



Цифровая обработка сигналов и изображений

Спектральный анализ сигналов

Перцев Дмитрий

April 18, 2025



Белорусский государственный
университет
информатики и радиоэлектроники



Table of Contents

1 Спектральный анализ цифрового сигнала

- ▶ Спектральный анализ цифрового сигнала
- ▶ Принципы оценки спектра
- ▶ Методы спектрального анализа
- ▶ Периодограммы
- ▶ Растекание спектра и модифицированные периодограммы
- ▶ Метод Блэкмена-Тьюки
- ▶ Параметрические методы оценки спектра



Спектральный анализ цифрового сигнала

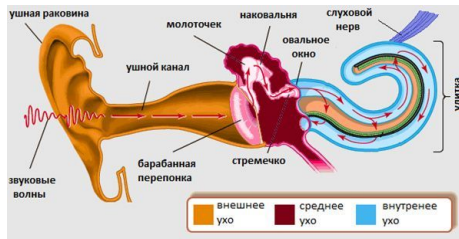
1 Спектральный анализ цифрового сигнала

- **Спектральный анализ** - это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала
 - амплитуда от частоты
 - фаза гармоник от частоты
- Графики более удачно представляют данные или сигналы, особенно если сигналы имеют случайную природу
- Выбирая согласно некоторому критерию определенные гармоники и отбрасывая другие, можно существенно сжать данные
- Область применения:
 - изучение сигналов техники связи
 - моделирование откликов электроэнцефалограммы при диагностике болезней мозга, других биосигналов, метеорологических данных
 - управление технологическим процессом
 - изменении спектра шума при разработке оптимальных линейных фильтров



Для чего это нужно: структура уха

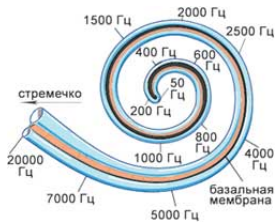
1 Спектральный анализ цифрового сигнала





Для чего это нужно: частоты внутреннего уха

1 Спектральный анализ цифрового сигнала





Спектральный анализ цифрового сигнала

Быстрое преобразование Фурье

1 Спектральный анализ цифрового сигнала

Д.Кули и Д.Тьюки (1965 год):

- Набор алгоритмов, называемых алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ), включает разнообразные методы уменьшения времени вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Поскольку вычисление ДПФ является основной операцией в большинстве задач спектрального анализа, то использование БПФ в некоторых встречающихся на практике случаях, позволяющее ускорить вычисление ДПФ в 100 и более раз по сравнению с методом прямого вычисления ДПФ, имеет чрезвычайно важное значение и должно рассматриваться как неотъемлемая часть применения методов цифровой обработки сигналов для спектрального анализа. Возможно, именно алгоритмы БПФ более чем какие - либо другие методы существенно расширили область применения методов спектрального анализа как средства обработки сигналов.



Table of Contents

2 Принципы оценки спектра

- ▶ Спектральный анализ цифрового сигнала
- ▶ Принципы оценки спектра
- ▶ Методы спектрального анализа
- ▶ Периодограммы
- ▶ Растекание спектра и модифицированные периодограммы
- ▶ Метод Блэкмена-Тьюки
- ▶ Параметрические методы оценки спектра



Принципы оценки спектра

2 Принципы оценки спектра

Форма сигнала может дать некоторую полезную информацию.

