

ТЕМА 5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рассмотрим разбор некоторых типовых примеров.

Задача 5.1. Уравнение вынужденных поперечных колебаний струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (5.4)$$

Если внешняя сила отсутствует, мы имеем $f(x, t) = 0$, и получаем уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.5)$$

Одного уравнения движения (5.5) недостаточно для полного определения формы струны, поэтому нужно задать еще состояние струны в начальный момент времени $t = 0$, то есть положение ее точек u и их скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$, то есть

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x), x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для поставленной задачи о колебаниях струны без воздействия внешней силы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.5)$$

и начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), x \in \mathbb{R}, \quad (5.7)$$

где уравнение (5.5) описывает свободные колебания бесконечной однородной струны, а условия (5.6) и (5.7) задают соответственно начальное положение и начальную скорость точек струны, решение $u = u(x, t)$ задачи (5.5) – (5.7) находится по формуле Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

(5.8)

Пример 5.1. Для поставленной задачи о колебаниях струны без воздействия внешней силы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальных условиях

$$u(x, 0) = \cos x,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, x \in \mathbb{R},$$

найдем форму струны, используя метод Даламбера.

Δ Заметим, что в нашем случае $a^2 = 4$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = 0$. Тогда по формуле Даламбера решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\cos(x + 2t) + \cos(x - 2t)] + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} 0 dz = \frac{1}{2} [\cos(x + 2t) + \cos(x - 2t)] = \cos x \cdot \cos 2t. \blacktriangle$$

Задача 5.2. Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.5)$$

для случая, когда струна в спокойном состоянии занимает отрезок $[0; l]$ оси Ox .

Для однозначного решения данной задачи кроме начальных условий

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), x \in [0; l], \quad (5.7)$$

необходимо задать еще краевые условия

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (5.9)$$

означающие, что концы струны закреплены. Эта задача называется краевой задачей Коши. Частное решение будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной t , а другая от переменной x . Данный метод решения дифференциального уравнения известен как метод разделения Фурье.

Δ Фурье предложил искать решения задачи (5.5), (5.6), (5.7), (5.9) в виде произведения двух функций:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Продифференцируем последнее равенство по переменным величинам x, t

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t),$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t).$$

С учетом этих равенств, уравнение (5.5) переписется в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

В последнем равенстве в левой части имеем функцию от переменной t , справа – функция от x , где t и x – независимые переменные. Поэтому функции от них равны тогда и только тогда, когда они постоянные. Это дает возможность, записать систему дифференциальных уравнений

$$T''(t) + a^2 \lambda \cdot T(t) = 0, \quad (5.10)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (5.11)$$

Рассмотрим сначала уравнение (5.11). В силу нулевых краевых условий (5.9) получаем следующее

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t), X(0) = 0, \quad (5.12)$$

$$u(l, t) = X(l) \cdot T(t), X(l) = 0. \quad (5.13)$$

Анализ равенств (5.11), (5.12) и (5.13) приводит к тому, что решения уравнения (5.11) можно записать как функции

$$X_n(x) = c_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, c_n = \text{const}.$$

Тогда уравнение (5.10) имеет общее решение

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right).$$

Таким образом, мы нашли подходящие частные решения нашего дифференциального уравнения в виде функций

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Используя свойство линейности и однородности волнового уравнения, сумма частных решений также является решением, то есть решение уравнения (5.5) можно записать в виде суммы ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (5.14)$$

Предположив, что данный ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать, а именно:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

и используя начальные условия (5.6), (5.7), найдем коэффициенты a_n, b_n

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \psi(x).$$

Полученные равенства описывают разложение функций $\varphi(x), \psi(x)$ по синусам в ряды Фурье соответственно на промежутке $x \in [0; l]$. Поэтому неизвестные коэффициенты a_n, b_n определяются по известным формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, \quad (5.15)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx. \quad (5.16)$$

Подставив формулы (5.15), (5.16) в (5.14), можно записать решение уравнения математической физики. ▲

Пример 5.2. Найти закон свободных колебаний струны, при условии, что ее концы закреплены и в начальный момент времени заданы форма струны и скорости ее точек

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x, 0) = 20 \sin(3\pi x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \\ u(0, t) = u(4, t) = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

В примере задана так называемая краевая задача Коши с начальными и краевыми условиями.

