Cónicas

Unidad 4

Guía de actividades

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Circunferencia

Ejercicio 1. Encuentren, gráfica y analíticamente, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto P sea r, siendo:

a) $P = (0, 0)$, $r = 1$

b) $P = (-2, 5)$, $r = 2$

c) $P = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$, $r = \sqrt{10}$

Ejercicio 2. Determinen si el punto $(2, \frac{13}{2})$ está en la circunferencia de radio 2 y centro $(2, 4)$.

Ejercicio 3. Encuentren todos los puntos del plano que estén a 2 unidades de distancia de $(2, 4)$ y:

a) cuya ordenada sea $y = \frac{9}{2}$

b) cuya abscisa sea $x = 3$

¿Cuántos puntos encontraron en cada caso? Justifiquen geométricamente porque sucede esto.

Ejercicio 4. Averigüen el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencia y represéntenlas gráficamente.

a) $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 4x + 9y - 3 = 0\}$

b) $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 + 10x - 2y = 22\}$

c) $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 14y + 24 = 0\}$

Ejercicio 5. Encuentren gráfica y analíticamente (si los hay) el o los puntos de intersección entre las siguientes circunferencias:

- $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 10x + y^2 - 8y + 31 = 0\}$
- $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 5y - 4x = -4\}$

Ejercicio 6. Consideren las circunferencias C_1, de centro $(1; 0)$ y radio 1, y C_2, de centro $(1; 2)$ y radio 1.

a) Grafíquenlas. ¿En qué punto se tocan?

b) Si C_3 es una circunferencia de radio 1 que interseca a C_1 en un único punto y a C_2 en otro único punto, calculen los posibles centros de C_3.

Elipse

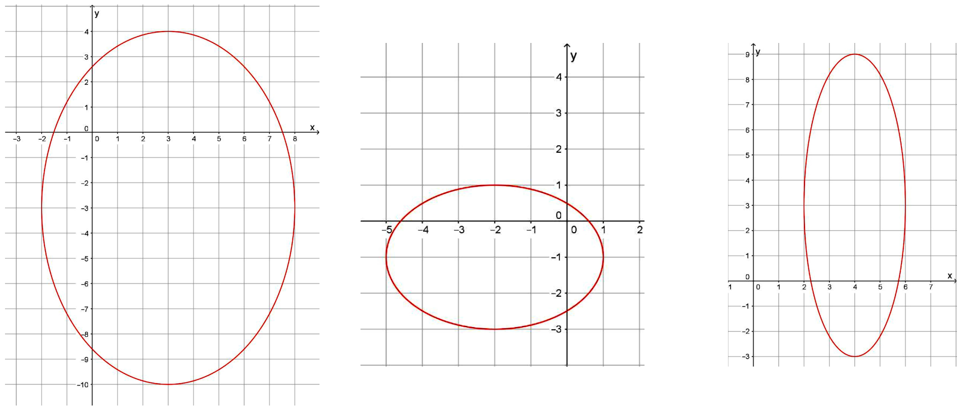
Ejercicio 7. Sabiendo que la elipse E tiene por focos a $(8, 0)$ y $(-8, 0)$ y que existe un punto $P \in E$ tal que $d(P, (8, 0)) + d(P, (-8, 0)) = 20$, hallen las longitudes de los semiejes mayor y menor de E y grafíquenla.

Ejercicio 8. Escriban la ecuación canónica de la elipse con la información dada:

a) centro $(0, 0)$, semiejes $a = 4$, $b = 3$. ¿Cuáles son sus focos?

b) centro $(1, 3)$, semiejes $a = 3$, $b = 5$. ¿Cuáles son sus focos?

Ejercicio 9. Consideren las elipses cuyas gráficas son las siguientes:



a) Hallen la ecuación canónica de cada una de estas elipses.

b) Hallen los focos de cada una de estas elipses.

c) Calculen la excentricidad de cada una de estas elipses.

