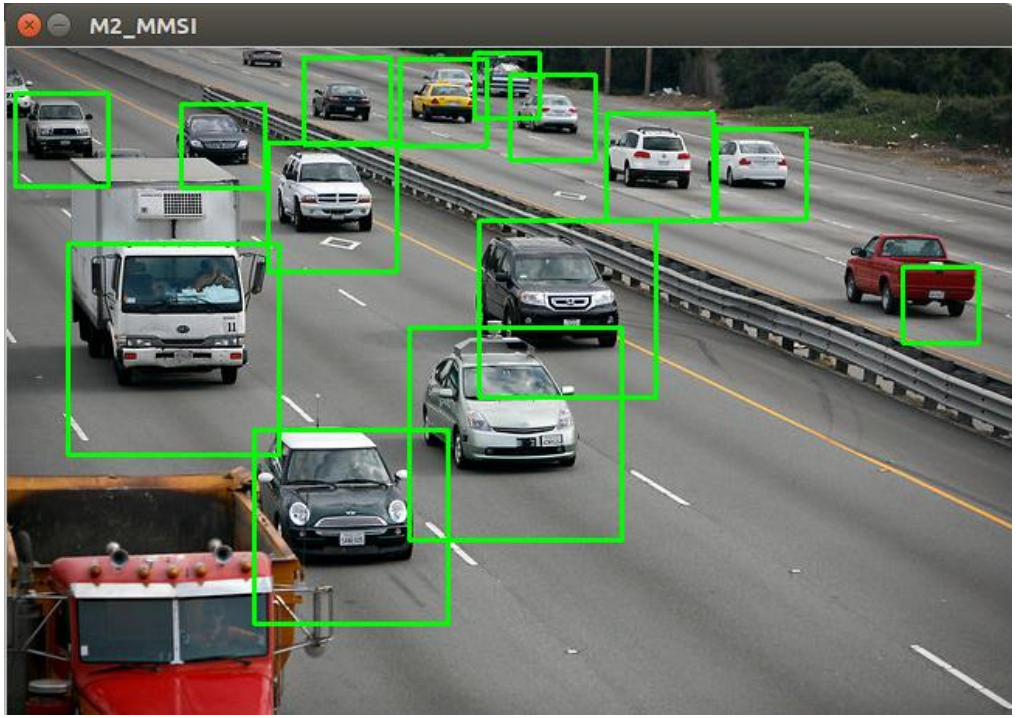
UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

Réseaux de Neurones et Traitement d'Images en Temps Réel

Brahim Yahiaoui
byahiaoui@nexyad.net

Présentation du cours

- Introduction et prise en main de OpenCV
- Les réseaux de neurones dans l’image
- Traitements des signaux en temps réel



UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

Traitements des signaux en temps réel

La Méthode des Moindres Carrés (Rappel)

- Soit le problème d'optimisation suivant :
  - On cherche à optimiser une erreur donnée sous la forme suivante :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

  - Minimiser l'erreur revient à résoudre :

$$\exists \hat{\mathbf{x}} : \nabla J(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$$

La Méthode des Moindres Carrés (Rappel)

- Soit le problème d'optimisation suivant :
  - On cherche à optimiser une erreur donnée sous la forme suivante :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

  - Minimiser l'erreur revient à résoudre :

$$\exists \hat{\mathbf{x}} : \nabla J(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}}$$

La Méthode des Moindres Carrés Généralisée

- Soit $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma})$

  et Γ une matrice diagonale

Sa fonction coût correspond à

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

La Méthode des Moindres Carrés Généralisée

- Soit $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma})$

  et Γ une matrice diagonale

Sa fonction coût correspond à

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

- L’estimateur est :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}}$$

La Méthode des Moindres Carrés Généralisée

- Soit $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma})$

  et Γ une matrice diagonale

Sa fonction coût correspond à

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

- L'estimateur est :

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}}$$

- La Borne de Camer-Rao pour cet estimateur est égale à sa variance $(\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- Permet de recalculer l’estimateur à chaque arrivé d’une nouvelle donnée

