Метод Квайна − Мак-Класки.

Теоретические основы метода минимизации булевых функций с использованием метода Квайна − Мак-Класки рассмотрены в учебном пособии (стр. 103 - 107), а так же более подробно они рассматривались на консултационной лекции, конспект.

Этот метод ориентирован на числовое задание булевой функции(БФ) в виде кубического комплекса, состоящего из 0-кубов. Метод представляет собой формализованный на этапе нахождения простых импликант метод Квайна.

Рассмотрим метод Квайна − Мак-Класки на примере минимизации БФ заданноой следующим образом:

$f_{\text{СДНФ}}(x_1x_2x_3x_4\,x_5)$ = V (0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 22, 25, 26, 28, 31).

На первом этапе выполним разбиение исходных 0-кубов на непересекающиеся подгруппы по количеству единиц в кубе. Пусть, например, задана функция

Сформируем кубический комплекс K, состоящий из кубов нулевой размерности:

K^0 = (00000, 00001, 00010, 00011, 01000, 01001, 01010, 01011, 01100, 01101, 10000, 10010, 10100, 10110, 11001, 11010, 11100, 11111).

Выполним разбиение комплекса K на группы, получим

$$K_1^0=\{00000\},\ K_2^0=\begin{Bmatrix}00001\\00010\\01000\\10000\end{Bmatrix},\ K_3^0=\begin{Bmatrix}00011\\01001\\01010\\01100\\10010\\10100\end{Bmatrix},\ K_4^0=\begin{Bmatrix}01011\\01101\\10110\\11001\\11010\\11100\end{Bmatrix},\ K_5^0=\{11111\}.$$

Нетрудно заметить, что только соседние группы кубов (K_i^0 и K_{i+1}^0), имеют кодовое расстояние (число единиц в сумме по модулю 2) равное единице, а это есть условие возможного склеивания кубов. Таким образом попарное сравнение (склеивание) можно проводить только между соседними по номеру группами кубов. Формируем новый комплекс K^1 следующим образом. Если сравниваемые кубы (из соседних групп) различаются только в одном разряде, то в K^1 записывается куб с символом x на месте этого разряда, т. е. формируется куб следующего ранга (ранг -количество свободных координат x в кубе). В результате сравнения кубов получим новый кубический комплекс:

K^1 = (0000x, 000x0, 0x000, x0000,

000x1, 0x001, 0001x, 0x010, x0010, 0100x, 010x0, 01x00, 100x0, 10x00, 0x011, x1001, x1010, 0110x, x1100, 10x10, 101x0).

Куб 11111 из последней группы K_5^0 не образовал новых кубов. Следовательно он является простой импликантой и с этого куба начинается

$$K_1^1=\begin{Bmatrix} x0000\\ x0010\\ x1001\\ x1010\\ x1100 \end{Bmatrix},\ K_2^1=\begin{Bmatrix} 0x000\\ 0x001\\ 0x010\\ 0x011 \end{Bmatrix},\ K_3^1=\begin{Bmatrix} 01x00\\ 10x00\\ 10x10 \end{Bmatrix},\ K_4^1=\begin{Bmatrix} 000x0\\ 000x1\\ 010x0\\ 100x0\\ 101x0 \end{Bmatrix},\ K_5^1=\begin{Bmatrix} 0000x\\ 0001x\\ 0100x\\ 0110x \end{Bmatrix}.$$

формирование сокращенной ДНФ. Все остальные кубы участвовали в образовании новых кубов. Следовательно они не являются простыми импликантами. Далее полученные кубы первой размерности разобьем на группы кубов в зависимости от местоположения свободной координаты в кубе:

Далее выполняется сравнение(склеивание) кубов внутри каждой из групп. В результате этого шага могут быть получены кубы второй размерности, которые, в свою очередь, аналогично кубам первой размерности будут объединены в группы по совпадению свободных координат и вновь будет выполнено сравнение. На каждом шаге сравнения выявляются кубы, не участвовавшие в образовании новых кубов – простые импликанты, которые заносятся в сокращенную ДНФ и исключаются из дальнейшего упрощения.

Таким на следующем шаге будет сформирован очередной кубический комплекс:

K^2 = (x00x0, xx010, 0x00x, 0x0x0, 0x0x1, 0x01x, 10xx0,
000xx, 0x0x0, x00x0, 10xx0, 000xx, 0x00x, 01x0x).

Исключив в комплексе повтор кубов получим:

K^2 = (x00x0, xx010, 0x00x, 0x0x0, 0x0x1, 0x01x, 000xx, 10xx0, 01x0x).