Ejercicio 10. Encuentren la ecuación canónica de la elipse que verifique las condiciones pedidas:

a) el centro es $(-1, 3)$, la distancia entre los focos es igual a 16 y el eje mayor es vertical e igual a 34.

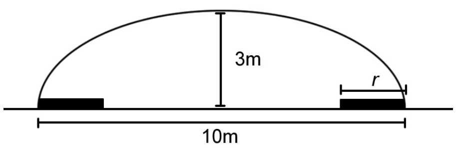
b) la excentricidad es $e = 0,28$ y los focos son $(-7, 0)$ y $(7, 0)$

Ejercicio 11.

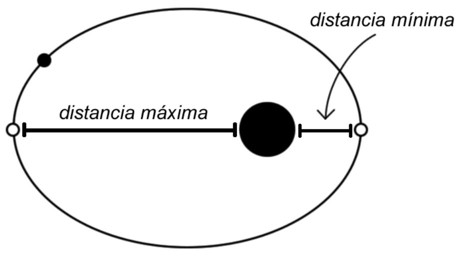
a) Escriban la ecuación general de la elipse de focos $(1, 6)$ y $(1, -2)$ y semieje mayor de longitud 10.

b) Escriban la ecuación canónica de la elipse $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 25x^2 + 9y^2 - 50x - 36y - 164 = 0\}$

Ejercicio 12. Se quiere construir, en una montaña, un túnel con forma de arco semielíptico por donde debe pasar una ruta doblemano y sendas peatonales a cada lado. Las especificaciones de la construcción son las que muestra la figura de más abajo. Si se pretende que cualquier vehículo de altura menor a 2 metros pueda atravesar el tunel, ¿cuál es la longitud r más pequeña que pueden tener las sendas peatonales?



Ejercicio 13. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es elíptica, con el Sol ubicado en uno de los focos de esta elipse. Sabiendo que la excentricidad aproximada de esta órbita es $e = 0,017$ y que la distancia máxima aproximada del centro de la elipse a la órbita es $\frac{3}{2}10^8$km, calculen cuál es la mínima distancia a la que se acerca la Tierra al Sol a lo largo del año (en Diciembre) y cuál es la máxima distancia a la que se aleja la Tierra del Sol a lo largo del año (en Julio).



Hipérbola

Ejercicio 14. Dados los puntos $A = (-50, 0)$ y $B = (50, 0)$, encuentren el lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que la diferencia entre las distancias a A y a B sea de 4 unidades.

Ejercicio 15. Encuentren los focos, la excentricidad y representen gráficamente cada una de las siguientes hipérbolas:

a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+4)^2}{9} = 1$

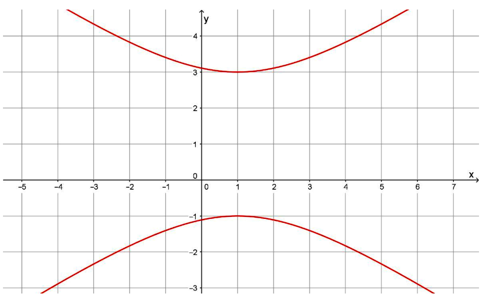
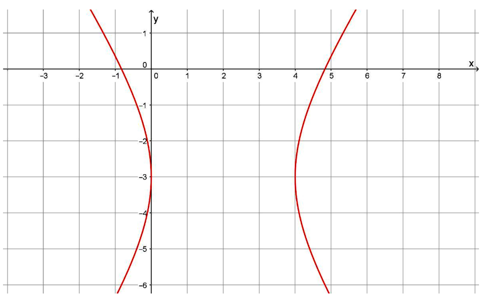
Ejercicio 16. Hallen la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas acorde con los siguientes datos:

a) Los focos son $F_1 = (-13, 0)$ y $F_2 = (13, 0)$ y pasa por el punto $M = (22, 12)$

b) La distancia entre los focos es igual a 26, sus focos están sobre una recta real que es paralela al eje y y la excentricidad es $2,6$

c) Las asíntotas son las rectas $y = -\frac{3}{4}x$ y $y = \frac{3}{4}x$ y pasa por el punto $M = (2, 1)$

