Цифровая обработка сигналов и изображений

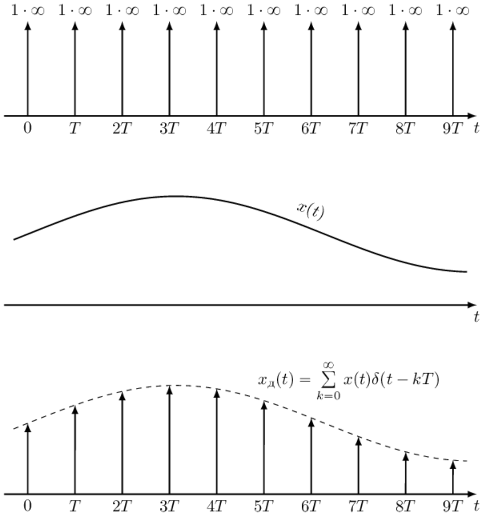
Разработка КИХ-фильтров

Перцев Дмитрий

April 3, 2025

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Table of Contents



Дискретный сигнал:

$$x_d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t-kT)$$

Дискретное преобразование Лапласа

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$X_d(s) = \mathcal{L}[x_d(t)] = \int_0^{\infty} x_d(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t-kT)e^{-st}dt =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t)\delta(t-kT)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}$$

Учитывается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{t_0-\triangle t/2}^{t_0+\triangle t/2} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

Дискретное преобразование Лапласа

$$s = j\omega$$

$$X_d(j\omega)$$

периодическая функция частоты с периодом

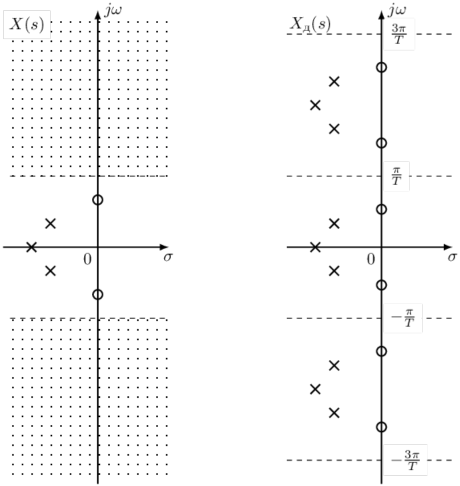
$$\Omega = \frac{2\pi}{T},$$

кроме того, если

$$s = \sigma + j\omega,$$

то

$$X_d(\sigma + j(\omega + \frac{2\pi n}{T})) = X_d(\sigma + j\omega),$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



Дискретный фильтр

Фильтрация во временной области:

$$Y(s) = X_d(s)H(s).$$

$H(s)$ - передаточная характеристика фильтра, представляет собой преобразование Лапласа импульсной характеристики фильтра $h(t)$

Для дискретного преобразования:

$$H_d(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)e^{-skT}.$$

Table of Contents

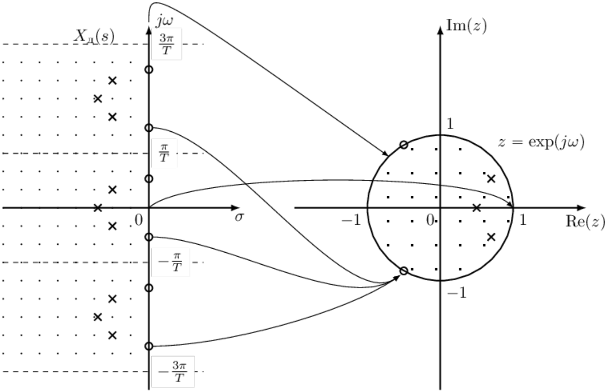
2 Z-преобразование

Пусть $z = e^{sT}$.

$$X_d(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}.$$
$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

Поскольку:

$$e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{(\sigma+j(\omega+2\pi n/T))T} = z$$



то все бесконечные периодические повторения нулей и полюсов дискретного фильтра в плоскости s преобразуются в одну точку в плоскости z.

Z**-преобразованием** называют свёртывание исходного сигнала, заданного последовательностью вещественных чисел во временной области, в аналитическую функцию комплексной частоты.

Если сигнал представляет импульсную характеристику линейной системы, то коэффициенты Z-преобразования показывают отклик системы на комплексные экспоненты, то есть на гармонические осцилляции с различными частотами и скоростями нарастания/затухания.

Z-преобразование $X(z)$ дискретного сигнала $x(n)$ определено только для области z, в которой степенной ряд $X(z)$ сходится. Эта область сходимости включает в себя все значения z, находящиеся вне некоторого круга на комплексной z-плоскости, радиус которого называется **радиусом сходимости**

Двустороннее Z-преобразование

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$
$$e^{j2\pi fT} = z$$

Одностороннее Z-преобразование

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Обратное Z-преобразование

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

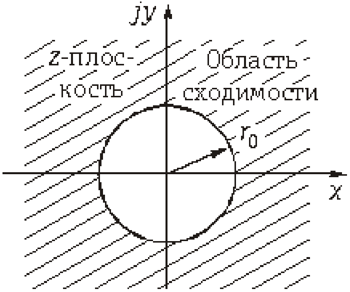


Рис. 10.17

Интегрирование по окружности, область сходимости:

- Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Работа векторного поля
- Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

Одностороннее Z-преобразование

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Пример. Найдем z-преобразование $X(z)$ дискретного экспоненциального сигнала $x(k) = e^{-\alpha k T}$.

Подставим значение $x(k)$ в формулу:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k T} \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\alpha T} \cdot z^{-1})^{k}$$

Из теории рядов следует:

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

Нуль функции $X(z)$ будет в точке $z_0 = 0$, полюс - в точке $z_k = e^{-\alpha T}$.
Следовательно, радиус сходимости $r_0 = e^{-\alpha T}$, а функция $X(z)$ сходится при $|z| > e^{-\alpha T}$.

Пример 1. Z-преобразование единичного импульса $\delta(n)$.
Поскольку $x(n) = 0$ при любых n, за исключением $n = 0$, где $x(n) = 1$, то $X(z) = 1$
Пример 2. Z-преобразование задержанной функции единичного отсчета $\delta(n-k)$ равно z^{-k}.
Пример 3. Z-преобразование единичной последовательности $u_0(n)$.
Поскольку $x(n) = 0$ везде, кроме $n \geq 0$, где $x(n) = 1$, то

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$X(z)$ сходится при $|z| > 1$, имеется одна особая точка (полюс) при $z = 1$.

Свойства Z-преобразования

- Линейность:

$$y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$
$$Y(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

- Задержка последовательности:
  Если $Z\{x(n)\} = X(z)$ и $x(n) = 0$ при $n < 0$, то $y(n) = x(n - N)$ имеет Z-преобразование $Y(Z) = z^N X(z)$
- Умножение на n:
  Если $y(n) = nx(n)$, тогда $Y(Z) = -zdX(z)/dz$
- Умножение на экспоненту:
  Если $y(n) = a^n x(n)$, тогда $Y(Z) = X(a^{-1}z)$
- Свертка последовательностей:
  Если $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$ и $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$, тогда свертка последовательностей имеет Z-преобразование $Y(z) = X_1(z)X_2(z)$.

