10. Операционное исчисление

10.1. Историческая справка

Операционное или так называемое символическое исчисление возникло в конце XIX века. Автор исчисления английский инженер-электрик О.Хевисайд (1850-1925) изложил его в виде ряда формальных правил без глубокого математического обоснования. В 20-х гг. двадцатого столетия было установлено, что в основе операционного исчисления лежат интегральные преобразования – одно из наиболее мощных и широко используемых математических средств решения различных прикладных задач. Суть операционного исчисления состоит в том, что исследование функции $f(x)$ заменяется исследованием ее интегрального преобразования Лапласа. При этом, как правило, сложные уравнения для $f(x)$ превращаются в простые соотношения для ее интегрального преобразования. Например, аналитические действия интегрирования и дифференцирования заменяются совокупностью алгебраических операций, что в значительной мере упрощает исследуемую задачу. В связи с этим операционное исчисление нашло многостороннее и плодотворное использование в прикладной математике, физике, электро - и радиотехнике и в других инженерных дисциплинах.

10.2. Основные понятия

Определение 10.1. Любая комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, это значит, что она либо непрерывна, либо в каждом конечном интервале имеет лишь конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции (имеет ограниченную степень роста), т.е. существует такое положительное число $M > 0$ и такое неотрицательное число $s_0 \geq 0$, что для всех

$t \ge 0$ выполняется неравенство: $|f(t)| \le M \cdot e^{s_0 t}$ (число s_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$).

Рассмотрим произведение функции $f(t)$ на комплексную функцию e^{-pt} действительной переменной t, где $p = a + ib$, при этом $a > s_0 > 0$: $f(t) \cdot e^{-pt}$; а также несобственный интеграл первого рода $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$:

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt - i \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin bt dt.$$

Покажем, что при $a > s_0$ данные интегралы сходятся, причем абсолютно

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt \right| \le \int_0^{\infty} \left| e^{-at} f(t) \underbrace{\cos bt}_{\le 1} \right| dt \le \left\{ f(t) \le M e^{s_0 t} \right\} \le \int_0^{\infty} e^{-at} M e^{s_0 t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} M e^{-(a-s_0)t} dt = M \cdot \frac{1}{-(a-s_0)} e^{-(a-s_0)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{a-s_0}.$$

Аналогичная оценка дается и второму интегралу.

Таким образом интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ существует и является сходящимся, то есть он определяют некоторую функцию от p: $\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt}$.

Определение 10.2. Функция $F(p)$ называется **изображением** (Лапласовым изображением) функции $f(t)$: $f(t) \risingdotseq F(p)$. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**.

Пример 10.1. Найдите изображение функции Хевисайда $f(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Решение

Вычислим изображение $F(p)$ по определению:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} e^{-pt} dt = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Big|_0^{b} = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}$$

Ответ: $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$.

Таблица оригиналов и их изображений

№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$t^n \cdot e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
6	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
7	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
8	$\mathrm{sh}\, \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
9	$\mathrm{ch}\, \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
10	$e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
11	$e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
12	$t \cdot \sin \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
13	$t \cdot \cos \alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$

Доказательство данных формул проводится по определению.

Свойства изображений и оригиналов

1° (линейность) Изображение линейной комбинации нескольких оригиналов равно такой же линейной комбинации их изображений:

если $f(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$, то $F(p)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i F_i(t)$, где $f_i(t) \risingdotseq F_i(p)$.

2° (подобие) Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то при $\alpha>0$: $f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

▲ По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt = \begin{Bmatrix} \alpha t = y \ \Rightarrow \ t=\frac{y}{\alpha} \Rightarrow dt = \frac{1}{\alpha}dy \\ t=0 \Rightarrow y=0 \qquad t=+\infty \Rightarrow y=+\infty \end{Bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} f(y)\cdot \exp\left(-\frac{py}{\alpha}\right)dy = \begin{Bmatrix} \textit{определенный интеграл не зависит} \\ \textit{от способа обозначения переменной} \end{Bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cdot \exp\left(-\frac{pt}{\alpha}\right)dt = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \ \Delta$$

3° (смещение) Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha)$.

