



# Цифровая обработка сигналов и изображений

Разработка БИХ-фильтров

Перцев Дмитрий

April 3, 2025



Белорусский государственный  
университет  
информатики и радиоэлектроники



# Table of Contents

1 Общая информация

► Общая информация

► Методы расчета коэффициентов

Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов



# Основные характеристики

## 1 Общая информация

Реальные цифровые БИХ-фильтры характеризуются следующим рекурсивным уравнением:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k)$$

где

- $h(k)$  - импульсная характеристика фильтра, длительность которой теоретически бесконечна,
- $b_k$  и  $a_k$  - коэффициенты фильтра,
- $x(n)$  и  $y(n)$  - вход и выход фильтра.

Передаточная функция БИХ-фильтра записывается следующим образом:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$



## БИХ-фильтры

### 1 Общая информация

- Импульсная характеристика БИХ-фильтров складывается из множества синусоид, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону.
- Порядок рекурсивных фильтров не превышает 12, что связано с проблемой устойчивости (на выходе фильтра могут возникнуть неконтролируемый рост сигнала или свободные колебания).
- Главное достоинство рекурсивных фильтров - удается избежать использования операции свертки, которая требует большого количества арифметических операций.
- Обычно проектируются по характеристике аналогового фильтра.



# Этапы разработки цифровых БИХ-фильтров

## 1 Общая информация

Разработку БИХ-фильтров можно условно разбить на **пять основных этапов**:

- **Составление спецификации фильтра**, в которой разработчик задает передаточную функцию фильтра (например, указывает, что требуется фильтр нижних частот) и желаемую производительность.
- **Аппроксимация или расчет коэффициентов**, когда выбирается один из доступных методов и вычисляются значения коэффициентов  $b_k$  и  $a_k$ , передаточной функции  $H(z)$ , которая соответствует спецификациям, предложенным на этапе 1.



# Этапы разработки цифровых БИХ-фильтров

## 1 Общая информация

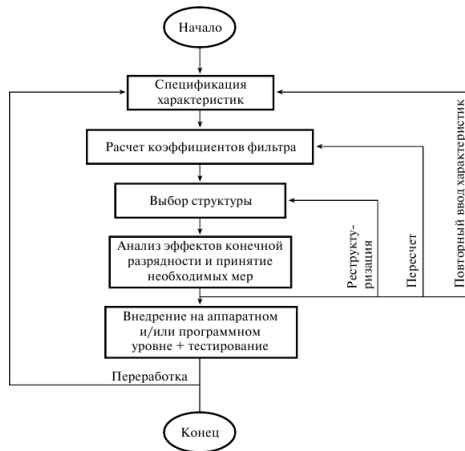
- **Выбор подходящей фильтрующей структуры**, в которую переводится передаточная функция. Обычно в БИХ-фильтрах используются параллельная структура и/или каскады блоков второго и/или первого порядка.
- **Анализ ошибок**, которые могут появиться при представлении коэффициентов фильтра и выполнении арифметических операций, фигурирующих при фильтрации, с помощью конечного числа битов.
- **Реализация**, которая включает построение аппаратного обеспечения и/или написание программного кода плюс выполнение собственно фильтрации.



# Этапы разработки цифровых БИХ-фильтров

## 1 Общая информация

### Этапы разработки цифровых фильтров





# Спецификация производительности

## 1 Общая информация

В спецификациях должны указываться

- **1)** характеристики сигнала (тип источников и получателей данных, интерфейс ввода-вывода, скорости передачи данных и длины слов, а также частоты, представляющие практический интерес);
- **2)** частотная характеристика фильтра (желаемые амплитудные и/или частотные характеристики плюс их допуски (если есть), скорость работы);
- **3)** способ реализации (например, как компьютерная программа на языке высокого уровня или система на основе процессора ЦОС, здесь же выбирается процессор обработки сигналов и режим фильтрации (реальное или модельное время));
- **4)** другие условия разработки (такие как стоимость и разрешенное ухудшение сигнала при прохождении через фильтр).