В качестве альтернативы сигнал можно представить двумя графиками:

- зависимость амплитуды от частоты (*амплитудный спектр*)
- зависимость фазы от частоты (*фазовый спектр*)

Наблюдаемые формы спектров и изменения в них *полезны при понимании и интерпретации сигналов.*



Table of Contents

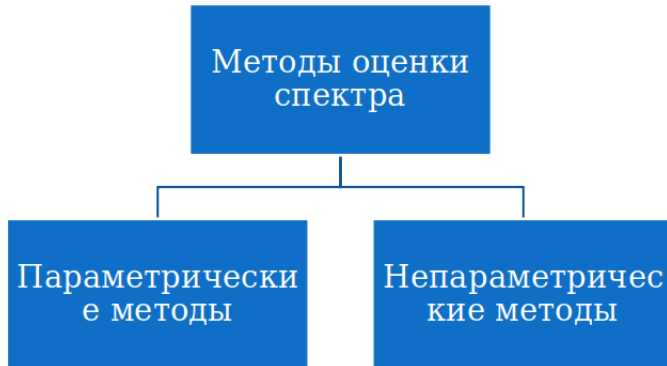
3 Методы спектрального анализа

- ▶ Спектральный анализ цифрового сигнала
- ▶ Принципы оценки спектра
- ▶ Методы спектрального анализа**
- ▶ Периодограммы
- ▶ Растекание спектра и модифицированные периодограммы
- ▶ Метод Блэкмена-Тьюки
- ▶ Параметрические методы оценки спектра



Методы спектрального анализа

3 Методы спектрального анализа





Непараметрические методы оценки спектра

3 Методы спектрального анализа

Непараметрические методы включают:

- периодограммы,
- модифицированные периодограммы Барлета (Barlett), Уэлша
- метод Блэкмена-Тьюки и др.

Плюсы:

- все эти методы можно реализовать с помощью быстрого преобразования Фурье

Минусы:

- если данные представляются короткими словами, ограниченное разрешение по частоте
- необходимость взвешивания для предотвращения просачивания спектральных составляющих



Table of Contents

4 Периодограммы

- ▶ Спектральный анализ цифрового сигнала
- ▶ Принципы оценки спектра
- ▶ Методы спектрального анализа
- ▶ Периодограммы**
 - ▶ Растекание спектра и модифицированные периодограммы
 - ▶ Метод Блэкмена-Тьюки
 - ▶ Параметрические методы оценки спектра



Периодограммы

4 Периодограммы

Периодограмма - оценка спектральной плотности мощности (квадрат модуля Фурье-образа)

Методы оценки спектральной плотности мощности (СПМ), основанные на прямом преобразовании Фурье и последующем усреднении, называются **периодограммными**.



Периодограммы

4 Периодограммы

Для непрерывных во времени детерминированных сигналов понятие спектральной плотности амплитуды связано с парой преобразований Фурье (НВПФ):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Энергия E сигнала $x(t)$ определяется соотношением

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) df$$

где $E(f) = |X(f)|^2$ - спектральная плотность энергии (СПЭ), описывающая распределение энергии сигнала по частоте.



Периодограммы

4 Периодограммы

Для последовательности $x(n)$ конечной длины в N отсчетов спектральные представления связываются с дискретно - временным рядом Фурье (ДВРФ):

$$X(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, 0 \leq n \leq N-1$$

Обе последовательности $x(n)$ и $X(k)$ периодичны с периодом N и на интервале в один период представляют соответственно совокупность отсчетов спектра $X(f)$ в точках $f_k = \frac{k}{NT}$ и отсчетов сигнала $x(t)$ в точках $t = nT$.



Периодограммы

4 Периодограммы

Соотношения называют еще парой дискретного преобразования Фурье (ДПФ), их отличия от традиционно используемых, вызванные наличием множителей T и $\frac{1}{T}$, связаны с желанием обеспечить корректность масштабов при вычислении энергии и мощности. Теорема об энергии для ДПФ имеет вид

$$E = T \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$



Периодограммы

4 Периодограммы

Поэтому *спектральная плотность энергии* примет вид

$$E(k) = |X(k)|^2 = \left| T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \right|^2$$

