Цифровая обработка сигналов и изображений

Класс несинусоидальных ортогональных функций

Перцев Дмитрий

February 27, 2025

Белорусский государственный
университет
информатики и радиоэлектроники

Table of Contents

Функции Радемахера

- Непрерывная функция Радемахера с индексом m, которая обозначается как $Rad(m,x)$, имеет вид последовательности прямоугольных импульсов, содержит периодов на интервале $[0;1)$ и принимает значения $+1$ или -1
- Исключением является $Rad(0,x)$, которая имеет вид единичного импульса
- Функции Радемахера периодические с периодом 1, т.е. $Rad(m,x) = Rad(m,x+1)$
- Функции Радемахера получаются из синусоидальных функций с помощью соотношения:

$$r_k(t) = sign[sin(2^k \pi t)], 0 \leq t < 1$$

где аргумент t - безразмерное время, т.е. время, нормированное к произвольному интервалу T_0, а целое положительное число k - порядок функции.

Функции Радемахера

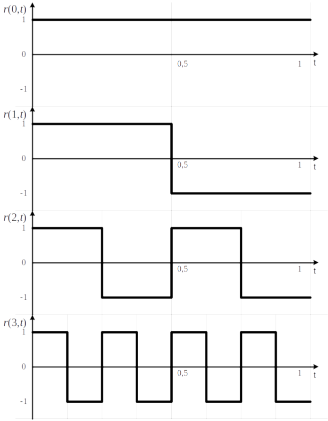
Обозначив для краткости $r(m,t) = r_m(t)$, для $N = 8$ получим:

$r_1(t) = + + + + - - - -$

$r_2(t) = + + - - + + - -$

$r_3(t) = + - + - + - + -$,

где $+$ соответствует $+1$, а $-$ соответствует -1.



Функции Радемахера для $N = 8$

Функции Радемахера

1 Система функций Радемахера

Функции Радемахера принимают одно из двух значений и имеют вид меандра. Функции Радемахера ортонормированы с единичной весовой функцией на интервале $0 \leq t < 1$, т.к. для любых двух функций $r_m(t)$, $r_n(t)$ имеют место соотношения:

$$\int_0^1 r_m(t) r_n(t) dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Все функции Радемахера являются нечетными относительно середины интервала определения и не могут быть использованы для аппроксимации сигналов, четных относительно этой точки. Иными словами, система функций Радемахера - неполная

В свою очередь функции Уолша можно представить следующим образом, используя функции Радемахера:

$$
\begin{aligned}
&Wal(0,t) = && = && ++++++++ \\
&Wal(1,t) = && r_1 = && ++++-- \\
&Wal(2,t) = && r_1 r_2 = && ++--++ \\
&Wal(3,t) = && r_2 = && ++-++- \\
&Wal(4,t) = && r_2 r_3 = && +-++-+ \\
&Wal(5,t) = && r_1 r_2 r_3 = && +-+-++- \\
&Wal(6,t) = && r_1 r_3 = && +-+-+-+ \\
&Wal(7,t) = && r_3 = && +-+-+-+-
\end{aligned}
$$

Сопоставление этих функций с функциями Радемахера позволяет составить очевидные соотношения, согласно которым каждая функция Уолша $Wal(n,t)$ с номером n, входящая в систему из $N = 2^r$ функций, является произведением степеней первых n функций Радемахера.

Принцип нахождения показателей этих степеней определяется двоичным представлением номера функции n. Примем следующие обозначения для разрядов, составляющих двоичное представление числа n: n_1 - первый разряд, n_2 - второй разряд, и так далее до n_r, то есть r-го разряда двоичного представления натурального числа n. При такой нумерации n_1 оказывается старшим разрядом числа n, а n_r - младшим. n_i может принимать одно из двух значений - нуль или единица. Будем считать, что $n_0 = 0$ по определению. Используя символ $\bigoplus$ для обозначения операции поразрядного сложения по модулю 2, способ построения функций Уолша можно выразить аналитически для любого $N = 2^r$ в виде следующего соотношения:

$$Wal(n,t) = \prod_{k=1}^{r} [r_k(t)]^{n_{r-k+1} \bigoplus n_{r-k}}$$

Поясним применение данной формулы на примере шестой функции Уолша ($n = 6$), входящей в систему размером $N = 2^3 = 8$.
Произведение состоит из трех множителей вида:

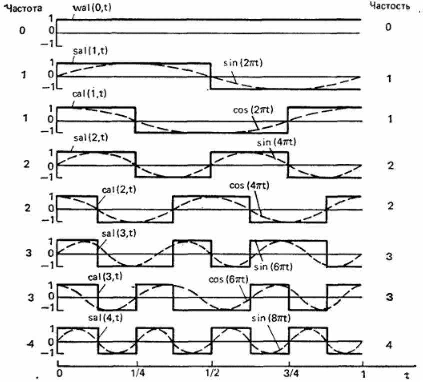
- при $k = 1$: $[r_1(t)]^{n_3 \bigoplus n_2}$
- при $k = 2$: $[r_2(t)]^{n_2 \bigoplus n_1}$
- при $k = 3$: $[r_3(t)]^{n_1 \bigoplus n_0}$

На основе двоичного представления числа $n = 6$ несложно установить, что $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$. Таким образом, $n_3 \bigoplus n_2 = 0 \bigoplus 1 = 1$, $n_2 \bigoplus n_1 = 1 \bigoplus 1 = 0$, $n_1 \bigoplus n_0 = 1 \bigoplus 0 = 1$ и по формуле:

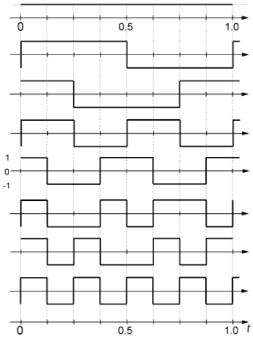
$$Wal(6, t) = r_1(t) r_2^0(t) r_3(t) = r_1(t) r_3(t)$$

Функции Уолша

2 Система функций Уолша



Первые восемь функций Уолша



Если число перемен знака в секунду функции $f(t)$ равно κ, то частотность определяется как $\kappa/2$ или $(\kappa+1)/2$ при κ четном и нечетном соответственно.

Код Грея

Пусть $g_{n-1}g_{n-2}\ldots g_2g_1g_0$ - кодовое слово в n-разрядном двоичном коде Грея, соответствующее двоичному числу $b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_2b_1b_0$. Тогда g_i может быть получена как

$$g_i = b_i \bigoplus b_{i+1},\, 0 \le i \le n-2;$$
$$g_{n-1} = b_{n-1},$$

где $\bigoplus$ означает сложение по модулю два, которое определяется как

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & b_5 & & b_4 & & b_3 & & b_2 & & b_1 & & b_0\\
 & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1\\
 & \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\\
 & & \bigoplus & & \bigoplus & & \bigoplus & & \bigoplus & & \bigoplus & \\
1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & \\
g_5 & & g_4 & & g_3 & & g_2 & & g_1 & & g_0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 \bigoplus 0 &= 0;\\
1 \bigoplus 0 &= 1;\\
0 \bigoplus 1 &= 1;\\
1 \bigoplus 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Код Грея

Десятичное число	Код Грея			Двоичный код		
	g_2	g_1	g_0	b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	1
4	1	1	0	1	0	0
5	1	1	1	1	0	1
6	1	0	1	1	1	0
7	1	0	0	1	1	1

Код Грея

Преобразование кода Грея в двоичный код начинается с цифры самого левого разряда и движения вправо, принимая $b_i = g_i$, если число единиц, предшествующих g_i, четно и (черта обозначает инвертирование), если число единиц, предшествующих g_i, нечетно. При этом нулевое число единиц считается четным.

$$
\begin{array}{ccccccc}
g_6 & g_5 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0
\end{array}
$$

Свойства функций Уолша

1. Функции Уолша ортонормированны на интервале $0 \leq t < 1$:

$$\int_0^1 Wal(k,t)Wal(i,t)dt = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

2. Функции Уолша обладают свойством мультипликативности, т.е. перемножение двух функций Уолша дает другую функцию Уолша, причем верно соотношение:

$$Wal(k,t)Wal(i,t) = Wal(k \bigoplus i, t)$$

3. Функции Уолша обладают свойством симметрии, проявляющимся в том, что все выводы относительно i справедливы также и относительно t. Например, свойство мультипликативности с учетом свойства симметрии запишется в виде

$$Wal(i, t_1)Wal(i, t_2) = Wal(i, t_1 \bigoplus t_2)$$

4. Умножение любой функции самой на себя дает функцию нулевого порядка $Wal(0, t)$, так как в результате получаются только произведения вида $(+1)(+1)$ и $(-1)(-1)$. Таким образом, получим

$$Wal(i, t)Wal(i, t) = Wal(0, t)$$

5. Умножение $Wal(i, t)$ на $Wal(0, t)$ не изменяет функцию $Wal(i, t)$.

