ТЕМА 5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Математическая физика – это теория математических моделей физических процессов. Многие из них описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Поэтому сформулирует основные определения, а также рассмотрим методы решения известных задач математической физики, предложенные для широкого круга инженерно-технических исследований.

Определение 5.1. Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $\boldsymbol{u(x,y)}, (\boldsymbol{x,y}) \in \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^2$ называется функциональная зависимость вида

$$\boldsymbol{F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0} \tag{5.1}$$

между неизвестными переменными $\boldsymbol{x,y}$ и неизвестной функцией $\boldsymbol{u(x,y)}$ и ее частными производными первого и второго порядков.

Определение 5.2. Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $\boldsymbol{u(x,y)}, (\boldsymbol{x,y}) \in \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^2$ называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$\boldsymbol{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F_1\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0} \tag{5.2}$$

где коэффициенты $\boldsymbol{a,b,c}$ есть функции от переменных $\boldsymbol{x,y}$.

Определение 5.3. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $\boldsymbol{u(x,y)}, (\boldsymbol{x,y}) \in \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^2$ называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции $\boldsymbol{u(x,y)}$ ее первых производных, то есть имеет вид

$$\boldsymbol{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f}, \tag{5.3}$$

где коэффициенты $\boldsymbol{a,b,c,d,e,g,f}$ есть функции от переменных $\boldsymbol{x,y}$.

Если коэффициенты уравнения (5.3) не зависят от переменных $\boldsymbol{x,y}$, то оно является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

Определение 5.4. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $\boldsymbol{u(x,y)}, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f},$$

называется однородным, если $\boldsymbol{f(x,y) = 0}$ для $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D}$.

Определение 5.5. Решением уравнения (5.1) называется определенная в области $\boldsymbol{D}$ действительная функция $\boldsymbol{u(x,y)}$, непрерывная в этой области вместе со своими производными первого и второго порядков, и обращающая его в тождество в данной области.

Обратимся теперь к обзору простейших уравнений математической физики и познакомимся с методами, позволяющими в каждом конкретном случае найти собственные функции и получить общее решение.

Многие задачи физики, механики описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Поэтому эти уравнения и носят название уравнений математической физики. Они подразделяются на три класса.

Определение 5.6. Уравнение

$$\boldsymbol{a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0} \tag{5.2}$$

называется в некоторой точке $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D}$, уравнением:

1) гиперболического типа (уравнение колебаний), если в этой точке выполняется условие $\boldsymbol{b^2 - ac > 0}$;

2) параболического типа (уравнение диффузии), если в этой точке выполняется условие $\boldsymbol{b^2 - ac = 0}$;

3) эллиптического типа, если в этой точке выполняется условие $\boldsymbol{b^2 - ac < 0}$.

Каждое из названных уравнений имеет бесконечно много решений. Для описания реального процесса надо задать начальные условия и краевые условия на границе области, в которой рассматривается процесс. Поэтому такие задачи называются краевыми.

Рассмотрим некоторые примеры известных уравнений математической физики.

Сформулируем задачу о колебаниях струны. Под струной мы понимаем тонкую нить, которая может свободно изгибаться. Допустим, что она находится под воздействием сильного натяжения и в состоянии равновесия без внешних сил направлена по оси X. Если мы выведем ее из положения равновесия и, кроме того, подвергнем действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться, причем точка струны, занимавшая при равновесии некоторое положение с абсциссой $\boldsymbol{x}$, к моменту времени $\boldsymbol{t}$ займет другое положение. Ограничившись рассмотрением только поперечных колебаний, а именно: предполагая, что все движение происходит в одной плоскости, и что точки струны движутся перпендикулярно оси X, искомой функцией будет смещение точек струны, которое мы обозначим $\boldsymbol{u(x,t)}$.

Задача 5.1. Уравнение вынужденных поперечных колебаний струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \tag{5.4}$$

Если внешняя сила отсутствует, мы имеем $\boldsymbol{f = 0}$, и получаем уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.5}$$

Одного уравнения движения (5.5) недостаточно для полного определения струны, поэтому нужно еще задать состояние струны в начальный момент времени $\boldsymbol{t = 0}$, то есть положение ее точек $\boldsymbol{u}$ и их скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $\boldsymbol{t = 0}$,

$$u(x,0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), x \in R.$$

Для поставленной задачи о колебаниях струны без воздействия внешней силы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.5}$$

и начальных условиях

$$\boldsymbol{u(x,0) = f(x)}, \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), x \in R}, \tag{5.7}$$

где уравнение (5.5) описывает свободные колебания бесконечной однородной струны, а условия (5.6) и (5.7) задают соответственно начальное положение и начальную скорость точек струны, решение $u = u(x,t)$ задачи (5.5) – (5.7) находится по формуле Даламбера:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz} \tag{5.8}$$

Пример 5.1. Для поставленной задачи о колебаниях струны без воздействия внешней силы

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

и начальных условиях

$$\boldsymbol{u(x,0) = \cos x},$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, x \in \mathbb{R}},$$

найдем форму струны, используя метод Даламбера.