Свойство свертки Z-преобразования имеет очень важное следствие:
если $y(n)$ и $x_2(n)$ являются соответственно выходом и импульсной характеристикой $h(n)$ системы, то

$$Y(Z) = X(z)H(z),$$

где $H(z)$ - Z-преобразование импульсной характеристики, которая называется **передаточной характеристикой системы**
Отсюда получим

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

ЦФ задается своей передаточной характеристикой $H(z)$, которая представляет отношение z-образов $Y(z)$ выходного сигнала ко входному $X(z)$

Table of Contents

3 КИХ-фильтр

Фильтр с конечной импульсной характеристикой (FIR, finite impulse response)

Ключевые особенности

1. Стандартный КИХ-фильтр характеризуется следующими уравнениями:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$$

где

- $h(k), k = 0, 1, \ldots, N{-}1$ - коэффициенты импульсной характеристики,
- $H(z)$ - передаточная функция фильтра,
- N - длина фильтра, т.е. число коэффициентов фильтра.

Ключевые особенности

3 КИХ-фильтр

2. КИХ-фильтры могут иметь точную линейную фазовую характеристику.
3. КИХ-фильтры очень просто реализовать. Архитектура всех существующих процессоров ЦОС подходит для фильтрации с конечной импульсной характеристикой. Кроме того, нерекурсивные КИХ-фильтры менее подвержены эффектам конечной разрядности, чем БИХ-фильтры. Существуют также рекурсивные КИХ-фильтры, использование которых иногда вычислительно выгоднее.

КИХ-фильтры стоит использовать, если на передний план выходят описанные выше преимущества, в частности, возможность получения линейной фазовой характеристики.

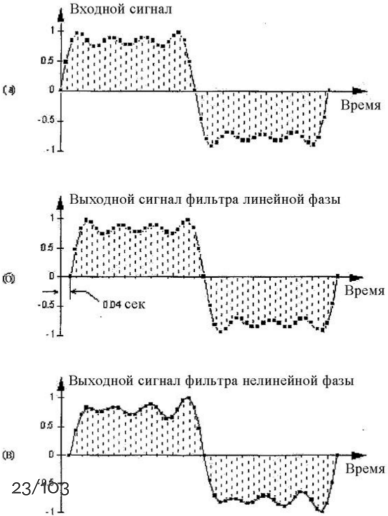
Ключевые особенности

3 КИХ-фильтр

Фазо-частотная характеристика - это зависимость сдвига фаз между выходным синусоидальным колебанием и входным от частоты. Идеальной фазо-частотной зависимостью является линейная зависимость фазы от частоты

Table of Contents

Линейная фазовая характеристика

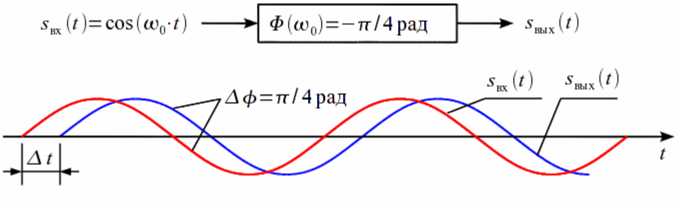


$$x(t) = sin(2\pi \cdot 1 \cdot t) + \frac{1}{3}sin(2\pi \cdot 3 \cdot t) + \frac{1}{5}sin(2\pi \cdot 5 \cdot t) + \frac{1}{7}sin(2\pi \cdot 7 \cdot t)$$

Оцифрованный непрерывный сигнал $x(t)$ состоит из четырех частотных компонент (1 Гц, 3 Гц, 5 Гц, 7 Гц).

- (а) подаваемая на вход последовательность;
- (б) последовательность на выходе фильтра с линейной фазой (идентична входной последовательности) с задержкой по времени на 0,04 секунды;
- (в) искаженная выходная последовательность, соответствующая фильтру с нелинейной фазой.

Линейная фазовая характеристика



Взаимосвязь фазового и временного сдвига сигнала

Отклик физически реализуемого фильтра всегда возникает не раньше воздействия, при этом фильтр задерживает входной сигнал при фильтрации на некоторое время. При этом если подавать на фильтр сигналы разной частоты, то сигнал на выходе одного и того же фильтра могут быть задержаны на разное время. Эта задержка выражается в сдвиге фазы сигнала на выходе относительно сигнала на входе. Групповая задержка при этом характеризует изменение временного сдвига сигнала, который получается в результате фазового сдвига.

Линейная фазовая характеристика

При прохождении сигнала через фильтр модификации подвергается амплитуда и/или фаза данного сигнала.
Удобной мерой модификации фазовой характеристики сигнала является **фазовая** или **групповая задержка фильтра**.

- **Фазовая задержка фильтра -** это величина временной задержки, которую испытывает каждый частотный компонент сигнала при прохождении через фильтр.
- **Групповая задержка -** это средняя временная задержка сигнала.

Линейная фазовая характеристика

Математически **фазовая задержка** равна минус углу сдвига фазы, деленому на частоту, тогда как **групповая задержка** это минус производная фазы по частоте.

$$T_p = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$$T_g = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

Линейная фазовая характеристика

Фильтр имеет **линейную фазовую характеристику**, если выполняется одно из следующих соотношений:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega$$

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$$

где α и β константы. Если фильтр удовлетворяет условию $\theta(\omega) = -\alpha\omega$, у него постоянны групповая и фазовая задержки.

Линейная фазовая характеристика

Фазовая характеристика в этом случае является просто функцией длины фильтра:

$$h(n) = h(N-n-1), \begin{cases} n = 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2} & (N - odd) \\ n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} & (N - even) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

где α - константа.

Линейная фазовая характеристика

Условие $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ удовлетворяется, когда фильтр имеет только постоянную групповую задержку. В этом случае импульсная характеристика фильтра имеет отрицательную симметрию:

$$h(n) = -h(N - n - 1)$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

Table of Contents

5 Типы КИХ-фильтров

Типы КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

Таблица 1. Ключевые различия четырех типов КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

Симметрия импульсной характеристики	***Число коэффициентов*** N	***Частотная характеристика*** $H(\omega)$	***Тип линейной фазовой характеристики***
Положительная симметрия,	нечетное	$e^{-i\omega(N-1)/2}\sum\limits_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n)$	1
$h(n) = h(N-1-n)$	четное	$e^{-i\omega(N-1)/2}\sum\limits_{n=1}^{N/2} b(n)\cos(\omega(n-\frac{1}{2}))$	2
Отрицательная симметрия,	нечетное	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]}\sum\limits_{n=1}^{(N-1)/2} a(n)\sin(\omega n)$	3
$h(n) = -h(N-1-n)$	четное	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]}\sum\limits_{n=1}^{N/2} a(n)\sin(\omega(n-\frac{1}{2}))$	4

$a(0) = h[(N-1)/2]$; $a(n) = 2h[(N-1)/2-n]$

$b(n) = 2h(N/2-n)$

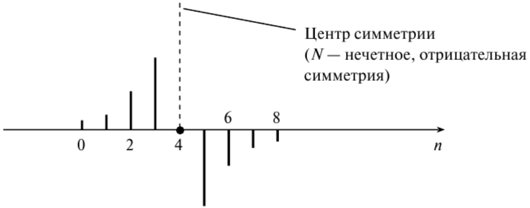
Ключевые различия четырех типов КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

5 Типы КИХ-фильтров

универсальны

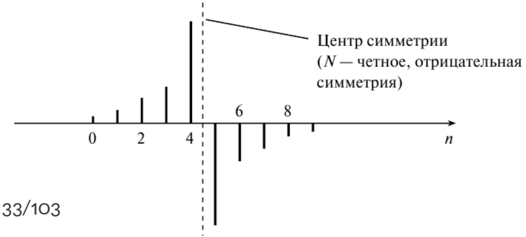
не используются в качестве фильтров верхних частот

Ключевые различия четырех типов КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой



$N = 9$ (нечетное)

не используются в качестве фильтров верхних частот



$N = 10$ (четное)

не используются в качестве фильтров нижних частот

используются:

- дифференциатор
- преобразование Гильберта

Типы КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

Частотная характеристика фильтра типа 2 (положительно-симметричные коэффициенты и четная длина) всегда равна нулю при $f = 0.5$ (половина частоты дискретизации, поскольку все частоты нормированы на частоту дискретизации). Следовательно, фильтры данного типа не используются в качестве фильтров верхних частот. Фильтры типов 3 и 4 (отрицательно-симметричные коэффициенты) вводят сдвиг фазы на 90°, а частотная характеристика таких фильтров всегда равна нулю при $f = 0$, так что такие фильтры нельзя использовать как фильтры нижних частот.

