سنکرون سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری با استفاده از کنترلر تطبیقی $PI^{\lambda}D^{\mu}$

بهرام یاقوتی[۱]، کاوه صفوی گردینی[۱]، حسن سالاریه[۲*]

1 - کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

* تهران، صندوق پستی ۹۵۶۷-۱۱۱۵۵، salarieh@sharif.ir

چکیده

در این مقاله، یک کنترلر تطبیقی PID مرتبه کسری برای سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری، با استفاده از روش کنترل مود لغزشی مرتبه کسری ارائه شده است. ورودی کنترلی شامل یک کنترلر سوپروایزری و یک کنترلر تطبیقی PID مرتبه کسری می‌باشد. کنترلر سوپروایزری به منظور محدود کردن خطای سنکرون‌سازی طراحی شده است. در صورتی که بردار متغیرهای حالت سیستم آشوبناک خارج از یک ناحیه مشخص شده باشد، ورودی سوپروایزری فعال شده و سیستم را به ناحیه مورد نظر هدایت می‌کند. بخش دوم کنترلر که یک کنترلر PID مرتبه کسری با بهره‌های قابل تنظیم می‌باشد، وظیفه سنکرون‌سازی دو سیستم آشوبناک و صفر کردن خطا را بر عهده دارد. قوانین تطبیق ارائه شده برای بهره‌های کنترلی با در نظر گرفتن یک سطح لغزش مناسب و با استفاده از روش گرادیان نزولی به دست می‌آید. به دلیل استفاده از روش کنترلی مود لغزشی سیستم کنترلی حلقه بسته نسبت به نامعینی سیستم و اغتشاش خارجی مقاوم می‌باشد. در نهایت، روش ارائه شده برای سنکرون‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری دافینگ و ژایرو استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی، عملکرد مناسب این روش و همگرایی بردار متغیرهای حالت سیستم slave به سیستم master پس از مدت زمان اندکی را نشان می‌دهد.

کلیدواژگان

سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری، سنکرون‌سازی، کنترلر PID مرتبه کسری، کنترل مود لغزشی مرتبه کسری، روش گرادیان نزولی

Synchronization of Fractional Order Chaotic Systems Using Adaptive $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller

Bahram Yaghooti[1], Kaveh Safavi Gerdini[1], Hassan Salarieh[2*]

1- M.Sc., Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
2- Professor, Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 11155-9567 Tehran, Iran, salarieh@sharif.ir

Abstract

In this paper, an adaptive fractional order PID (FOPID) controller is designed to synchronize two uncertain fractional order chaotic systems using fractional order (FO) sliding mode control. Control input consists of a supervisory controller and an adaptive fractional order PID controller. The supervisory controller is designed to guarantee the boundedness of the synchronization error. When the state vector of the chaotic system is out of a pre-specified region, the supervisory controller is activated and forces the system states to be bounded. The fractional order PID controller is defined in a way that when it is applied, the slave system states tracks the master system and the error tends to zero. Adaptive fractional order PID controller gains are being calculated from a proper sliding surface, by using the gradient descent method. Because of using sliding mode control techniques the presented method guarantees the robustness of the closed loop control system against the system uncertainty and external disturbance. Finally, this method is implemented to synchronize two non-identical fractional order Duffing and Gyro systems. Numerical simulation results demonstrate that the slave system converges to the master system after a little time, and this indicates the great performance of the proposed method.

Keywords

Fractional order chaotic systems; Synchronization; FOPID controller; Fractional order sliding mode control; Gradient descent method.

۱– مقدمه

آشوب پدیده‌ای است که در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی رخ می‌دهد و در علوم مختلفی همچون اقتصاد [۱]، شیمی [۲]، زیست‌شناسی [۳] و مهندسی [۴] مشاهده می‌شود. در سال‌های اخیر، بسیاری از دانشمندان علوم مختلف به سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبناک علاقه مند شده و روش‌های متعددی برای آن ارائه کرده‌اند [۵]. اولین روش برای سنکرون‌سازی توسط کارول[1] و پکورا[2] [۶] مطرح شده است. بعد از ارائه این روش، روش‌های خطی و غیرخطی متعددی به صورت master-slave برای سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبناک معرفی شده است [۷]. در بسیاری از کاربردها، به دلیل نامشخص بودن پارامترهای سیستم‌ها و یا وجود نامعینی استفاده از کنترل تطبیقی و ارائه روش‌هایی برای سنکرون‌سازی تطبیقی مطرح شده است [۸-۱۰].

حسابان کسری که در قرن هفتم مطرح شده است، گرایشی قدیمی از ریاضیات بوده که در آن به بیان مشتق و انتگرال مرتبه کسری پرداخته می‌شود. تا سال‌ها بعد از مطرح شدن حسابان کسری، این زمینه به عنوان یک زمینه تئوری محض در ریاضیات بود و هیچ کاربرد عملی در زمینه‌های مختلف نداشت [۱۱]. اما، در سال‌های اخیر به عنوان یک ابزار مناسب و قوی برای مدل‌سازی بسیاری از سیستم‌ها در زمینه های متنوع از جمله ویسکوالاستیسیته [۱۲]، کاربردهای بیومدیکال [۱۳]، پردازش سیگنال [۱۴]، شبکه‌های الکتریکی [۱۵]، الکترومغناطیس [۱۶]، سیستم‌های تصادفی [۱۷]، تئوری کنترل [۱۸] و سیستم‌های آشوبناک [۱۹، ۲۰] مطرح شده است. با توسعه حسابان کسری در تئوری کنترل، کنترلرهای مرتبه

[1] Carroll
[2] Pecora

کسری مختلفی معرفی شد. از جمله این موارد می‌توان به کنترلر PID مرتبه کسری [۲۱]، کنترلر PI مرتبه کسری [۲۲]، کنترلر PD مرتبه کسری [۲۳]، کنترلر lead-lag مرتبه کسری [۲۴]، کنترلر Crone [۲۵]، کنترل تطبیقی مدل مرجع مرتبه کسری [۲۶, ۲۷]، کنترل تطبیقی PID مرتبه کسری [۲۸] و کنترلر مود لغزشی مرتبه کسری [۲۹, ۳۰] اشاره کرد.

در سال‌های اخیر، با توسعه حسابان کسری در تئوری سیستم‌های آشوبناک سیستمهای دینامیکی مرتبه کسری بسیاری همچون سیستم مرتبه کسری دافینگ[۱] [۳۱]، سیستم مرتبه کسری چن[۲] [۳۲]، سیستم مرتبه کسری ون‌درپل[۳] [۳۳]، سیستم مرتبه کسری راسلر[۴] [۳۴] و سیستم مرتبه کسری چوا[۵] [۳۵] معرفی شدند که رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهند. اخیراً نیز روش‌های متعددی برای سنکرون‌سازی این نوع سیستم‌ها مطرح شده است [۳۶-۳۸].

