ТЕМА6 ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим некоторые типовые примеры, использующие понятие функций Эйлера.

Пример 6.1. Найдем значение $\Gamma(1)$.

Δ Используя определение по формуле (6.1), посчитаем интеграл

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-t}dt = \lim_{b\to+\infty} -e^{-t}\big|_0^b = -\lim_{b\to+\infty}(e^{-b}-e^{0}) = 1.$$

▲

Пример 6.2. Найдем значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Δ Используя определение по формуле (6.1), посчитаем интеграл

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}dt = \left\{\begin{matrix}\text{Введем замену}\\ \sqrt{t}=s, t=s^2, dt=2sds\\ t_{\text{н}}=0, s_{\text{н}}=0\\ t_{\text{в}}=+\infty, s_{\text{в}}=+\infty\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2\cdot e^{-s^2ds} = \left\{\begin{matrix}\text{Воспользуемся известным}\\ \text{интегралом Эйлера — Пуассона}\\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{matrix}\right\} = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

▲

Пример 6.3. Найдем значение $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

Δ Используя формулу (6.4), можно получить

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\cdot3\cdot1}{2^3}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\cdot\sqrt{\pi}.$$ ▲

Пример 6.4. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x^6 dx$$

используя формулы Эйлера 1-го и 2-го рода.

Δ

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x^6 dx = \left\{ \begin{matrix} \text{используем гамма} - \text{функцию} \\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x^5 \frac{1}{2} dx^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot (x^2)^{\frac{5}{2}} dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot (x^2)^{\frac{7}{2}-1} dx^2 = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

▲

Пример 6.5. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}$$

используя формулы Эйлера 1-го и 2-го рода.

Δ

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3}} = \left\{ \text{используем } \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot x^{-1} dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(x^2)^{-\frac{1}{2}} dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}} = \left\{ \begin{matrix} \alpha - 1 = -\frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{2}; \\ \alpha + \beta = \frac{3}{4}, \beta = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).$$

▲

Пример 6.6. Докажем некоторое полезное равенство

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}(x)\cdot\cos^{\beta}(x)dx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right),$$

используя формулы Эйлера 1-го и 2-го рода.

Δ

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}(x)\cdot\cos^{\beta}(x)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}(x)\cdot\cos^{\beta-1}(x)\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{преобразуя подынтегральное выражение, имеем}\\ \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx=d\sin^2(x)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}(x)\cdot\cos^{\beta-1}(x)d\sin^2(x)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{введем замену } sin^2(x)=t,\\ \text{поменяем пределы интегрирования}\\ x_{\text{н}}=0, t_{\text{н}}=0,\\ x_{\text{в}}=\frac{\pi}{2}, t_{\text{в}}=1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1}t^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right).$$

▲

Приведем без доказательства некоторые полезные соотношения, используемые на практике при вычислении определенных интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(x) \cdot \cos^\beta(x) dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Упражнения и задачи

1. Вычислить значения функции, используя свойства гамма-функции $\Gamma(2), \Gamma(3), \Gamma(4), \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

2. Вычислить следующие интегралы, используя формулы Эйлера 2-го рода:

2.1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x} \cdot x^3 dx$$

ответ: $\frac{3}{128}$;

2.2.

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x^2} \cdot x^4 dx$$

ответ: $\frac{\sqrt{3\pi}}{72}$;

2.3.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x^4 dx$$

ответ: $\frac{3\sqrt{\pi}}{8}$;

2.4.

$$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx$$

ответ: $\Gamma(n+1)$);

2.5.

$$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 dx$$

ответ: 2;

2.5.

$$\int_0^1 x^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^5 dx$$

ответ: $\frac{15}{512}$;

3. Доказать следующие формулы:

3.1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha}(x) \cdot \cos^{\beta}(x) dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)};$$

3.2.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)};$$

3.3.

$$\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{\pi \cdot a^4}{16}, a > 0;$$

3.4.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}}dx = \frac{1}{\beta}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1-\frac{\alpha}{\beta}\right), 0 < \alpha < \beta.$$

4. Вычислить следующие интегралы, используя формулы Эйлера 1-го и 2-го рода и полезные соотношения:

4.1.

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

ответ: π;

4.2.

$$\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx$$

ответ: 16π;

4.3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$$

ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

4.4.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2}dx$$

ответ: $\frac{\pi}{5\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$;

4.5.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$$

ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

4.7.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x) \cdot \cos^3(x) dx$$

ответ: $\frac{1}{24}$;

4.8.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9(x) \cdot \cos^5(x) dx$$

ответ: $\frac{1}{210}$;

4.9.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) \cdot \cos^5(x) dx$$

ответ: $\frac{8}{315}$;

4.10.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(x) \cdot \cos^4(x) dx$$

ответ: $\frac{3\pi}{512}$;

4.11.

$$\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}} dx$$

ответ: $\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$.