Типы КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

Кроме того, характеристика фильтров третьего типа всегда равна нулю при $f = 0.5$, так что данный фильтр не стоит применять и как фильтр верхних частот. Фильтры первого типа наиболее универсальны. Фильтры третьего и четвертого типа часто используются при проектировании дифференциаторов и фильтров, реализующих преобразования Гильберта, поскольку фильтры этого типа могут давать сдвиг фазы на 90°.

Типы КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

Фазовую задержку (фильтры типа 1 и 2) или групповую задержку (фильтры всех четырех типов) можно выразить через число коэффициентов фильтра, которые, соответственно, можно подобрать таким образом, чтобы фильтр давал нулевую фазовую или групповую задержку. Например, для фильтров первого и второго типов фазовая задержка записывается следующим образом:

$$T_p = \frac{N-1}{2}$$

а групповая задержка для фильтров третьего и четвертого типов выражается как

$$T_g = \frac{N-1-\pi}{2}$$

где T период дискретизации.

Table of Contents

6 Разработка КИХ-фильтров

Разработка КИХ-фильтров

Разработка цифрового фильтра включает пять этапов.

1. **Спецификация фильтра**. На данном этапе может задаваться тип фильтра, например, фильтр нижних частот, нужная амплитудная и/или фазовая характеристика и разрешенные допуски (если есть), частота дискретизации и длина слов, которыми будут представлены входные данные.

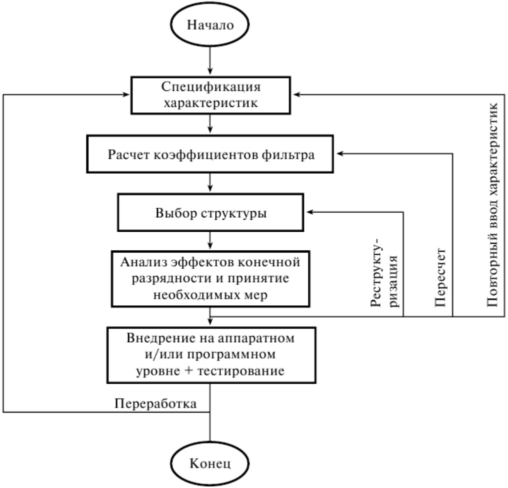
2. **Вычисление коэффициентов**. На этом этапе определяются коэффициенты передаточной функции $H(z)$, которая удовлетворяет спецификациям, полученным на этапе 1. На выбор метода расчета коэффициентов влияет несколько факторов, важнейшими из которых являются критические требования, сформулированные на этапе 1.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}$$

Разработка КИХ-фильтров

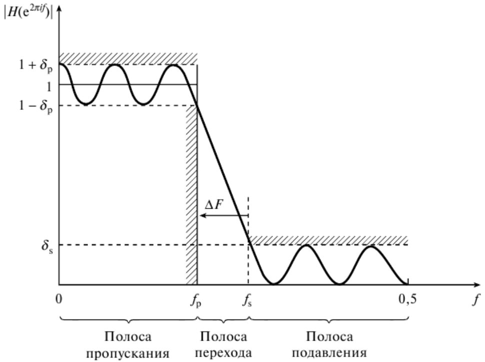
3. **Выбор структуры.** Данный этап включает преобразование передаточной функции, полученной на предыдущем этапе, в подходящую фильтрующую структуру или сеть.
4. **Анализ следствий конечной разрядности.** Здесь оценивается влияние квантования на коэффициенты фильтра и входные данные, а также влияние на производительность фильтра операции фильтрации со словами конечной длины.
5. **Реализация.** На данном этапе разрабатывается программный код и/или аппаратный блок и выполняется собственно фильтрация.

Этапы разработки цифровых фильтров



Спецификации КИХ-фильтра

Спецификация амплитудно-частотной характеристики фильтра нижних частот. Отклонения в полосах пропускания и подавления часто выражаются в децибелах: отклонение в полосе пропускания равно $20lg(1+\delta_p)$ дБ; отклонение в полосе подавления равно $-20lg(\delta_s)$ дБ



Спецификации КИХ-фильтра

Исходя из изображенного на рисунке, интерес представляют следующие параметры:

- δ_p отклонение в полосе пропускания (или неравномерность);
- δ_s отклонение в полосе подавления;
- f_p граничная частота полосы пропускания;
- f_s граничная частота полосы подавления;
- F_s частота дискретизации.

На практике часто удобнее выражать δ_p и δ_s в децибелах. Расстояние между f_s и f_p равно ширине полосы перехода фильтра. Другой важный параметр это длина фильтра N, которая определяет число коэффициентов фильтра. В большинстве случаев указанные параметры полностью определяют частотную характеристику КИХ-фильтра.

Table of Contents

7 Методы расчета коэффициентов КИХ-фильтров

Единственной целью большинства методов вычисления (или приближенного вычисления) коэффициентов КИХ-фильтров является получение значений $h(n)$, при которых фильтр удовлетворяет спецификациям, в частности, относящимся к амплитудно-частотной характеристике, и требованиям к пропускной способности. Разработано несколько методов получения $h(n)$. Наиболее широко используемыми из них являются **метод взвешивания, оптимальный метод и метод частотной выборки**. Все три метода позволяют получать КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k} \qquad z = e^{j2\pi fT}$$

Table of Contents

8 Метод взвешивания

Метод взвешивания

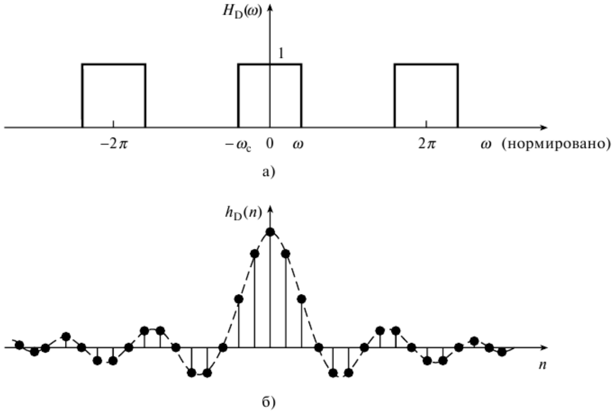
- Этап 1. Задать «идеальную» или желаемую характеристику фильтра
- Этап 2. Получить импульсную характеристику желаемого фильтра, найдя для этого Фурье-образ частотной характеристики.
- Этап 3. Выбрать весовую функцию, которая удовлетворяет требованиям к полосе пропускания или затухания, а затем определить число коэффициентов фильтра, использовав подходящее выражение для связи длины фильтра с шириной перехода, $\triangle f$ (записываются через частоту дискретизации).
- Этап 4. Получить значения выбранной весовой функции и значения коэффициентов реального КИХ-фильтра

В данном методе используется факт, что частотная характеристика фильтра $H_D(\omega)$ и соответствующая импульсная характеристика $h_D(n)$ связаны обратным преобразованием Фурье:

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(\omega)e^{i\omega n}d\omega$$

Индекс D используется, чтобы различать идеальную и практическую импульсные характеристики. Необходимость такого разделения станет понятна несколько позже. Если $H_D(\omega)$ известна, $h_D(n)$ можно получить, применив преобразование Фурье к обеим частям уравнения выше. Для иллюстрации предположим, что требуется разработать фильтр нижних частот.

