

a reducible en $A[t]$

- Todo $f(t) = at + b \in A[t]$ t.q. $a \in \mathcal{U}(A)$ es irreducible en $A[t]$
- Si A cuerpo $\Rightarrow$ Todo pol. de grado 1 es irreducible (p.131)

Lema de Gauss: Sea A DFU, $\overset{\neq 0}{f, g} \in A[t]$

Entonces $c(fg) = c(f) \cdot c(g)$ (p.133)

En particular, el producto de primitivos en $A[t]$ es primitivo en $A[t]$

Si A DFU, todo $f \in A[t]\setminus\{0\}$ que no sea unidad es producto finito de irreducibles de $A[t]$

(p.134) (En Th Gauss)

Lema Importante: Sea A DFU, $K = \operatorname{qf}(A)$, $f \in A[t]$ de grado ≥ 1. Entonces (p.133)

f irreducible en $A[t]$ $\iff$ f irreducible en $K[t]$ & $c(f) = 1$

$\mathbb{Z}$ DFU $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}[t]$ DFU (pero no es DIP)

No en todos los DFU se cumple la id. Bezout (p.135)

En general $\frac{\text{DFU}}{\text{ideal primo}}$ no necesariamente DFU. (p.136)

- K cuerpo $\Rightarrow$ polinomios grado 1 irreducibles en $K[t]$
- En $\mathbb{C}[t]$ son los únicos irreducibles.
- $\bar{f}$ "conjugado" de f (+notación (p.137)(3))
- $f \in \mathbb{C}[t]$, $u \in \mathbb{C}$ raíz de $f \Rightarrow \bar{u}$ raíz de $\bar{f}$ y $\operatorname{mult}_u(f) = \operatorname{mult}_{\bar{u}}(\bar{f})$
  - ↳ Si $f \in \mathbb{R}[t]$ y u raíz $f \Rightarrow \bar{u}$ tb. y $\operatorname{mult}_u(f) = \operatorname{mult}_{\bar{u}}(f)$
- $f \in \mathbb{R}[t]$, $\deg(f) = 2$ sin raíces reales es irreducible en $\mathbb{R}[t]$ (p.138)
- $f \in \mathbb{R}[t]$, $\deg(f) \geq 2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ raíz de f es reducible en $\mathbb{R}[t]$ (x ser múltiplo de $(t-\alpha)$)

A DFU $\Rightarrow$ $A[t]$ contiene INFINITOS polinomios mónicos irreducibles. (p.136)

A DFU, $f \in A[t]$ mónico e irreducible, B anillo que contiene a A y $b \in B$ t.q. $f(b) = 0$. Entonces

$$\underset{\mathfrak{a} := fA[t]}{A[t]/\mathfrak{a}} \overset{\text{isom.}}{\simeq} A[b]$$

$$t + \mathfrak{a} \longmapsto b$$

(p.135)(2)

$\Phi_p := \sum_{k=0}^{p-1} t^k \in \mathbb{Z}[t]$ irreducible en

pol. ciclotómico

Criterio traslación: A anillo, $a \in A$, $\tau_a : A[t] \xrightarrow{\text{isom}} A[t]$, $f(t) \longmapsto f(t+a)$

i) f irreducible en $A[t]$

$\Updownarrow$ ii) $f(a+t)$ irreducible en $A[t]$, $\forall a \in A$ (p.139)

iii) $\exists a \in A$: $f(a+t)$ irreducible en $A[t]$

Criterio Eisenstein: A DFU, $p \in A$ irreducible

$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in A[t]$ primitivo. Si
- p divide a $a_0, \dots, a_{n-1}$
- p^2 no divide a a_0

$\Rightarrow f$ es irreducible en $A[t]$ (p.141)

(ej: p primo, $1 \leq k \leq p-1 \Rightarrow p \mid \binom{p}{k}$)

Crit. Eisenstein modificado: A DFU, $f \in A[t]$ primitivo t.q. $a_n a_0 \neq 0$. Sup. $\exists p \in A$ irreducible t.q. $p \mid a_1, \dots, a_n$ pero $p^2 \nmid a_n$ $\Rightarrow f$ es irreducible (p.143)

A dom, $f \in A[t]$ mónico : $f = g \cdot h$

Entonces $\exists g_1, h_1$ mónicos : $f = g_1 h_1$. (p.139)

↳ $f \in A[t]$ mónico : $\deg(f) = 2$ ó 3 $\Rightarrow$ f es irreducible $\iff$ f no tiene raíces en A.

Criterio modular: A DFU, $f = \sum_{k=0}^{r \geq 0} a_k t^k \in A[t]$, $\mathfrak{p}$ ideal primo de A : $\ell(f) = a_r \notin \mathfrak{p}$,

Si f red. en $A[t] \Rightarrow f$ red en $A/\mathfrak{p}[t] \equiv B[t]$

$\left(\varphi : A[t] \to B[t], \sum_{j=0} b_j t^j \longmapsto \sum_{j=0} (b_j + \mathfrak{p}) t^j\right)$ (p.145)

Criterio de Netto: A DFU, $p \in A$ irreducible

$f \in A[t]$ primitivo de grado impar $n = 2m+1$ t.q.

$p \mid a_k$ para $m < k \leq 2m$, $p^2 \mid a_k$ $0 \leq k \leq m$ y

$p^3 \nmid a_0$ $\Rightarrow$ f es irreducible en $A[t]$ (p.143)

A DFU, n impar, $p \in A$ irred $\Rightarrow$ $t^n - p^2$ irred. en $A[t]$

A DFU, $f \in A[t]$ mónico, $K = A/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ maximal

$\bar{f} \in K[t]$ la reducción mod $\mathfrak{m}$ de f. Si $\bar{f} = \bar{g}_1 \bar{g}_2$ irreducibles de grado d_1 y d_2 $\Rightarrow$ Si f es irred., es producto de dos pols. de grados d_1 y d_2. (p.149)

Criterio Cohn: $q \geq 2$, $f \in \mathbb{Z}[t]$ (p.151)

de grado positivo con coefs entre 0 y $q-1$

t.q. $f(q) = p$ primo $\Rightarrow$ f irred. en $\mathbb{Z}[t]$

A dom, $f = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in A[t]$ t.q. $a_0 a_n \neq 0$.

f irreducible en $A[t]$ $\iff$ $\hat{f}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k} = t^{\deg(f)} f(\tfrac{1}{t})$ irreducible en $A[t]$

pol. recíproco (p.139)