در این مقاله، یک کنترلر تطبیقی PID مرتبه کسری برای سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری طراحی شده است. از مزایای روش ارائه شده می‌توان به سادگی ساختار کنترلر آن اشاره کرد. همانطوری که می‌دانیم، کنترلر PID به دلیل سادگی ساختار و عملکرد مناسب، یکی از پرکاربردترین کنترلرها در زمینه‌های متنوع است. همچنین، به دلیل استفاده از روش کنترل مود لغزشی برای به دست آوردن قوانین تطبیق، سیستم کنترلی حلقه بسته نسبت به نامعینی سیستم و اغتشاش خارجی مقاوم می‌باشد.

بخش‌های بعدی مقاله به صورت زیر می‌باشد: در بخش دوم، تعاریف اولیه حسابان کسری و سیستم های مرتبه کسری بیان شده است. بخش سوم مسئله مطرح شده را توصیف می‌کند. بخش چهارم، مراحل طراحی کنترلر سوپروایزری و به دست آوردن قوانین تطبیق را نشان می‌دهد. در بخش پنجم، نتایج شبیه‌سازی ارائه شده است و در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش پایانی بیان شده است.

۲-تعاریف اولیه

از زمانی که لایبنیتز برای اولین بار مشتق مرتبه کسری را مطرح نمود، تعاریف متعددی برای مشتق مرتبه کسری توسط ریاضیدانان مطرح شده است [۱۱]. از معروف‌ترین این تعاریف می‌توان به ریمان-لیوویل[۶] و کاپوتو[۷] اشاره کرد.

تعریف ۱ (انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل). انتگرال مرتبه p ریمان-لیوویل تابع $f(\tau)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱].

$$ {}^{RL}_{0}D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \quad (۱)$$

که در رابطه فوق، $\Gamma(.)$ تابع گامای تعمیم دهنده مفهوم فاکتوریل می‌باشد.

تعریف ۲ (مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل). مشتق مرتبه p ریمان-لیوویل تابع f(τ) به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱].

$$ {}^{RL}_{0}D_t^{p} f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left({}^{RL}_{0}D_t^{-(k-p)} f(t)\right) \quad (۲)$$

که در رابطه فوق، k کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از p می‌باشد.

تعریف ۳ (مشتق مرتبه کسری کاپوتو). مشتق مرتبه p کاپوتو تابع $f(\tau)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱].

$$ {}^{C}_{0}D_t^{p} f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(l-p)}\displaystyle\int_0^t \frac{f^{(k)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+1-k}} & k-1<p<k \\ \dfrac{d^k}{dt^k} f(t) & p=k \end{cases} \quad (۳)$$

رابطه دو مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو به صورت زیر قابل بیان است.

$$ {}^{RL}_{0}D_t^{p} f(t) = {}^{C}_{0}D_t^{p} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{k-p+1}(t) f^{(k)}(0) \quad (۴)$$

که در رابطه فوق، n کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از p بوده و تابع $\Phi_p(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ \Phi_p(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases} \quad (۵)$$

قاعده لایب‌نیتز. اگر دو تابع $f(\cdot)$ و $g(\cdot)$ در بازه $[a\ t]$ از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر به صورت پیوسته باشد، قاعده لایب‌نیتز برای مشتق مرتبه کسری کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۹].

$$ {}^{C}_{a}D_t^{p}\left(g(t)f(t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} g^{(k)}(t)\, {}^{C}_{a}D_t^{p-k} f(t) \quad (۶)$$

تعریف ۴. یک سیستم خطی مرتبه کسری در فرم فضای حالت به صورت زیر بیان می‌شود.

$$ \begin{Bmatrix} {}^{C}_{0}D_t^{\alpha_1} x_1 \\ {}^{C}_{0}D_t^{\alpha_1} x_2 \\ \vdots \\ {}^{C}_{0}D_t^{\alpha_1} x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (۷)$$

که در رابطه فوق، α_iها $(1 \le i \le n)$ مرتبه‌های مشتق می‌باشند. زمانی که تمامی این α_iها با هم برابر باشند، سیستم را از نوع همگون[۸] می‌نامند.

قضیه ۱. سیستم خطی مرتبه کسری همگون زیر را در نظر بگیرید [۱۱].

$$ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (۸)$$

که $\mathbf{x}$ بردار متغیرهای حالت سیستم، $\mathbf{A}$ ماتریس سیستم و α مرتبه مشتق می‌باشد. در این صورت، شرط پایداری سیستم فوق به صورت زیر بیان می‌شود.

$$ |arg(\lambda_i)| > \alpha\frac{\pi}{2} \quad \forall i \quad (۹)$$

که در رابطه فوق، λ_iها مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ هستند. منظور از arg آرگومان یا زاویه فاز عدد در فضای مختلط می‌باشد.

تعریف ۵. یک سیستم غیرخطی مرتبه کسری با استفاده از مشتق کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ {}^{C}_{0}D_t^{\alpha_i} x_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), x_i(0) = x_{i0}, i = 1, \dots, n \quad (۱۰)$$

که در رابطه فوق، α_iها $(1 \le i \le n)$ مرتبه‌های مشتق می‌باشند.

[1] Duffing
[2] Chen
[3] Van der Pol
[4] Rössler
[5] Chua
[6] Riemann-Liouville
[7] Caputo
[8] Commensurate

قضیه ۲. سیستم غیرخطی مرتبه کسری همگون زیر را در نظر بگیرید [۳۹].

$$ {}_0^C D_t^\alpha \mathbf{x} = f(t,\mathbf{x}) \qquad (۱۱)$$

که $\mathbf{x}$ بردار متغیرهای حالت سیستم، $\alpha \in (0,1)$ مرتبه مشتق می‌باشد. در صورتی که تابع لیاپانوف $V(t)$ یک تابع مثبت معین و توابع $\gamma_i\ (i=1,2,3)$ توابع کلاس K باشند و به گونه‌ای که در شروط زیر صدق کنند، سیستم فوق به صورت مجانبی پایدار خواهد بود.

$$ \gamma_1(\|\mathbf{x}\|) \le V\big(t,\mathbf{x}(t)\big) \le \gamma_2(\|\mathbf{x}\|) \qquad (۱۲)$$

$$ {}_0^C D_t^\beta V\big(t,\mathbf{x}(t)\big) \le -\gamma_3(\|\mathbf{x}\|), \quad \beta \in (0,1) \qquad (۱۳)$$

که در روابط فوق توابع $\gamma_i\ (i=1,2,3)$ توابع کلاس K می‌باشند.

