ТЕМА6 ЭЙЛЕРОВЫ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. Гамма-функция. Определение и свойства

Определение 6.1. Гамма-функцией называется математическая функция, зависящая от параметра x, и которая определяется несобственным интегралом 1-го рода

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \tag{6.1}$$

Гамма-функция имеет широкое применение в научных исследованиях и при решении задач математического анализа, теории вероятностей, статистики и физики. Данная функция используется для обобщения факториала на множестве действительных и комплексных значений.

Гамма-функция является одной из важных не элементарных функций. Вычисление многих определенных интегралов сводится к выражению их через эту функцию. Для данных функций составлены подробные таблицы, поэтому решение задачи считается выполненным, если результат выражается через гамма-функцию.

Рассмотрим свойства этой функции.

Свойство 6.1. Область определения. Гамма-функция является сходящимся несобственным интегралом при любом $x > 0$.

Гамма-функция является несобственным интегралом 1 рода. Отметим, что при некоторых значениях переменной x, подынтегральная функция разрывная при $t = 0$, и интеграл, определяющий гамма-функцию, является несобственным интегралом 2 рода. Исследуем сходимость данного интеграла.

Δ Рассмотрим интегральное представление данной функции в виде суммы двух интегралов

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt,$$

где $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt,$ (6.2)

$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$ (6.3)

Для функции $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ подынтегральную функцию заменим эквивалентной, а именно: $f(t,x) = t^{x-1} \cdot e^{-t} \sim t^{x-1}$ при $t \to 0$.

Интеграл (6.2) $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} dt$ сходится при $1 - x < 1, x > 0$.

Рассмотрим функцию $g(t) = \frac{1}{t^2}$. Из курса математического анализа мы знаем, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ сходится. Сравним подынтегральную функцию интеграла I_2 и функцию $g(t)$. Для этого найдем следующее предельное отношение

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1} \cdot e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что из сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} g(t) dt$, следует, по предельному признаку сходимости сходимость интеграла (6.3), то есть сходится интеграл

$$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

для любого значения переменной x.

Таким образом, мы показали, что гамма-функция является сходящимся несобственным интегралом при любом $x > 0$. ▲

Свойство 6.2. Непрерывность гамма-функции. Гамма-функция является непрерывной функцией для любого $x > 0$, то есть $\Gamma(x) \in C\big((x; +\infty)\big)$.

Δ Воспользуемся теоремой о непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметров. Возьмем любое $x > 0$. Гамма-функция $\Gamma(x)$ непрерывна в точке x. В силу плотности множества действительных чисел существуют такие x_0, A такие, что $x_0 < x < A$. Докажем, что этот интеграл (6.1) сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$.

Рассмотрим представление $\Gamma(x)$ в виде интегралов (6.2), (6.3):

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \int_{0}^{1} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt + \int_{1}^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

Если $x > 1$, то интеграл (6.2) является интегралом от непрерывной функции, следовательно, $I_1 \in \mathrm{C}\big([1; +\infty)\big)$.

Если $0 < x < 1$ $(x_0 < x < 1)$, то $|t^{x-1} \cdot e^{-t}| \leq t^{x_0-1}$ и интеграл $\int_0^1 t^{x_0-1} dt$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл I_1 сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$. Следовательно, $I_1 \in \mathrm{C}\big([x_0; 1)\big)$. Таким образом, мы показали, что I_1 непрерывна в любой точке x.

Рассмотрим интеграл (6.3). Отметим, что $I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$, так как $|t^{x-1} \cdot e^{-t}| \leq t^{A-1} \cdot e^{-t}$, а интеграл вида $\int_1^{+\infty} \frac{t^{A-1}}{e^{-t}} dt$ сходится. А так как подынтегральная функция непрерывна, то интеграл I_2 непрерывен на промежутке $[x_0; A]$, следовательно, непрерывен в точке x.

Таким образом показано, что гамма-функция $\Gamma(x) = I_1 + I_2$ непрерывна как сумма непрерывных функций. А в силу произвольного выбора точки x, имеем, что гамма-функция принадлежит классу непрерывных функций, то есть $\Gamma(x) \in \mathrm{C}\big((x; +\infty)\big)$. ▲

Свойство 6.3. Дифференцируемость гамма-функции.