Метод взвешивания



Идеальная частотная характеристика фильтра нижних частот (а)

Импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот (б)

Метод взвешивания

Начать можно с идеальной фазовой характеристики, представленной на рис. а, где ω_c частота среза, и шкала частот нормирована ($T = 1$).
Допустив, что характеристика идет от $-\omega_c$ до ω_c, упрощаем интегрирование и получаем следующую импульсную характеристику:

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \times e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{2f_c \sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, \quad n \neq 0, \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

$$= 2f_c, \quad n = 0 \text{ (используем правило Лопиталя).}$$

Импульсные характеристики идеальных фильтров верхних частот, полосовых фильтров и режекторных фильтров также находятся из уравнения (6) и все они приведены в табл. 2. Импульсная характеристика фильтра нижних частот изображена на рис. 6, из которого видно, что $h_D(n)$ симметрична относительно $n = 0$ (т.е. $h_D(n) = h_D(-n)$), так что фильтр б удет иметь линейную (в данном случае нулевую) фазовую характеристику. Описанный простой подход связан с некоторыми проблемами. Важнейшая из них хотя характеристика $h_D(n)$ уменьшается при удалении от точки $n = 0$, она длится теоретически до $n = \pm\infty$. Следовательно, полученный фильтр не является КИХ-фильтром.

Таблица 2. Идеальные импульсные характеристики стандартных частотно-избирательных фильтров

Тип фильтра	*Идеальная частотная характеристика,* $h_D(n)$: $h_D(n),\ n \neq 0$	$h_D(0)$
Фильтр нижних частот	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Фильтр верхних частот	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
Полосовой фильтр	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
Заграждающий фильтр	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

f_c, f_1 и f_2 — нормированные частоты краев полос пропускания или подавления; N — длина фильтра

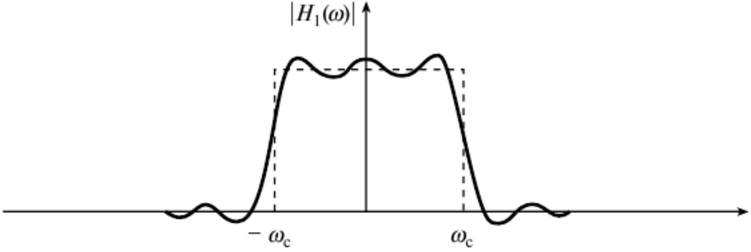
Метод взвешивания

Очевидным является решение усечь идеальную импульсную характеристику, положив $h_D(n) = 0$ для n, больше, чем (скажем) M. При этом вводится нежелательная неравномерность и выбросы имеет место так называемый эффект Гиббса. То, как отбрасывание коэффициентов сказывается на характеристике фильтра, показано на следующем рисунке. Чем больше коэффициентов осталось, тем ближе спектр фильтра к идеальной характеристике (см. рис. б и в).

Метод взвешивания

Рисунок Влияние на частотную характеристику округления идеальной импульсной характеристики до

- а) 13 коэффициентов;
- б) 25 коэффициентов;
- в) бесконечного числа коэффициентов

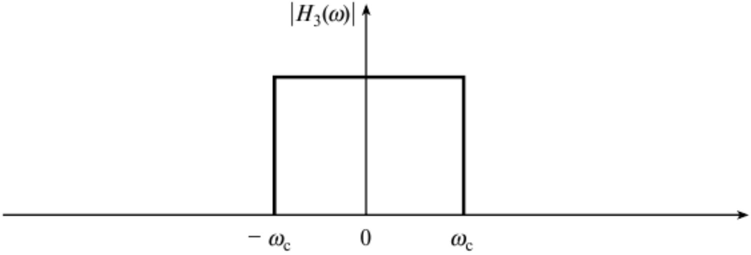


а)

Метод взвешивания

Рисунок Влияние на частотную характеристику округления идеальной импульсной характеристики до

- а) 13 коэффициентов;
- б) 25 коэффициентов;
- в) бесконечного числа коэффициентов



в)

Прямое усечение $h_D(n)$, как оно описано выше, равносильно умножению идеальной импульсной характеристики на прямоугольную весовую функцию вида

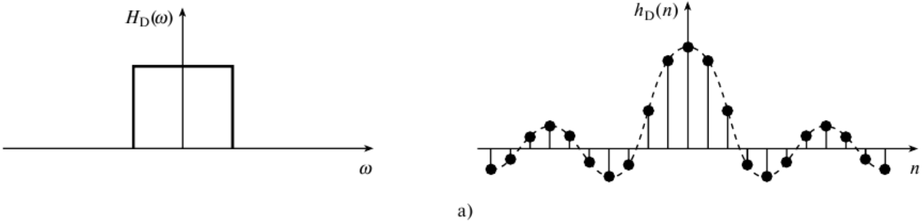
$$\omega(n) = \begin{cases} 1 & |n| = 0, 1, \ldots, (M-1)/2 \\ 0 & \end{cases}$$

В частотной области это эквивалентно свертке $H_D(\omega)$ с $W(\omega)$, где $W(\omega)$ Фурье-образ $\omega(n)$. Тогда как $W(\omega)$ имеет классический вид функции $sin(x)/x$, усечение $h_D(n)$ приводит к появлению в частотной характеристике выбросов.

Метод взвешивания

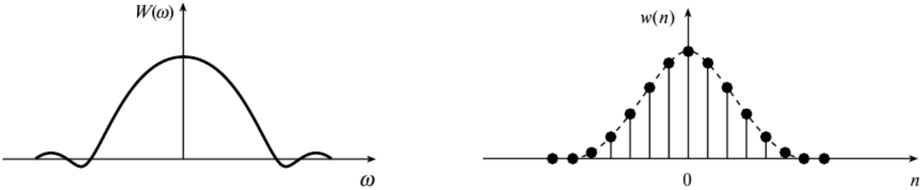
На практике идеальная частотная характеристика h_D множится на подходящую весовую функцию $\omega(n)$ с конечной длительностью. Таким образом, получающаяся импульсная характеристика гладко затухает до нуля.
Данный процесс иллюстрируется на следующем рисунке. На рис. а показана идеальная частотная характеристика и соответствующая идеальная импульсная характеристика. На рис. б показана весовая функция конечной длительности и ее спектр. На рис. в показана функция $h(n)$, которая получается перемножением $h_D(n)$ и $\omega(n)$.