Δ Заметим, что в нашем случае $a^2 = 4$, $\varphi(x) = \cos x, \psi(x) = 0.$ Тогда по формуле Даламбера решение имеет вид

$u(x,t) = \frac{1}{2}[\cos(x+2t) + \cos(x-2t)] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 0dz = = \frac{1}{2}[\cos(x + 2t) - \cos(x-2t)] = \cos x \cdot \cos 2t.$ ▲

Задача 5.2. Рассмотрим уравнение свободных колебаний струны

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{5.5}$$

для случая, когда струна в спокойном состоянии занимает отрезок $[0; l]$оси Ox.

Для однозначного решения данной задачи кроме начальных условий

$$\boldsymbol{u(x,0) = \varphi(x)}, \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), x \in [0; l]}, \tag{5.7}$$

необходимо задать еще краевые условия

$$\boldsymbol{u(0,t) = u(l,t) = 0,} \tag{5.9}$$

означающие, что концы струны закреплены. Эта задача называется краевой задачей Коши. Частное решение будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной t, а другая от переменной x. Данный метод решения дифференциального уравнения известен как метод разделения Фурье.

Δ Фурье предложил искать решения задачи (5.5), (5.6), (5.7), (5.9) в виде произведения двух функций:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Продифференцируем последнее равенство по переменным величинам x, t

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t).$$

С учетом этих равенств, уравнение (5.5) перепишется в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

В последнем равенстве в левой части имеем функцию от переменной t, справа – функция от x, где t и x – независимые переменные. Поэтому функции от них равны тогда и только тогда, когда они постоянные. Это дает возможность, записать систему дифференциальных уравнений

$$T''(t) + a^2 \lambda \cdot T(t) = 0, \tag{5.10}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{5.11}$$

Рассмотрим сначала уравнение (5.11). В силу нулевых краевых условий (5.9) получаем следующее

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(0), X(0) = 0, \tag{5.12}$$

$$u(l,t) = X(l) \cdot T(t), X(l) = 0. \tag{5.13}$$

Анализ равенств (5.11), (5.12) и (5.13) приводит к тому, что решения уравнения (5.11) можно записать как функции

$$X_n(x) = c_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, c_n = const.$$

Тогда уравнение (5.10) имеет общее решение

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right).$$

Таким образом, мы нашли подходящие частные решения нашего дифференциального уравнения в виде функций

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Используя свойство линейности и однородности волнового уравнения, сумма частных решений также является решением, то есть решение уравнения (5.5) можно записать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{5.14}$$

Предположив, что данный ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать, а именно:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

и используя начальные условия (5.6), (5.7), найдем коэффициенты a_n, b_n

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \psi(x).$$

Полученные равенства описывают разложение функций $\varphi(x), \psi(x)$ по синусам в ряды Фурье соответственно на промежутке $x \in [0; l]$. Поэтому неизвестные коэффициенты a_n, b_n определяются по известным формулам

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx, \tag{5.15}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx. \tag{5.16}$$

Подставив формулы (5.15), (5.16) в (5.14), можно записать решение уравнения математической физики. ▲

Пример 5.2. Найти закон свободных колебаний струны, при условии, что ее концы закреплены и в начальный момент времени заданы форма струны и скорости ее точек:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x,0) = 20\sin(3\pi x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

В примере задана так называемая краевая задача Коши с начальными и краевыми условиями.

Δ Используя описанный выше алгоритм метода разделения переменных (метод Фурье), ищем частное решение задачи (5.17) в виде произведения двух функций $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Получим систему линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + 81\lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

Граничные условия дают равенства $X(0) = X(4) = 0$.

Решение уравнения $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$X(x) = X_n(x) = c_n sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right)$, при этом $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2$.

Решениями уравнения $T''(t) + 81\lambda T(t) = 0$ при $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2$ являются функции

$$T_n(t) = C_{1n} \cdot cos\left(\frac{9\pi n t}{4}\right) + C_{2n} \cdot sin\left(\frac{9\pi n t}{4}\right).$$

Таким образом, частное решение уравнения можно представить в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot cos\left(\frac{9\pi n t}{4}\right) + b_n \cdot sin\left(\frac{9\pi n t}{4}\right)\right) \cdot sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right). \tag{5.18}$$

Найдем производную функции (5.18) по переменной t

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9\pi n}{4} a_n \cdot sin\left(\frac{9\pi n t}{4}\right) + \frac{9\pi n}{4} b_n \cdot cos\left(\frac{9\pi n t}{4}\right)\right) \cdot sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right). \tag{5.19}$$

Согласно условию $u_t(x,0) = 0$ и полагая в (5.18) $t = 0$, получаем

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9\pi n}{4} b_n \cdot sin\left(\frac{9\pi n t}{4}\right)\right) = 0,$$

отсюда $b_n = 0$.

Согласно условию $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 20\sin(3\pi x)$ и полагая в (5.19) $t = 0$, получаем условие для нахождения коэффициентов a_n:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right) = 20\sin(3\pi x),$$

$$a_n = \begin{cases} 0, n \neq 12, \\ 20, n = 12. \end{cases}$$

Решение исходной задачи Коши, найденное по методу Фурье, имеет вид $u(x,t) = 20\cos(27\pi t)\sin(3\pi x)\,, 0 \leq x \leq 4{,}0 \leq t \leq +\infty$.▲

Заметим, что на практике при решении задачи Коши для конечной однородной струны, закрепленной в некоторых точках, используют уже готовые формулы, описанные в алгоритме метода Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$