12. Линейные преобразования.

Пусть V − линейное пространство.

Определение 1. Если задан закон f, по которому каждому вектору $\vec{x}\in V$ поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{y}\in V$, то будем говорить, что задано **преобразование (отображение, оператор)** f пространства V в себя и записывать $f:V\to V$.

Вектор $\vec{y}$ называется **образом** вектора $\vec{x}$, а вектор $\vec{x}$ – **прообразом** вектора $\vec{y}$. Если преобразование f переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, то это будем записывать как $\vec{y}=f(\vec{x})$.

Определение 2. Преобразование f называется **линейным**, если выполнены два условия:

1) $f(\vec{x}_1\oplus\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)\oplus f(\vec{x}_2), \forall\vec{x}_1,\vec{x}_2\in V$;

2) $f(\lambda\otimes\vec{x})=\lambda\otimes f(\vec{x}), \forall\vec{x}\in V, \forall\alpha\in R$.

Замечание. Линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой.

Действительно,

$$f(\vec{0})=f(\vec{x}\oplus(-\vec{x}))=f(\vec{x})\oplus f(-\vec{x})=f(\vec{x})\oplus f(-1\otimes\vec{x})=f(\vec{x})\oplus\left(-1\otimes f(\vec{x})\right)=f(\vec{x})\oplus\left(-f(\vec{x})\right)=\vec{0}.$$

Определение 3. Преобразование f называется тождественным, если оно каждому вектору пространства V ставит в соответствие этот же вектор, то есть $f(\vec{x})=\vec{x}$.

Тождественное преобразование является линейным.

Пусть линейное преобразование f переводит базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ в векторы $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\ldots,\vec{e}_n'$, то есть $f(\vec{e}_i)=\vec{e}_i', i=1,2,\ldots,n$, при этом

$$\begin{cases}\vec{e}_1'=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n,\\ \vec{e}_2'=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{e}_n'=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n.\end{cases}$$

Определение 4. Матрица вида

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного преобразования** f в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$.

Определение 5. Ранг r матрицы A называется **рангом преобразования**, а число $n-r$ – **дефектом** этого **преобразования**.

Связь между координатами вектора и его образа

Пусть вектор $\vec{x}(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, то есть $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$. Найдем $f(\vec{x})$.

Предположим, что $f(\vec{x})=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Тогда $f(\vec{x})=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n$.

С другой стороны

$$\begin{aligned}f(\vec{x})&=f(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)=x_1f(\vec{e}_1)+x_2f(\vec{e}_2)+\ldots+x_nf(\vec{e}_n)=\\ &=x_1\left(a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n\right)+x_2\left(a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n\right)+\ldots+x_n\left(a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n\right)=\\ &=\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\right)\vec{e}_1+\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\right)\vec{e}_2+\ldots+\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\right)\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n.\end{cases}\tag{1}$$

Обозначим $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Тогда система (1) примет вид $Y=AX$.

Определение 6. Областью значений линейного оператора f называется множество $\operatorname{Im} A$ векторов вида $\bar{y}=A\bar{x},$ то есть $\operatorname{Im} A=\{\bar{y}\in V \mid \bar{y}=A\bar{x},\ \bar{x}\in V\}.$

Определение 7. Ядром линейного оператора f называется множество $KerA$ всех векторов $\bar{x}\in V,$ для которых $A\bar{x}=\bar{0},$ то есть $\ker A=\{\bar{x}\in V \mid A\bar{x}=\bar{0}\}.$

Связь между координатами вектора и его образа

Определение 8. Пусть в линейном пространстве V даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\dots,\vec{e}_n{}'$ и

$$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=t_{11}\vec{e}_1+t_{21}\vec{e}_2+\dots+t_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}_2{}'=t_{12}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2+\dots+t_{n2}\vec{e}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{e}_n{}'=t_{1n}\vec{e}_1+t_{2n}\vec{e}_2+\dots+t_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

Матрица $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей перехода от базиса** $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ **к базису** $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\dots,\vec{e}_n{}'$.