Кубы x1001 и x1100 из группы K_1^1 и куб 01x00 из K_3^1 не образовали новых кубов – простые импликанты.

Из этого комплекса, как и ранее, сформируем новые группы кубов.

$$K_1^2=\{x00x0\},\quad K_2^2=\{xx010\},\quad K_3^2=\begin{Bmatrix} 0x00x\\ 0x01x \end{Bmatrix},\quad K_4^2=\begin{Bmatrix} 0x0x0\\ 0x0x1 \end{Bmatrix},$$

$$K_5^2=\{000xx\},\quad K_6^2=\{10xx0\},\quad K_7^2=\{01x0x\}.$$

После очередного склеивания получим кубический комплекс:

K^3 = (0x0xx, 0x0xx),

или

K^3 = (0x0xx).

Значит последние куб 0x0xx – так же простая импликанта.

Следовательно процесс упрощения (склеивания) кубов окончен. Из полученных простых импликант сформируем сокращенную ДНФ:

$f_{\text{сокр.ДНФ}}$ = {11111, x1001, x1100, 01x00, x00x0,
xx010, 000xx, 10xx0, 01x0x, 0x0xx}.

Далее аналогично методу Квайна строится импликантная таблица (табл. 15). Формирование минимального покрытия сводится к выявлению обязательных простых импликант и построению на их основе тупиковых форм.

Из таблицы следует, что простые импликанты *x*100, 10*x*1, *x*01*x* являются существенными (обязательными), они образуют ядро функции, т. е. будут обязательно входить во все тупиковые ДНФ. Оставшиеся две простые импликанты (0*x*10 и 01*x*0) не являются обязательными. Они обе покрывают один непокрытый минтерм 0110.

Таблица 15

Простые импликанты		Минтермы																	
		00000	10000	01000	11000	00010	10010	01010	11010	00110	10110	00001	01001	00101	01101	10011	01011	00111	11111
A	11111																		*
B	x1001						*									*			
C	x1100									*								*	
D	01x00					*				*									
E	x00x0	*		*								*	*						
F	xx010			*				*					*				*		
G	000xx	*	*	*	*														
H	10xx0											*	*	*	*				
I	01x0x					*	*			*	*								
J	0x0xx	*	*	*	*	*	*	*	*										

Следовательно образуются следующая (одна) тупиковая форма:

$f_{\text{МДНФ}}$={0*x0xx*, 01*x*0*x*, 10*xx*0, *x*1001, *xx*010, *x*1100,11111} – 1-я тупиковая форма (**JIHBFCA**);

Если тупиковых (минимальных) форм несколько, то выбирается та, у которой наименьшее число вхождений переменных (букв).

<u>*Замечание*</u>. Если функция не полностью определена, наборы, на которых она не определена, могут участвовать в склеивании, но в импликантную таблицу не вносятся.

Выполним проверку правильности получения МДНФ по методу Квайна – Мак-Класки. Для этого воспользуемся, например минимизирующими картами Карно.

x_1x_2 \ $x_3x_4x_5$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1				
01	1	1	1	1			1	1
11		1		1		1		1
10	1			1	1			1

Практические задания.

1. Выполните минимизацию БФ по ее числовому заданию. В условии fсднф – строки таблицы истинности, на которых БФ функция принимает единичные значения.

а. fсднф = V 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 29, 30, 31.
б. fсднф = V 0, 2, 4, 6, 9, 11, 12, 17, 20, 22, 23, 25, 27, 28, 30.
в. fсднф = V 1, 2, 5, 8, 15, 17, 19, 24, 25, 26, 29.
г. fсднф = V 0, 4, 6, 10, 13, 15,19, 22, 24, 25, 27, 29, 31.

(выбрать и выполнить 1 из 4 вариантов заданий а … г)

2. Выполните минимизацию БФ по ее числовому заданию. В условии fсднф – строки таблицы истинности, на которых БФ функция принимает единичные значения, f* – наборы на которых БФ не определена.

а. fсднф = V 1, 2, 8, 11, 17, 18, 25. f* = V 3, 12, 15, 24, 26.
б. fсднф = V 0, 4, 6, 9, 17, 22, 25, 28, 29, 31. f* = V 1, 3, 12, 21.
в. fсднф = V 1, 2, 4, 5, 8, 16, 17, 19, 24, 26, 29. f* = V 3, 6, 14, 18.
г. fсднф = V 0, 3, 6, 9, 11, 13, 14, 22, 27, 28. f* = V 1, 2, 23, 24, 25.

(выбрать и выполнить 1 из 4 вариантов заданий а … г)