Рисунок Иллюстрация определения коэффициентов фильтра $h(n)$ с помощью метода взвешивания



Идеальная частотная и идеальная импульсная характеристики

Рисунок Иллюстрация определения коэффициентов фильтра $h(n)$ с помощью метода взвешивания

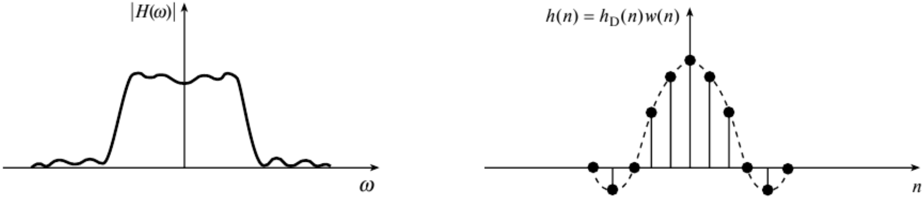


б)

Весовая функция конечной длительности и ее спектр

Метод взвешивания

Рисунок 6 Иллюстрация определения коэффициентов фильтра $h(n)$ с помощью метода взвешивания



в)

Получение импульсной характеристики

Table of Contents

9 Некоторые распространенные весовые функции

Некоторые распространенные весовые функции

Одной из наиболее широко используемых является **весовая функция Хэмминга**, которая определяется следующим образом:

$$w(n) = 0,54 + 0,46\cos(2\pi n/N) \quad \begin{cases} -(N-2)/2 \le n \le (N-1)/2 & (N - \text{нечетное}) \\ -N/2 \le n \le N/2 & (N - \text{четное}) \end{cases}$$

$$= 0 \quad \text{в других случаях.}$$

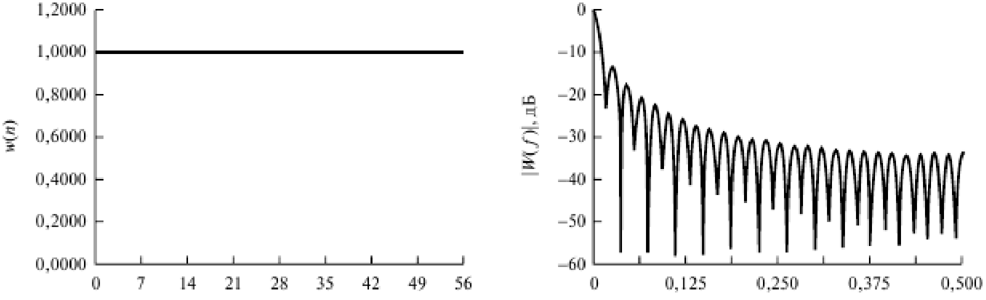
Связь ширины полосы перехода (от полосы пропускания к полосе подавления) фильтра, построенного на основе функции Хэмминга, с длиной фильтра выражается следующей формулой:

$$\triangle f = 3.3/N$$

где N длина фильтра, а $\triangle$ нормированная ширина полосы перехода.

Некоторые распространенные весовые функции

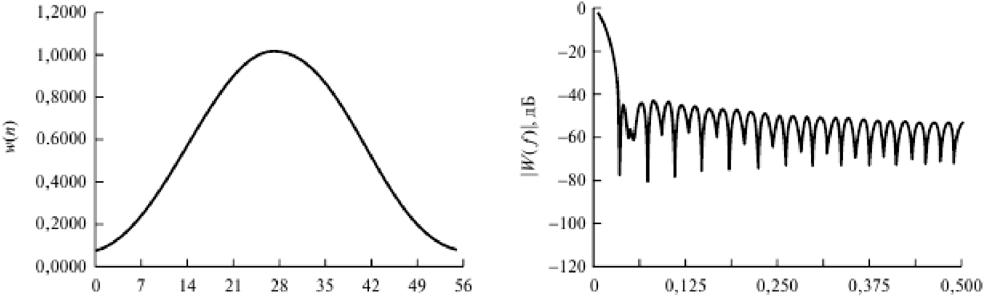
Рисунок Сравнение характеристик распространенных весовых функций во временной и частотной областях: а) прямоугольная функция; б) функция Хэмминга; в) функция Блэкмена



а)

Некоторые распространенные весовые функции

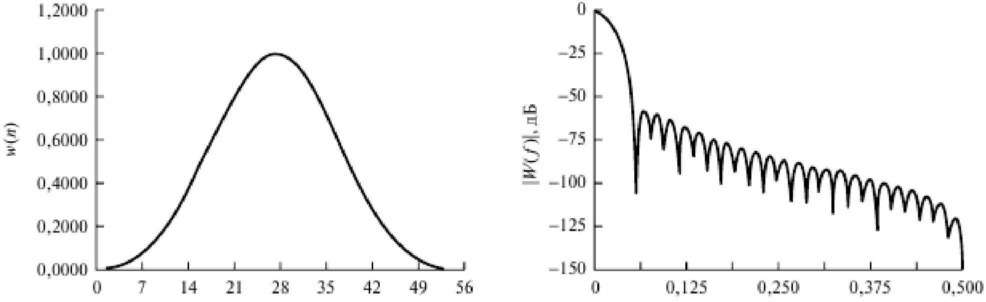
Рисунок Сравнение характеристик распространенных весовых функций во временной и частотной областях: а) прямоугольная функция; б) функция Хэмминга; в) функция Блэкмена



б)

Некоторые распространенные весовые функции

Рисунок Сравнение характеристик распространенных весовых функций во временной и частотной областях: а) прямоугольная функция; б) функция Хэмминга; в) функция Блэкмена



в)

Некоторые распространенные весовые функции

Таблица 3. Важные особенности распространенных весовых функций

Функция	Ширина перехода (нормированная) (Гц)	Неравномерность в полосе пропускания (дБ)	Главный лепесток относительно бокового лепестка	Затухание в полосе подавления	Формула
Прямоугольная	$0,9/N$	0,7416	13	21	1
Хеннинга	$3,1/N$	0,0546	31	44	$0,5+0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Хэмминга	$3,3/N$	0,0194	41	53	$0,54+0,46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Блэкмена	$5,5/N$	0,0017	57	75	$0,42+0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0,08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
	$2,93/N(\beta=4,54)$	0,0274		50	$\frac{I_0(\beta 1-[2n/(N-1)]^{2\,1/2})}{I_0(\beta)}$
Кайзера	$4,32/N(\beta=6,76)$	0,00275		70	
	$5,71/N(\beta=8,96)$	0,000275		90	

Окно Кайзера (Kaiser window function) несколько сглаживает очерченные выше проблемы, поскольку имеет параметр, управляющий неравномерностью, β, что позволяет разработчику играть на компромиссах между шириной перехода и неравномерностью. Функция Кайзера задается следующим образом:

$$w(n) = I_0\left(\beta\left[1-\left(\frac{2n}{N-1}\right)^2\right]^{1/2}\right)\Big/ I_0(\beta) \quad -(N-1)/2 \le n \le (N-1)/2$$
$$= 0 \quad \text{в других случаях,}$$

где $I_0(x)$ модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Управляющий параметр β отвечает за спад вырезающей функции на краях (во временной области).

Некоторые распространенные весовые функции

Для вычисления $I_0(x)$ обычно используется следующее разложение в степенной ряд:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{L} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 ,$$

причем обычно $L < 25$. Эффективной реализацией указанного уравнения является алгоритм Кайзера.

При $\beta = 0$ функция Кайзера соответствует прямоугольной весовой функции, а при $\beta = 5.44$ функция весьма похожа на функцию Хэмминга (хотя и не идентична ей).

Некоторые распространенные весовые функции

Значение β определяется требованиями к затуханию в полосе подавления и его можно оценить с помощью одного из приведенных ниже эмпирических соотношений:

$$\beta = 0,\ \text{если}\ A \leq 21\ \text{дБ},$$
$$\beta = 0,5842(A-21)^{0,4} + 0,07886(A-21),\ \text{если}\ 21\ \text{дБ} < A < 50\ \text{дБ}$$
$$\beta = 0,1102(A - 8,7),\ \text{если}\ A \geq 50\ \text{дБ},$$

где $A = -20lg(\delta)$ затухание в полосе подавления, $\delta = min(\delta_p, \delta_s)$, поскольку неравномерности в полосе пропускания и полосе подавления приблизительно равны, δ_p желаемая неравномерность в полосе пропускания, а δ_s желаемая неравномерность в полосе подавления.