Если $\vec{x}(x_1;x_2;\dots;x_n)$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{x}(x_1';x_2';\dots;x_n')$ в базисе $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\dots,\vec{e}_n{}'$, то покажем, что $X=TX'$, где $X'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

Действительно,

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{x}=x_1'\vec{e}_1{}'+x_2'\vec{e}_2{}'+\dots+x_n'\vec{e}_n{}'=x_1'\cdot(t_{11}\vec{e}_1+t_{21}\vec{e}_2+\dots+t_{n1}\vec{e}_n)+x_2'\cdot(t_{12}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2+\dots+t_{n2}\vec{e}_n)+$$
$$+\dots+x_n'\cdot(t_{1n}\vec{e}_1+t_{2n}\vec{e}_2+\dots+t_{nn}\vec{e}_n)=$$
$$=(t_{11}x_1'+t_{12}x_2'+\dots+t_{1n}x_n')\vec{e}_1+(t_{21}x_1'+t_{22}x_2'+\dots+t_{2n}x_n')\vec{e}_2+\dots+(t_{n1}x_1'+t_{n2}x_2'+\dots+t_{nn}x_n')\vec{e}_n.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1=t_{11}x_1'+t_{12}x_2'+\dots+t_{1n}x_n', \\ x_2=t_{21}x_1'+t_{22}x_2'+\dots+t_{2n}x_n', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=t_{n1}x_1'+t_{n2}x_2'+\dots+t_{nn}x_n', \end{cases} \tag{2}$$

или в матричной форме

$$X=TX'. \tag{3}$$

Определение 9. Формулы (2) или(3) называются **формулами преобразования координат**.

Пример 1. Выясните, являются ли линейными операторы $f:R^3\to R^3$, заданные условиями:

а) $f(\vec{x})=(x_1-x_3;x_2^2;x_1+2x_2+3x_3), \vec{x}(x_1;x_2;x_3)\in R^3.$

б) $f(\vec{x})=[\vec{x},\vec{a}], \vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k},\ \vec{x}(x_1;x_2;x_3)\in R^3.$

Решение.

а) Проверим первое условие из определения линейного оператора. Найдем $f(\vec{x}+\vec{y})$ и $f(\vec{x})+f(\vec{y})$. Учитывая, что $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1; x_2+y_2; x_3+y_3)$, получим

$$f(\vec{x}+\vec{y})=((x_1+y_1)-(x_3+y_3); (x_2+y_2)^2; (x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3))=$$
$$=(x_1+y_1-x_3-y_3; x_2{}^2+y_2{}^2+2x_2y_2; x_1+y_1+2x_2+2y_2+3x_3+3y_3),$$
$$f(\vec{x})+f(\vec{y})=(x_1-x_3; x_2^2; x_1+2x_2+3x_3)+(y_1-y_3; y_2^2; y_1+2y_2+3y_3)=$$
$$=(x_1-x_3+y_1-y_3; x_2^2+y_2^2; x_1+2x_2+3x_3+y_1+2y_2+3y_3).$$

Сравнивая покоординатно векторы $f(\vec{x}+\vec{y})$ и $f(\vec{x})+f(\vec{y})$, получаем, что их первые и третьи координаты совпадают, тогда как вторые различны: $x_2{}^2+y_2{}^2+2x_2y_2\neq x_2^2+y_2^2$, если $x_2y_2\neq 0$.

Таким образом, равенство $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ выполняется не для всех векторов $\vec{x},\vec{y}\in R^3$.

Значит, оператор f не является линейным.

б) В силу свойств векторного произведения векторов получим

$f(\vec{x}+\vec{y})=[\vec{x}+\vec{y},\vec{a}]=[\vec{x},\vec{a}]+[\vec{y},\vec{a}]=f(\vec{x})+f(\vec{y})$; $f(\lambda\vec{x})=[\lambda\vec{x},\vec{a}]=\lambda[\vec{x},\vec{a}]=\lambda f(\vec{x})$.

