10. Операционное исчисление

Рассмотрим некоторые типовые примеры.

Пример 1. Найдите отображение $F(p)$ для оригинала $f(t) = \mathrm{ch}\,t \cdot \cos t$.

Решение

Преобразуем оригинал $f(t)$, используя формулу для $\mathrm{ch}\,t$:

$$f(t) = \mathrm{ch}\,t \cdot \cos t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\cos t = \frac{1}{2}\left(e^t \cos t + e^{-t}\cos t)\right),$$

тогда $F(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1} + \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}\right)$.

Ответ: $F(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1} + \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}\right)$.

Пример 2. Найдите отображение $F(p)$ для оригинала $f(t) = t^2 \cdot \cos t$.

Решение

Воспользуемся свойством о дифференцировании изображения.

Так как $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$, то

$$t^2 \cdot \cos t \risingdotseq \left(\frac{p}{p^2+1}\right)^{//} = \left(\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}\right)^{/} = \frac{2p(p^2-6)}{(p^2+1)^3}$$

Ответ: $F(p) = \dfrac{2p(p^2-6)}{(p^2+1)^3}$.

Пример 3. Найдите оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p) = \dfrac{p+3}{p^2+2p+10}$.

Решение

Преобразуем изображение

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+10} = \frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{(p+1)^2+3^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+1)^2+3^2}$$

тогда $f(t) = e^{-t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t$.

Ответ: $f(t) = e^{-t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t$.

Пример 4. Найдите оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p) = \frac{p+1}{p^2-5p+6}$.

<u>Решение</u>

Рассмотрим решение данной задачи тремя различными способами.

<u>1 способ.</u>

Представим дробь $F(p) = \frac{p+1}{p^2-5p+6}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{p+1}{p^2-5p+6} = \frac{p+1}{(p-2)(p-3)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p-3} = \frac{A(p-3)+B(p-2)}{p^2-5p+6}$$

Используя метод частных значений получим: $\begin{array}{l} p=2: \quad -A=3 \quad \Rightarrow \quad A=-3 \\ p=3: \quad B=4 \end{array}$.

Таким образом $\frac{p+1}{p^2-5p+6} = \frac{-3}{p-2} + \frac{4}{p-3}$.

Используя таблицу, а также свойства оригиналов и изображений получим:

$$F(p) = \frac{-3}{p-2} + \frac{4}{p-3} \risingdotseq -3\cdot e^{2t} + 4\cdot e^{3t} = f(t)$$

<u>2 способ.</u>

Используем формулы (10.1) и (10.2).

Точки $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$ являются простыми корнями знаменателя, а значит простыми полюсами функции $F(p)$, поэтому

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{p=2}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right) + \operatorname*{Res}_{p=3}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right).$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся формулой (10.2), а также тем, что функцию $F(p)$ можно записать в виде $F(p) = \frac{p+1}{(p-2)(p-3)}$:

$$\operatorname*{Res}_{p=2}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right) = \lim_{p\to 2}\left((p-2)\cdot\frac{p+1}{(p-2)(p-3)}\cdot e^{pt}\right) = -3\cdot e^{2t}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=3}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)=\lim_{p\to 3}\left((p-3)\cdot\frac{p+1}{(p-2)(p-3)}\cdot e^{pt}\right)=4\cdot e^{4t}$$

С учетом полученных выражений имеем $f(t)=-3\cdot e^{2t}+4\cdot e^{3t}$.

<u>3 способ</u>.

Используем формулу (10.4).

$$f(t)=\frac{V(p_1)}{Q'(p_1)}\cdot e^{p_1 t}+\frac{V(p_2)}{Q'(p_2)}\cdot e^{p_2 t}=\frac{V(2)}{Q'(2)}\cdot e^{2t}+\frac{V(3)}{Q'(3)}\cdot e^{3t}\langle=\rangle$$

Вычислим $Q'(p)$: $Q'(p)=2p-5$, тогда

$$\langle=\rangle\frac{2+1}{2\cdot 2-5}\cdot e^{2t}+\frac{3+1}{2\cdot 3-5}\cdot e^{3t}=-3\cdot e^{2t}+4\cdot e^{3t}.$$

Ответ: $f(t)=-3\cdot e^{2t}+4\cdot e^{3t}$.

Пример 4. Решите операторным методом дифференциальное уравнение $x^{//}-3x^{/}+2x=12e^{3t}$, если $x(0)=2;\ x^{/}(0)=6$.