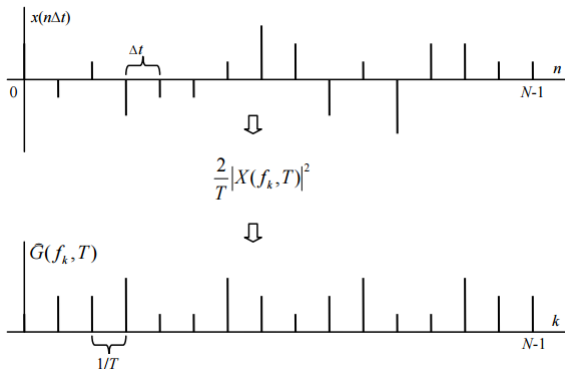
а соотношение для *спектральной плотности мощности* (СПМ) примет форму

$$P(k) = \frac{1}{NT} E(k) = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \right|^2, 0 \leq k \leq N-1$$



Пример: случайный процесс и его периодограмма

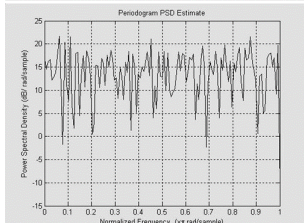
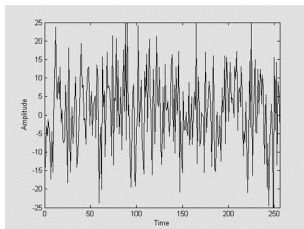
4 Периодограммы





Периодограммы

4 Периодограммы



Представлен график некоторого случайного процесса и его периодограмма. Очевидно, что периодограмма - это тоже случайный процесс, в частотной области. Заметим, что увеличивая число используемых отсчетов, значения периодограммы будут все быстрее флуктуировать. Для уменьшения изрезанности периодограммы необходимо применить какое-либо усреднение. В общем случае, поскольку была опущена операция математического ожидания, периодограмма не является состоятельной оценкой и существует возможность ее флуктуации около истинного значения спектра. Для получения состоятельной оценки спектра используются фильтры и методы усреднения. Флуктуация - изменение, периодическое колебание.



Метод усреднения периодограммы

4 Периодограммы

Используя фильтр низких частот с частотной характеристикой $H(k)$, получают модифицированную периодограмму:

$$\tilde{P}_x(k) = H(k)P_x(k)$$



Метод усреднения периодограммы

4 Периодограммы

При использовании метода усреднения периодограмм из исходной последовательности данных формируется псевдоансамбль дискретных последовательностей (сегментов) и соответствующий псевдоансамбль периодограмм.

Существуют два способа сглаживания (усреднения):

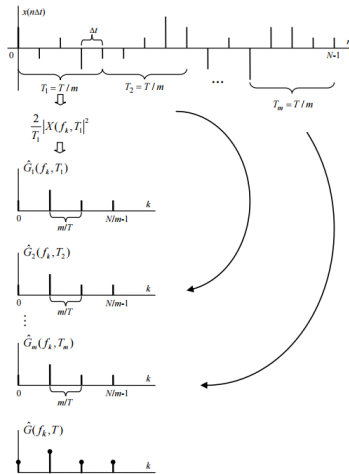
- сглаживание по ансамблю (периодограмма Бартлетта);
- сглаживание по частоте (периодограмма Даныелла).

В любом случае операция сглаживания означает приближение к математическому ожиданию



Метод усреднение периодограммы: сглаживание по ансамблю

4 Периодограммы

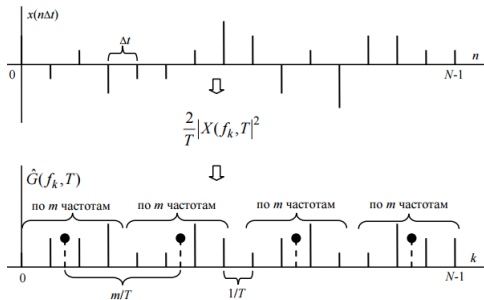


Находят оценки спектра по каждой из независимых реализаций $x_i(n\Delta t)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ длительностью $T' = \frac{T}{m}$, а затем усредняется m оценок по каждой частоте.