Значит, оператор $f(\vec{x})=\left[\vec{x},\vec{a}\right]$ является линейным для любого вектора $\vec{a}$.

Составим матрицу оператора f в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Для этого найдем $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$. Получим

$$f(\vec{i})=[\vec{i},\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=(0;-5;-1);$$

$$f(\vec{j})=[\vec{i},\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=(5;0;-2);$$

$$f(\vec{k})=[\vec{k},\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=(1;2;0).$$

Столбцами матрицы A этого оператора в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ являются координаты образов базисных векторов $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$: $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 1\\ -5 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

Задача. Составьте матрицу линейного оператора f, являющегося оператором ортогонального проектирования векторов R^3 на плоскость $x+y=0$.

Собственные векторы линейного оператора

Зависимость между матрицами одного и того же оператора в различных базисах.

Теорема 1. Если $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\ldots,\vec{e}'_n$ – два базиса некоторого линейного пространства и A – матрица линейного оператора f в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, то матрица B этого оператора в базисе $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\ldots,\vec{e}'_n$ имеет вид

$$B=T^{-1}\cdot A\cdot T, \qquad (1)$$

где T – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\ldots,\vec{e}'_n$.

Доказательство.

Пусть вектор $\vec{x}$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$, а вектор $f(\vec{x})$ имеет координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$. Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \cdots \\ y'_n \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = T \cdot X', \tag{2}$$

$$Y = T \cdot Y' \tag{3}$$

и

$$Y = A \cdot X, \tag{4}$$

$$Y' = B \cdot X'. \tag{5}$$

Умножим обе части равенства (2) на матрицу A слева, получим $A \cdot X = A \cdot T \cdot X'$. Отсюда и в силу (3) и (4) получим

$$T \cdot Y' = A \cdot T \cdot X'. \tag{6}$$

Так как T – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$, то она является невырожденной и, значит, существует обратная матрица T^{-1}. Умножим обе части равенства (6) на матрицу T^{-1} слева, получим

$$T^{-1} \cdot (T \cdot Y') = T^{-1} \cdot (A \cdot T \cdot X') \Leftrightarrow \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot Y' = \left(T^{-1} \cdot A \cdot T\right) \cdot X' \Leftrightarrow Y' = \left(T^{-1} \cdot A \cdot T\right) \cdot X'.$$

Из последнего равенства и в силу (5) получим $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$.

Теорема 1 доказана.

Следствие.

Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе матрица этого оператора является невырожденной.

Действительно, пусть A и B –матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ соответственно и $\det A \neq 0$. Так как $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$, где T – невырожденная матрица, то найдем $\det B$, получим

$$\det B = \det\left(T^{-1} \cdot A \cdot T\right) = \det\left(T^{-1}\right) \cdot \det A \cdot \det T = \frac{1}{\det T} \cdot \det A \cdot \det T = \det A \neq 0,$$

то есть $\det A = \det B \neq 0$.

Замечание.

Если A и B –матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ соответственно, то $A = T \cdot B \cdot T^{-1}$.

Характеристическое уравнение линейного оператора.

Теорема 2.

Если A и B –матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ соответственно, то

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det(B - \lambda \cdot E),$$

где λ – произвольное число и E – единичная матрица порядка n.

Доказательство.

Пусть T – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$, тогда $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$. Найдем $\det(B - \lambda \cdot E)$, получим

$$\det(B - \lambda \cdot E) = \det\left(T^{-1} \cdot A \cdot T - \lambda \cdot E\right) = \det\left(T^{-1} \cdot A \cdot T - \lambda \cdot \left(T^{-1} \cdot E \cdot T\right)\right) =$$

$$=\det\left(T^{-1}\cdot(A\cdot T)-\lambda\cdot\left(T^{-1}\cdot(E\cdot T)\right)\right)=\det\left(T^{-1}\cdot(A\cdot T)-T^{-1}\cdot(\lambda\cdot E\cdot T)\right)=\det\left(T^{-1}\cdot(A\cdot T-\lambda\cdot E\cdot T)\right)=$$
$$=\det\left(T^{-1}\cdot(A-\lambda\cdot E)\cdot T\right)=\det T^{-1}\cdot\det(A-\lambda\cdot E)\cdot\det T=\frac{1}{\det T}\cdot\det(A-\lambda\cdot E)\cdot\det T=\det(A-\lambda\cdot E),$$

то есть $\det(B-\lambda\cdot E)=\det(A-\lambda\cdot E)$.

