

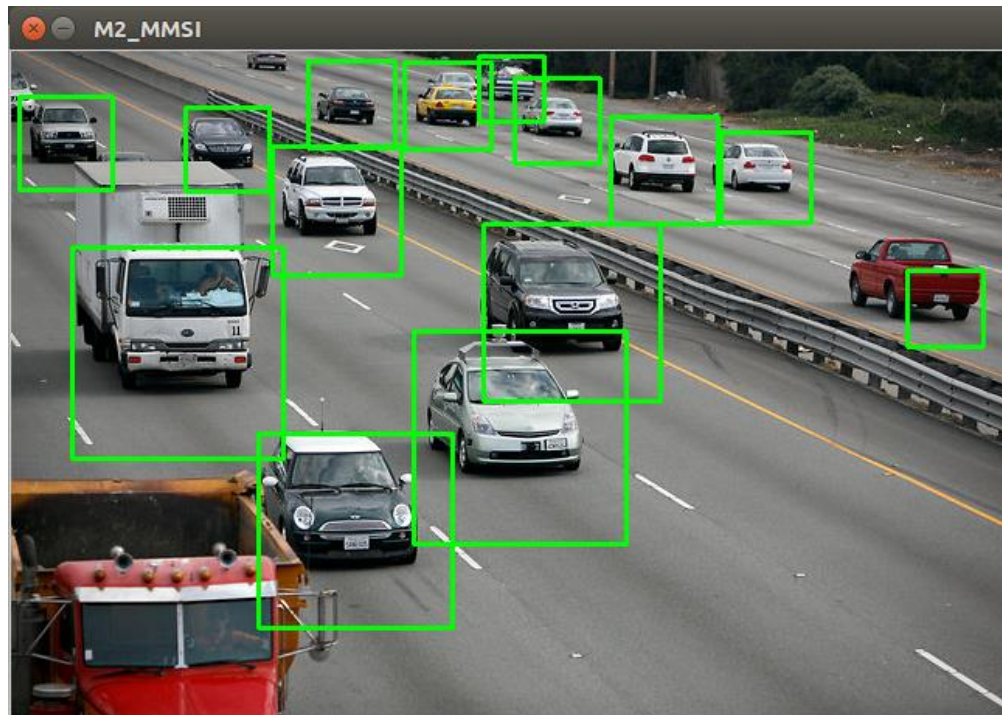


Réseaux de Neurones et Traitement d'Images en Temps Réel

Brahim Yahiaoui
byahiaoui@nxyad.net

Présentation du cours

- Introduction et prise en main de OpenCV
- Les réseaux de neurones dans l'image
- Traitements des signaux en temps réel





Traitements des signaux en temps réel

La Méthode des Moindres Carrés (Rappel)

- Soit le problème d'optimisation suivant :
 - On cherche à optimiser une erreur donnée sous la forme suivante :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})$$

- Minimiser l'erreur revient à résoudre :

$$\exists \hat{\mathbf{x}} : \nabla J(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

La Méthode des Moindres Carrés (Rappel)

- Soit le problème d'optimisation suivant :
 - On cherche à optimiser une erreur donnée sous la forme suivante :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})$$

- Minimiser l'erreur revient à résoudre :

$$\exists \hat{\mathbf{x}} : \nabla J(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}}$$

Estimateur Statistique des Moindres Carrés

- Soit $y = Ax + b$ avec $b \sim N(0, \Gamma)$
et Γ une matrice diagonale

Sa fonction coût correspond à

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T \Gamma^{-1} (\mathbf{Ax} - \mathbf{y})$$

Estimateur Statistique des Moindres Carrés

- Soit $y = Ax + b$ avec $b \sim N(0, \Gamma)$
et Γ une matrice diagonale

Sa fonction coût correspond à

$$J(x) = (Ax - y)^T \Gamma^{-1} (Ax - y)$$

- L'estimateur est :

$$\hat{x} = (A^T \Gamma^{-1} A)^{-1} A^T \Gamma^{-1} y$$

Estimateur Statistique des Moindres Carrés

- Soit $y = Ax + b$ avec $b \sim N(0, \Gamma)$
et Γ une matrice diagonale

Sa fonction coût correspond à

$$J(x) = (Ax - y)^T \Gamma^{-1} (Ax - y)$$

- L'estimateur est :