- Converge vers l’estimateur obtenu avec la méthode de moindres carrées généralisée pour le même nombres de points

$$\mathbf{y}'_k = \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'^{(k)} + \mathbf{b}'_k$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- Permet de recalculer l’estimateur à chaque arrivé d’une nouvelle donnée

- Converge vers l’estimateur obtenu avec la méthode de moindres carrées généralisée pour le même nombres de points

$$\mathbf{y'}_k = \mathbf{A'}_k \mathbf{x'}^{(k)} + \mathbf{b'}_k$$

$$J'_k(\mathbf{x'}^{(k)}) = (\mathbf{A'}_k \mathbf{x'}^{(k)} - \mathbf{y'}_k)^T \mathbf{\Gamma'}^{-1}_k (\mathbf{A'}_k \mathbf{x'}^{(k)} - \mathbf{y'}_k)$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- De *k* à *k+1*

$$\mathbf{y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{A}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_k \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}'^{-1}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}^{-1}_{k+1} \end{pmatrix}$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- De k à $k+1$

$$\mathbf{y'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y'}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{A'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A'}_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b'}_k \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma'}^{-1}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}^{-1}_{k+1} \end{pmatrix}$$

- On a aussi

$$J'_{k+1} = (\mathbf{A'}_{k+1}\mathbf{x'}^{(k+1)} - \mathbf{y'}_{k+1})^T \mathbf{\Gamma'}^{-1}_{k+1} (\mathbf{A'}_{k+1}\mathbf{x'}^{(k+1)} - \mathbf{y'}_{k+1})$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- De k à $k+1$

$$\mathbf{y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{A}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_k \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}'^{-1}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}^{-1}_{k+1} \end{pmatrix}$$

- On a aussi

$$J'_{k+1} = (\mathbf{A}'_{k+1}\mathbf{x}'^{(k+1)} - \mathbf{y}'_{k+1})^T \mathbf{\Gamma}'^{-1}_{k+1} (\mathbf{A}'_{k+1}\mathbf{x}'^{(k+1)} - \mathbf{y}'_{k+1})$$

$$J'_{k+1} = J'_k + (\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})^T \mathbf{\Gamma}^{-1}_{k+1} (\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- De k à $k+1$

$$\mathbf{y'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y'}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{A'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A'}_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b'}_k \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma'}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma'}_k^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{k+1}^{-1} \end{pmatrix}$$

- On a aussi

$$J'_{k+1} = (\mathbf{A'}_{k+1}\mathbf{x'}^{(k+1)} - \mathbf{y'}_{k+1})^T \mathbf{\Gamma'}^{-1}_{k+1} (\mathbf{A'}_{k+1}\mathbf{x'}^{(k+1)} - \mathbf{y'}_{k+1})$$

$$J'_{k+1} = J'_k + (\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})^T \mathbf{\Gamma}^{-1}_{k+1} (\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})$$

$$J_k = (\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})^T \mathbf{\Gamma}^{-1}_{k+1} (\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})$$

$$\boxed{min_X(J'_{k+1}) = min(min_X(J'_k), min_X(J_k))}$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- Pour adapter l'erreur sur Γ_{k+1} Kalman à calculé un gain multiplicatif au résidu donnant une nouvelle forme à la méthode des moindres carrées récursives suivante

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{A}_{k+1}^T (\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{A}_{k+1}^T)^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \mathbf{P}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_k) \end{cases}$$

- $\mathbf{K}$ est appelé le gain de Kalman (Nous n'aborderons pas son calcul)
- $\mathbf{P}$ est la variance de l'erreur

La Méthode des Moindres Carrées Récursives avec évolution en temps

- Introduction de la prédiction

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\texttt{Prédiction :} \\
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_k \\
\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}\mathbf{P}_k\mathbf{M}^T
\end{aligned} \\
\texttt{Mise à jour :} \\
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T(\mathbf{\Gamma}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T)^{-1} \\
\mathbf{P}_{k+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{A}_{k+1})\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} \\
\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{M}} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}})
\end{aligned}
\end{array}
\right.
$$