С помощью теоремы о дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметров, а именно: для функции

$$\Phi(y) = \int_{a}^{+\infty} f(x, y) dx$$

производная вычисляется по формуле $\Phi'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$, нетрудно доказать, что гамма-функция $\Gamma(x)$ дифференцируема и ее производная вычисляется по формуле

$$\Gamma`(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot \ln(t) dt.$$

Аналогично, можно получить, что

$$\Gamma``(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot \ln^2(t) dt.$$

Отсюда следует, что гамма-функция является выпуклой функцией, имеющей единственный положительной минимум (рис. 9.1).

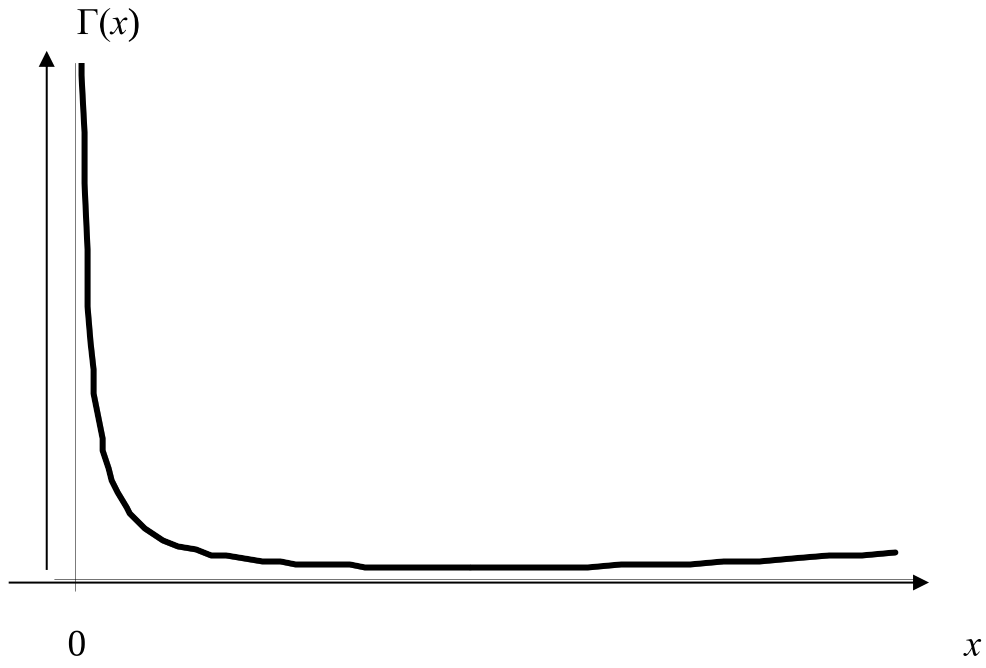

Рис. 6.1

Свойство 6.4. Справедлива формула понижения

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \tag{6.4}$$

Δ Докажем этот факт. Рассмотрим интеграл вида

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x+1-1} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{x} \cdot e^{-t} dt$$

Применив к данному интегралу, метод интегрирования по частям, получим

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x\cdot e^{-t}dt=\left\{\begin{matrix}\int udv=uv-\int vdu,\\ u=t^x, du=x\cdot t^{x-1}dt,\\ dv=e^{-t}dt, v=\int e^{-t}dt=-e^{-t}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}(-t^x\cdot e^{-t})-\int_0^{\infty}-e^{-t}\cdot x\cdot t^{x-1}dt=0+x\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{x-1}dt=x\cdot\Gamma(x).$$

▲

Свойство 6.5. Выражение гамма-функции через факториал.

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (6.5)$$

Δ Придадим в формуле понижения $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$ $x=n$ (целое положительное число) и применим данную формулу n раз, получим

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=$$
$$=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!$$

Итак, имеем $\Gamma(n+1)=n!$.▲

Функция $\Gamma(x)$ для целых значений аргумента совпадает с обычным факториалом

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$
$$\Gamma(1)=1=0!$$

Иногда в вычислениях и преобразованиях полезно применять так называемую формулу дополнения.