Ejercicio 17. Encuentren la ecuación canónica y la ecuación general de las hipérbolas cuya gráfica es:

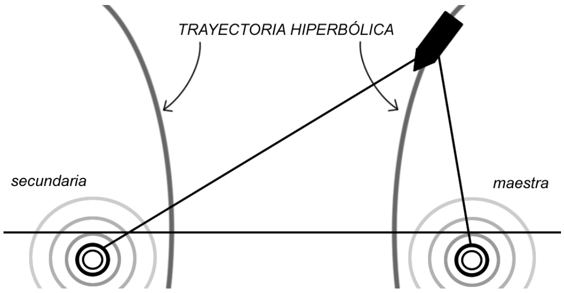



a) Gráfico de la primera hipérbola: uno de sus focos es el punto $F_1 = (1, 1+\sqrt{13})$

b) Gráfico de la segunda hipérbola: una de sus asíntotas es la recta de pendiente $1,5$

Ejercicio 18. En el sistema de navegación LORAN, una estación radioemisora maestra y otra estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en altamar. Puesto que un barco que monitoree las dos señales estará probablemente más cerca de una de las estaciones, habrá una diferencia entre las distancias recorridas por las dos señales, lo cual se registrará como una pequeña diferencia de tiempo entre las señales recibidas. En tanto la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia entre las dos distancias será también constante. Por lo tanto, si el barco sigue la trayectoria correspondiente a una diferencia fija de tiempo, esta trayectoria será una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones.

Dos estaciones LORAN están a una distancia de 160 millas entre sí a lo largo de un litoral recto. El capitán del barco sabe, en un determinado instante, que la diferencia de tiempo registrada entre ambas señales corresponde a una diferencia de distancia de 100 millas entre la estación maestra y la secundaria. ¿A cuántas millas de la estación maestra tocará tierra el barco si continúa con la trayectoria que mantiene la diferencia de tiempo entre las señales?



Parábola

Ejercicio 19. Encuentren la ecuación canónica de la parábola que tenga:

a) directriz $x = -4$ y foco $F = (4; 0)$

b) directriz $y = 4$ y foco $F = (0; 8)$

Ejercicio 20. Encuentren el foco, el vértice y la directriz de las siguientes parábolas. Realicen una gráfica aproximada de la misma indicando los elementos ya mencionados.

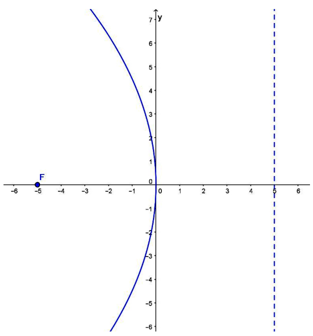
a) $x^2 = 6y$

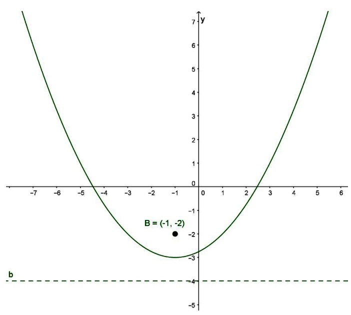
b) $y^2 - 9x = 0$

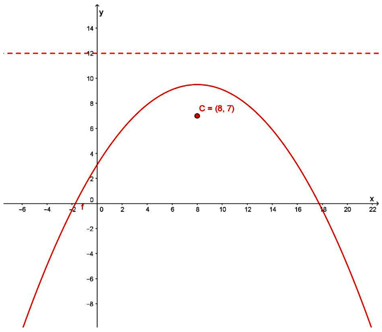
c) $x^2 + 10x - 2y + 27 = 0$

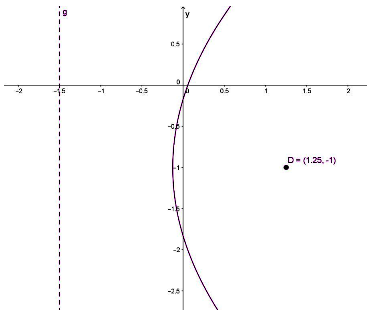
d) $y^2 - 6y + 4x + 33 = 0$

Ejercicio 21. Averigüen las ecuaciones canónicas de las siguientes parábolas:



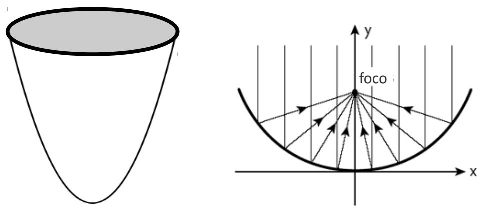






Ejercicio 22. Una parábola tiene ecuación general $y^2 + 2x + \alpha y + \beta = 0$. Sabiendo que el vértice es el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, encuentren los valores de α y β y la ecuación canónica de la parábola.

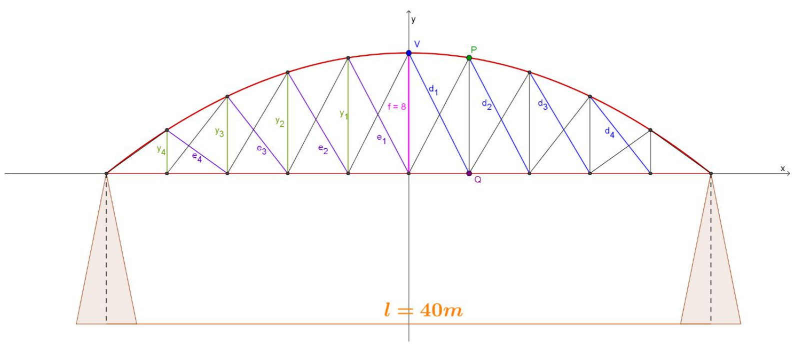
Ejercicio 23. Un *paraboloide* es una superficie que se obtiene al girar la parábola alrededor de su eje de simetría (miren la figura, lado izquierdo). Estas superficies tienen muchas aplicaciones ya que las parábolas tienen la siguiente propiedad de reflexión: si un rayo de luz paralelo al eje de simetría choca contra la parábola, entonces se refleja hacia su foco; e, inversamente, si el rayo de luz sale del foco y choca contra la parábola, entonces se reflejará en la dirección de su eje de simetría (miren la figura, lado derecho).



Supongan que quieren construir el farol delantero de un automóvil que debe ser de 15 cm de diámetro y 8 cm de profundidad. Teniendo en cuenta la propiedad de reflexión de la parábola, ¿en qué lugar del farol ubicarían la lamparita? Calculen dicha ubicación.

Ejercicio 24. Un túnel con forma de arco parabólico tiene una altura máxima de 6m y un ancho de 4m en su base. ¿Cuál debe ser a altura máxima permitida para que pueda pasar debajo de éste un camión con acoplado que tiene un ancho de 2m?

Ejercicio 25. Se quiere construir un puente ferroviario con forma de arco de parábola como el de la figura.



La longitud del mismo debe ser de $40m$ y la altura máxima (en el centro del puente) de $8m$. Para sostener el puente, se ubicarán varias vigas horizontales y en diagonal que estarán a $4m$ de diferencia cada una (miren nuevamente la figura). Determinen cuál debe ser la longitud de las vigas verticales (y_1, y_2, y_3, y_4) y las vigas diagonales del armazón (d_1, d_2, d_3, d_4) y (e_1, e_2, e_3, e_4).

Ejercicio 26. Hallar los valores de p y q que hacen que la siguiente igualdad sea verdadera para todo valor de x:

$$x^2 - 9x + 12 = (x - p)^2 - q$$