# Спецификация производительности

## 1 Общая информация

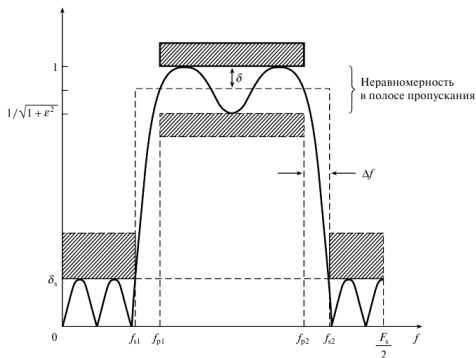


Схема допусков для полосового БИХ-фильтра



# Спецификация производительности

## 1 Общая информация

Для определения частотной характеристики обычно используются следующие параметры:

- $\varepsilon^2$  - параметр неравномерности в полосе пропускания;
- $\delta_p$  - амплитуда отклонений в полосе пропускания;
- $\delta_s$  - амплитуда отклонений в полосе подавления;
- $f_{p1}$  и  $f_{p2}$  - граничные частоты полосы пропускания;
- $f_{s1}$  и  $f_{s2}$  - граничные частоты полосы подавления.

Граничные частоты часто приводятся в нормированной форме, т.е. как доли частоты дискретизации ( $f/F_s$ ).



## Table of Contents

2 Методы расчета коэффициентов

► Общая информация

► Методы расчета коэффициентов

Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов



# Методы расчета коэффициентов БИХ-фильтров

## 2 Методы расчета коэффициентов

На этом этапе вначале выбирается метод аппроксимации, который затем используется для расчета значений коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ , при которых спецификации частотной характеристики, полученные на первом этапе разработки, будут удовлетворены.

Три наиболее распространенными методами конвертации аналоговых фильтров в эквивалентные цифровые являются

- **метод инвариантного преобразования импульсной характеристики**
- согласованное  $z$ -преобразование
- билинейное  $z$ -преобразование



# Методы расчета БИХ-фильтров

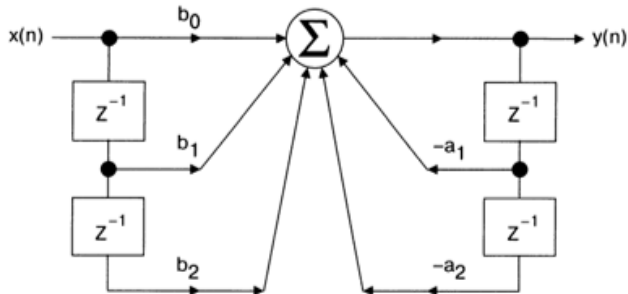
## 2 Методы расчета коэффициентов

- Метод инвариантности импульсной характеристики
  - начинается с определения  $H(s)$  для аналогового фильтра
  - взятие обратного преобразования Лапласа для получения импульсной характеристики
  - получение  $z$ -преобразования  $H(z)$  из дискретной импульсной характеристики
  - $z$ -преобразование выдает коэффициенты фильтра
  - должен быть учтен эффект наложения спектров
- Метод билинейного преобразования
  - другой метод для преобразования  $H(s)$  в  $H(z)$
  - характеристики определяются дифференциальным уравнением, описывающим аналоговую систему
  - не важен эффект наложения спектра
- Метод согласованного  $z$ -преобразования
  - отображает  $H(s)$  в  $H(z)$  для фильтров и с полюсами, и с нулями



# Что такое полюсы?

## 2 Методы расчета коэффициентов



$$\blacksquare y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$$

$$\blacksquare y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad \blacksquare H(z) = \frac{1 + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \text{ (нули)}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \text{ (полюса)}}$$



## Что такое полюсы?

### 2 Методы расчета коэффициентов

Преобразование Лапласа и  $z$ -преобразование позволяют описать импульсную характеристику фильтра с помощью набора синусоид и убывающих экспонент. Для этого требуется знать частотную характеристику в форме отношения двух многочленов.

