Линейные пространства.

Определение (линейного пространства).

Линейным (векторным) пространством называется непустое множество V элементов произвольной природы $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\ldots$, то есть $V=\{\vec{x},\vec{y},\vec{z},\ldots\}$, условно называемых векторами, над которыми определены две **операции**: **сложения двух векторов** $\oplus:\forall\vec{x},\vec{y}\in V\Rightarrow\vec{x}\oplus\vec{y}\in V$, и **умножения вектора на число** $\otimes:\forall\vec{x}\in V,\forall\alpha\in P\Rightarrow\alpha\otimes\vec{x}\in V$, $P-$некоторое числовое множество, удовлетворяющие восьми аксиомам:

1. $\vec{x}\oplus\vec{y}=\vec{y}\oplus\vec{x}$, $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$;

2. $(\vec{x}\oplus\vec{y})\oplus\vec{z}=\vec{x}\oplus(\vec{y}\oplus\vec{z})$, $\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$;

3. существует нуль–вектор $\vec{0}\in V$ такой, что $\vec{x}\oplus\vec{0}=\vec{x}$ для любого $\vec{x}\in V$;

4. для каждого $\vec{x}\in V$ существует ему противоположный элемент $-\vec{x}\in V$ такой, что $\vec{x}\oplus(-\vec{x})=\vec{0}$;

5. $1\otimes\vec{x}=\vec{x}$, $\forall\vec{x}\in V$;

6. $\alpha\otimes(\beta\otimes\vec{x})=(\alpha\beta)\otimes\vec{x}$, $\forall\vec{x}\in V,\forall\alpha,\beta\in P$;

7. $\alpha\otimes(\vec{x}\oplus\vec{y})=(\alpha\otimes\vec{x})\oplus(\alpha\otimes\vec{y})$, $\forall\vec{x},\vec{y}\in V,\forall\alpha\in P$;

8. $(\alpha+\beta)\otimes\vec{x}=(\alpha\otimes\vec{x})\oplus(\beta\otimes\vec{x})$, $\forall\vec{x}\in V,\forall\alpha,\beta\in P$.

Свойства линейного пространства:

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент.

2. В линейном пространстве V для каждого вектора $\vec{x}\in V$ существует единственный ему противоположный вектор $-\vec{x}\in V$.

3. Для вектора $-\vec{x}\in V$ противоположным вектором является $\vec{x}\in V$.

4. $0\otimes\vec{x}=\vec{0},\forall\vec{x}\in V$.

5. $-1\otimes\vec{x}=-\vec{x},\forall\vec{x}\in V$.

6. Произведение любого числа α на нулевой вектор есть нулевой вектор, то есть $\alpha\otimes\vec{0}=\vec{0},\forall\alpha\in P$.

7. Если $\alpha\otimes\vec{x}=\vec{0}$ и $\alpha\neq 0$, то $\vec{x}=\vec{0}$.

8. Если $\alpha\otimes\vec{x}=\vec{0}$ и $\vec{x}\neq\vec{0}$, то $\alpha=0$.

Определение. Система векторов $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots\vec{x}_n$ линейного пространства V называется **линейно зависимой**, если существует набор чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$, среди которых хотя бы одно не равно нулю, такой, что $(\alpha_1\otimes\vec{x}_1)\oplus(\alpha_2\otimes\vec{x}_2)\oplus\ldots\oplus(\alpha_n\otimes\vec{x}_n)=\vec{0}$.

Определение. Система векторов $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots\vec{x}_n$ линейного пространства V называется **линейно независимой**, если векторное равенство $(\alpha_1\otimes\vec{x}_1)\oplus(\alpha_2\otimes\vec{x}_2)\oplus\ldots\oplus(\alpha_n\otimes\vec{x}_n)=\vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.

Теорема. Если к системе r линейно зависимых векторов присоединить любые m векторов, то получим систему $m+r$ линейно зависимых векторов.

Теорема. Если из системы r линейно независимых векторов отбросить любые $m, m<r$, векторов, то получим систему $r-m$ линейно независимых векторов.