Некоторые распространенные весовые функции

Число коэффициентов фильтра N подчиняется зависимости

$$N \geq \frac{A - 7,95}{14,36\Delta f},$$

где $\triangle f$ нормированная ширина полосы перехода. Далее полученные значения β и n используются для вычисления коэффициентов функции Кайзера $\omega(n)$.

Достоинства и недостатки метода взвешивания

- Главное достоинство - простота, минимальный объем вычислений;
- Главный недостаток отсутствие гибкости (максимальная неравномерность в полосе пропускания и неравномерность в полосе подавления примерно равны);
- Невозможно точно задать граничные частоты полосы пропускания и полосы подавления.

Table of Contents

При вычислении коэффициентов фильтра по методу вырезания возникает проблема выбора удачной аппроксимации желаемой или идеальной частотной характеристики. Максимальные колебания характеристики фильтров, разработанных с помощью метода взвешивания, возникают возле краев полосы и уменьшаются при удалении от них (рис. 1, а).

Оказывается, что **если колебания распределены более равномерно по полосе пропускания и полосе подавления**, как, например, на рис. 1, б, можно **получить лучшую аппроксимацию желаемой частотной характеристики**.

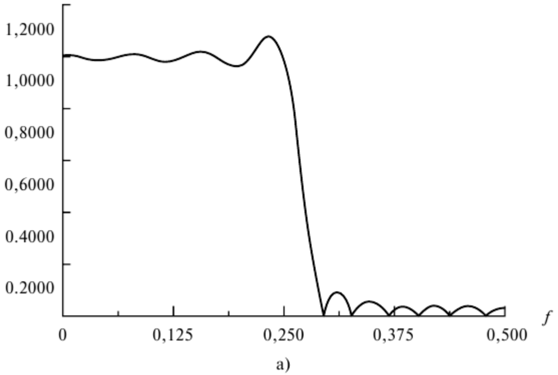


Рисунок 1, а фильтр, полученный методом вырезания

Колебания характеристики больше на границе полосы

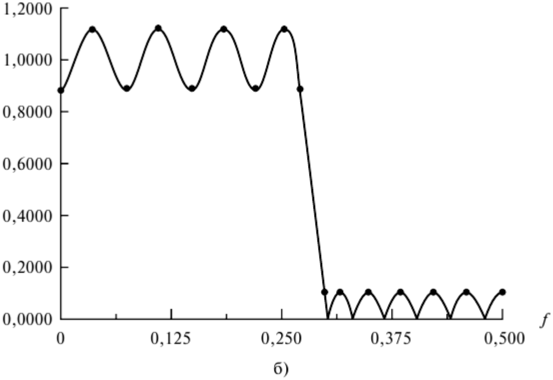


Рисунок 1, б оптимальный фильтр

Колебания имеют равные амплитуды (полосы равных колебаний) в полосе пропускания и подавления

Оптимизационные методы

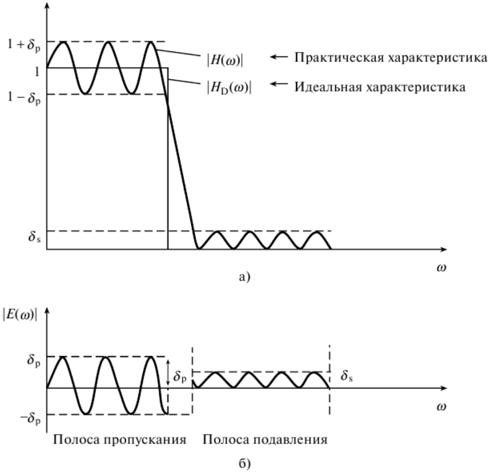


Рисунок 2 частотная характеристика оптимального фильтра нижних частот

- а - частотная характеристика оптимального фильтра нижних частот
- б - характеристика ошибки между идеальной и практической характеристиками ($\delta_p = 2\delta_s$)

В полосе пропускания реальная характеристика осциллирует между значениями $1 - \delta_p$ и $1 + \delta_p$. В полосе подавления характеристика фильтра находится между 0 и δ_s. Отличие характеристик идеального и реального фильтров можно рассматривать как функцию ошибок:

$$E(\omega) = W(\omega)[H_D(\omega) - H(\omega)],$$

- $H_D(\omega)$ идеальная или желаемая характеристика,
- $W(\omega)$ весовая функция, которая позволяет определить относительную ошибку аппроксимации между различными полосами.

Цель оптимального метода определить коэффициенты фильтра $h(n)$, при которых значение максимальной взвешенной ошибки $|E(\omega)|$ минимизируется в полосе пропускания и полосе подавления.

Математически это можно записать следующим образом:

$$min[max|E(\omega)|]$$

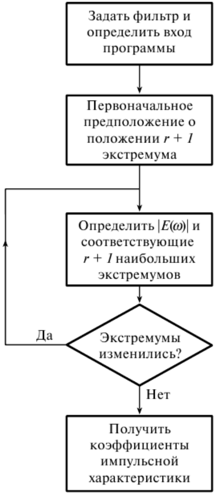
по полосам пропускания и полосам подавления.
Было установлено, что при минимизации $max|E(\omega)|$ характеристика фильтра будет иметь равные колебания в пределах полос пропускания и подавления, причем модуль максимального отклонения будет постоянным, и характеристика будет проходить между двумя уровнями амплитуды с чередованием знака отклонения (рис. 1, б).
Например, у фильтров нижних частот с линейной фазовой характеристикой имеется $r+1$ или $r+2$ экстремумов, где $r=(N+1)/2$ (для фильтров типа 1) или $r=N/2$ (для фильтров типа 2).

- Расположение экстремальных частот, кроме тех, что размещены на границе полос не известны априори.
- Основная задача оптимального метода это найти положения экстремальных частот.
- Для решения этой задачи разработан метод, в котором реализован алгоритм замен Ремеза.

Для данного набора спецификаций (т.е. граничных частот полосы пропускания N отношения амплитуд колебаний характеристики в полосе пропускания и полосе подавления) оптимальный метод включает следующие ключевые этапы:

- использовать алгоритм замены Ремеза, чтобы найти оптимальный набор экстремальных частот;
- определить частотную характеристику, использовав положения экстремумов;
- получить коэффициенты импульсной характеристики.

Рисунок 3 Упрощенная функциональная схема оптимального метода



Соотношения для оценки длины фильтра N

На практике число коэффициентов фильтра неизвестно. Его можно оценить, использовав соответствующее соотношение.