Способы определения функций Уолша

Общеприняты следующие упорядочения (способы определения функций Уолша, 1923):

- упорядочение по частоте (по Уолшу с помощью функций Радемахера);
- упорядочение по Пэли (диадическое);
- упорядочение по Адамару,

где под частотой функции понимается число пересечений нулевого уровня в единицу времени

Table of Contents

Упорядочение функций Уолша

В ряде практических задач целесообразно пользоваться иными способами упорядочения. Часто применяются функции Уолша, упорядоченные по Адамару $[Had(h,t)]$ и по Пэли $[Pal(p,t)]$.

Независимо от упорядочения функции Уолша, составляющие систему из $N = 2^r$ функций, всегда можно представить в виде произведения степеней первых r функций Радемахера. Принцип же нахождения показателей этих степеней индивидуален для каждого упорядочения.

При $N = 2^n$ матрица Адамара может быть получена с помощью соотношения

$$H(n) = \begin{bmatrix} H(n-1) & H(n-1) \\ H(n-1) & -H(n-1) \end{bmatrix} \qquad H(0) = 1$$

Произведение Кронекера - бинарная операция над матрицами произвольного размера, обозначается $\bigotimes$. Результатом является блочная матрица.
Если A - матрица размера $m \times n$, B - матрица размера $p \times q$, тогда произведение Кронекера есть блочная матрица размера $mp \times nq$

$$A \bigotimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Упорядочение функций Уолша

Нумерация функций Уолшапри различных способах упорядочения, $N = 8$

$Wal(n,t)$	$Had(h,t)$	$Pal(p,t)$
0	0	0
1	4	1
2	6	3
3	2	2
4	3	6
5	7	7
6	5	5
7	1	4

Нумерация функций Уолша при различных способах упорядочения, $N = 16$

$Wal(n,t)$	$Had(h,t)$	$Pal(p,t)$
0	0	0
1	8	1
2	12	3
3	4	2
4	6	6
5	14	7
6	10	5
7	2	4
8	3	12

Сравнение таблиц показывает, что

Является частным случаем обобщённого преобразования Фурье, в котором базисом выступает система функций Уолша.

Пара дискретных преобразований Уолша-Адамара:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i Wal(k,i),\, k = \overline{0, N-1}$$
$$x_i = \sum_{i=0}^{N-1} X_k Wal(k,i),\, k = \overline{0, N-1}$$

Table of Contents

Быстрое преобразование Уолша-Адамара

$$H(n) = \begin{bmatrix} H(n-1) & H(n-1) \\ H(n-1) & -H(n-1) \end{bmatrix}$$

Матрица Адамара также может быть получена из ядра

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

с помощью кронекеровского произведения, т.е.

$$H(2) = H_1 \bigotimes H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Быстрое преобразование Уолша-Адамара можно получить с помощью разбиения матриц.
При $N = 8$ в матричном виде преобразование Уолша можно записать как

$$C_x(3) = \frac{1}{8} H(3) X(3)$$

Используя соотношение

$$H(k) = \begin{bmatrix} H(k-1) & H(k-1) \\ H(k-1) & -H(k-1) \end{bmatrix}$$

$H(3)$ можно выразить через $H(2)$, что приводит к

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \\ C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} H(2) & H(2) \\ H(2) & -H(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