Корни числителя передаточной функции называются *нулями*, а корни знаменателя - *полюсами*.

Полюсы и нули могут выражаться комплексными числами, поэтому говорят, что они «располагаются» на комплексной плоскости. Чем больше нулей и полюсов, тем выше качество системы.

Можно использовать готовое ПО или табличный способ.



# Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

## 2 Методы расчета коэффициентов

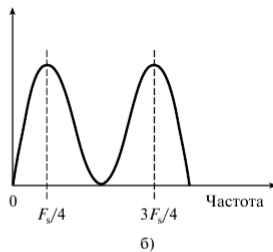
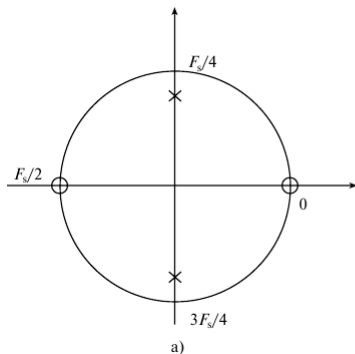


Диаграмма нулей и полюсов простого фильтра (а); схематическое изображение частотной характеристики этого фильтра (б)





# Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

## 2 Методы расчета коэффициентов

Требуется цифровой полосовой фильтр, удовлетворяющий следующим спецификациям:

- 1) полная режекция сигнала на 0 и 250 Гц;
- 2) узкая полоса пропускания, центрированная на 125 Гц;
- 3) ширина полосы пропускания по уровню 3 дБ равна 10 Гц.

Считая частоту дискретизации равной 500 Гц, определите передаточную функцию фильтра, подходящим образом расположив на комплексной плоскости полюса и нули, и запишите разностное уравнение.



# Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

## 2 Методы расчета коэффициентов

### Решение

Вначале нужно определить, где на комплексной плоскости поместить полюса и нули. Поскольку полная режекция требуется на 0 и 250 Гц, в соответствующих точках комплексной плоскости следует поместить нули. Эти точки лежат на единичной окружности в местах, соответствующих углам  $0^\circ$  и  $360^\circ \times 250/500 = 180^\circ$ . Чтобы полоса пропускания была центрирована на 125 Гц, требуется поместить полюс в точках  $\pm 360^\circ \times 125/500 = \pm 90^\circ$ . Чтобы коэффициенты были действительными, нужна пара комплексно-сопряженных полюсов.



# Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

## 2 Методы расчета коэффициентов

Радиус  $r$  полюсов определяется желаемой шириной полосы. Для определения приблизительной ширины полосы ( $B$ ) при  $r > 0,9$  используется следующее соотношение:

$$r \approx 1 - (B/F_s)\pi$$

В данной задаче  $B = 10$  Гц и  $F_s = 500$  Гц, откуда  $r = 1 - (10/500)\pi = 0,937$ .  
Получающаяся диаграмма нулей и полюсов изображена на рис. 18.4, а.



# Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

## 2 Методы расчета коэффициентов

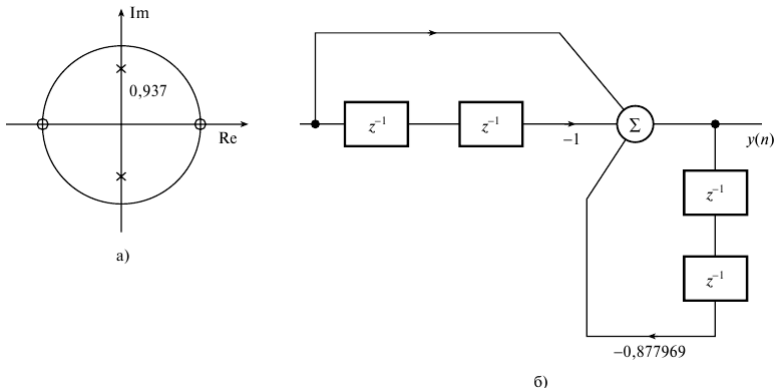


Рисунок 18.4 - Диаграмма нулей и полюсов (а). Блок-схема фильтра (б)



# Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

## 2 Методы расчета коэффициентов

С помощью этой диаграммы записываем передаточную функцию:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(z-1)(z+1)}{(z-re^{i\pi/2})(z-re^{-i\pi/2})} = \\ &= \frac{z^2-1}{z^2+0,877969} = \frac{1-z^{-2}}{1+0,877969z^{-2}}. \end{aligned}$$

По условиям Z-преобразования для передаточной функции:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$



# Расчет коэффициентов фильтра путем размещения нулей и полюсов

## 2 Методы расчета коэффициентов

Разностное уравнение:

$$y(n) = -0.877969 y(n - 2) + x(n) - x(n - 2)$$

Сравнивая передаточную функцию  $H(z)$  с общим уравнением БИХ-фильтров (18.2), находим, что фильтр представляет собой блок второго порядка со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0.877969 \end{aligned}$$



# Инвариантное преобразование импульсной характеристики

## 2 Методы расчета коэффициентов

В данном методе с помощью преобразования Лапласа из подходящей аналоговой передаточной функции  $H(s)$  получают импульсную характеристику  $h(t)$ .

Затем  $h(t)$  дискретизируется, а получающаяся функция  $h(nT)$  (где  $T$  - интервал дискретизации) подвергается  $z$ -преобразованию и дает желаемую передаточную функцию  $H(z)$ . Ниже данный метод иллюстрируется на примерах.

Иллюстрация метода инвариантного преобразования импульсной характеристики. С помощью метода инвариантного преобразования импульсной характеристики оцифруйте простой аналоговый фильтр с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{C}{s - p}$$



# Инвариантное преобразование импульсной характеристики

## 2 Методы расчета коэффициентов

### Решение

Импульсная характеристика  $h(t)$  находится через обратное преобразование Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left(\frac{C}{s - p}\right) = Ce^{pt}$$

где  $L^{-1}$  обозначает обратное преобразование Лапласа. Согласно методу инвариантного преобразования импульсной характеристики импульсная характеристика эквивалентного цифрового фильтра  $h(nT)$  равна  $h(t)$  в дискретные моменты времени  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , т.е.

$$h(nt) = h(t)|_{t=nT} = Ce^{pnT}$$





# Инвариантное преобразование импульсной характеристики

## 2 Методы расчета коэффициентов

Передаточная функция  $H(z)$  находится как результат действия  $z$ -преобразования на  $h(nT)$ :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} ce^{pnT}z^{-1} = \\ &= \frac{c}{1 - e^{pT}z^{-1}}. \end{aligned}$$

Значит, используя приведенный результат, можно записать:

$$\frac{c}{s - p} \rightarrow \frac{c}{1 - e^{pT}z^{-1}}$$



# Инвариантное преобразование импульсной характеристики

## 2 Методы расчета коэффициентов

Чтобы применить метод инвариантного преобразования импульсной характеристики к БИХ-фильтрам высоких порядков (например, фильтрам  $M$ -го порядка) с простыми полюсами, передаточную функцию  $H(s)$  вначале нужно разложить на простые дроби (такое разложение описывает цепь фильтров с единственным полюсом):

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_M}{s - p_M} = \\ &= \sum_{K=1}^M \frac{C_K}{s - p_K}, \end{aligned}$$

где  $p_K$  - полюса функции  $H(s)$ . Каждый член в правой части уравнения (8) имеет вид, как в формуле (6), так что преобразование (8) правомерно.