Фильтр нижних частот:

$$N \approx \frac{D_\infty(\delta_p,\delta_s)}{\triangle F} - f(\delta_p,\delta_s)\triangle F + 1$$

$$D_\infty(\delta_p,\delta_s) = lg\delta_s[a_1(lg\delta_p)^2 + a_2 lg\delta_p + a_3] + [a_4(lg\delta_p)^2 + a_5 lg\delta_p + a_6]$$

$$a_1 = 5.309 \times 10^{-3} \qquad a_2 = 7.114 \times 10^{-2}$$
$$a_3 = -4.761 \times 10^{-1} \qquad a_4 = -2.66 \times 10^{-3}$$
$$a_5 = -5.941 \times 10^{-1} \qquad a_6 = -4.278 \times 10^{-1}$$

где

- $\triangle F$ ширина полосы пропускания, нормированная на частоту дискретизации
- δ_p неравномерность в полосе пропускания
- δ_s неравномерность, или колебание, характеристики в полосе подавления

Полосовой фильтр

$$N \approx \frac{C_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\triangle F} + g(\delta_p, \delta_s)\triangle F + 1$$

$$C_\infty(\delta_p, \delta_s) = lg\delta_s[b_1(lg\delta_p)^2 + b_2 lg\delta_p + b_3] + [b_4(lg\delta_p)^2 + b_5 lg\delta_p + b_6]$$

$$b_1 = 0.01201 \qquad b_2 = 0.09664$$
$$b_3 = -0.51325 \qquad b_4 = 0.00203$$
$$b_5 = -0.5705 \qquad b_6 = -0.44314$$

Здесь $\triangle F$ ширина полосы перехода, нормированная на частоту дискретизации.

Резюме по процедуре вычисления коэффициентов фильтра с помощью оптимального метода

Этап 1. Задать граничные частоты полос (полосы пропускания и полосы подавления), неравномерность в полосе пропускания и затухание в полосе подавления (в децибелах или обычных единицах) и частоту дискретизации.
Этап 2. Нормировать каждую граничную частоту, разделив ее на частоту дискретизации, и определить нормированную ширину полосы перехода.
Этап 3. Использовать неравномерность в полосе пропускания и затухание в полосе перехода для оценки длины фильтра N из одного из уравнений на двух предыдущих слайдах.

Резюме по процедуре вычисления коэффициентов фильтра с помощью оптимального метода

Этап 4. Получить весовые коэффициенты для каждой полосы из отношения колебаний в полосе пропускания и подавления, выраженных в обычных единицах. Весовые коэффициенты каждой полосы удобно представить целыми числами. Например, фильтр нижних частот к колебаниями характеристики в полосе пропускания и полосе подавления 0,01 и 0,03 (неравномерность в полосе пропускания и затухание в полосе подавления равны соответственно 0,09 дБ и 30,5 дБ) будет иметь весовые коэффициенты 3 для полосы пропускания и 1 для полосы подавления.

Этап 5. Ввести параметры в программу оптимальной разработки и получить следующие величины: N, граничные частоты и весовые коэффициенты для каждой полосы, а также подходящую плотность сетки (обычно 16 или 32).

Резюме по процедуре вычисления коэффициентов фильтра с помощью оптимального метода

Этап 6. Проверить неравномерность в полосе пропускания и затухание в полосе подавления, полученные на выходе программы, на предмет соответствия спецификациям.

Этап 7. Если спецификации не удовлетворяются, увеличить значение N и повторить этапы 5 и 6, пока соответствие не будет достигнуто; далее получить и проверить частотную характеристику, чтобы убедиться, что она удовлетворяет спецификации.

Метод частотной выборки

Метод частотной выборки позволяет разрабатывать нерекурсивные КИХ-фильтры, в число которых входят как обычные частотно-избирательные фильтры (фильтры нижних частот, верхних частот, полосовые), так и фильтры с произвольной частотной характеристикой.

Уникальное достоинство метода частотной выборки заключается в том, что он допускает рекурсивные реализации КИХ-фильтров, что позволяет получать вычислительно эффективные фильтры. При некоторых условиях можно разработать рекурсивные КИХ-фильтры, коэффициенты которых целые числа, что удобно, если допустимы только примитивные арифметические операции.

Нерекурсивные фильтры частотной выборки

Предположим, что требуется получить коэффициенты КИХ-фильтра, частотная характеристика которого изображена на рис. 4, а.

Для начала можно взять n выборок частотной характеристики в точках kF_s/n, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Коэффициенты фильтра $h(n)$ можно получить, применив обратное ДПФ к частотным выборкам:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)^{i\frac{2\pi}{N}nk}$$

где $h(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ выборки идеальной или целевой частотной характеристики.

Нерекурсивные фильтры частотной выборки

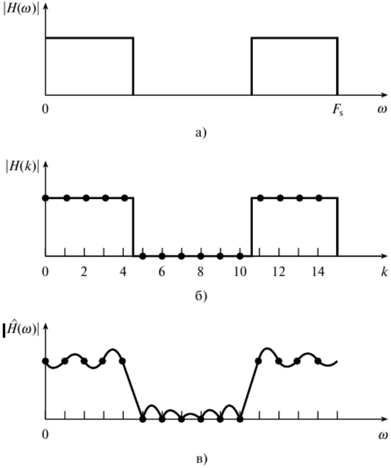
Для фильтров с линейной фазовой характеристикой и четно-симметричной импульсной характеристикой можно записать (если N четное)

$$h(n) = \frac{1}{N}[\sum_{k=1}^{N/2-1} 2H|(k)|cos[2\pi k\frac{n-\alpha}{N}] + H(0)]$$

где $\alpha = (N-1)/2$. Если N нечетное, верхним пределом суммы является $(N-1)/2$. Получающийся фильтр будет иметь частотную характеристику, которая в точности совпадает с исходной характеристикой в моменты выборки. В то же время, для разных моментов выборки характеристики могут сильно отличаться. Для получения хорошей аппроксимации частотной характеристики нужно взять достаточное число частотных выборок.

Рисунок 4 Понятие частотной выборки:

- а) частотная характеристика идеального фильтра нижних частот;
- б) выборки идеального фильтра нижних частот;
- в) частотная характеристика фильтра нижних частот, выведенная из частотных выборок панели б



Нерекурсивные фильтры частотной выборки

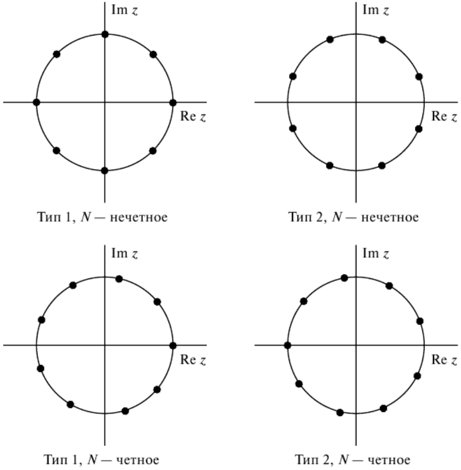
Альтернативный фильтр (фильтр типа 2), построенный по принципу частотной выборки, получается, если выборки брать в точках

$$f_k = (k + 1/2)\frac{F_s}{N}, k = 0, 1, \ldots, N - 1$$

где $\alpha = (N-1)/2$. Если N нечетное, верхним пределом суммы является $(N-1)/2$. Получающийся фильтр будет иметь частотную характеристику, которая в точности совпадает с исходной характеристикой в моменты выборки. В то же время, для разных моментов выборки характеристики могут сильно отличаться (рис. 4, в). Для получения хорошей аппроксимации частотной характеристики нужно взять достаточное число частотных выборок.

