Линейные операторы. Собственные векторы линейного оператора

Пусть V $-$ линейное пространство.

Определение 1. Если задан закон f, по которому каждому вектору $\vec{x}\in V$ поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{y}\in V$, то будем говорить, что задано **преобразование (отображение, оператор)** f пространства V в себя и записывать $f:V\to V$.

Вектор $\vec{y}$ называется **образом** вектора $\vec{x}$, а вектор $\vec{x}$ – **прообразом** вектора $\vec{y}$. Если преобразование f переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, то это будем записывать как $\vec{y}=f(\vec{x})$.

Определение2. Преобразование f называется **линейным**, если выполнены два условия:

1) $f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2), \forall \vec{x}_1,\vec{x}_2\in V$;

2) $f(\lambda\vec{x})=\lambda f(\vec{x}), \forall \vec{x}\in V, \forall \alpha\in R$.

Пусть линейное преобразование f переводит базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ в векторы $\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\ldots,\vec{e}\,'_n$, то есть $f(\vec{e}_i)=\vec{e}\,'_i, i=1,2,\ldots,n$, при этом

$$\begin{cases}\vec{e}\,'_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n,\\ \vec{e}\,'_2=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{e}\,'_n=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n.\end{cases}$$

Определение 3. Матрица вида

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного преобразования** f в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$. Пусть вектор $\vec{x}(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, то есть $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$. Найдем $f(\vec{x})$.

Предположим, что $f(\vec{x})=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Тогда $f(\vec{x})=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n$.

С другой стороны

$$f(\vec{x})=f(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)=x_1f(\vec{e}_1)+x_2f(\vec{e}_2)+\ldots+x_nf(\vec{e}_n)=$$
$$=x_1\left(a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n\right)+x_2\left(a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n\right)+\ldots+x_n\left(a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n\right)=$$
$$=\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\right)\vec{e}_1+\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\right)\vec{e}_2+\ldots+\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\right)\vec{e}_n.$$

Отсюда

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n.\end{cases}$$

Обозначим $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\ldots\\y_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}$. Тогда система примет вид $Y=AX$.

Определение 4. Пусть в линейном пространстве V даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\ldots,\vec{e}\,'_n$ и

$$\begin{cases}\vec{e}\,'_1=t_{11}\vec{e}_1+t_{21}\vec{e}_2+\ldots+t_{n1}\vec{e}_n,\\ \vec{e}\,'_2=t_{12}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2+\ldots+t_{n2}\vec{e}_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{e}\,'_n=t_{1n}\vec{e}_1+t_{2n}\vec{e}_2+\ldots+t_{nn}\vec{e}_n.\end{cases}$$

Матрица $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$**.

Если $\vec{x}(x_1;x_2;\dots;x_n)$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{x}(x'_1;x'_2;\dots;x'_n)$ в базисе $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$, то $X=TX'$, где $X'=\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Зависимость между матрицами одного и того же оператора в различных базисах.

Теорема 1. Если $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$ − два базиса некоторого линейного пространства и A − матрица линейного оператора f в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$, то матрица B этого оператора в базисе $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$ имеет вид

$$B=T^{-1}\cdot A\cdot T\,, \tag{1}$$

где T – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$.

Следствие.

Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе матрица этого оператора является невырожденной, то есть если A и B −матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$ соответственно и $\det A\neq 0$, то $\det A=\det B\neq 0$.

Замечание.

Если A и B −матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$ соответственно, то $A=T\cdot B\cdot T^{-1}$.

Характеристическое уравнение линейного оператора.

Теорема 2.

Если A и B −матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$ соответственно, то

$$\det(A-\lambda\cdot E)=\det(B-\lambda\cdot E),$$

где λ – произвольное число и E – единичная матрица порядка n.

Определение 5. Многочлен $\det(A-\lambda\cdot E)$ степени n относительно λ называется **характеристическим многочленом** матрицы A или линейного оператора f.

Определение 6. Характеристическим уравнением линейного оператора f называется уравнение вида

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0, \tag{2}$$

где A – матрица линейного оператора f в некотором базисе.

Определение 7. Корни характеристического уравнения (2) называются **характеристическими числами** матрицы A или линейного оператора f.