# Инвариантное преобразование импульсной характеристики

## 2 Методы расчета коэффициентов

$$\sum_{K=1}^M \frac{C_K}{s - p_K} \rightarrow \sum_{K=1}^M \frac{C_K}{1 - e^{p_K T} z^{-1}}.$$

БИХ-фильтры высоких порядков обычно реализуются как каскад или параллельная структура из стандартных фильтрующих блоков второго порядка. Следовательно, особый интерес представляет вариант  $M = 2$ . Здесь преобразование (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} &\rightarrow \frac{C_1}{1 - e^{p_1 T} z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - e^{p_2 T} z^{-1}} = \\ &= \frac{C_1 + C_2 - (C_1 e^{p_2 T} + C_2 e^{p_1 T}) z^{-1}}{1 - (e^{p_1 T} + e^{p_2 T}) z^{-1} + e^{(p_1 + p_2) T} z^{-2}}. \end{aligned}$$



# Инвариантное преобразование импульсной характеристики

## 2 Методы расчета коэффициентов

Если полюса  $p_1$  и  $p_2$  - комплексно-сопряженные, то  $C_1$  и  $C_2$  также будут комплексно-сопряженными, и уравнение (10) сводится к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{1 - e^{p_1 T} z^{-1}} + \frac{C_1^*}{1 - e^{p_1^* T} z^{-1}} = \\ = \frac{2C_{re} - [C_{re} \cos(p_{im} T) + C_{im} \sin(p_{im} T)] 2e^{p_{re} T} z^{-1}}{1 - 2e^{p_{re} T} \cos(p_{im} T) z^{-1} + e^{2p_{re} T} z^{-2}}, \end{aligned}$$

где  $C_{re}$  и  $C_{im}$  - действительная и мнимая части  $C_1$ ,  $p_{re}$  и  $p_{im}$  - действительная и мнимая части  $p_1$ , а  $*$  обозначает “комплексно-сопряженное”.



# Инвариантное преобразование импульсной характеристики

## 2 Методы расчета коэффициентов

1. Определить нормированную характеристику аналогового фильтра  $H(s)$ , удовлетворяющую спецификациям желаемого частотного фильтра.
2. При необходимости разложить  $H(s)$  на элементарные дроби, чтобы упростить следующий этап.
3. Применить  $z$ -преобразование к каждой дроби и получить выражение в форме (9).
4. Получить  $H(z)$ , сгруппировав результаты п. 3 в члены второго порядка и, возможно, один член первого порядка. Если используется реальная частота дискретизации,  $H(z)$  нужно затем умножить на  $T$ .



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Согласованное z-преобразование позволяет преобразовать аналоговый фильтр в эквивалентный цифровой. В данном методе каждый полюс и нуль аналогового фильтра непосредственно переводятся с  $s$ - на  $z$ -плоскость (комплексную плоскость):

$$(s - a) \rightarrow (1 - z^{-1}e^{aT}),$$

где  $T$  - период дискретизации. Преобразование (12) отображает полюс (или нуль), находящийся в точке  $s = a$   $s$ -плоскости, в полюс (или нуль) комплексной плоскости, находящийся в точке  $z = e^{aT}$ .



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Для аналоговых фильтров высоких порядков передаточная функция имеет несколько полюсов и/или нулей, которые нужно отобразить с  $s$ - на  $z$ -плоскость. Для аналогового фильтра наивысшего порядка с различными полюсами и нулями передаточную функцию можно записать в следующем виде

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)},$$

где  $z_k$  и  $p_k$  - нули и полюса  $h(s)$  соответственно.