Из разбиения матрицы следует, что

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(2) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

$$x_1(l) = x(l) + x(4+l);\, l = \overline{0,3}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} H(2) \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix}$$

$$x_1(l) = x(l-4) - x(l);\, l = \overline{4,7}$$

Быстрое преобразование Уолша-Адамара

Подставляя вместо

$$H(2) = \begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix}$$

получим

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \\ C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \\ C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} C_x(0) \\ C_x(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_1(0)+x_1(2) \\ x_1(1)+x_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(2) \\ C_x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_1(0)-x_1(2) \\ x_1(1)-x_1(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(4) \\ C_x(5) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_1(4)+x_1(6) \\ x_1(5)+x_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_2(4) \\ x_2(5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_x(6) \\ C_x(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_1(4)-x_1(6) \\ x_1(5)-x_1(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}H(1)\begin{bmatrix} x_2(6) \\ x_2(7) \end{bmatrix}$$

$$x_2(l) = x_1(l) + x_1(2+l); l = \overline{0,1}, \overline{4,5}$$

$$x_2(l) = x_1(l-2) - x_1(l); l = \overline{2,3}, \overline{6,7}$$

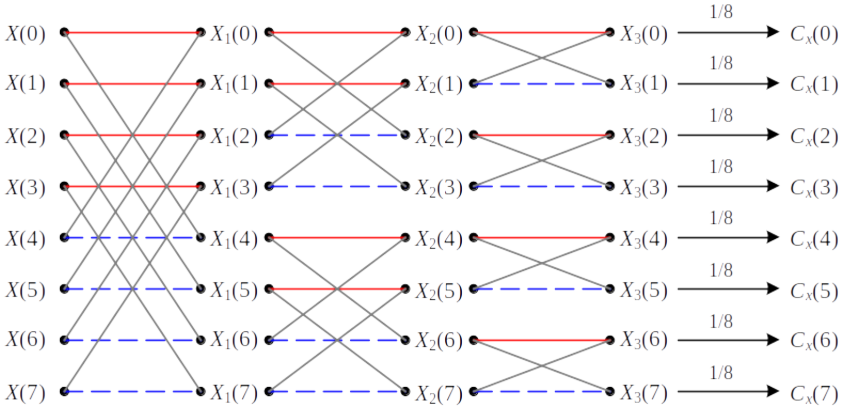
Так как

$$H(1) = \begin{bmatrix} H(0) & H(0) \\ H(0) & -H(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

то окончательно получим

$$\begin{aligned}
8C_x(0) &= x_2(0) + x_2(1) = x_3(0) \\
8C_x(1) &= x_2(0) - x_2(1) = x_3(1) \\
8C_x(2) &= x_2(2) + x_2(3) = x_3(2) \\
8C_x(3) &= x_2(2) - x_2(3) = x_3(3) \\
8C_x(4) &= x_2(4) + x_2(5) = x_3(4) \\
8C_x(5) &= x_2(4) - x_2(5) = x_3(5) \\
8C_x(0) &= x_2(6) + x_2(7) = x_3(6) \\
8C_x(0) &= x_2(6) - x_2(7) = x_3(7)
\end{aligned}$$

Быстрое преобразование Уолша-Адамара



Быстрое преобразование Уолша-Адамара

Для $N = 2^n$:

- Общее число итераций равно $n = log_2 N$. Индекс r принимает значения $r = 1, 2, \ldots, n$.
- В r итерации участвует 2^{r-1} групп по $N/2^{r-1}$ лементов. Половина элементов в каждой группе связана с операцией сложения, а другая половина - с операцией вычитания.
- Общее число арифметических операций, необходимое для вычисления всех коэффициентов преобразования, равняется приблизительно $Nlog_2 N$.

Table of Contents

Множество функций Хаара $har(n, m, t)$, образующих периодическую, ортонормированную и полную систему функций, было предложено в 1910 году. Рекуррентное соотношение, позволяющее получить $har(n, m, t)$, имеет вид

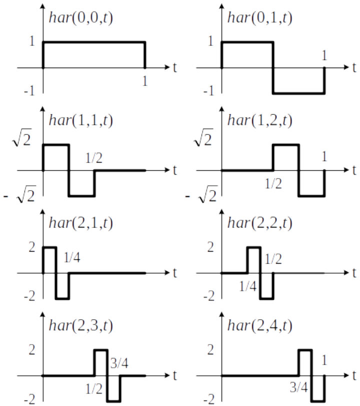
$$har(0, 0, t) = 1, \forall t \in [0, 1);$$

$$har(r, m, t) = \begin{cases} 2^{\frac{r}{2}} & \frac{m-1}{2^r} \leq t < \frac{m-1/2}{2^r} \\ -2^{\frac{r}{2}} & \frac{m-1/2}{2^r} \leq t < \frac{m}{2^r} \\ 0 & else \end{cases}$$

где $0 \leq r < log_2 N, 1 \leq m \leq 2^r, t \in [0, 1)$.

