

Задачи и упражнения

1. Разложите в ряд Фурье 2π -периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi; \pi)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

$$1.1. f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0, \\ -2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

$$1.2. f(x) = \begin{cases} 3x, & -\pi < x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$1.3. f(x) = \pi^2 - x^2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

2. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0; \pi)$, продолжив ее на интервал $(-\pi; 0)$ нечетным образом. Постройте графики нечетного продолжения функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

$$2.1. f(x) = \sin \frac{x}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2 - \sqrt{2}}{2\pi} \left(1 + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1 - 16(2k)^2} \right) + \frac{4(2 + \sqrt{2})}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k - 1)x}{1 - 16(2k - 1)^2}.$$

$$2.2. f(x) = e^{2x}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - 1)}{n^2 + 4} \cos nx.$$

3. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0; \pi)$, продолжив ее на интервал $(-\pi; 0)$ нечетным образом. Постройте графики нечетного продолжения функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

$$3.1. f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{\pi^2 - 4n^2} \left((-1)^n \cos \frac{\pi^2}{2} - 1 \right) \sin nx.$$

$$3.2. f(x) = x.$$

$$\text{Ответ: } 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

4. Разложите в ряд Фурье $2l$ -периодическую функцию, заданную на

интервале $(-l;l)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -\frac{1}{2} < x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x < \frac{1}{2}, l = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$.

5. Найдите комплексную форму ряда Фурье функции $f(x) = e^x, -\pi < x < \pi$.

Ответ: $e^x + \frac{shx}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-ni} e^{inx}$.

6. Представьте функцию интегралом $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ Фурье.

Ответ: $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{z\pi}{2}}{1-z^2} \cos zx dz$.

7. Найдите косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+z^2} \right)$.

8. Найдите синус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{z}{1+z^2} \right)$.

9. Найдите прямое преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} -e^x, & -1 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{2i}{\sqrt{2\pi}e(1+z^2)} (ze + \sin z + z \cos z)$.

10. Разложите функцию $f(x) = x^3 - 2x^2, [-1;1]$, в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

Ответ: $-\frac{2}{3}P_0(x) + \frac{3}{5}P_1(x) - \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{5}P_3(x)$.