▲ По определению

$$e^{\alpha t} f(\alpha t) \ \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt = F(p-\alpha). \ \ \Delta$$

4° (запаздывание) Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(t-\alpha) \ \risingdotseq e^{-p\alpha}F(p)$ где $\alpha>0$.

▲ По определению

$$f(t-\alpha) \leftrightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t-\alpha)e^{-pt}dt = \begin{Bmatrix} t-\alpha = y \ \Rightarrow \ dt=dy \\ t=0 \Rightarrow y=-\alpha \\ t=+\infty \Rightarrow y=+\infty \end{Bmatrix} = \int\limits_{-\alpha}^{+\infty} f(y)e^{-p(y+\alpha)}dy = \begin{Bmatrix} f(y)\equiv 0 \\ \text{при} \ \ y<0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(y)e^{-py}e^{-p\alpha}dy = e^{-p\alpha}\int\limits_0^{+\infty} f(y)e^{-py}dy = e^{-p\alpha}\cdot F(p). \ \ \Delta$$

5° (дифференцирование изображения) Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

▲ Докажем, что $F'(p) \doteqdot -t\cdot f(t)$

$$F'(p)=\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)_p^{/} = \int_0^{+\infty}\left(f(t)e^{-pt}\right)_p^{/}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\cdot(-t)dt = \int_0^{+\infty}\left(-t\cdot f(t)\right)e^{-pt}dt \doteqdot -t\cdot f(t)$$

6° (дифференцирование оригинала) Если $f(t)\doteqdot F(p)$, функции $f^{/}(t),\ f^{//}(t),\ldots,\ f^{(n)}(t)$ также являются оригиналами, то справедливы следующие формулы:

$f^{/}(t)\doteqdot p\cdot F(p)-f(0)$

$f^{//}(t)\doteqdot p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-f^{/}(0)$

$f^{///}(t)\doteqdot p^3\cdot F(p)-p^2\cdot f(0)-p\cdot f^{/}(0)-f^{//}(0)$

…

$f^{(n)}(t)\doteqdot p^n\cdot F(p)-p^{n-1}\cdot f(0)-p^{n-2}\cdot f^{/}(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$

7° (умножение изображений)

Для формулировки данного свойства необходимо дополнительное определение.

Определение 10.3. Сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется интеграл вида $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$.

Если $f_1(t)\doteqdot F_1(p)$ и $f_2(t)\doteqdot F_2(p)$, то $F_1(p)\cdot F_2(p)\doteqdot f_1(t)*f_2(t)$.

8° (интегрирование изображения)

Если $f(t)\doteqdot F(p)$ и несобственный интеграл $\int_p^{+\infty}F(\xi)d\xi$ является сходящимся, то $\int_p^{+\infty}F(\xi)d\xi \doteqdot \frac{f(t)}{t}$

▲ По определению

$$\int\limits_p^{+\infty} F(\xi)d\xi = \int\limits_p^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-\xi t}dt\right)d\xi = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\left(\int\limits_p^{+\infty} e^{-\xi t}d\xi\right)dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\left(\lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{t}e^{-\xi t}\Big|_p^b\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(t)\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\cdot e^{-pt}dt. \ \Delta$$

9° (интегрирование оригинала) Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

Рассмотрим некоторые примеры нахождения изображений для данных оригиналов.

Пример 10.2. Найдите отображение $F(p)$ для оригинала $f(t) = e^{-2t}\cdot\cos^2 t$.

<u>Решение</u>

Преобразуем оригинал $f(t)$, используя формулу понижения степени для $\cos^2 t$:

$$f(t) = e^{-2t}\cdot\cos^2 t = \frac{1}{2}e^{-2t}(1+\cos 2t) = \frac{1}{2}\left(e^{-2t} + e^{-2t}\cos 2t\right),$$

тогда по формулам 3) и 10) из таблицы изображений

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2} + \frac{p+2}{(p+2)^2+4}\right).$$

Ответ: $F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2} + \frac{p+2}{(p+2)^2+4}\right)$.

10.3. Нахождение оригинала по изображению

Рассмотрим вопрос о восстановлении оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$.

Отметим, что в некоторых простейших случаях восстановить функцию-оригинал по ее изображению можно используя таблицу основных изображений, а также свойства.

Пример 10.3. Найдите оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)=\dfrac{7}{p^2+10p+41}$.