<u>Решение</u>

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, тогда

$$x^{/}\risingdotseq p\cdot X(p)-x(0)=p\cdot X(p)-2$$

$$x^{//}\risingdotseq p^2\cdot X(p)-p\cdot x(0)-x^{/}(0)=p^2\cdot X(p)-2p-6$$

С учетом того, что

$$f(t)=12e^{3t}\risingdotseq\frac{12}{p-3}$$

уравнение примет вид:

$$p^2X(p)-2p-6-3p\cdot X(p)+6+2X(p)=\frac{12}{p-3}.$$

Сгруппировав слагаемые получим

$$X(p)\left(p^2-3p+2\right)=\frac{12}{p-3}+2p$$

откуда $X(p)=\dfrac{2p^2-6p+12}{(p-3)\left(p^2-3p+2\right)}=\dfrac{2p^2-6p+12}{(p-3)(p-1)(p-2)}$.

Восстановим оригинал $x(t)$ по полученному преобразованию $X(p)$.

Так как особые точки $p_1=1, p_2=2, p_3=3$ функции $X(p)$ являются ее простыми полюсами, то используя формулы (10.1) и (10.2) находим:

$$x(t)=\operatorname*{Res}_{p=1} X(p)e^{pt}+\operatorname*{Res}_{p=2} X(p)e^{pt}+\operatorname*{Res}_{p=3} X(p)e^{pt}\langle=\rangle$$

$$\operatorname*{Res}_{p=1} X(p)\cdot e^{pt}=\lim_{p\to 1}\frac{2p^2-6p+12}{(p-2)(p-3)(p-1)}\cdot(p-1)\cdot e^{pt}=4e^t$$

$$\operatorname*{Res}_{p=2} X(p)\cdot e^{pt}=\lim_{z\to 2}\frac{2p^2-6p+12}{(p-2)(p-3)(p-1)}\cdot(p-2)\cdot e^{pt}=-8e^{2t}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=3} X(p)\cdot e^{pt}=\lim_{p\to 3}\frac{2p^2-6p+12}{(p-2)(p-3)(p-1)}\cdot(p-3)\cdot e^{pt}=6e^{3t}$$

$\langle=\rangle 4e^t-8e^{2t}+6e^{3t}$.

Ответ: $x(t)=4e^t-8e^{2t}+6e^{3t}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите изображение $F(p)$ оригинала $f(t)=t^2e^{3t}\cdot\mathrm{ch}2t$.

$$\left(\text{Ответ}:\quad F(p)=\frac{1}{(p-5)^3}+\frac{1}{(p-1)^3}\right)$$

2. Найдите изображение $F(p)$ оригинала $f(t)=t\cdot\sin 2t\cdot\mathrm{sh}2t$.

$$\left(\text{Ответ}:\quad F(p)=\frac{2p-4}{(p^2-4p+8)^2}-\frac{2p+4}{(p^2+4p+8)^2}\right)$$

3. Найдите изображение $F(p)$ оригинала $f(t)=t\cdot e^t\cdot\cos 2t$.

$$\left(\text{Ответ}:\quad F(p)=\frac{p^2-2p-3}{(p^2-2p+5)^2}\right)$$

4. Найдите оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)=\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

$$\left(\text{Ответ}:\quad f(t)=\frac{13}{17}e^{2t}-\frac{e^{-2t}}{17}(13\cos t-16\sin t)\right)$$

5. Найдите оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{(p+1)^3}$.

$\left(\text{Ответ}: \quad f(t)=e^{-t}(1-t^2)\right)$

6. Найдите оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$.

$$\left(\text{Ответ}: \quad f(t)=\frac{3t^2+2t-2}{54}e^t+\frac{2t+1}{27}e^{-2t}\right)$$

7. Решите операторным методом дифференциальное уравнение $x''-x'=te^t$, если $x(0)=x'(0)=0$.

$$\left(\text{Ответ}: \quad x(t)=-1+\frac{e^t}{2}(t^2-2t+2)\right)$$

8. Решите операторным методом дифференциальное уравнение $x'''+x''=\sin t$, если $x(0)=x'(0)=1$, $x''(0)=0$.

$$\left(\text{Ответ}: \quad x(t)=2t+\frac{1}{2}\left(e^{-t}+\cos t-\sin t\right)\right)$$

9. Решите операторным методом дифференциальное уравнение $x''-9x=e^{-2t}$, если $x(0)=x'(0)=0$.

$$\left(\text{Ответ}: \quad x(t)=\frac{1}{30}(e^{3t}+5e^{-3t}-6e^{-2t})\right)$$

10. Решите операторным методом дифференциальное уравнение $x''-2x'+2x=2e^t\cos t$, если $x(0)=x'(0)=0$.

$\left(\text{Ответ}: \quad x(t)=t\cdot e^t\sin t\right)$

11. Решите операторным методом систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=2x+y+1 \end{cases}$ при начальных условиях $x(0)=0; \quad y(0)=5$.

$$\left(\text{Ответ}: \quad \begin{cases} x(t)=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}e^{3t}-2e^{-t} \\ y(t)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{3}e^{3t}+2e^{-t} \end{cases}\right).$$