CAPÍTULO V

A anillo, $A[t]$ conjunto sucesiones de todos los elementos de A : $a_n = 0$ $\forall n$ salvo un nº finito.

$A[t]$ es anillo conmutativo unitario con las operaciones obvias (p.108)

- $1_{A[t]} \equiv (1, 0, \dots)$ (p.108)
- $A \to A[t]$; $a \mapsto (a, 0, \dots)$ inyect.
- $t := (0, 1, 0, \dots)$ "variable"
- $t^0 = 1$; $t^n := (0, \dots, 0, \overset{(n+1)}{1}, 0, \dots) = t^k t^{n-k}$
- $a t^n = (0, \dots, 0, \overset{(n+1)}{a}, 0, \dots)$

$\mathbb{Z}$ DE pero $\mathbb{Z}[t]$ ni siquiera DIP (p.112)

- $\forall f \in A[t]$ $\exists \hat{d} \in \mathbb{Z}$, $a_0, \dots, a_d \in A$ t.q. $l(f) := a_d \neq 0$ y $f = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$.
- $\deg(f) = d$ ↗ (p.109)
- Si $f = 0 \Rightarrow \deg(f) = -\infty < d$

★ $\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

★ $\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$

A dom $\Rightarrow \mathcal{U}(A[t]) = \mathcal{U}(A)$ (p.109-110)

A no dom $\Rightarrow$ Puede ocurrir que $\mathcal{U}(A) \subsetneq \mathcal{U}(A[t])$

A dom, $a \in A$, $a \neq 0$ t.q. $(a, t) A[t]$ principal $\Rightarrow a \in \mathcal{U}(A)$ (p.111)

Th. pseudo-división: (p.110)

A anillo conm. unit. $f, g \in A[t]$ de grados n y m $\Rightarrow \exists k \geq 0$ entero y $q, r \in A[t]$ tales que

$b_m^k f = gq + r$ & $\deg(r) < \deg(g)$

b_m: coef director de g.

(Si $b_m \in A \setminus \{0\}$ es unidad, podemos suponer $k = 0$)

- $A := K$ cuerpo $\Rightarrow \varphi(t) : K[t] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $f \mapsto \deg(f)$

dota a $K[t]$ de estr. de DE.

- K cuerpo, $f, g \in K[t]$: $g \neq 0 \Rightarrow r, q \in K[t]$ t.q. $f = gq + r$, $\deg(r) < \deg(g)$ son únicos

A subanillo de B. Consideramos el homomorf.

$$ev_b : A[t] \to B \quad \text{(p.112)}$$
$$f(t) \mapsto f(b)$$
$$\sum_{i=0} a_i t^n \qquad \sum_{i=0} a_i b^n$$

- $ev_b|_A = id_A$
- $\operatorname{Im}(ev_b) := A[b]$ el menor subanillo $\supset (A \cup b)$
- $A[t]/\ker(ev_b) \simeq A[b]$ (1er Th. isom.)

Raíces polinomios: Sea $f \in A[t]$, $a \in A$ es raíz de f en A si $f(a) = 0$

- $\text{mult}_a(f) := k = \max\{l \geq 1 : (t-a)^l \mid f\}$
- $f \in A[t]$ no nulo y $a_1, \dots, a_r \in A$ dom sus raíces $\Rightarrow$
  1) $\sum \text{mult}_{a_i}(f) \leq \deg(f)$
  2) El nº de raíces es finito (p.114)
- Si A no dom no tiene porqué cumplirse

Regla Ruffini: A anillo, $f \in A[t]$, $a \in A$ $\Rightarrow \exists q \in A[t]$ t.q. $f(t) := (t-a) q(t) + \underset{ev_a(f)}{f(a)}$ (p.114)

es "división" (no pseudo)

K^* grupo mult. formado por los elementos $\neq 0$ de K cuerpo finito, es cíclico (p.116)

Definimos $f' := \dfrac{\partial f}{\partial t}$ tal y como la conocemos (+props (p.116))

A dom: $\text{char}(A) = 0$, $f \in A[t]$, $a \in A$ raíz de f.

- a es simple $\Leftrightarrow f'(a) \neq 0$
- Si A cuerpo ó DFU, $\text{mcd}_{A[t]}(f, f') = 1 \Rightarrow f$ no tiene raíces múltiples en A. (p.117)

Fórmula Leibniz: $f, g \in A[t]$ (p.118)

$$(fg)^{n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k)} g^{k)}$$

A DFU, $f = \sum_{k=0}^{d \geq 0} c_k t^k$ y $\frac{a}{b} \in K = qf(A)$ raíz de f en K. Sup a y b primos entre sí $\Rightarrow a \mid c_0$ y $b \mid c_d$ (p.120)

- Si f mónico $\Rightarrow a \in A$
- Si un entero es el cuadrado de un racional $\Rightarrow$ es el cuadrado de un entero

Sea A dom: $\text{char}(A) = 0$, $f \in A[t]$, $a \in A$

a raíz de f, $\text{mult}_a(f) = k$ $\Leftrightarrow f(a) = f'(a) = \dots = f^{k-1)}(a) = 0$, $f^{k)}(a) \neq 0$ (p.119)

Si $\text{char}(A) = p > 0$, no es cierto (p.120)

A cuerpo $\Leftrightarrow A[t]$ DE

(p.112) ⇕ $A[t]$ DIP

A dominio $\Leftrightarrow A[t]$ dominio (p.109)

Th. fundamental Álgebra: (p.121)

Sea $f \in \mathbb{C}[t]$ t.q. $\deg(f) \geq 1 \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $f(z_0) = 0$

Th. de la base (Hilbert) (p.123)

A noetheriano $\Leftrightarrow A[t]$ noetheriano

Obs: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] \simeq \mathbb{Z}[t]/(t^2 - n)$