Метод усреднение периодограммы: сглаживание по частоте

4 Периодограммы



Усредняют результаты вычислений спектра по m смежным частотным составляющим оценки, полученной по всей реализации $x_i(n\Delta t)$,
 $n = 0, 1, \dots, N - 1$



Table of Contents

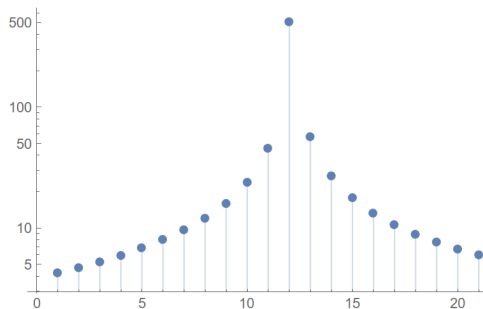
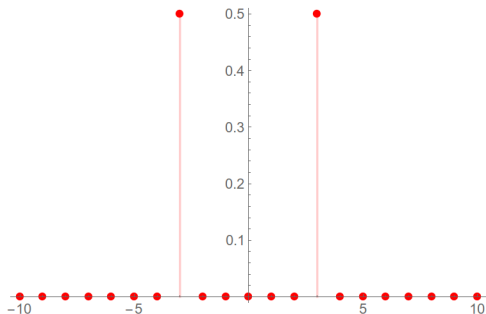
5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

- ▶ Спектральный анализ цифрового сигнала
- ▶ Принципы оценки спектра
- ▶ Методы спектрального анализа
- ▶ Периодограммы
- ▶ Растекание спектра и модифицированные периодограммы
- ▶ Метод Блэкмена-Тьюки
- ▶ Параметрические методы оценки спектра



Амплитудный спектр синусоидального сигнала и эффект растекания спектра

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы





Модифицированные периодограммы

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

Модифицированная периодограмма является периодограммой *взвешенной последовательности данных*, выполненной с помощью:

- *весовых функций или «окон»*

Число известных и описанных в литературе весовых функций достаточно велико: Дирихле, Бартлетта, Бохмана, Хемминга, Ханна, Гаусса, Пуассона, Кайзера, Дольфа, Чебышева, Вейерштрасса, Рисса, Нимана, Тьюки и др.

Выбор той или иной весовой функции всегда зависит от конкретной ситуации. Универсального средства к сожалению нет.



Весовые функции

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

При ДПФ предполагается, что последовательность отсчетов анализируемого сигнала является *периодически продолженной* вперед и назад во времени. При этом, если значения начальных и конечных отсчетов сигнала сильно различаются, при периодическом повторении на стыках сегментов возникают скачки, из-за которых спектр расширяется. Это явление называется *растеканием спектра*.

Если анализируемая последовательность содержит целое число периодов гармонического сигнала, то периодически продолженный сигнал представляет собой гармонические колебания (без скачков), а вычисленное ДПФ содержит лишь два спектральных отсчета, отличных от нуля.

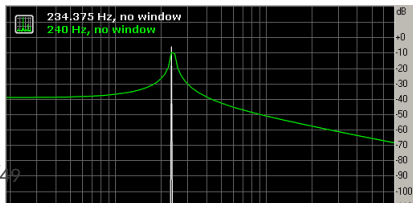
Для уменьшения растекания спектра при ДПФ применяют *весовые функции* (weighting functions), которые также называют *окнами* (window).