لم ۱. اگر $\mathbf{x}(t) \in \Re$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، به ازای هر $t \ge t_0$، رابطه زیر برقرار است [۳۹].

$$ \frac{1}{2}\, {}_{t_0}^C D_t^\alpha \mathbf{x}^2(t) \le \mathbf{x}(t)\, {}_{t_0}^C D_t^\alpha \mathbf{x}(t), \quad \forall \alpha \in (0,1) \qquad (۱۴)$$

۳- بیان مسئله

۳-۱- توصیف سیستم

سیستم آشوبناک مرتبه کسری زیر را با بعد داخلی n و بعد موثر $n\alpha$ به عنوان سیستم slave در نظر بگیرید.

$$ \begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha y_i = y_{i+1} \quad , \quad 1 \le i \le n-1 \\ {}_0^C D_t^\alpha y_n = f(t,\boldsymbol{Y}) + \Delta f(t,\boldsymbol{Y}) + d(t) + u(t) \end{cases} \qquad (۱۵)$$

که در رابطه فوق α مرتبه معادلات دیفرانسیل بوده و فرض شده است که در بازه $(0,1)$ قرار دارد. همچنین، $\boldsymbol{Y} = [y_1 \quad \cdots \quad y_n]^T$ بردار متغیرهای حالت سیستم، $f(\cdot)$ تابع غیرخطی، $\Delta f(\cdot)$ نامعینی سیستم، $d(\cdot)$ اغتشاش و $u(t)$ ورودی کنترلی سیستم می‌باشد. در این مقاله، فرض شده است که توابع نامعینی و اغتشاش محدود می‌باشند.

$$ |\Delta f(\cdot)| \le \Delta f^u \qquad (۱۶)$$

$$ |d(\cdot)| \le d^u \qquad (۱۷)$$

که در رابطه فوق Δf^u و d^u توابعی مثبت و معلوم می‌باشند.

سیستم master را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$ \begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha x_i = x_{i+1} \quad , \quad 1 \le i \le n-1 \\ {}_0^C D_t^\alpha x_n = g(t,\boldsymbol{X}) \end{cases} \qquad (۱۸)$$

که در رابطه فوق، $\boldsymbol{X} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$ بردار متغیرهای حالت سیستم فوق می‌باشد.

هدف اصلی این مقاله ارائه یک قانون کنترلی مقاوم برای سنکرون‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری می‌باشد. برای رسیدن به این هدف سیگنال کنترلی به صورت دو بخش در نظر گرفته شده است: یک کنترلر $FOPID$ تطبیقی و یک کنترلر سوپروایزر یا سیستم ناظر که مانع ناپایداری می‌شود. مقاوم بودن سیستم کنترلی حلقه بسته نسبت به نامعینی و اغتشاش با به کارگیری روش کنترل مود لغزشی برای به دست آوردن قوانین تطبیق مربوط به بهره‌های کنترلی $FOPID$ و پایداری سیستم کنترلی حلقه بسته با استفاده از یک کنترلر سوپروایزری تضمین شده است دیاگرام سیستم کنترلی حلقه بسته در شکل ۱ نشان داده شده است.

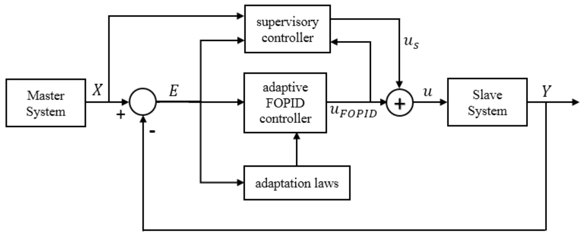


Fig. 1 Close loop control system diagram

شکل ۱ دیاگرام سیستم کنترلی حلقه بسته

خطای سنکرون‌سازی به صورت اختلاف بردارهای حالت دو سستم slave و master تعریف می‌شود.

$$ e_i = x_i - y_i \quad , \quad 1 \le i \le n \qquad (۱۹)$$

بنابراین دینامیک خطای سنکرون‌سازی به صورت زیر قابل بیان است.

$$ \begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha e_i = e_{i+1} \quad , \quad 1 \le i \le n-1 \\ {}_0^C D_t^\alpha e_n = g(t,\boldsymbol{X}) - f(t,\boldsymbol{Y}) - \Delta f(t,\boldsymbol{Y}) - d(t) - u(t) \end{cases} \qquad (۲۰)$$

فرض. در این مقاله، فرض شده است که تمامی متغیرهای حالت سیستم‌ها به صورت پیوسته مشتق‌پذیرند. بنابراین، متغیرهای حالت خطای سنکرون‌سازی نیز به صورت پیوسته مشتق‌پذیر خواهند بود.

حال یک مجموعه قید برای خطای سنکرون‌سازی تعریف می‌شود.

تعریف ۶. مجموعه قید Ω_E، برای خطای سنکرون‌سازی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ \Omega_E = \{\boldsymbol{E} \in \Re^n : |e_i| \le M \ (1 \le i \le n)\} \qquad (۲۱)$$

که در رابطه فوق $E = [e_1 \quad \cdots \quad e_n]^T$ بردار خطای سنکرون‌سازی و M یک پارامتر از قبل تعیین شده‌اند و به دلیل آشوبناک بودن سیستم‌ها، می‌توان فرض کرد که متغیرهای حالت همواره محدود باقی می‌مانند. بنابراین، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$ \Omega_X = \{\boldsymbol{X} \in \Re^n : \|\boldsymbol{X}\|_2 \le X^u\} \qquad (۲۲)$$

$$ \Omega_Y = \{\boldsymbol{Y} \in \Re^n : \|\boldsymbol{Y}\|_2 \le Y^u\} \qquad (۲۳)$$

که در رابطه فوق X^u و Y^u مقادیری معینند.

با توجه به مطالب فوق، هدف این است که مجموعه Ω_E یک مجموعه جاذب باشد. برای رسیدن به این هدف از یک کنترلر سوپروایزری استفاده خواهد شد. به عبارت دیگر، کنترلر سوپروایزر به گونه‌ای طراحی خواهد شد که

مسیر[1] خطا به داخل مجموعه Ω_E میل کند و بعد از رسیدن به آن در داخل مجموعه باقی بماند. برای راحتی حل مسئله، پارامتر M بیان شده در تعریف این مجموعه، به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که رابطه $nM^2 \geq (X^u + Y^u)^2$ برقرار باشد.