Теорема. Для того, чтобы векторы $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots\vec{x}_n, n>1$, линейного пространства V были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Определение. Пусть в линейном пространстве V выполнены условия:

1) существует n линейно независимых векторов;

2) любая система $n+1$ векторов линейно зависима.

Тогда число с называется **размерностью линейного пространства** V и обозначается $\dim V=n$.

Определение. Базисом $n-$**мерного линейного пространства** V называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов этого пространства.

Теорема. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ – базис n–мерного линейного пространства V, то любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$, то есть

$$\vec{x} = (\alpha_1 \otimes \vec{e}_1) \oplus (\alpha_2 \otimes \vec{e}_2) \oplus \dots \oplus (\alpha_n \otimes \vec{e}_n), \qquad (1)$$

причем коэффициенты разложения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ определены однозначным образом.

Теорема. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ – система линейно независимых векторов линейного пространства V и любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$, то $\dim V = n$.

Определение. Выражение (1) называется **разложением вектора** $\vec{x}$ **по базису** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются **координатами вектора** $\vec{x}$ **в этом базисе**.

Задание 1. Выясните, образует ли линейное пространство данное множество с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число.

1.1. множество всех нечетных чисел;

1.2. множество всех чисел кратных 7;

1.3. множество всех плоских векторов, сумма координат которых является положительным числом;

1.4. множество всех плоских векторов, сумма координат которых равна нулю;

1.5. множество всех плоских векторов, коллинеарных данной прямой;

1.6. множество всех плоских векторов, перпендикулярных к данной прямой;

1.7. множество всех векторов, параллельных плоскости $x - 3y + 2z = 0$;

1.8. множество функций, определенных на отрезке $[a;b]$, таких, что $f(a) = 1$;

1.9. множество функций, определенных на отрезке $[a;b]$, таких, что $f(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$;

1.10. множество функций, определенных на отрезке $[a;b]$, таких, что $f(b) = 0$;

1.11. множество всех диагональных матриц третьего порядка;

1.12. множество всех многочленов степени не выше n;

1.13. множество всех многочленов степени выше n;

1.14. множество всех сходящихся к единице числовых последовательностей;

1.15. множество всех решений системы линейных однородных уравнений;

1.16. множество всех решений однородного линейного дифференциального уравнения n– порядка с постоянными коэффициентами.

В случае положительного ответа укажите размерность и какой-нибудь базис этого линейного пространства.

Ответ: **1.1.** не образует; **1.2.** не образует; **1.3.** не образует; **1.4.** образует, $\dim V = 1$, $\vec{e} = (1;-1)$; **1.5.** образует, $\dim V = 1$, $\vec{e} = (B;-A)$, где $l: Ax + By + C = 0$ –данная прямая; **1.6.** образует, $\dim V = 1$, $\vec{e} = (A;B)$, где $l: Ax + By + C = 0$ –данная прямая; **1.7.** образует, $\dim V = 2$, $\vec{e}_1 = (1;1;1)$, $\vec{e}_2 = (1;-1;-2)$; **1.8.** не образует; **1.9.** не образует; **1.10.** образует; **1.11.** образует, $\dim V = 3$, $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **1.12.** образует, $\dim V = n+1$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2, \dots, f_{n+1}(x) = x^n$; **1.13.** не образует; **1.14.** не образует; **1.15.** образует, $\dim V = n - r$, где r – ранг матрицы системы; **1.16.** образует, $\dim V = n$, где $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, a_i \in R, i = 1,2, \dots n,$ – данное уравнение.

Задание 2. Исследуйте линейную зависимость векторов.