Амплитудный спектр синусоидального сигнала и эффект растекания спектра

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

- FFT раскладывает сигнал не по тем частотам, которые на самом деле присутствуют в сигнале, а по фиксированной равномерной сетке частот
- например, если частота дискретизации равна 48 кГц и размер окна FFT выбран 4096 отсчётов, то FFT раскладывает сигнал по 2049 частотам: 0 Гц, 11.72 Гц, 23.44 Гц, ..., 24000 Гц
- если частота тона совпадает с одной из частот сетки FFT, то спектр будет





Амплитудный спектр синусоидального сигнала и эффект растекания спектра

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

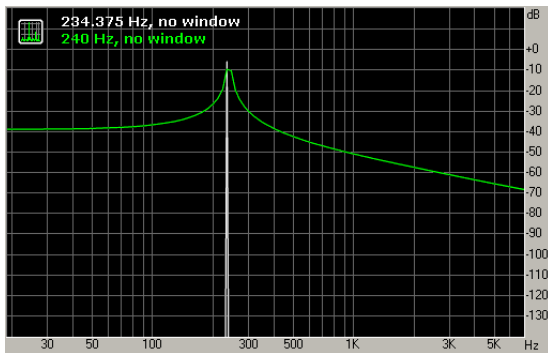
- если частота тона совпадает с одной из частот сетки FFT, то спектр будет выглядеть "идеально": единственный острый пик укажет на частоту и амплитуду тона
- если же частота тона не совпадает ни с одной из частот сетки FFT, то FFT "соберёт" тон из имеющихся в сетке частот, скомбинированных с различными весами. График спектра при этом размывается по частоте
- параметры весовых окон:
 - степень расширения главного пика
 - степень подавления размытия спектра ("боковых лепестков")
- *чем сильнее мы хотим подавить боковые лепестки, тем шире будет основной пик*



Весовые окна: прямоугольное окно

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

Как выглядит спектр синусоиды, если её частота совпадает/не совпадает с базисными частотами ДПФ?



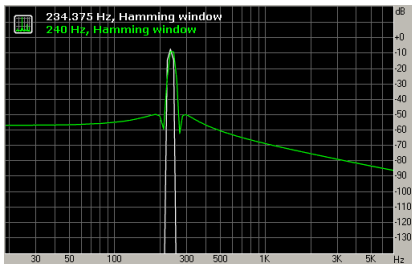
нет окна (прямоугольное окно)



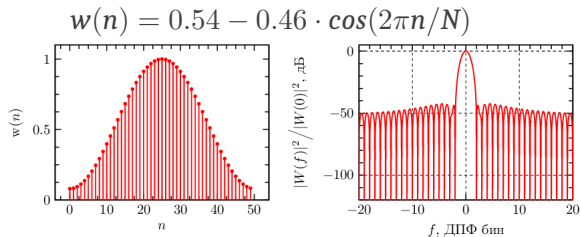
Весовые окна: окно Хэмминга

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка



окно Хэмминга (Hamming)

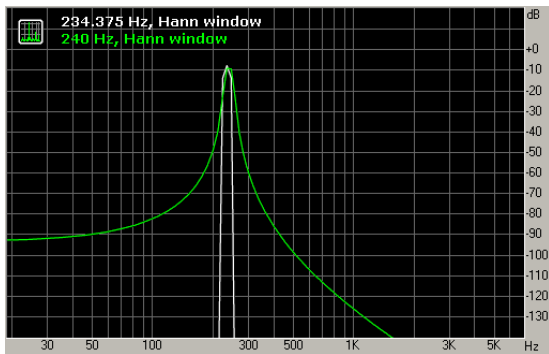




Весовые окна: окно Хана

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка



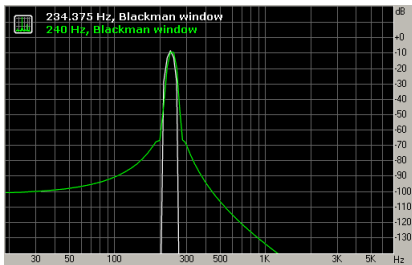
окно Хана (Hann)