Δ Используя описанный выше алгоритм метода разделения переменных (метод Фурье), ищем частное решение задачи (5.17) в виде произведения двух функций $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.

Получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + 81\lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

Граничные условия дают равенства $X(0) = X(4) = 0$.

Решение уравнения $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$X(x) = X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right), \text{ при этом } \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2.$$

Решениями уравнения $T''(t) + 81\lambda T(t) = 0$ при $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2$ являются функции

$$T_n(t) = C_{1n} \cdot \cos\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) + C_{2n} \cdot \sin\left(\frac{9\pi nt}{4}\right).$$

Таким образом, частное решение уравнения можно представить в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right). \quad (5.18)$$

Найдем производную функции (5.18) по переменной t

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{9\pi n}{4} a_n \cdot \sin\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) + \frac{9\pi n}{4} b_n \cdot \cos\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right). \quad (5.19)$$

Согласно условию $u_t(x, 0) = 0$ и полагая в (5.18) $t = 0$, получаем

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9\pi n}{4} b_n \cdot \sin\left(\frac{9\pi nt}{4}\right) \right) = 0,$$

отсюда $b_n = 0$.

Согласно условию $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 20 \sin(3\pi x)$ и полагая в (5.19) $t = 0$, получаем условие для нахождения коэффициентов a_n

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right) = 20 \sin(3\pi x),$$

$$a_n = \begin{cases} 0, n \neq 12, \\ 20, n = 12. \end{cases}$$

Решение исходной задачи Коши, найденное по методу Фурье, имеет вид

$$u(x, t) = 20 \cos(27\pi t) \sin(3\pi x), 0 \leq x \leq 4, 0 \leq t \leq +\infty. \blacktriangle$$

Заметим, что на практике при решении задачи Коши для конечной однородной струны, закрепленной в некоторых точках, используют уже готовые формулы, описанные в алгоритме метода Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi na}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi na}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$

Задачи и упражнения

1. Струна, закрепленная на отрезке $x \in [0; l]$ имеет в начальный момент времени форму $\varphi(x)$. Определить форму струны для любого момента времени t , если начальные скорости точек струны отсутствуют.

1.1. $\varphi(x) = 2x - x^2, x \in [0; 2]$

ответ:

$$u(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+1)^3} \cdot \cos\left(\frac{\pi(2k+1)a}{2} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2} x\right);$$

1.2. $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3, x \in [0; 1]$

ответ:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{8}{(\pi(2k+1))^3} - \frac{6}{\pi(2k+1)} \right) \cdot \cos(\pi(2k+1)t) \right) \cdot \sin(\pi(2k+1)x).$$

2. Найти решение волнового уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

2.1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = \sin(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

ответ: $u(x, t) = \sin x \cdot \cos x$;

2.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2$

ответ: $u(x, t) = x^2 t + 3t^3$;

2.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = \cos(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 3x^2$

ответ: $u(x, t) = \cos(x) \cdot \cos(5t) + 3x^2 t + 25t^3$.

3. Найти решение волнового уравнения колебания закрепленной в точках

$x = 0, x = l$ струны, если при $t = 0$ $u(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$.

$$3.1. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0, t) = u(l, t) = 0, l = 5,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 25 \sin(4\pi x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) = 0,$$

$$\text{ответ: } u(x, t) = 25 \cos(28\pi t) \cdot \sin(4\pi x);$$

$$3.2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0, t) = u(l, t) = 0, l = 6,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 30 \sin(2\pi x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) = 6\pi \sin(2\pi x),$$

$$\text{ответ: } u(x, t) = (30 \cos(6\pi t) + \sin(6\pi t)) \cdot \sin(2\pi x).$$