ТЕМА 7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Степенные ряды находят широкое применение при решении дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим так называемое уравнение Бесселя, применение которого встречаются в различных вопросах физики и техники.

Определение 7.1. Дифференциальное уравнение вида

$$x^2y`` + xy` + (x^2 - p^2)y = 0, \tag{7.1}$$

$p -$ заданная постоянная, называется уравнением Бесселя.

Данное уравнение удовлетворяет условиям теоремы 7.1, в соответствии с которой его решение будем искать в виде обобщенного степенного ряда.

Таким образом, если p не есть целое число или половина целого нечетного числа, то общее решение уравнения Бесселя имеет вид:

$$y = C_1 \cdot J_p(x) + C_2 \cdot J_{-p}(x),$$

где

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}.$$

Степенной ряд, входящий в решение

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = J_p(x),$$

сходится при любом значении переменной, в чем нетрудно убедиться, применив признак Даламбера.

Определение 7.2. Функции $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ называются функциями Бесселя первого рода порядка p и $-p$ соответственно или цилиндрическими функциями первого рода.

Если рассмотрим $p = n$ – целое положительное число, то решение y_1 сохранит свою силу, а решение y_2 потеряют силу, так как, начиная с некоторого числа, один из множителей в знаменателе членов разложения будет равен нулю.

При целом $p = n$ имеет место равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x), \qquad (7.5)$$

которое показывает линейную зависимость функций Бесселя.

При целом положительном $p = n$ второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_n(x)$, имеет вид

$$N_n(x) = \lim_{p \to n} \frac{J_p(x)\cos(\pi p) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)},$$

где $\boldsymbol{p}$ – нецелое. (7.6)

Определение 7.3. Функция $N_n(x)$ называется цилиндрической функцией Бесселя второго рода или функцией Неймана.

Таким образом, при целом $p = n$ общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x).$$

Пример 7.1. Рассмотрим случай, когда параметр в уравнении Бесселя (7.1) $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$. Найдем функцию Бесселя $\boldsymbol{J_{\frac{1}{2}}(x)}$.

Δ Применяя формулу (7.3), получим

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k + \frac{1}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Так как из свойств гамма-функций следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k),$$

то получаем следующие соотношения

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\dots$$

$$\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) = \frac{2k+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2^{k+1}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Учитывая, что для натуральных k справедливо соотношение $\Gamma(k+1) = k!$, после некоторых преобразований получим следующее

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1}}{k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1) \cdot 2^k} \cdot x^{2k+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$$

Правая часть последнего соотношения представляет собой разложение известной нам тригонометрической функции $sin(x)$. Таким образом мы показали справедливость равенства

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot sin(x). \qquad (7.6)$$

▲

Пример 7.2. Рассмотрим случай, когда параметр в уравнении Бесселя (7.1) $\boldsymbol{p = -\frac{1}{2}}$. Найдем функцию Бесселя $\boldsymbol{J_{-\frac{1}{2}}(x)}$.

∆ Применяя формулу (7.4), имеем

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k-\frac{1}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{2k-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k},$$

получим

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \cdot x^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos(x).$$

Таким образом мы показали, что функция Бесселя $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ выражается через тригонометрическую функцию $cos(x)$ и справедливо равенство

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot cos(x).$$

▲ (7.7)

Перечислим некоторые рекуррентные соотношения для функций Бесселя, которые связывают функции Бесселя первого рода различных порядков.

Свойство 7.1. Справедливо равенство

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(x^p \cdot J_p(x)\right) = x^p \cdot J_{p-1}(x)} \tag{7.8}$$

Свойство 7.2. Справедливо равенство

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right) = -\frac{1}{x^p} \cdot J_{p+1}(x) \tag{7.9}$$

Свойство 7.3. Справедливо равенство

$$J_p(x) = \frac{x}{2p} \cdot \left(J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)\right) \tag{7.10}$$

Заметим, что, используя рекуррентную формулу (7.10) и положив в ней $p = \frac{1}{2}$, можно получить выражения функций Бесселя $J_{\frac{3}{2}}(x), J_{\frac{5}{2}}(x), J_{\frac{7}{2}}(x), \ldots$.

Отметим также, что функции Бесселя с полуцелым индексом $J_{\frac{1}{2}+n}(x)$ всегда выражаются через элементарные функции.

Задачи и упражнения

1. Найти вид функции Бесселя $J_{\frac{3}{2}}(x)$

ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$.

2. Найти вид функции Бесселя $J_{-\frac{3}{2}}(x)$

ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$.

3. Найти вид функции Бесселя $J_{\frac{5}{2}}(x)$

ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\sin x}{x} - \frac{3\cos x}{x^2} - \sin x\right)$.

4. Найти вид функции Бесселя $J_{-\frac{5}{2}}(x)$

ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3\sin x}{x} + \frac{3\cos x}{x^2} - \cos x\right)$.

5. Используя рекуррентные соотношения, выразить $J_{\frac{5}{2}}(x)$

ответ: $J_{\frac{5}{2}}(x) = \frac{3}{x} J_{\frac{3}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x)$.

6. Используя рекуррентные соотношения, выразить $J_{\frac{7}{2}}(x)$

ответ: $J_{\frac{7}{2}}(x) = \frac{5}{x} J_{\frac{5}{2}}(x) - J_{\frac{3}{2}}(x).$

7. Найти решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$

ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (C_1 \sin x + C_2 \cos x).$

8. Найти решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) y = 0$

ответ: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(C_1 \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + C_2 \left(-\sin x - \frac{\cos x)}{x} \right) \right).$

9. Показать, что, используя замену $y = u\sqrt{x}$, дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ сводится к уравнению Бесселя и записать его решение

ответ: $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$

10. Показать, что, используя замену $y = x^{-n} u$, дифференциальное уравнение $y'' + \frac{2n+1}{x} y' + y = 0$ сводится к уравнению Бесселя и записать его решение

ответ: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0.$