Теорема 2 доказана.

Определение 10. Многочлен $\det(A-\lambda\cdot E)$ степени n относительно λ называется **характеристическим многочленом** матрицы A или линейного оператора f.

Определение 11. Характеристическим уравнением линейного оператора f называется уравнение вида

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0, \tag{1}$$

где A – матрица линейного оператора f в некотором базисе.

Определение 12. Корни характеристического уравнения (1) называются **характеристическими числами** матрицы A или линейного оператора f.

Замечание. При переходе от одного базиса к другому матрица линейного оператора меняется, а характеристический многочлен остается неизменным.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора f в некотором базисе. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0\Leftrightarrow\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Собственные векторы линейного оператора.

Определение 13. Вектор $\vec{x}$ линейного пространства называется **собственным вектором линейного оператора** f, если этот вектор ненулевой и существует действительное число k такое, что

$$f(\vec{x})=k\cdot\vec{x}. \tag{1}$$

Определение 2. Число k называется **собственным числом вектора** $\vec{x}$ относительно линейного оператора f.

Равенство (1) можно записать в матричном виде

$$A\cdot X=k\cdot X\Leftrightarrow A\cdot X=k\cdot(E\cdot X)\Leftrightarrow A\cdot X=(k\cdot E)\cdot X\Leftrightarrow(A-k\cdot E)\cdot X=O,$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора f в некотором базисе, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ –матрица–столбец из координат вектора $\vec{x}$ в том же базисе.

Свойства линейного оператора

1. Собственный вектор линейного оператора имеет единственное собственное значение.

Доказательство.

Пусть k_1 и k_2 - различные собственные числа собственного вектора $\vec{x}$ относительно линейного оператора f. Тогда $f(\vec{x})=k_1\cdot\vec{x}$ и $f(\vec{x})=k_2\cdot\vec{x}$.Отсюда

$$k_1\cdot\vec{x}=k_2\cdot\vec{x}\Leftrightarrow(k_1-k_2)\cdot\vec{x}=\vec{0}.$$

Так как $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $k_1 = k_2$. Получили противоречие. Значит, собственное значение собственного вектора определено однозначно.

2. Если $\vec{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k и λ – любое отличное от нуля число, то $\lambda \cdot \vec{x}$ – также собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k.

Доказательство.

Если $\vec{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k, то по определению $f(\vec{x}) = k \cdot \vec{x}.$

Найдем $f(\lambda \cdot \vec{x})$. Учитывая определение линейного оператора и в силу (1), получим

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) = \lambda \cdot (k \cdot \vec{x}) = k \cdot (\lambda \cdot \vec{x}).$$

Следовательно, $\lambda \cdot \vec{x}$ – также собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k.

3. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – линейно независимые собственные векторы линейного оператора f с одним и тем же собственным значением k, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k.

Доказательство.

Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – собственные векторы линейного оператора f с одним и тем же собственным значением k, то из определения собственного вектора имеем

$$f(\vec{x}_1) = k \cdot \vec{x}_1, \; f(\vec{x}_2) = k \cdot \vec{x}_2.$$

Так как $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – линейно независимые векторы, $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – ненулевой вектор. Найдем $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$. В силу определения линейного оператора получим

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = k \cdot \vec{x}_1 + k \cdot \vec{x}_2 = k \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2).$$

Значит, $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным значением k.

4. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – собственные векторы линейного оператора f с собственными значениями k_1 и k_2 соответственно, и $k_1 \neq k_2$, то $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – линейно независимые векторы.

Доказательство.