Замечание. При переходе от одного базиса к другому матрица линейного оператора меняется, а характеристический многочлен остается неизменным.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ − матрица линейного оператора f в некотором базисе. Тогда характеристическое уравнение примет

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Собственные векторы линейного оператора.

Определение 8. Вектор $\vec{x}$ линейного пространства называется **собственным вектором линейного оператора** f, если этот вектор ненулевой и существует действительное число k такое, что

$$f(\vec{x})=k\cdot\vec{x}. \qquad 3)$$

Определение 9. Число k называется **собственным числом вектора** $\vec{x}$ относительно линейного оператора f.

Равенство (3) можно записать в матричном виде

$$A\cdot X=k\cdot X \Leftrightarrow A\cdot X=k\cdot(E\cdot X) \Leftrightarrow A\cdot X=(k\cdot E)\cdot X \Leftrightarrow (A-k\cdot E)\cdot X=O,$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ − матрица линейного оператора f в некотором базисе,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ –матрица–столбец из координат вектора $\vec{x}$ в том же базисе.

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Теорема 3.

Для того, чтобы линейный оператор f имел собственный вектор $\vec{x}$ с собственным значением k, необходимо и достаточно, чтобы число k являлось корнем характеристического уравнения этого оператора.

Теорема 4.

Пусть k − собственное число линейного оператора f с матрицей A n − мерного линейного пространства. Если ранг матрицы $A-k\cdot E$ равен r, то существует $n-r$ линейно независимых собственных векторов линейного оператора f с собственным числом k.

Пример 1. Выясните, являются ли линейными операторы $f:R^3\to R^3$, заданные условиями:
а) $f(\vec{x})=(x_1-x_3;x_2^2;x_1+2x_2+3x_3),\vec{x}(x_1;x_2;x_3)\in R^3$. б) $f(\vec{x})=[\vec{x},\vec{a}],\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k},\vec{x}(x_1;x_2;x_3)\in R^3$.
В случае положительного ответа найдите матрицу линейного оператора f в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Решение.

а) Проверим первое условие из определения линейного оператора. Найдем $f(\vec{x}+\vec{y})$ и $f(\vec{x})+f(\vec{y})$. Учитывая, что $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3)$, получим

$$f(\vec{x}+\vec{y})=((x_1+y_1)-(x_3+y_3);(x_2+y_2)^2;(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+3(x_3+y_3))=$$
$$=(x_1+y_1-x_3-y_3;x_2{}^2+y_2{}^2+2x_2y_2;x_1+y_1+2x_2+2y_2+3x_3+3y_3),$$
$$f(\vec{x})+f(\vec{y})=(x_1-x_3;x_2^2;x_1+2x_2+3x_3)+(y_1-y_3;y_2^2;y_1+2y_2+3y_3)=$$
$$=(x_1-x_3+y_1-y_3;x_2^2+y_2^2;x_1+2x_2+3x_3+y_1+2y_2+3y_3).$$

Сравнивая покоординатно векторы $f(\vec{x}+\vec{y})$ и $f(\vec{x})+f(\vec{y})$, получаем, что их первые и третьи координаты совпадают, тогда как вторые различны: $x_2{}^2+y_2{}^2+2x_2y_2\neq x_2^2+y_2^2$, если $x_2y_2\neq 0$.

Таким образом, равенство $f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$ выполняется не для всех векторов $\vec{x},\vec{y}\in R^3$.
Значит, оператор f не является линейным.
б) В силу свойств векторного произведения векторов получим
$f(\vec{x}+\vec{y})=[\vec{x}+\vec{y},\vec{a}]=[\vec{x},\vec{a}]+[\vec{y},\vec{a}]=f(\vec{x})+f(\vec{y})$; $f(\lambda\vec{x})=[\lambda\vec{x},\vec{a}]=\lambda[\vec{x},\vec{a}]=\lambda f(\vec{x})$.
Значит, оператор $f(\vec{x})=[\vec{x},\vec{a}]$ является линейным для любого вектора $\vec{a}$.
Составим матрицу оператора f в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Для этого найдем $f(\vec{i}),f(\vec{j}),f(\vec{k})$. Получим

$$f(\vec{i})=[\vec{i},\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\2&-1&5\end{vmatrix}=(0;-5;-1);\ f(\vec{j})=[\vec{j},\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&0\\2&-1&5\end{vmatrix}=(5;0;-2);$$

$$f(\vec{k})=[\vec{k},\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&1\\2&-1&5\end{vmatrix}=(1;2;0).$$

Столбцами матрицы A этого оператора в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ являются координаты образов базисных векторов $f(\vec{i}),f(\vec{j}),f(\vec{k})$: $A=\begin{pmatrix}0&5&1\\-5&0&2\\-1&-2&0\end{pmatrix}$.