$$\hat{x} = (A^T \Gamma^{-1} A)^{-1} A^T \Gamma^{-1} y$$

- La Borne de Camer-Rao pour cet estimateur est égale à sa variance $(A^T \Gamma^{-1} A)^{-1}$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- Permet de recalculer l'estimateur à chaque arrivé d'une nouvelle donnée
- Converge vers l'estimateur obtenu pour avec la méthode de moindres carrés ordinaires pour le même nombres de points

$$\mathbf{y}'_k = \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'^{(k)} + \mathbf{b}'_k$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- Permet de recalculer l'estimateur à chaque arrivé d'une nouvelle donnée
- Converge vers l'estimateur obtenu pour avec la méthode de moindres carrés ordinaires pour le même nombres de points

$$\mathbf{y}'_k = \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'^{(k)} + \mathbf{b}'_k$$

$$J'_k(\mathbf{x}'^{(k)}) = (\mathbf{A}'_k \mathbf{x}'^{(k)} - \mathbf{y}'_k)^T \mathbf{\Gamma}'_k^{-1} (\mathbf{A}'_k \mathbf{x}'^{(k)} - \mathbf{y}'_k)$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- De k à $k+1$

$$\mathbf{y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{A}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_k \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}'^{-1}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{k+1}^{-1} \end{pmatrix}$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- De k à $k+1$

$$\mathbf{y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{A}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_k \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}'_k{}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{k+1}^{-1} \end{pmatrix}$$

- La forme itérative est déduite à partir de

$$J'_{k+1} = (\mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{x}'^{(k+1)} - \mathbf{y}'_{k+1})^T \mathbf{\Gamma}'_{k+1}{}^{-1} (\mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{x}'^{(k+1)} - \mathbf{y}'_{k+1})$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- De k à $k+1$

$$\mathbf{y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{A}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_k \\ \mathbf{b}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}'_k{}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{k+1}^{-1} \end{pmatrix}$$

- La forme itérative est déduite à partir de

$$J'_{k+1} = (\mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{x}'^{(k+1)} - \mathbf{y}'_{k+1})^T \mathbf{\Gamma}'_{k+1}{}^{-1} (\mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{x}'^{(k+1)} - \mathbf{y}'_{k+1})$$

$$J'_{k+1} = J'_k + (\mathbf{A}_{k+1} \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})^T \mathbf{\Gamma}_{k+1}^{-1} (\mathbf{A}_{k+1} \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{k+1})$$

La Méthode des Moindres Carrées Récursives

- On arrive à la forme récursive suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k \mathbf{A}_{k+1}^T (\mathbf{\Gamma}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{A}_{k+1}^T)^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \mathbf{P}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_k) \end{array} \right.$$

- \mathbf{K} est appelé le gain de Kalman
- \mathbf{P} est la variance de l'erreur

La Méthode des Moindres Carrées Récursives avec évolution en temps

- Introduction de la prédiction

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Prédiction :} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{P}_k\mathbf{M}^T \\ \text{Mise à jour :} \\ \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T(\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T)^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{A}_{k+1})\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{M}} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}}) \end{array} \right.$$

- \mathbf{M} est la matrice modélisant l'évolution

Filtre de Kalman linéaire discret

- En pratique, on utilise le filtre suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Prédiction :} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{P}_k\mathbf{M}^T + \mathbf{Q} \\ \text{Mise à jour :} \\ \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T(\mathbf{\Gamma}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}}\mathbf{A}_{k+1}^T)^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{A}_{k+1})\mathbf{P}_k^{\mathbf{M}} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{M}} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\mathbf{M}}) \end{array} \right.$$

- \mathbf{Q} est la matrice de covariance du bruit d'état



Projet « Estimation en Temps Réel de Vitesses de Véhicules avec une Caméra »

Qu'est ce que la transformation géométrique Bird Eye ?

C'est une transformation géométrique des coordonnées pixels vers des coordonnées xy en vue du dessus.



Action : Ouvrir Octave...

Présentation du projet

- Repris à partir de l'exercice2 du TP3
- Modéliser le problème de suivi de détections par filtre de Kalman en 2D (Bird Eye)
- Coder le modèle en enrichissant le projet avec votre code
- Objectif : trouver la vitesse de chaque véhicule

Références

- [[Lien1](#)] Michel Llibre, Résolution de systèmes linéaires, Moindres carrés récurrents et Filtre de Kalman discret, Version 1.0, Ref. DCSD-2008_069-NOT-001-1.0, Onera 2008
- [[Lien2](#)] Ferdinand Piette, Le filtre de Kalman étendu : principe et exemple, <http://www.ferdinandpiette.com>, 2011