Весовые окна: окно Блэкмана-Харриса

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

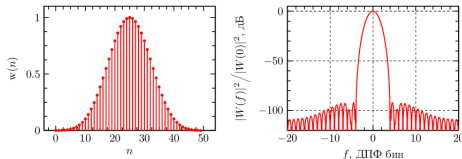
Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка



окно Блэкмана (Blackman)

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos(2\pi n/N) + a_2 \cos(4\pi n/N) - a_3 \cos(6\pi n/N)$$
$$a_0 = 0.35875; a_1 = 0.48829; a_2 = 0.14128;$$
$$a_3 = 0.01168$$

Окно Блэкмана-Харриса и его спектральная плотность энергии:

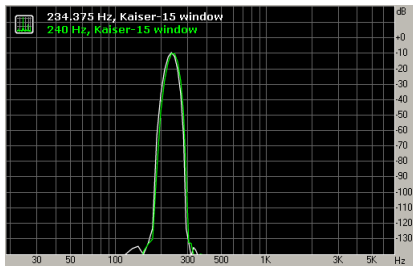




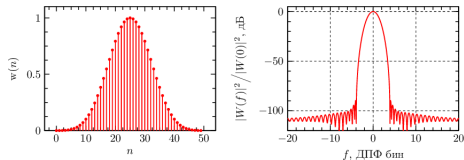
Весовые окна: окно Кайзера

5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы

Весовые окна уменьшают эффект размытия спектра, подавляя боковые лепестки за счёт расширения главного лепестка



окно Кайзера (Kaiser), $\beta = 15$



Окно Кайзера, $\alpha = 12$

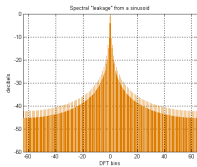
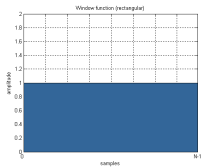
$$w(n) = \frac{I_0(\alpha \sqrt{1 - (2(n - N/2)/N)^2})}{I_0(\alpha)}$$

$I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, α - параметр окна

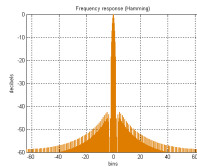
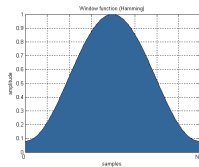


Весовые окна

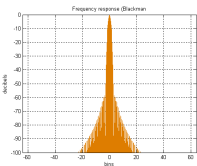
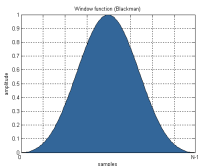
5 Растекание спектра и модифицированные периодограммы



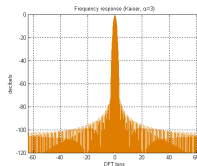
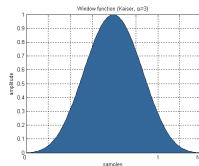
Прямоугольное (нет окна)



Hamming



Blackman



Kaiser



Table of Contents

6 Метод Блэкмена-Тьюки

- ▶ Спектральный анализ цифрового сигнала
- ▶ Принципы оценки спектра
- ▶ Методы спектрального анализа
- ▶ Периодограммы
- ▶ Растекание спектра и модифицированные периодограммы
- ▶ Метод Блэкмена-Тьюки
- ▶ Параметрические методы оценки спектра



Метод Блэкмена-Тьюки

6 Метод Блэкмена-Тьюки

Спектр плотности мощности определяется ДПФ автокорреляционной функцией данных.

Процедура Блэкмена-Тьюки для определения спектра плотности мощности:

- вычислить автокорреляционную функцию данных;
- воздействовать на данные подходящей весовой функцией;
- вычислить БПФ получающихся данных и получить спектр плотности мощности.

Сравнивая эту процедуру с методом периодограмм, видно, что сглаживание достигается не за счет усреднения нескольких периодограмм, а за счет усредняющего эффекта процесса автокорреляции.

Взвешивание автокорреляционной функции необходимо для сглаживания ее экстремумов.