Предположим, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ линейно зависимы. Тогда существует ненулевое число α такое, что $\vec{x}_1 = \alpha \cdot \vec{x}_2$. Отсюда по свойству 2 вектор $\vec{x}_1 = \alpha \cdot \vec{x}_2$ –собственный вектор линейного оператора f с собственными значениями k_2. А так как собственное значение собственного вектора линейного оператора f определено однозначно, то $k_1 = k_2$.Значит, наше предположение не верно и векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ линейно независимы.

Теорема 3.

Для того, чтобы линейный оператор f имел собственный вектор $\vec{x}$ с собственным значением k, необходимо и достаточно, чтобы число k являлось корнем характеристического уравнения этого оператора.

Доказательство.

Для того, чтобы линейный оператор f имел собственный вектор $\vec{x}$ с собственным значением k, необходимо и достаточно, имело место равенство

$$f(\vec{x}) = k \cdot \vec{x} \Leftrightarrow A \cdot X = k \cdot E \Leftrightarrow (A - k \cdot E) \cdot X = O.$$

Для того, чтобы однородная система $(A - k \cdot E) \cdot X = O$ имела ненулевое решение $\vec{x}$, необходимо и достаточно, чтобы $\det(A - k \cdot E) = 0$, то есть число k являлось корнем характеристического уравнения линейного оператора f.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4.

Пусть k – собственное число линейного оператора f с матрицей A n – мерного линейного пространства. Если ранг матрицы $A - k \cdot E$ равен r, то существует $n - r$ линейно независимых собственных векторов линейного оператора f с собственным числом k.

Доказательство.

Если k – собственное число линейного оператора f с матрицей A n – мерного линейного пространства, то $(A-k\cdot E)\cdot X=O$. Так как ранг матрицы $A-k\cdot E$ равен r, то существует $n-r$ линейно независимых решений однородной системы. Учитывая, что каждое решение системы $(A-k\cdot E)\cdot X=O$ является собственным вектором с собственным значением k, получим, что существует $n-r$ линейно независимых собственных векторов линейного оператора f с собственным числом k.

Теорема 4 доказана.

Пример.

Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda\cdot E)=0$, корнями которого являются собственные значения λ матрицы A:

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(4-\lambda)\cdot\left((2-\lambda)^2-1\right)+(2-\lambda+1)-(-1-(2-\lambda))=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(4-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)+6-2\lambda=0\Leftrightarrow(\lambda-3)^2(2-\lambda)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=2,\\ \lambda=3.\end{array}\right.$$

Для каждого собственного значения λ составим и решим однородную систему уравнений $(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{x}=\vec{0}$:

$$(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы A с собственным значением λ.

Для $\lambda_1=2$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0,\\ x_1-x_3=0,\\ x_1-x_2=0.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{S_2+(-2)S_1\\ S_3+(-1)S_1}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{S_3+(-1)S_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует однородная система $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ -x_2+x_3=0.\end{cases}$

Выберем базисными переменными x_1 и x_2, а свободной неизвестной – x_3. Тогда $x_1=x_3$, $x_2=x_3$. Полагая $x_3=c_3\neq 0$, получим собственные векторы $\vec{X}_1$, соответствующие собственному значению $\lambda_1=2$:

$$\vec{X}_1=\begin{pmatrix}c_3\\ c_3\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\cdot c_3,$$

где c_3 –произвольное число, отличное от нуля.

Для $\lambda_2 = 3$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Выберем x_1 базисной переменной, а x_2, x_3 – свободными неизвестными. Тогда $x_1 = x_2 + x_3$. Полагая $x_2 = c_2, x_3 = c_3$, получим собственные векторы $\vec{X}_2$, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 3$:

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_2, c_3 –произвольные числа, не равные нулю одновременно, что равносильно условию $c_2{}^2 + c_3{}^2 \neq 0$.

Задача. Составьте матрицу линейного оператора

$$f(\vec{x}) = \vec{x} - 3 \cdot (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}, \ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \ \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$$

в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и найдите собственные значения и собственные векторы оператора f.