Решение

Преобразуем изображение

$$F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}=\frac{7}{(p+5)^2+16}=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{(p+5)^2+4^2},$$

тогда по формуле 11) таблицы изображений $f(t)=\dfrac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t$.

Ответ: $f(t)=\dfrac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t$.

Пример 10.4. Найдите оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{1}{p(p+1)^2}$.

Решение

Представим дробь $F(p)=\dfrac{1}{p(p+1)^2}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p+1)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{(p+1)^2}=\frac{A(p+1)^2+Bp(p+1)+Cp}{p(p+1)^2}$$

Используя метод частных значений получим: $\begin{array}{ll} p=-1: & C=-1 \\ p=0: & A=1 \\ p=1: & B=-1 \end{array}$.

Таким образом $F(p)=\dfrac{1}{p(p+1)^2}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{1}{(p+1)^2}$, тогда

$$f(t)=1-e^{-t}-t\cdot e^{-t}.$$

Ответ: $f(t)=1-e^{-t}-t\cdot e^{-t}$.

Далее рассмотрим некоторые вспомогательные определения.

Определение 10.4. Точки, в которых нарушается аналитичность функции $F(p)$ называются ее **особыми точками** (о.т.).

Определение 10.5. Особые точки, для каждой из которых существует такая ее окрестность, в которой нет других особых точек функции $F(p)$, называются **изолированными особыми точками** (и.о.т.).

Определение 10.6. И.о.т. p_0 функции $F(p)$ называется полюсом, если $\lim\limits_{p\to p_0} F(p)=\infty$.

Утверждение 10.1. Если функция $F(p)=\dfrac{V(p)}{Q(p)}$, где $V(p)$ и $Q(p)$ некоторые многочлены, то ее особыми точками являются нули знаменателя, то есть корни многочлена $Q(p)$ (простой корень является простым полюсом, а корню кратности m соответствует полюс такой же кратности).

Утверждение 10.2. Если $p_1, p_2,..., p_k$ особые точки (полюса) функции $F(p)$, лежащие внутри некоторого круга $|p| = R_1$, тогда оригинал $f(t)$ может быть найден по формуле

$$f(t)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname*{Res}_{p=p_i}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right), \tag{10.1}$$

где

$$\operatorname*{Res}_{p=p_i}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)=\lim_{p\to p_i}\left((p-p_i)\cdot F(p)\cdot e^{pt}\right), \tag{10.2}$$

если p_i - простой полюс;

$$\operatorname*{Res}_{p=p_i}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_i}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left((p-p_i)^m\cdot F(p)\cdot e^{pt}\right), \tag{10.3}$$

если p_i - полюс кратности m.

Утверждение 10.3. Если функция $F(p)=\dfrac{V(p)}{Q(p)}$ является правильной дробью и p_i $(i=\overline{1,k})$ - ее простые полюса, тогда оригинал $f(t)$ можно найти по формуле

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{V(p_i)}{Q'(p_i)}\cdot e^{p_i t} \tag{10.4}$$

Вернемся к условию примера 10.4. и решим его с помощью формул (10.1), (10.2) и (10.3).

Пример. Найдите оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{1}{p(p+1)^2}$.

<u>Решение</u>

1) Используем формулу (10.1): $f(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)+\operatorname*{Res}_{p=-1}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)$.

Точка $p_1=0$ является простым корнем знаменателя, а значит простым полюсом функции $F(p)$, точка $p_2=-1$ является кратным корнем знаменателя, а значит кратным полюсом функции $F(p)$, поэтому по формулам (10.2) и (10.3):

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)=\lim_{p\to 0}\left(p\cdot\frac{1}{p(p+1)^2}\cdot e^{pt}\right)=\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{(p+1)^2}\cdot e^{pt}\right)=1$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-1}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\left[F(p)e^{pt}(p+1)^2\right]^{/}=\lim_{p\to -1}\left[\frac{e^{pt}}{p}\right]^{/}=$$

$$=\lim_{p\to -1}\left[\frac{t\cdot e^{pt}\cdot p-e^{pt}}{p^2}\right]=-t\cdot e^{-t}-e^{-t}=-e^{-t}(t+1)$$

С учетом полученных выражений получим $f(t)=1-e^{-t}(t+1)$.

Ответ: $f(t)=1-e^{-t}(t+1)$.