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Далее на каждый множитель действуем согласованным z-преобразованием

$$(s - z_k) \rightarrow (1 - z^{-1}e^{z_k T}),$$

$$(s - p_k) \rightarrow (1 - z^{-1}e^{p_k T}).$$

В БИХ-фильтрах высокого порядка основной составляющей является фильтрующий блок второго порядка. Следовательно, особый интерес представляет случай, когда в уравнении (13)  $M = N = 2$ . При этом аналоговая передаточная функция сводится к виду

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}.$$





# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Применяя к этой функции согласованное z-преобразование, получаем

$$\frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} \rightarrow \frac{1 - (e^{z_1 T} + e^{z_2 T})z^{-1} + e^{(z_1 + z_2)T}z^{-2}}{1 - (e^{p_1 T} + e^{p_2 T})z^{-1} + e^{(p_1 + p_2)T}z^{-2}}.$$

Если полюса и нули звена второго порядка формируют комплексно-сопряженные пары, тогда  $p_2 = p_1^*$  и  $z_2 = z_1^*$  и правая часть уравнения (15) сводится к виду

$$\frac{1 - 2e^{z_{re}T} \cos(z_{im}T)z^{-1} + e^{z_{re}T}z^{-2}}{1 - 2e^{p_{re}T} \cos(p_{im}T)z^{-1} + e^{p_{re}T}z^{-2}},$$

где  $z_{re}$  и  $z_{im}$ ,  $p_{re}$  и  $p_{im}$  - действительная и мнимая части  $z_1$  и  $p_1$  соответственно.



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

На практике аналоговые фильтрующие блоки второго порядка удобнее представить в знакомой форме рациональной дроби:

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2}{B_0 + B_1s + B_2s^2}.$$

В такой форме полюса и нули  $H(s)$  определяются следующими выражениями:

$$p_{1,2} = -\frac{B_1}{2B_2} \pm \left[ \left( \frac{B_1}{2B_2} \right)^2 - \frac{B_0}{B_2} \right]^{\frac{1}{2}},$$
$$z_{1,2} = -\frac{A_1}{2A_2} \pm \left[ \left( \frac{A_1}{2A_2} \right)^2 - \frac{A_0}{A_2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного $z$ -преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

1. Определить подходящую аналоговую передаточную функцию  $H(s)$ , удовлетворяющую спецификациям искомого цифрового фильтра.
2. Найти положение полюсов и нулей  $H(s)$ . При этом может потребоваться факторизация аналоговой передаточной функции  $H(s)$ .
3. Отобразить полюса и нули с  $s$ - на  $z$ -плоскость, используя формулу (12). Для блоков второго порядка можно использовать формулы (15) и (16).
4. Объединить уравнения, записанные на  $z$ -плоскости, для получения передаточной функции  $H(z)$ .



# Расчет коэффициентов с помощью билинейного $z$ -преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

В данном методе для преобразования характеристики аналогового фильтра  $H(s)$  в характеристику эквивалентного цифрового фильтра применяется следующая замена:

$$s = k \frac{z - 1}{z + 1}, \quad k = 1 \text{ или } \frac{2}{T}.$$

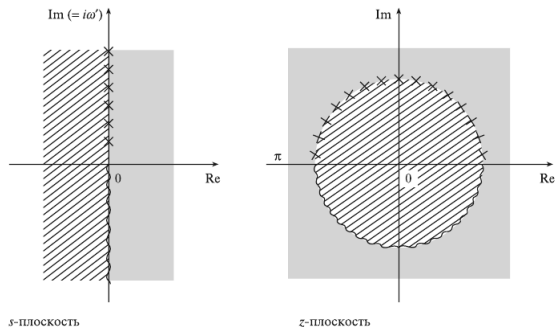
Приведенное выше преобразование отображает аналоговую передаточную функцию  $H(s)$ , записанную на  $s$ -плоскости, в дискретную передаточную функцию  $H(z)$  комплексной плоскости, как показано на рис. 5.