۳-۲- کنترلر مرتبه کسری $PI^\lambda D^\mu$

در تئوری کنترل، کنترلر مرتبه کسری $PI^\lambda D^\mu$ در حوزه زمان به صورت زیر بیان می‌شود.

$$u_{FOPID}(t) = K_P e_1(t) + K_I\, {}_0^{RL}D_t^{-\lambda} e_1(t) + K_D\, {}_0^{C}D_t^{\mu} e_1(t) \tag{۲۴}$$

که در رابطه فوق، K_P، K_I و K_D به ترتیب بهره‌های تناسبی، انتگرالی و مشتقی هستند. برای سادگی به دست آوردن قوانین تطبیق در مراحل بعدی، بردارهای $\mathbf{\Theta}$ و $\mathbf{\Phi}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{\Theta} = [K_P \quad K_I \quad K_D] \tag{۲۵}$$

$$\mathbf{\Phi} = \left[e_1(t) \quad {}_0^{RL}D_t^{-\lambda} e_1(t) \quad {}_0^{C}D_t^{\mu} e_1(t)\right]^T \tag{۲۶}$$

با استفاده از تعاریف ارائه شده کنترلر مرتبه کسری $PI^\lambda D^\mu$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$u_{FOPID}(t) = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Phi} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\theta_i \varphi_i} \tag{۲۷}$$

که در رابطه اخیر $\boldsymbol{\theta_i}$ و $\boldsymbol{\varphi_i}$ به ترتیب درایه‌های بردارهای $\mathbf{\Theta}$ و $\mathbf{\Phi}$ هستند.

۴- تحلیل پایداری و طراحی کنترلر سوپروایزری

برای تحلیل پایداری سیستم کنترلی، تابع لیاپانوف به صورت زیر تعریف شده است.

$$V_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \tag{۲۸}$$

با محاسبه مشتق مرتبه α تابع فوق و استفاده از لم ۱، معادله زیر بدست می‌آید:

$$ {}_0^{C}D_t^{\alpha} V_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {}_0^{C}D_t^{\alpha} e_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} e_i(t)\, {}_0^{C}D_t^{\alpha} e_i(t) \tag{۲۹}$$

با جایگذاری رابطه (۲۰) در (۲۹) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} {}_0^{C}D_t^{\alpha} V_1 &\leq \sum_{i=1}^{n} e_i(t)\, {}_0^{C}D_t^{\alpha} e_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} e_i(t) e_{i+1}(t) + e_n\big(g(t,\boldsymbol{X}) - f(t,\boldsymbol{Y}) - \Delta f(t,\boldsymbol{Y}) - d(t) - u(t)\big) \end{aligned} \tag{۳۰}$$

همانطوری که قبلاً نیز بیان شد ورودی کنترلی شامل دو بخش می‌باشد: کنترلر مرتبه کسری $PI^\lambda D^\mu$ و کنترلر سوپروایزری.

$$u(t) = u_{FOPID}(t) + u_s(t) \tag{۳۱}$$

که در رابطه فوق، $u_s(t)$ ورودی سوپروایزری بوده که به گونه‌ای طراحی خواهد شد که مجموعه Ω_E یک مجموعه جاذب برای سیستم کنترلی باشد. با جایگذاری رابطه (۳۱) در (۳۰):

$$\begin{aligned} {}_0^{C}D_t^{\alpha} V_1 &\leq \sum_{i=1}^{n} e_i(t)\, {}_0^{C}D_t^{\alpha} e_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} e_i(t) e_{i+1}(t) + e_n\big(g(t,\boldsymbol{X}) - f(t,\boldsymbol{Y}) - \Delta f(t,\boldsymbol{Y}) - d(t) - u_{FOPID}(t) - u_s(t)\big) \end{aligned} \tag{۳۲}$$

تابع V_2 به صورت زیر تعریف شده تا به وسیله آن مشخص شود چه زمانی ورودی سوپروایزری فعال خواهد شد.

$$V_2 = \frac{1}{2}\,(X^u + Y^u)^2 \tag{۳۳}$$

زمانی که $|e_i| \geq M$ $(1 \leq i \leq n)$ باشد، می‌توان رابطه زیر را به دست آورد.

$$\begin{aligned} V_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{E}\|_2^2 &\geq \frac{1}{2} n M^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\,(X^u + Y^u)^2 = V_2 \end{aligned} \tag{۳۴}$$

با توجه به رابطه (۳۴)، زمانی که $|e_i| \geq M$ $(1 \leq i \leq n)$ باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$V_1 \geq V_2 \tag{۳۵}$$

بنابراین رابطه (۳۵) نشان می‌دهد که خطای سنکرون‌سازی متعلق به مجموعه Ω_E است. بنابراین از عکس نقیض این گزاره، گزاره زیر به دست می‌آید.

$$V_1 < V_2 \Rightarrow |e_i| < M \quad (1 \leq i \leq n) \tag{۳۶}$$

کنترلر سوپروایزری باید به گونه‌ای انتخاب شود که مشتق تابع لیاپانوف خارج از مجموعه Ω_E منفی معین باشد. بدین منظور، کنترلر سوپروایزری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u_s = \begin{cases} \upsilon & V_1 \geq V_2 \\ 0 & V_1 < V_2 \end{cases} \tag{۳۷}$$

که در رابطه فوق، υ تابعی است که به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \upsilon = sgn(e_n)\big(\{|g(t,\boldsymbol{X})| + |f(t,\boldsymbol{Y})| + \Delta f^u + d^u \\ + |u_{FOPID}|\}\big) \\ + \frac{1}{e_n}\left(K\sum_{i=1}^{n} e_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e_i(t) e_{i+1}(t)\right) \end{aligned} \tag{۳۸}$$

که پارامتر K یک عدد حقیقی مثبت است. باید توجه شود که به دلیل این که ورودی سوپروایزری فقط خارج از مجموعه Ω_E فعال است قرارگیری

[1] Trajectory

عبارت e_n در مخرج مشکلی ایجاد نخواهد کرد. با جایگذاری رابطه (۳۸) در (۳۲)، زمانی که $V_1 \geq V_2$ باشد، رابطه (۳۲) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V_1 \leq & \left(\sum_{i=1}^{n-1} e_i(t)e_{i+1}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} e_i(t)e_{i+1}(t)\right) \\ & +(e_n g(t,\boldsymbol{X}) - |e_n||g(t,\boldsymbol{X})|) \\ & -(e_n f(t,\boldsymbol{Y}) + |e_n||f(t,\boldsymbol{Y})|) \\ & -(e_n \Delta f(t,\boldsymbol{Y}) + |e_n|\Delta f^u) \\ & -(e_n d + |e_n| d^u) \\ & -(e_n u_{FOPID} + |e_n||u_{FOPID}|) \\ & -K\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \end{aligned} \tag{۳۹}$$

از رابطه (۳۹) نتیجه گرفته می‌شود:

$$ {}_0^C D_t^\alpha V_1 \leq -K\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \tag{۴۰}$$

بنابراین، زمانی که $V_1 \geq V_2$ باشد، با استفاده از رابطه (۴۰) کنترلر سوپروایزری تضمین می‌کند که شرایط قضیه ۲ برقرار بوده و مسیر خطای سنکرون‌سازی به سمت مجموعه Ω_E میل خواهد کرد.

