CAPÍTULO I

ANILLO
P.1

- Grupo abeliano con la suma
- Asociativo para el producto
- Distributivo para la suma resp. prod.
- Conmutativo producto [Conmutativo]
- Elemento unidad [Unitario]

SUBANILLO

- Subconjunto C del anillo que es anillo
- Si $1_A \in$ subanillo $\Rightarrow$ suban. unitario
- Suban. unit $\Leftrightarrow$ $1 \in C$, $x-y, xy \in C$ $\forall x,y \in C$

Otras defs
P.3

- Idempotente: $a^2 = a$
- Divisor de cero $\underset{\neq 0}{(a)}$: si $\exists b \neq 0$: $ab = 0$ ó $ba = 0$
- Unidad (a): si $\underset{\neq 0}{\exists b}$: $ab = ba = 1$
- Dominio (A): Si $\forall b \in A \setminus \{0\}$, b no div. cero.
- Anillo de división: $A \setminus \{0\} = \mathcal{U}(A)$: unidades de A.
- Nilpotente: $a^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
  - $\hookrightarrow A$ reducido si $\nexists \underset{\neq 0}{a}, n$: $a^n = 0$ (P.6)
- Anillo de división conmutativo $\equiv$ CUERPO

IDEALES

$\mathfrak{a} \trianglerighteq 0$ es ideal de A:

- $\forall a, b \in \mathfrak{a}$, $a - b \in \mathfrak{a}$
- $\forall \underset{A}{a}, \underset{\mathfrak{a}}{b}$, $ab \in \mathfrak{a}$

P.7

- $\mathfrak{a} = A \Leftrightarrow 1 \in \mathfrak{a}$
- $\mathfrak{a}$ propio $\Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap \mathcal{U}(A) = \emptyset$
- $aA = \{ab : b \in A\}$
- A es un cuerpo $\Updownarrow$ sus únicos ideales son él y $\{0\}$

Operaciones con ideales:

- $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b : a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$ es un ideal (P.8) (el menor que $\supset \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$)
- Dada $\{\mathfrak{a}_i : i \in I\}$, $\bigcap_i \mathfrak{a}_i$ es un ideal
- $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n : a_i \in \mathfrak{a}, b_j \in \mathfrak{b}\}$ es un ideal (producto).
  - $\hookrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$
    - $\not\supset$ (se cumple si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$, i.e. son comaximales)
- $\hookrightarrow$ En $\mathbb{Z}$, $nm\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \Leftrightarrow n, m$ coprimos. (P.10)

ANILLO COCIENTE $A/\mathfrak{a}$

$a, b \in \mathfrak{a}$, $a \sim b$ si $b - a \in \mathfrak{a}$

- $\hookrightarrow$ $a + \mathfrak{a} + b + \mathfrak{a} = (a+b) + \mathfrak{a}$
- $\hookrightarrow$ $(a + \mathfrak{a}) \cdot (b + \mathfrak{a}) = ab + \mathfrak{a}$

IDEAL GENERADO POR SUBCONJUNTO
(P.11)

- A es noetheriano si todos sus ideales son finitamente gen.
- Un elemento $x \in \mathfrak{a}$ es maximal si $\nexists y \in \mathfrak{a}$: $x < y$
- $\mathfrak{p}$ ideal propio de A es primo si $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A tales que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ó $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$
- $\mathfrak{m}$ es maximal si $\nexists \mathfrak{b}$ propio : $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{b}$

DIP $\Downarrow$ NOETHERIANO $\Uparrow$ CUERPO

NOETHERIANO $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{b}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{b}_n \subset \cdots$ ($\mathfrak{b}_{n+k} = \mathfrak{b}_n$ $\forall k \geq 1$)

NOETHERIANO $\Leftrightarrow$ Toda familia $\neq \emptyset$ de ideales de A tiene un elemento maximal respecto a la inclusión

Maximal, primo, radical

$\mathfrak{m}$ MAXIMAL $\xRightarrow{\mathfrak{m} = \mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p}$ PRIMO $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}$ RADICAL

- $\mathfrak{m}$ MAXIMAL $\Updownarrow$ $A/\mathfrak{m}$ CUERPO
- $\mathfrak{p}$ PRIMO $\Updownarrow$ $\forall a, b \in A/\mathfrak{p}$, $ab \in A/\mathfrak{p}$ $\Updownarrow$ $A/\mathfrak{p}$ DOMINIO
- $\mathfrak{p}$ RADICAL: $\forall x \in A$ t.q. $\exists n \in \mathbb{N}: x^n \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$

(P.15)

Props. ideales
(P.15-16)

- $\mathfrak{a}$ ideal propio $\Rightarrow \exists \mathfrak{m}$ maximal t.q. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$
- A anillo posee un ideal maximal
- $\forall x \in A \setminus \mathcal{U}(A)$ $\exists \mathfrak{m}$ maximal : $x \in \mathfrak{m}$