10.4. Приложения операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y^{/}+a_ny=f(t) \qquad (10.5)$$

с начальными условиями

$$y(0)=y_0,\ y^{/}(0)=y_0^{/},\ y^{//}(0)=y_0^{//},\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)},$$

где $y(t)$ искомая функция.

Рассматривая функции $y(t)$ и $f(t)$ как оригиналы, перейдем к соответствующим изображениям: $y(t)\doteqdot Y(p)$, $f(t)\doteqdot F(p)$.

С учетом свойства дифференцирования оригинала получим:

$$y' \risingdotseq p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - y_0$$

$$y'' \risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y_0 - y_0'$$

$$y''' \risingdotseq p^3 \cdot Y(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0) = p^3 \cdot Y(p) - p^2 \cdot y_0 - p \cdot y_0' - y_0''$$

…

$$y^{(n)} \risingdotseq p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} \cdot y(0) - p^{n-2} \cdot y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) = p^n \cdot Y(p) - p^{n-1} \cdot y_0 - p^{n-2} \cdot y_0' - y_0^{(n-1)}$$

Подставив данные выражения в исходное дифференциальное уравнение (10.5), а также сгруппировав подобные слагаемые получим

$$Y(p)\left(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) - y_0\left(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + a_2 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2} p + a_{n-1}\right) -$$

$$- y_0'\left(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + a_2 p^{n-4} + \ldots + a_{n-3} p + a_{n-2}\right) - \ldots - y_0^{(n-1)} = F(p)$$

Таким образом, получено операторное уравнение, которое необходимо решить относительно изображения $Y(p)$. Далее по найденному изображению известными методами необходимо восстановить оригинал $y(t)$, который и будет решением исходного дифференциального уравнения.

Пример 10.5. Решите операторным методом дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t)$, если $y(0) = y'(0) = 2$.

<u>Решение</u>

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$ тогда

$$y' \risingdotseq p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - 2$$

$$y'' \risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - 2p - 2$$

С учетом того, что

$$f(t) = e^{-t}(\cos t + t) = e^{-t}\cos t + t \cdot e^{-t} \leftrightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2},$$

уравнение примет вид:

$$p^2 Y(p) - 2p - 2 + 2p \cdot Y(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Сгруппировав слагаемые получим

$$Y(p)\left(p^2+2p+1\right)=\frac{p+1}{(p+1)^2+1}+\frac{1}{(p+1)^2}+2(p+1)+4$$

откуда $Y(p)=\dfrac{1}{(p+1)\left((p+1)^2+1\right)}+\dfrac{1}{(p+1)^4}+\dfrac{2}{(p+1)}+\dfrac{4}{(p+1)^2}$.

Для каждой из полученных дробей найдем оригинал по отдельности:

1) $\dfrac{1}{(p+1)^4}\risingdotseq e^{-t}\cdot\dfrac{t^3}{3!}$ 2) $\dfrac{2}{(p+1)}=2\cdot\dfrac{1}{(p+1)}\risingdotseq 2e^{-t}$

3) $\dfrac{4}{(p+1)^2}=4\cdot\dfrac{1}{(p+1)^2}\risingdotseq 4te^{-t}$

4) $\dfrac{1}{(p+1)\left((p+1)^2+1\right)}=\dfrac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}$

Представим данную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+2}=\frac{A(p^2+2p+2)+(Bp+C)(p+1)}{(p+1)(p^2+2p+2)}$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной p в числителях данных дробей получим систему:

$$\begin{cases}A+B\qquad\;\;=0\\2A+B+C=0\\2A+\quad+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}$$

То есть $\dfrac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}=\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{p+1}{p^2+2p+2}=\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$, а значит переходя к оригиналам получим $\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}\risingdotseq e^{-t}-e^{-t}\cos t$.

Объединяя результаты 1) – 4) запишем оригинал $y(t)$:

$$y(t)=e^{-t}-e^{-t}\cos t+e^{-t}\cdot\frac{t^3}{3!}+2e^{-t}+4te^{-t}=\frac{e^{-t}}{6}(t^3+24t+18-6\cos t).$$

Ответ: $y(t)=\dfrac{e^{-t}}{6}(t^3+24t+18-6\cos t)$.