۵- قوانین تطبیق

بهره‌های کنترلی مربوط به $PI^\lambda D^\mu$ به صورت تطبیقی بوده و با استفاده از یک روش مبتنی بر کنترل مود لغزشی و گرادیان نزولی این قوانین تطبیق به دست خواهد آمد. ابتدا باید یک سطح لغزش مناسب برای سیستم کنترلی تعریف شود. بدین منظور سیگنال y_r به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ {}_0^C D_t^\alpha y_r = {}_0^C D_t^\alpha x_n + \sum_{i=1}^{n} K_i e_i \tag{۴۱}$$

که پارامترهای K_i دارای مقادیری معین هستند که در بخش‌های بعدی نحوه انتخاب این پارامترها بیان خواهد شد. سطح لغزش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ S = y_n - y_r \tag{۴۲}$$

زمانی که سیستم به سطح لغزش می‌رسد، نتیجه می‌شود:

$$ S = 0 \Rightarrow y_r = y_n \tag{۴۳}$$

با جایگذاری رابطه (۴۳) در (۴۱) می‌توان به دست آورد:

$$ {}_0^C D_t^\alpha e_n + \sum_{i=1}^{n} K_i e_i = 0 \tag{۴۴}$$

معادله دیفرانسیل (۴۴) به صورت فضای حالت زیر قابل بیان است.

$$ {}_0^C D_t^\alpha \mathbf{E} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E} = 0 \tag{۴۵}$$

که ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 & -K_3 & \cdots & -K_{n-1} & -K_n \end{bmatrix} \tag{۴۶}$$

که پارامترهای K_i به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که مقادیر ویژه ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ شرط پایداری سیستم‌های مرتبه کسری همگون را داشته باشد. این شرایط به صورت زیر قابل بیان است.

$$ \arg(\lambda_i) > \alpha\frac{\pi}{2} \tag{۴۷}$$

که λ_i ها نشان‌دهنده مقادیر ویژه ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ هستند. بنابراین با گذشت زمان خطای سنکرون‌سازی به صورت مجانبی به سمت صفر میل می‌کند.

برای به دست آوردن قوانین تطبیق تابع لیاپانوف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ V_s = \frac{1}{2}S^2 \tag{۴۸}$$

مشتق تابع فوق نسبت به زمان به صورت زیر به دست می‌آید.

$$ \dot{V}_s = S\dot{S} \tag{۴۹}$$

شرط رسیدن به سطح لغزش به صورت زیر می‌باشد.

$$ \dot{V}_s = S\dot{S} < 0 \tag{۵۰}$$

از روابط (۴۲) و (۵۰) نتیجه می‌شود:

$$ \dot{V}_s = S(\dot{y}_n - \dot{y}_r) \tag{۵۱}$$

با تبدیل $\dot{y}_n$ به ترکیب دو مشتق کاپوتو، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$ \dot{V}_s = S\,{}_0^C D_t^{1-\alpha}\left({}_0^C D_t^\alpha y_n\right) - S\dot{y}_r \tag{۵۲}$$

با استفاده از روابط (۱۵) و (۳۱) رابطه (۵۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = S\,{}_0^C D_t^{1-\alpha}&(f(t,\boldsymbol{Y}) + \Delta f(t,\boldsymbol{Y}) + d \\ & + u_{FOPID} + u_s) - S\dot{y}_r \end{aligned} \tag{۵۳}$$

قوانین تطبیق از روش گرادیان نزولی با استفاده از شرط لغزش بیان شده در رابطه (۵۰) به عنوان تابع هزینه به دست خواهد آمد. با استفاده از قاعده زنجیری روش گرادیان نزولی به صورت زیر قابل بیان است.

$$ \dot{\theta}_i = -\gamma_i\frac{\partial \dot{V}_s}{\partial \theta_i} = -\gamma_i\frac{\partial \dot{V}_s}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \theta_i} \tag{۵۴}$$

که پارامترهای γ_i ضریب قوانین تطبیق و W به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ W = {}_0^C D_t^{1-\alpha}\, u_{FOPID} \tag{۵۵}$$

با جایگذاری رابطه (۲۷) در رابطه (۵۵) داریم:

$$\begin{aligned} W &= {}_0^C D_t^{1-\alpha}\,(\boldsymbol{\Theta}^T\boldsymbol{\Phi}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} {}_0^C D_t^{1-\alpha}\,(\theta_i\,\varphi_i) \end{aligned} \tag{۵۶}$$

اکنون از قاعده لایب‌نیتز برای مشتق کاپوتو استفاده شده و تابع W را به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$ W = \sum_{i=1}^{3} {}_0^C D_t^{1-\alpha}\,(\theta_i\,\varphi_i) \tag{۵۷}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\theta_i^{(k)}(t)\,{}_a^C D_t^{p-k}\varphi_i$$

با استفاده از روابط (۵۳)، (۵۴) و (۵۷) قوانین تطبیق به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\dot{\Theta}_i = -\gamma_i S\,{}_0^C D_t^{1-\alpha}\varphi_i \tag{۵۸}$$

قوانین تطبیق به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{K}_P = -\gamma_1 S\,{}_0^C D_t^{1-\alpha} e_1 \\ \dot{K}_I = -\gamma_2 S\,{}_0^C D_t^{1-\alpha}\left({}_0^{RL}D_t^{-\lambda} e_1\right) \\ \dot{K}_D = -\gamma_3 S\,{}_0^C D_t^{1-\alpha}\left({}_0^C D_t^{\mu} e_1\right) \end{cases} \tag{۵۹}$$

برای سادگی قوانین تطبیق مربوط به بهره‌های K_I و K_D، مقدار مرتبه انتگرال‌گیر و مشتق‌گیر کنترلر به ترتیب برابر با $\lambda = 2 - \alpha$ و $\mu = \alpha$ در نظر گرفته شده است. در نتیجه قوانین تطبیق نهایی به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\begin{cases} \dot{K}_P = -\gamma_1 S\,{}_0^C D_t^{1-\alpha} e_1 \\ \dot{K}_I = -\gamma_2 S\int_0^t e_1(\tau)\,d\tau \\ \dot{K}_D = -\gamma_3 S\dot{e}_1 \end{cases} \tag{۶۰}$$

۶- نتایج شبیه‌سازی عددی

در این بخش، مسئله سنکرون‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری دافینگ و ژایرو با استفاده از کنترلر تطبیقی مرتبه کسری $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ارائه شده در این مقاله مطرح خواهد شد. نتایج شبیه‌سازی عددی نیز برای نمایش عملکرد مناسب سیستم کنترلی بیان خواهد شد. در تمامی شبیه‌سازی‌های انجام شده در این بخش از روش عددی PECE [۴۰] با گام زمانی ۰،۰۱ برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده شده است.