- $\mathbf{M}$ est la matrice modélisant l’évolution

Filtre de Kalman linéaire discret

- En pratique, on utilise le filtre suivant

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\texttt{Prédiction :} \\
\qquad \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_k \\
\qquad \mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{P}_k\mathbf{M}^T + \mathbf{Q} \\
\texttt{Mise à jour :} \\
\qquad \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T(\mathbf{\Gamma}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T)^{-1} \\
\qquad \mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{A}_{k+1})\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} \\
\qquad \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{M}} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}})
\end{array}
\right.
$$

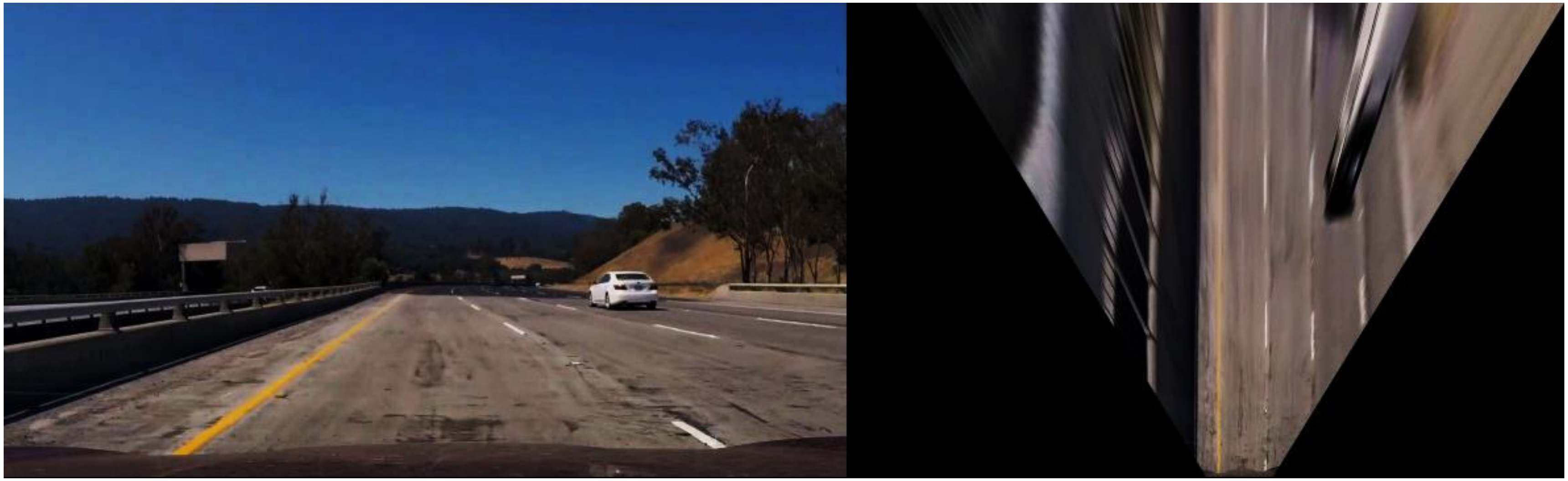
- $\mathbf{Q}$ est la matrice de covariance du bruit d’état

UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

Projet « Estimation en Temps Réel de Vitesses de Véhicules avec une Caméra »

Qu’est ce que la transformation géométrique Bird Eye ?

C’est une transformation géométrique des coordonées pixels vers des coordonnées xy en vue du dessus.



Action : Ouvrir Octave…

Présentation du projet

- Repris à partir de l'exercice2 du TP3

- Modéliser le problème de suivi de détections par filtre de Kalman en 2D (Bird Eye)
- Coder le modèle en enrichissant le projet avec votre code

- Objectif : trouver la vitesse de chaque véhicule

Références

- [Lien1] Michel Llibre, Résolution de systèmes linéaires, Moindres carrés récursifs et Filtre de Kalman discret, Version 1.0, Ref. DCSD-2008_069-NOT-001-1.0, Onera 2008

- [Lien2] Ferdinand Piette, Le filtre de Kalman étendu : principe et exemple, http://www.ferdinandpiette.com, 2011