2.1. $\vec{a} = (1;1;2)$, $\vec{b} = (0;1;1)$, $\vec{c} = (1;1;1)$;

2.2. $\vec{a} = (-1;3;-6)$, $\vec{b} = (5;-4;8)$, $\vec{c} = (1;-2;4)$;

2.3. $A_1=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$;

2.4. $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -3 & -2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$;

2.5. $\vec{x}_1=e^t$, $\vec{x}_2=\mathrm{sh}t$, $\vec{x}_3=\mathrm{ch}t$;

2.6. $\vec{x}_1=\sin^2 t$, $\vec{x}_2=5cos^2 t$, $\vec{x}_3=1$;

2.7. $f_1(x)=2x^4-3$, $f_2(x)=x^4-4x^3-x+1$, $f_3(x)=2x^3+x^2$, $f_4(x)=3x^4+2x^3+3x^2+x-7$;

2.8. $f_1(x)=x^4+1$, $f_2(x)=x^3+2$, $f_3(x)=x^2+3$, $f_4(x)=x+4$, $f_5(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

Ответ: 2.1. линейно независимы; **2.2.** линейно зависимы; **2.3.** линейно независимы; **2.4.** линейно независимы; **2.5.** линейно зависимы; **2.6.** линейно зависимы; **2.7.** линейно независимы; **2.8.** линейно независимы.

Задание 3. Даны линейные пространства:

3.1. $V=R^3$;

3.2. $V-$ пространство всех матриц второго порядка;

3.3. $V-$пространство всех многочленов, степень которых не превосходит трех.

В каждом из этих пространств указан упорядоченный набор векторов и фиксированный вектор $\vec{y}$.

Докажите, что данный набор векторов образует базис линейного пространства V и найдите координаты вектора $\vec{y}$ в этом базисе.

3.1.1. $\vec{e}_1=(1;-2;4)$, $\vec{e}_2=(-3;5;4)$, $\vec{e}_3=(1;0;-2)$, $\vec{y}=(-6;14;9)$;

3.1.2. $\vec{e}_1=(1;-1;-1)$, $\vec{e}_2=(0;1;0)$, $\vec{e}_3=(1;3;2)$, $\vec{y}=(-1;4;2)$;

3.2.1. $A_1=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

3.2.2. $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}6 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

3.3.1. $f_1(x)=1$, $f_2(x)=-2x+1$, $f_3(x)=x^2-2x-3$, $f_4(x)=x^3-1$, $y(x)=3x^3-7x^2+4x+15$;

3.3.2. $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=(x+1)^2$, $f_4(x)=(x+1)^3$, $y(x)=x^3-2x^2+3x-4$.

Ответ:

3.1.1. $\vec{y}=\frac{1}{2}\cdot\vec{e}_1+3\cdot\vec{e}_2+\frac{5}{2}\cdot\vec{e}_3$; **3.1.2.** $\vec{y}=-\frac{4}{3}\cdot\vec{e}_1+\frac{5}{3}\cdot\vec{e}_2+\frac{1}{3}\cdot\vec{e}_3$;

3.2.1. $Y=\frac{3}{2}\cdot A_1-\frac{7}{2}\cdot A_2+\frac{3}{2}\cdot A_3+\frac{3}{2}\cdot A_4$; **3.2.2.** $Y=-1\cdot A_1+0\cdot A_2-16\cdot A_3-9\cdot A_4$;

3.3.1. $y(x)=34f_1(x)+5f_2(x)-7f_3(x)+3f_4(x)$; **3.3.2.** $y(x)=-10f_1(x)+10f_2(x)-5f_3(x)+f_4(x)$.

Задание 4. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис. (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

4.1. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=6,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=5,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=8,\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=1;\end{cases}$

4.2. $\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4+2x_5=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4-x_5=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_5=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4-x_5=-3.\end{cases}$

Ответ: 4.1. общее решение линейной неоднородной системы не существует; общее решение линейной однородной системы – $X = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\frac{3}{2}c_1 - 2c_4 - 4c_5 \\ c_4 + 3c_5 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$, $c_1, c_4, c_5 \in R$, $\dim V = 3$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; **4.2.** общее решение линейной неоднородной системы – $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -6c_5 \\ c_5 + 1 \\ c_5 - 1 \\ c_5 \end{pmatrix}$, $c_5 \in R$; общее решение линейной однородной системы – $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -6c_5 \\ c_5 \\ c_5 \\ c_5 \end{pmatrix}$, $c_5 \in R$, $\dim V = 1$, $E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.