۶-۱- سیستم دافینگ مرتبه کسری

معادلات دینامیکی سیستم مرتبه کسری دافینگ به فرم فضای حالت به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{a} x_1 = x_2 \\ {}_0^C C_t^{a} x_2 = x_1(t) - a x_2(t) - x_1^3(t) + b\cos(t) \end{cases} \tag{۶۱}$$

در شبیه‌سازی‌های انجام شده در این مقاله مقادیر پارامترهای a و b به ترتیب برابر با ۰،۲۵ و ۰،۳ و مرتبه معادلات دیفرانسیل کسری سیستم ۰،۹۷ در نظر گرفته شده است [۴۱]. در شکل‌های ۲ و ۳ رفتار آشوبناک سیستم دافینگ مرتبه کسری به ازای مقادیر بیان شده برای پارامترهای فوق و شرایط اولیه $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$ نشان داده شده است.

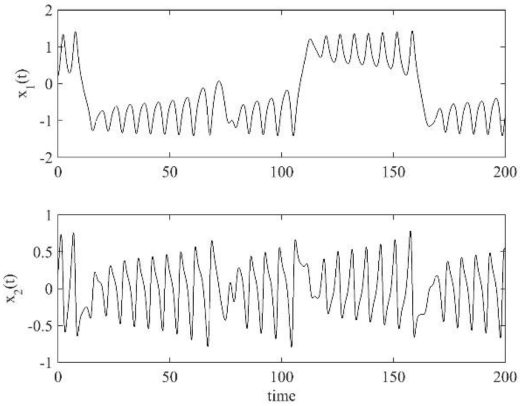


Fig. 2 Time history of state variables of the fractional order Duffing system with initial condition $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$

شکل ۲ تغییرات زمانی متغیرهای حالت سیستم دافینگ مرتبه کسری با شرایط اولیه $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$

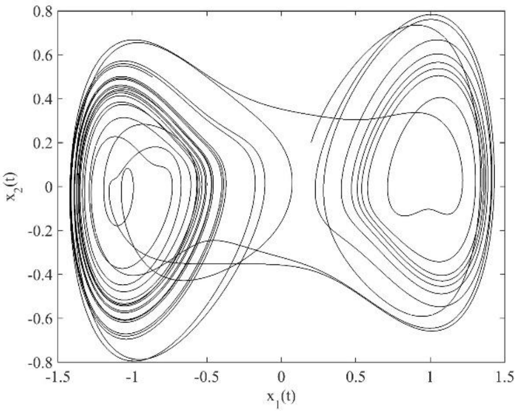


Fig. 3 Phase plane of the fractional order Duffing system with initial condition $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$

شکل ۳ صفحه فاز مربوط به سیستم دافینگ مرتبه کسری با شرایط اولیه= $\boldsymbol{X_0}$ $[0.2 \quad 0.2]^T$

۶-۱- سیستم ژایرو مرتبه کسری

معادلات دینامیکی سیستم ژایرو مرتبه کسری به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{a} x_1 = x_2 \\ {}_0^C C_t^{a} x_2 = -c_1^2\dfrac{(1-\cos x_1)^2}{\sin^3 x_1} - c_3 x_2 \\ \qquad\qquad -c_4 x_2^3 + (c_2 + f\sin\omega t)\sin x_1 \end{cases} \tag{۶۲}$$

که پارامترهای معادله فوق به صورت $c_1 = 10$، $c_2 = 1$، $c_3 = 0.5$، $c_4 = 0.05$، $f = 35.5$، $\omega = 2$ و $\alpha = 0.97$ در نظر گرفته شده است. رفتار آشوبناک این سیستم با شرایط اولیه $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$ در شکل‌های ۴ و ۵ نمایش داده شده است [۴۲].

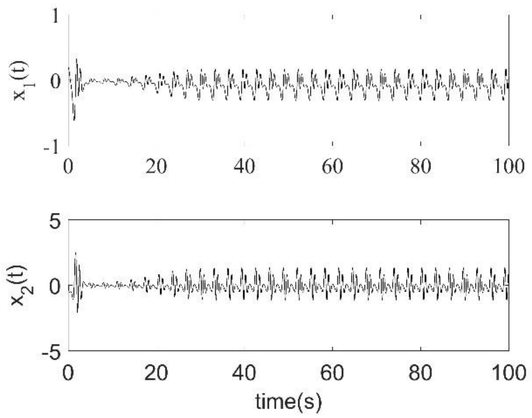


Fig. 4 Time history of state variables of the fractional order gyro system with initial condition $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$

شکل ۴ تغییرات زمانی متغیرهای حالت سیستم ژایرو مرتبه کسری با شرایط اولیه $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$

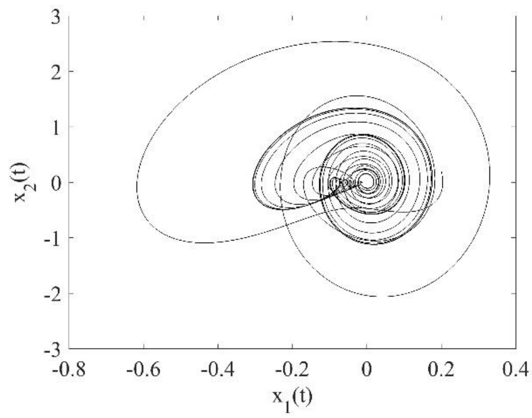


Fig. 5 Phase plane of the fractional order gyro system with initial condition $\boldsymbol{X_0} = [0.2 \quad 0.2]^T$

شکل ۵ صفحه فاز مربوط به سیستم ژایرو مرتبه کسری با شرایط اولیه= $\boldsymbol{X_0}$ $[0.2 \quad 0.2]^T$

۶-۳- سنکرون‌سازی سیستم دافینگ و ژایرو مرتبه کسری

سیستم زیر را به عنوان سیستم master در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{0.97} x_1 = x_2 \\ {}_0^C C_t^{0.97} x_2 = x_1(t) - 0.25 x_2(t) - x_1^3(t) + 0.3\cos(t) \end{cases} \qquad (۶۳)$$

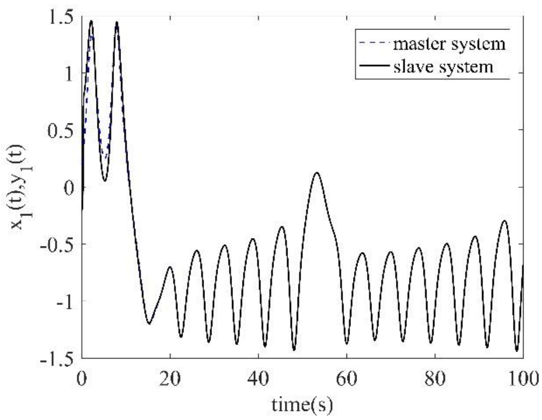
سیستم slave نیز به صورت زیر نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha} y_1 = y_2 \\ {}_0^C D_t^{\alpha} y_2 = -100\dfrac{(1-\cos y_1)^2}{\sin^3 y_1} - 0.5 y_2 \\ -0.05 y_2^3 + (1 + 35.5\sin 2t)\sin y_1 \\ \quad + \Delta f(t, Y) + d(t) + u(t) \end{cases} \qquad (۶۴)$$