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного $z$ -преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Рисунок 5 - Иллюстрация отображения с  $s$ -плоскости на комплексную ( $z$ ) плоскость с использованием билинейного  $z$ -преобразования. Обратите внимание на то, что положительная часть оси  $i\omega'$  на  $s$ -плоскости (т.е. точки от  $s = 0$  до  $s = i\infty$ ) отображается в верхнюю половину единичной окружности, а отрицательная часть оси  $i\omega'$  переводится в нижнюю половину





# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Прямая замена  $s$  в  $H(s)$ , как она записана в формуле (18а) может привести к получению цифрового фильтра с нежелательной характеристикой. Это легко показать, сделав в уравнении (18а) замену  $z = e^{i\omega t}$  и  $s = i\omega'$ . Упрощая, находим, что аналоговая частота  $\omega'$  и цифровая частота  $\omega$  связаны соотношением

$$\omega' = k \operatorname{tg} \left( \frac{\omega T}{2} \right), \quad k = 1 \text{ или } \frac{2}{T}.$$

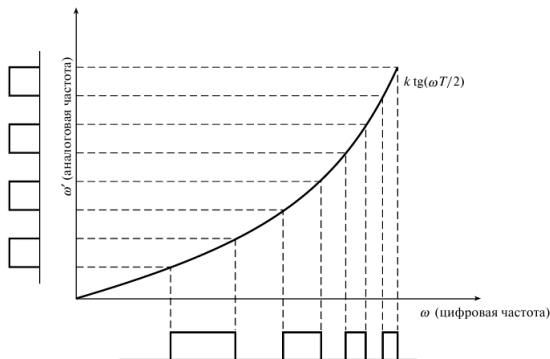
Зависимость (18б) схематически изображена на рис. 6. Видно, что связь аналоговой частоты  $\omega'$  с цифровой частотой  $\omega$  почти линейна при малых значениях  $\omega$ , но становится нелинейной при больших значениях  $\omega$ , что приводит к искажению (или деформации) цифровой частотной характеристики.



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Рисунок 6 - Связь между аналоговыми и цифровыми частотами, демонстрирующая эффект деформации. Обратите внимание на то, что равноотстоящие аналоговые полосы после преобразования в цифровую область на высоких частотах сжимаются и располагаются плотнее





# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

Для стандартных частотно-избирательных БИХ-фильтров можно следующим образом обобщить этапы использования билинейного z-преобразования.

1. На основе спецификаций цифрового фильтра определить подходящий нормированный аналоговый фильтр-прототип с передаточной функцией  $H(s)$ .





# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

2. Определить и деформировать граничные или критичные частоты нужного фильтра. Для фильтров нижних или верхних частот существует единственная граничная частота, или частота среза (скажем,  $\omega_p$ ). Для полосовых и режекторных фильтров имеем верхнюю и нижнюю граничные частоты полосы пропускания  $\omega_{p1}$  и  $\omega_{p2}$ , каждую из которых нужно деформировать (также могут задаваться граничные частоты полосы подавления):

$$\omega'_p = \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_p T}{2} \right);$$
$$\omega'_{p1} = \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_{p1} T}{2} \right); \quad \omega'_{p2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_{p2} T}{2} \right).$$



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного z-преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

3. Денормировать аналоговый фильтр-прототип, заменив  $s$  в передаточной функции с помощью одного из следующих преобразований (в зависимости от типа требуемого фильтра):

$$s = \frac{s}{\omega'_p} \quad \text{нижних частот в нижних частот,}$$

$$s = \frac{\omega'_p}{s} \quad \text{нижних частот в верхних частот,}$$

$$s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{W s} \quad \text{нижних частот в полосовой,}$$

$$s = \frac{W s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{нижних частот в режекторный.}$$

$$\omega_0^2 = \omega'_{p2} \omega'_{p1}, \quad W = \omega'_{p2} - \omega'_{p1}.$$



# Расчет коэффициентов с помощью согласованного $z$ -преобразования

## 2 Методы расчета коэффициентов

4. Применить билинейное  $z$ -преобразование и получить передаточную функцию нужного цифрового фильтра  $H(z)$ , следующим образом заменив  $s$  в масштабированной (т.е. денормированной) передаточной функции  $H'(s)$ :

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}$$



# Цифровая обработка сигналов и изображений

*Thank you for listening!*  
*Any questions?*