Ортогональные функции Хаара

5 Ортогональные функции Хаара



Функции Хаара для $N = 8$

Коэффициенты преобразования Хаара $Y(k), k = 0, \dots, N-1$, соответствующие входной последовательности $\{X(m)\}$, получаются в результате преобразования:

$$Y(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} H^*(k)X(m), k = \overline{0, N-1}$$

где $H^*(n)$ - матрица Хаара размерностью $N \times N$.

$$H^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & & & & & & \\ & & 2 & -2 & & & & \\ & & & & 2 & -2 & & \\ & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}N/N \\ \}N/N \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} N/4 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} N/2 \end{array}$$

В исходной матрице преобразования Хаара необходимо переупорядочить столбцы $H(3)$, пользуясь последовательно двоичной инверсией при $N = 8, 4, 2$.

Шаг 1. Переставим столбцы $H^*(3)$ в соответствии с двоичной инверсией их номеров при $N = 8$, т.е. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7\}$, что приведет к

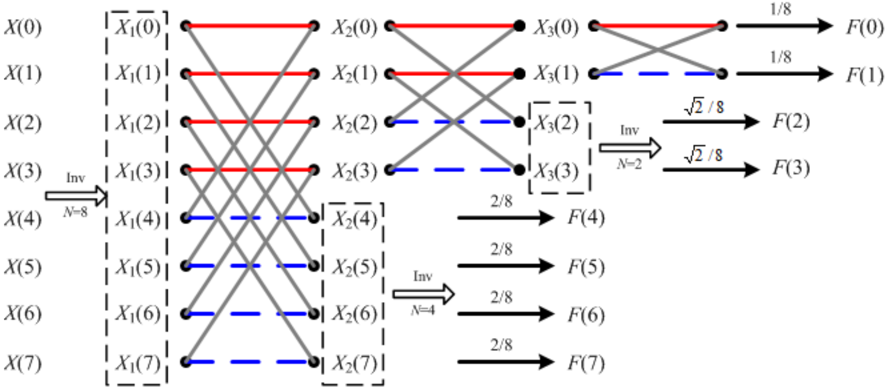
$$H^*(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\,N/N \\ \}\,N/N \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} N/4 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} N/2 \end{array}$$

Шаг 2. Переставим столбцы (4×4) матриц, заключенных в квадраты в соответствии с двоичной инверсией номеров столбцов при $N = 4$, т.е. $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 2, 1, 3\}$, что приведет к матрице

$$H^{*}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Быстрое преобразование Хаара

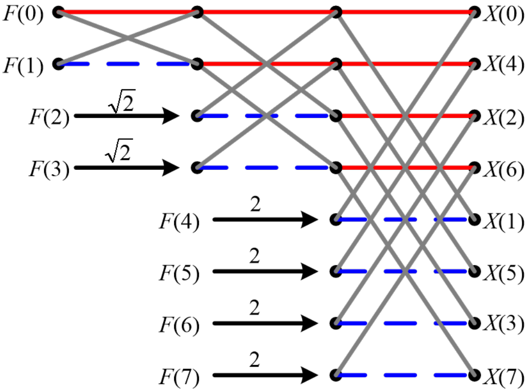
Шаг 3. Переставим столбцы (2×2) матриц, заключенных в квадраты в соответствии с двоичной инверсией номеров столбцов при $N = 2$, т.е. $\{0, 1\} \to \{0, 1\}$, что приводит к матрице, совпадающей с $H^*(3)$.



Обратное преобразование Хаара осуществляется согласно выражения

$$X(m) = \sum_{m=0}^{N-1} H^*(k)Y(m), k = \overline{0, N-1}$$

Быстрое преобразование Хаара



Литература

- Ч.13. Построение функции Уолша

Цифровая обработка сигналов и изображений

Thank you for listening!

Any questions?