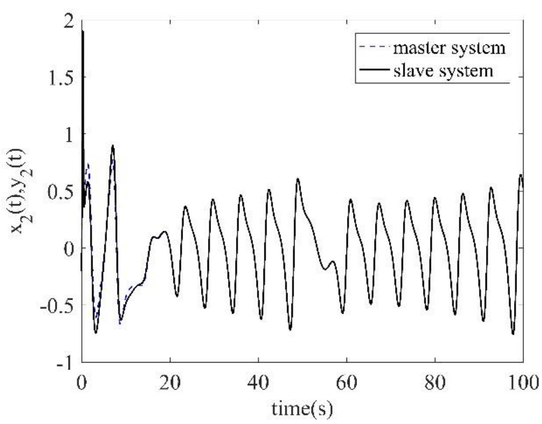
که در رابطه فوق، نامعینی سیستم و اغتشاش به ترتیب به صورت $\Delta f(t,\boldsymbol{Y}) = 0.1\sin(t)\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ و $d(t) = 0.1\sin(t)$ فرض شده است. شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل مربوط به سیستم‌های master و slave را به ترتیب برابر با $[0.2 \quad 0.2]^T$ و $[-0.2 \quad -0.2]^T$ می‌باشد.

پارامترهای به کار رفته در طراحی کنترلر سوپروایزر و سطح لغزش را به صورت $K = 7$، $K_1 = 25$ و $K_2 = 10$ و مرتبه انتگرال و مشتق کنترلر $PI^{\lambda}D^{\mu}$ را برابر با $\lambda = 1.03$ و $\mu = 0.97$، ضریب قوانین تطبیق $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2$ و شرایط اولیه برای قوانین تطبیق به صورت $\boldsymbol{\Theta}(0) = [5 \quad 5 \quad 5]^T$ در نظر گرفته می‌شود.

نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۶ الی ۹ نشان داده شده است. شکل‌های ۶ و ۷ تغییرات زمانی متغیرهای حالت دو سیستم و خطای سنکرون‌سازی را نشان می‌دهند. همان طوری که در این شکل‌ها ملاحظه می‌شود پس از مدت زمان کوتاهی متغیرهای حالت سیستم slave به متغیرهای حالت سیستم master و خطای سنکرون‌سازی به صفر میل می‌کنند. شکل ۸ تغییرات زمانی سطح لغزش را بیان می‌کند که در این شکل نیز همانطوری که مشاهده می‌شود، سطح لغزش با گذشت زمان به صفر میل می‌کند. به عبارت دیگر، سیستم به سطح لغزش رسیده و روی آن باقی می‌ماند. در شکل ۹ نیز تغییرات زمانی بهره‌های کنترلی نشان داده شده است که پس از مدت زمان کوتاهی به مقدار معینی رسیده‌اند.



(الف)



(ب)

Fig. 6 Time history of the state variables of the slave and master systems (a) first state variable, (b) second state variable

شکل ۶ تغییرات زمانی متغیرهای حالت سیستم‌های slave و master، (الف) متغیر حالت اول، (ب) متغیر حالت دوم

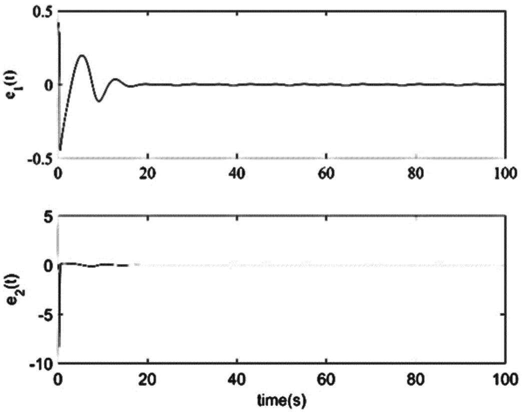


Fig. 7 Time history of the synchronization errors

شکل ۷ تغییرات زمانی خطای سنکرون‌سازی

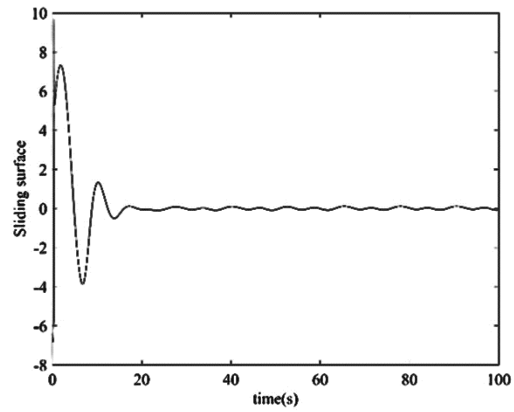


Fig. 8 Time history of the sliding surface

شکل ۸ تغییرات زمانی سطح لغزش

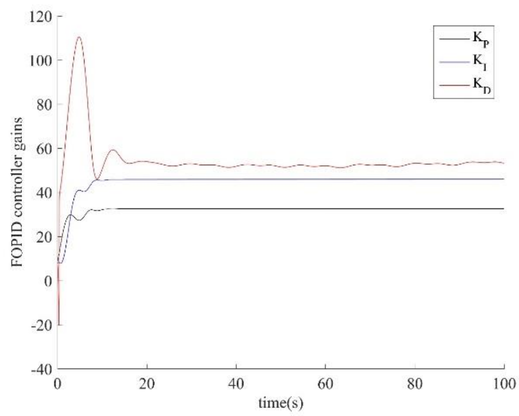


Fig. 9 Time history of the $\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$ controller gains

شکل ۹ تغییرات زمانی بهره‌های کنترلی $PI^{\lambda}D^{\mu}$

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کنترلی برای سنکرون‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری دارای نامعینی و اغتشاش معرفی شده است. روش کنترلی ارائه شده برمبنای کنترلر تطبیقی مرتبه کسری $PI^{\lambda}D^{\mu}$ می‌باشد. بهره‌های کنترلی به صورت بلادرنگ قابل تنظیم بوده و با استفاده از روش گردیان نزولی و کنترل مود لغزشی به دست آمده است. برای بررسی پایداری سیستم کنترلی نیز از یک کنترلر سوپروایزری بهره گرفته شده است. روش ارائه شده داری مزایای متعددی است که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به مقاوم بودن نسبت به نامعینی سیستم و اغتشاش خارجی اشاره کرد. مزیت دیگر آن سادگی ساختار کنترلر برای اعمال بر روی سیستم‌های مختلف و عملکرد مناسب آن می‌باشد. در نهایت، برای اعتبارسنجی روش ارائه شده این کنترلر برای سنکرون‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری دافینگ و ژایرو استفاده شده است که نتایج مناسب به دست آمده، گویای عملکرد آن می‌باشد.