Метод быстрой корреляции

6 Метод Блэкмена-Тьюки

Если данные превышают 128 элементов и требуется найти их корреляцию, то вычисления будут быстрее, если использовать теорему о корреляции и реализовать вычисления с использованием БПФ. Например, при $N = 1024$ это позволяет десятикратно увеличить скорость.

При вычислении корреляции в методе Блэкмена-Тьюки описанным выше способом с использованием БПФ подход называется *методом оценки спектра с помощью быстрой корреляции*.



Table of Contents

7 Параметрические методы оценки спектра

- ▶ Спектральный анализ цифрового сигнала
- ▶ Принципы оценки спектра
- ▶ Методы спектрального анализа
- ▶ Периодограммы
- ▶ Растекание спектра и модифицированные периодограммы
- ▶ Метод Блэкмена-Тьюки
- ▶ **Параметрические методы оценки спектра**



Параметрические методы оценки спектра

7 Параметрические методы оценки спектра

Использование параметрических методов подразумевает наличие некоторой *математической модели* анализируемого случайного процесса.

Спектральный анализ в данном случае сводится к решению оптимизационной задачи, то есть поиску таких *параметров* модели, при которых она наиболее близка к реально наблюдаемому сигналу.

Рассмотрим следующий параметрический метод:

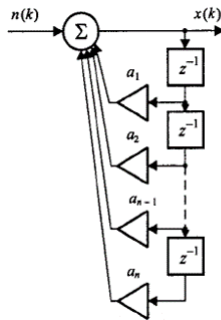
- авторегрессионную модель



Авторегрессионная модель случайного процесса

7 Параметрические методы оценки спектра

- сигнал $x(k)$ формируется путем пропускания дискретного белого шума через «чисто рекурсивный» фильтр N -го порядка
- помимо авторегрессионной существуют и другие модели формирования сигнала путем пропускания белого шума через формирующий фильтр
 - МА-модели (Moving Average, «скользящее среднее») для этого используется нерекурсивный фильтр
 - ARMA-модели (Autoregressive Moving Average) - фильтр общего вида, содержащий рекурсивную и нерекурсивную ветви



Авторегрессионная модель формирования сигнала



Авторегрессионная модель случайного процесса

7 Параметрические методы оценки спектра

$$W(\omega) = \frac{\sigma_n^2}{f_d} \cdot \frac{1}{|1 - a_1 e^{-j\omega T} - a_2 e^{-j2\omega T} - \dots - a_N e^{-jN\omega T}|^2}$$

Спектральная плотность мощности такого сигнала пропорциональна квадрату модуля коэффициента функции передачи фильтра.

Требуется оценить порядок модели N , коэффициента a_i и мощность белого шума σ .



Авторегрессионная модель случайного процесса

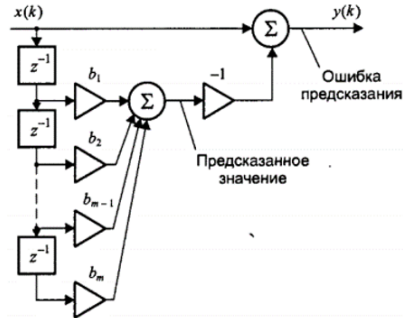
7 Параметрические методы оценки спектра

Для определения коэффициентов модели выполняется минимизация ошибки *линейного предсказания* сигнала.

Сигнал $x(k)$ пропускается через нерекурсивный фильтр с коэффициентами $\{1, -b_1, -b_2, \dots, -b_N\}$.

Взвешенную сумму предыдущих отсчетов входного сигнала называют *линейным предсказанием* следующего отсчета, а выходной сигнал рассматриваемого фильтра, т.е. разность между истинным и предсказанным значением отсчета - *ошибкой предсказания*.

Коэффициенты фильтра, минимизирующего дисперсию ошибки предсказания, совпадают с коэффициентами авторегрессионной модели формирования сигнала.