Нерекурсивные фильтры частотной выборки

Рисунок 5 Четыре возможные структуры выборки для двух типов фильтров (изображены на комплексной плоскости)



Фильтры частотной выборки в рекурсивной форме значительно выгоднее вычислительно, чем фильтры в нерекурсивной форме, если значительное число частотных выборок имеет нулевые значения. Передаточную функцию КИХ-фильтра $H(z)$ можно следующим образом записать в рекурсивном виде:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{2\pi \frac{ik}{N}} z^{-1}} = H_1(z) H_2(z)$$

где

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N}$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{2\pi \frac{ik}{N}} z^{-1}}$$

Рекурсивные фильтры частотной выборки

В рекурсивной форме $H(z)$ можно рассматривать как каскад из двух фильтров: гребенчатого фильтра $H_1(z)$, который имеет N нулей, равномерно распределенных на единичной окружности, и суммы N фильтров с одним полюсом $H_2(z)$. Нули гребенчатого фильтра и полюса однополюсных фильтров совпадают на единичной окружности в точках $z_k = e^{\frac{1\pi k}{N}}$. Следовательно, нули компенсируют полюса, и поскольку $H(z)$ не имеет полюсов, то это конечная импульсная характеристика (КИХ).

Рекурсивные фильтры частотной выборки

На практике конечная длина слова приводит к тому, что полюса $H_2(z)$ располагаются не точно на единичной окружности, так что они уже не уравновешиваются нулями и $H(z)$ становится потенциально неустойчивой бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). Проблем устойчивости можно избежать, дискретизируя $H(z)$ на окружности радиуса r, который незначительно меньше единицы. В этом случае передаточная функция становится такой:

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - re^{2\pi \frac{ik}{N}} z^{-1}}$$

Рекурсивные фильтры частотной выборки

Частотные выборки $H(k)$ - это комплексные величины. Следовательно, непосредственная реализация уравнения (6) или (7) потребует комплексной арифметики. Чтобы избежать этого усложнения, воспользуемся симметрией, присущей частотной характеристике любого КИХ-фильтра с действительной импульсной характеристикой $h(n)$. Для обычного частотно-избирательного фильтра с линейной фазовой характеристикой (четно-симметричная импульсная характеристика) уравнение (8) можно представить в виде:

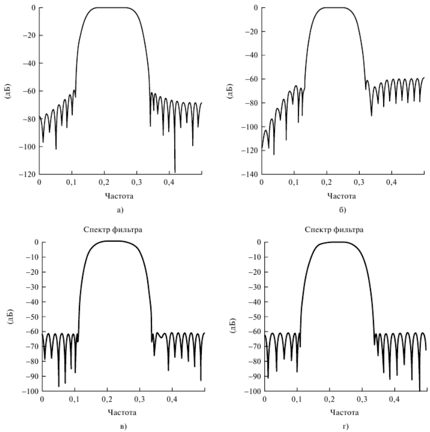
$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \times [\sum_{k=1}^{M} \frac{|H(k)| 2cos(2\pi k\alpha/N) - 2rcos[2\pi k(1+\alpha)/N] z^{-1}}{1 - 2rcos(2\pi k/N) z^{-1} + r^2 z^{-2}} + \frac{H(0)}{1 - z^{-1}}]$$

где $\alpha = \frac{N-1}{2}$. При нечетном N: $M = \frac{N-1}{2}$, при четном $N: M = \frac{N}{2} - 1$

Сравнение методов

10 Оптимизационные методы

Рисунок 6 Сравнение частотных характеристик фильтров, полученных с использованием метода взвешивания, метода частотной выборки и оптимального метода: а) характеристика фильтра, полученного с помощью функции Кайзера (фильтры 1 и 2); б) характеристика фильтра, полученного с помощью частотной выборки (фильтры 1 и 2); в) характеристика фильтра, полученного с помощью оптимального метода (фильтр 1); г) характеристика фильтра, полученного с помощью оптимального метода (фильтр 2)



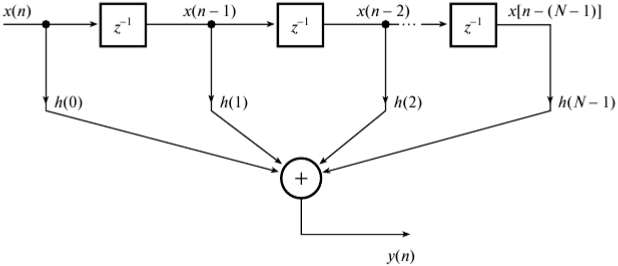
Метод частотной выборки: резюме

Этап 1. Задать идеальную или желаемую частотную характеристику, затухание в полосе подавления и границы полос целевого фильтра.
Этап 2. Исходя из спецификации выбрать фильтр частотной выборки первого (выборки берутся с интервалом $\frac{kF_s}{N}$ или второго типа (выборки берутся с интервалом $f_k = \frac{(k+1/2)F_s}{N}$).
Этап 3. Использовать спецификацию и таблицы разработка для определения N, числа частотных выборок идеальной частотной характеристики, , числа выборок в полосе пропускания и T_i значений выборок в полосе перехода ($i = 1, 2, \ldots, M$).
Этап 4. Использовать подходящее уравнение для расчета коэффициентов фильтра.
Этапы 2 и 4 - можно использовать компьютерную программу.

Трансверсальная структура

Трансверсальная структура (или схема задержки с отводами) изображена на рис. 8. Вход $x(n)$ и выход $y(n)$ фильтра, представленного с помощью данной структуры, связаны простым соотношением

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$



Трансверсальная структура

Символом z^{-1} представлена задержка в одну выборку или в одну единицу времени. Таким образом, $x(n-1)$ это $x(n)$, задержанное на время одной выборки. В цифровых реализациях блоки, помеченные символом z^{-1}, могут представлять регистры сдвига или ячейки памяти в ОЗУ. Описанная трансверсальная структура является наиболее популярным представлением КИХ-фильтров.

Выходная выборка $y(n)$ представляет собой взвешенную сумму текущего входа $x(n)$ и $N-1$ предыдущей входной выборки, т .е. выборок с $x(n-1)$ по $x(n-N)$. При выборе трансверсальной структуры вычисление каждой выходной выборки $y(n)$ требует

- $N-1$ ячейки памяти для хранения $N-1$ входной выборки;
- N ячеек памяти для хранения N коэффициентов;
- N операций умножения;
- $N-1$ операции сложения.

Структура с линейной фазовой характеристикой

В фильтрах с линейной фазовой характеристикой коэффициенты симметричны, т.е. $h(n) = \pm h(N-n-1)$. Следовательно, уравнение фильтра можно переписать с учетом симметрии, существенно снизив число сложений и умножений. Для фильтров первого и второго типа с линейной фазовой характеристикой передаточную функцию можно записать как

$$H(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] + h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}} & N - odd \\ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] & N - even \end{cases}$$

Структура с линейной фазовой характеристикой

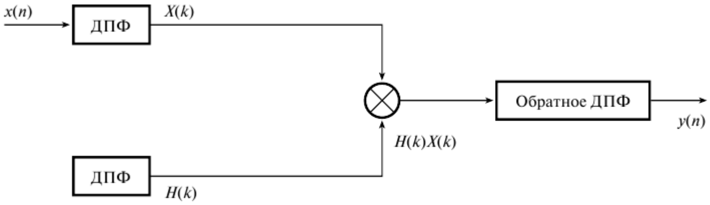
Соответствующие разностные уравнения выглядят так:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(k)\{x(n-k) + x[n-(N-1-k)]\} + h[\frac{N-1}{2}]x[n-\frac{N-1}{2}]$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(k)\{x(n-k) + x[n-(N-1-k)]\}$$

Быстрая свертка

Свертка во временной области эквивалентна умножению в частотной. Проще говоря, при названном подходе для выполнения фильтрации вначале вычисляется ДПФ $x(n)$ и $h(n)$ (обе функции соответствующим образом дополняются нулями), оба образа перемножаются, а затем находится обратное преобразование результата.



Цифровая обработка сигналов и изображений

Thank you for listening!

Any questions?