۶- مراجع

[1] E. E. Peters, *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*: John Wiley & Sons, 1994.

[2] O. E. Rössler, Chaos and chemistry, *Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics*, pp. 79-87: Springer, 1981.

[3] P. E. Rapp, Chaos in Biology: Chaos in the neurosciences: cautionary tales from the frontier, *BIOLOGIST-INSTITUTE OF BIOLOGY*, vol. 40, pp. 89-89, 1993.

[4] Y. Chen, A. Y. Leung, *Bifurcation and chaos in engineering*: Springer Science & Business Media, 2012.

[5] G. Chen, Control and synchronization of chaos, a bibliography, Dept. of Elect, *Eng., Univ. Houston, TX*, 1997.

[6] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical review letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821, 1990.

[7] J. Grzybowski, M. Rafikov, and J. M. Balthazar, Synchronization of the unified chaotic system and application in secure communication, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, no. 6, pp. 2793-2806, 2009.

[8] H. Zhang, W. Huang, Z. Wang, T. Chai, Adaptive synchronization between two different chaotic systems with unknown parameters, *Physics Letters A*, vol. 350, no. 5, pp. 363-366, 2006.

[9] S. Jeong, D. Ji, J. H. Park, S. Won, Adaptive synchronization for uncertain chaotic neural networks with mixed time delays using fuzzy disturbance observer, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 11, pp. 5984-5995, 2013.

[10] S. Vaidyanathan, Adaptive synchronization of chemical chaotic reactors, *International Journal of ChemTech Research*, vol. 8, pp. 612-621, 2015.

[11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*: Academic Press, San Diego - New York - London, 1999.

[12] R. L. Bagley, R. Calico, Fractional order state equations for the control of viscoelasticallydamped

[30] D.-y. Chen, Y.-x. Liu, X.-y. Ma, R.-f. Zhang, Control of a class of fractional-order chaotic systems via sliding mode, *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 1, pp. 893-901, 2012.

[31] P. Arena, R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto, Chaos in a fractional order Duffing system.

[32] C. Li, G. Chen, Chaos in the fractional order Chen system and its control, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 22, no. 3, pp. 549-554, 2004.

[33] M. S. Tavazoei, M. Haeri, M. Attari, S. Bolouki, M. Siami, More details on analysis of fractional-order van der Pol oscillator, *Journal of Vibration and Control*, vol. 15, no. 6, pp. 803-819, 2009.

[34] C. Li, G. Chen, Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 341, pp. 55-61, 2004.

[35] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo, H. K. Qammer, Chaos in a fractional order Chua's system, *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 8, pp. 485-490, 1995.

[36] R. Zhang, S. Yang, Robust chaos synchronization of fractional-order chaotic systems with unknown parameters and uncertain perturbations, *Nonlinear Dynamics*, vol. 69, no. 3, pp. 983-992, 2012.

[37] L. X. Yang, W. S. He, J. P. Jia, F. D. Zhang, Adaptive Synchronization of Fractional Hyper-Chaotic System with Unknown Parameters. pp. 868-871.

[38] R. Zhang, S. Yang, Adaptive synchronization of fractional-order chaotic systems via a single driving variable, *Nonlinear Dynamics*, vol. 66, no. 4, pp. 831-837, 2011.

[39] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, J. A. Gallegos, Lyapunov functions for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 9, pp. 2951-2957, 2014.

[40] K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, Y. Luchko, Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 194, no. 6, pp. 743-773, 2005.

[41] Z.-M. Ge, C.-Y. Ou, Chaos in a fractional order modified Duffing system, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 34, no. 2, pp. 262-291, 2007.

[42] M. P. Aghababa, H. P. Aghababa, The rich dynamics of fractional-order gyros applying a fractional controller, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 227, no. 7, pp. 588-601, 2013.

structures, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 2, pp. 304-311, 1991.

[13] R. L. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*: Begell House Redding, 2006.

[14] M. Benmalek, A. Charef, Digital fractional order operators for R-wave detection in electrocardiogram signal, *Signal Processing, IET*, vol. 3, no. 5, pp. 381-391, 2009.

[15] O. Enacheanu, D. Riu, N. Retière, P. Enciu, Identification of fractional order models for electrical networks. pp. 5392-5396.

[16] N. Engheia, On the role of fractional calculus in electromagnetic theory, *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, vol. 39, no. 4, pp. 35-46, 1997.

[17] H. Sadeghian, H. Salarieh, A. Alasty, A. Meghdari, Controllability of linear fractional stochastic systems, *Scientia Iranica. Transaction B, Mechanical Engineering*, vol. 22, no. 1, pp. 264, 2015.

[18] Y. Chen, I. Petráš, D. Xue, Fractional order control-a tutorial. pp. 1397-1411.

[19] A. Radwan, K. Moaddy, K. Salama, S. Momani, I. Hashim, Control and switching synchronization of fractional order chaotic systems using active control technique, *Journal of advanced research*, vol. 5, no. 1, pp. 125-132, 2014.

[20] K. Mathiyalagan, J. H. Park, R. Sakthivel, Exponential synchronization for fractional-order chaotic systems with mixed uncertainties, *Complexity*, 2014.

[21] I. Podlubny, Fractional-order systems and PI/sup/spl lambda//D/sup/spl mu//-controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 208-214, 1999.

[22] Y. Luo, Y. Q. Chen, C. Y. Wang, Y. G. Pi, Tuning fractional order proportional integral controllers for fractional order systems, *Journal of Process Control*, vol. 20, no. 7, pp. 823-831, 2010.

[23] Y. Luo, Y. Chen, Fractional order [proportional derivative] controller for a class of fractional order systems, *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2446-2450, 2009.

[24] C. A. Monje, A. J. Calderón, B. M. Vinagre, V. Feliu, The fractional order lead compensator. pp. 347-352.

[25] A. Oustaloup, J. Sabatier, P. Lanusse, From fractal robustness to CRONE control, *Fract. Calc. Appl. Anal*, vol. 2, no. 1, pp. 1-30, 1999.

[26] M. Abedini, M. A. Nojoumian, H. Salarieh, A. Meghdari, Model reference adaptive control in fractional order systems using discrete-time approximation methods, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 25, no. 1, pp. 27-40, 2015.

[27] B. Shi, J. Yuan, C. Dong, On fractional model reference adaptive control, *The Scientific World Journal*, vol. 2014, 2014.

[28] B. Yaghooti, H. Salarieh, Robust adaptive fractional order proportional integral derivative controller design for uncertain fractional order nonlinear systems using sliding mode control, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 232, no. 5, pp. 550-557, 2018.

[29] T. Binazadeh, M. Shafiei, Output tracking of uncertain fractional-order nonlinear systems via a novel fractional-order sliding mode approach, *Mechatronics*, vol. 23, no. 7, pp. 888-892, 2013.