Авторегрессионная модель случайного процесса

7 Параметрические методы оценки спектра

Z-преобразование ошибки предсказания $y(k)$:

$$Y(z) = N(z) \frac{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_N z^{-N}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N}}$$



Авторегрессионная модель случайного процесса

7 Параметрические методы оценки спектра

Эквивалентное выражение: $Y(z) = N(z)(1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots)$,

откуда $y(k) = n(k) + h_1 n(k-1) + h_2 n(k-2) + \dots$

Дисперсия ошибки предсказания: $\sigma_y^2 = \sigma_n^2(1 + h_1^2 + h_2^2 + \dots)$

Минимум дисперсии ошибки предсказания достигается при всех $h_i = 0$.

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2(k)} = \overline{x^2(k)} - 2 \sum_{m=1}^N b_m \overline{x(k)x(k-m)} + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N b_m b_n \overline{x(k-m)x(k-n)}$$
$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 - 2 \sum_{m=1}^N b_m R_x(m) + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N b_m b_n R_x(m-n)$$

Дифференцируя и приравнивая нулю производную получим систему уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_y^2}{\partial b_k} = -2R_x(k) + 2 \sum_{m=1}^N b_m R_x(m-k)$$
$$\sum_{m=1}^N b_m R_x(m-k) = R_x(k), k = 1, 2, \dots, N$$



Авторегрессионная модель случайного процесса

7 Параметрические методы оценки спектра

В матричном виде: $\mathbf{R}_x \mathbf{b} = \mathbf{p}$ - уравнение Юла-Уокера (Yule-Walker),

где $\mathbf{p} = [R_x(1), R_x(2), \dots, R_x(N)]^T$

откуда $\mathbf{b} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{p}$

Минимальная дисперсия ошибки предсказания: $(\sigma_y^2)_{min} = \sigma_x^2 - \mathbf{p}^T \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{p}$

При неизвестных \mathbf{R}_x и \mathbf{p} используются их оценки.



Использование спектрального анализа с помощью ДПФ для различение болезней мозга: CNV - гармоника спектра возможной отрицательной вариации

7 Параметрические методы оценки спектра

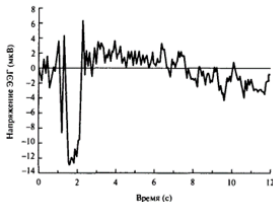


Рис. 11.17. Сигнал CNV здорового пациента после предварительной обработки и усреднения

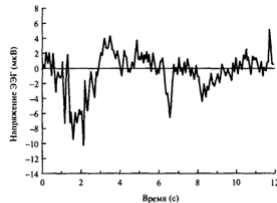
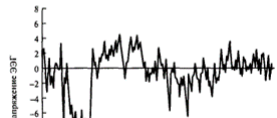
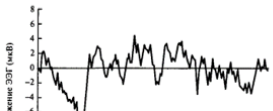


Рис. 11.19. Сигнал CNV пациента с шизофренией после предварительной обработки и усреднения





Использование спектрального анализа с помощью ДПФ для различение болезней мозга

7 Параметрические методы оценки спектра

Таблица 11.2. Результаты разделения по группам пациентов с заболеваниями головного мозга

<i>Типы объектов</i>		<i>Процент правильной классификации</i>	
Тип 1	Тип 2	Тип 1	Тип 2
БХ	контрольный	100	100
шизофреник	контрольный	95	100
БП	контрольный	93,8	87,5
БХ	шизофреник	100	90,9
БХ	БП	90,9	81,8
шизофреник	БП	81,3	93,8

БХ — пациент с болезнью Хантингтона, БП — пациент с болезнью Паркинсона, контрольный — контрольный пациент того же пола и возраста, что и тестируемый.



Цифровая обработка сигналов и изображений

Thank you for listening!
Any questions?