Свойство 6.6. Для гамма-функции справедлива формула дополнения

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{sin(\pi x)}, 0<x<1. \qquad (6.6)$$

Δ Заменив в формуле (6.6) x на $x+1$, получим

$$\Gamma(x+1)\cdot\Gamma(-x)=\frac{\pi}{sin\big(\pi(x+1)\big)}=\frac{\pi}{sin(\pi x)}. \qquad (6.7)$$

Отсюда и из справедливости формулы (6.7) при $0<x<1$ вытекает справедливость равенства (6.6) при любом x, не являющемся целым числом.

Заметим, что, применяя повторно формулу (6.5), получаем справедливое равенство

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x\cdot\Gamma(x). \qquad (6.8)$$

Отсюда при $x=\frac{1}{2}$ имеем

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Итак, имеем $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$. ▲

6.2. Бета-функция. Определение и свойства

Определение 6.2. Бета-функцией называется математическая функция, зависящая от двух параметров x, y, и которая определяется несобственным интегралом 2-го рода

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt\,, x>0, y>0. \qquad (6.7)$$

Перейдем к рассмотрению свойств данной функции.

Свойство 6.7. Подынтегральная функция имеет разрыв при $x<1$ на нижнем пределе интегрирования и при $y<1$ на верхнем пределе интегрирования. Несобственный интеграл, определяемый формулой (6.7), сходится при $x>0, y>0$ и расходится при $x\leq0, y\leq0$.

Доказательство можно провести аналогично доказательству сходимости гамма-функции.

Свойство 6.8. Бета-функция является симметрической функцией, то есть $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

Δ В формуле (6.7) введем замену $\tau=1-t, t=1-\tau$. Относительно новой переменной имеем следующее представление

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt=\int_0^1(1-\tau)^{x-1}\cdot\tau^{y-1}=\mathrm{B}(y,x).\ \blacktriangle$$

Свойство 6.9. Для бета-функции справедливо следующее выражение

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\cdot dt. \tag{6.8}$$

Свойство 6.10. Между гамма-функцией и бета-функцией существует зависимость

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Δ Рассмотрим гамма-функцию

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$$

и сделаем замену $t=az$, где $z>0$ – переменная, $a>0$ – параметр. Относительно введенной замены, интеграл запишется следующим образом

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}(az)^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot adz=a^x\cdot\int_0^{+\infty} z^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot dz,$$

из последнего равенства найдем

$$\frac{\Gamma(x)}{a^x}=\int_0^{+\infty} z^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot dz.$$

Подставив в полученное равенство $x\sim x+y, a\sim 1+a$, получим

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+a)^x}=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-(1+a)z}\cdot dz. \tag{6.9}$$

В равенстве (6.9) умножим левую и правую части на выражение z^{x-1} и проинтегрируем

$$\Gamma(x+y)\cdot\int\limits_0^{+\infty}\frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}da=\int\limits_0^{+\infty}a^{x-1}\cdot da\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-(1+a)z}\cdot dz. \tag{6.10}$$

В левой части равенства (6.10) имеем представление бета-функции по формуле (6.8), а именно:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}da=B(x,y).$$

Справа в равенстве (6.10) поменяем порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int\limits_0^{+\infty}a^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot da=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{введем замену}\\ az=b, a=\frac{b}{z}, db=zda, da=\frac{1}{z}db\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^{x-1}\cdot e^{-b}\cdot\frac{1}{z}db=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int\limits_0^{+\infty}\frac{b^{x-1}}{z^x}\cdot e^{-b}db=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\cdot\frac{1}{z^x}\int\limits_0^{+\infty}b^{x-1}\cdot e^{-b}db=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}z^{y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\cdot\Gamma(x)=\Gamma(y)\cdot\Gamma(x).$$

Таким образом, подставляя в (6.10) полученные преобразования интегралов, мы имеем

$$\Gamma(x+y)\cdot B(x,y)= \Gamma(y)\cdot\Gamma(x),$$

откуда следует соотношение, представляющее связь бета-функции и гамма-функций

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{6.11}$$

▲

Определение 6.3. Бета- и Гамма-функции, определенные формулами (6.7) и (6.1) называются интегралами Эйлера первого и второго рода соответственно.

Некоторые интегралы могут быть вычислены с помощью рассматриваемых функций.