Пример 2.
Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

Решение.
Составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda\cdot E)=0$, корнями которого являются собственные значения λ матрицы A:

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda&-1&-1\\1&2-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(4-\lambda)\cdot\left((2-\lambda)^2-1\right)+(2-\lambda+1)-(-1-(2-\lambda))=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(4-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)+6-2\lambda=0\Leftrightarrow(\lambda-3)^2(2-\lambda)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=2,\\\lambda=3.\end{array}\right.$$

Для каждого собственного значения λ составим и решим однородную систему уравнений $(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{x}=\vec{0}$:

$$(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4-\lambda&-1&-1\\1&2-\lambda&-1\\1&-1&2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы A с собственным значением λ.

Для $\lambda_1 = 2$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2+(-2)S_1 \\ S_3+(-1)S_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+(-1)S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней матрице соответствует однородная система $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Выберем базисными переменными x_1 и x_2, а свободной неизвестной − x_3. Тогда $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$. Полагая $x_3 = c_3 \neq 0$, получим собственные векторы $\vec{X}_1$, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2$:

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_3,$$

где c_3 –произвольное число, отличное от нуля.

Для $\lambda_2 = 3$ указанная система примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Выберем x_1 базисной переменной, а x_2, x_3 – свободными неизвестными. Тогда $x_1 = x_2 + x_3$. Полагая $x_2 = c_2, x_3 = c_3$, получим собственные векторы $\vec{X}_2$, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 3$:

$$\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_2, c_3 –произвольные числа, не равные нулю одновременно, что равносильно условию $c_2{}^2 + c_3{}^2 \neq 0$.

Задачи

1. Выясните, являются ли линейными операторы $f : R^3 \to R^3$.
В случае положительного ответа найдите:

а) матрицу линейного оператора f в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$;

б) ядро и область значений оператора f;

в) собственные векторы оператора f.

1.1. $f(\vec{x}) = (2x_1 + x_2 - 3x_3;\ 1;\ x_1 + x_3)$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

1.2. $f(\vec{x}) = (\vec{i}, \vec{x}) \cdot \vec{j}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$;

1.3. f – оператор поворота векторов пространства R^3 относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$;

1.4. f – оператор ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$. Воспользуйтесь формулой $f(\vec{e})=\vec{e}-proj_{\vec{n}}\vec{e}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\vec{e}-\frac{(\vec{n},\vec{e})}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}.$

1.5. $f(\vec{x})=3\cdot(\vec{a},\vec{x})\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-2\vec{x},\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3,\ \vec{a}=(1;\ 2;-2);$

1.6. $f(\vec{x})=\left(x_1+x_2-4x_3;\ x_2+3x_3;\ x_3^2\right),\ \vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in \mathrm{R}^3.$

Ответы:

1.1. не является;

1.2. $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\vec{X}_1=\begin{pmatrix}0\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\forall c_2,c_3\in R,c_2{}^2+c_3{}^2\neq 0,\lambda_1=0;$

1.3. $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\vec{X}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_3\end{pmatrix},c_3\in R,c_3\neq 0,\lambda_1=1;$

1.4. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{3}{4}&-\frac{\sqrt{3}}{4}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix},\vec{X}_1=\begin{pmatrix}c_1\\-\sqrt{3}c_3\\c_3\end{pmatrix},\forall c_1,c_3\in R,c_1{}^2+c_3{}^2\neq 0,\lambda_1=1;$

$\vec{X}_2=\begin{pmatrix}0\\c_2\\\sqrt{3}c_2\end{pmatrix},\forall c_2\in R,c_2\neq 0,\lambda_2=0;$

1.5. $A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&2&-4\\-2&-4&2\end{pmatrix},\vec{X}_1=\begin{pmatrix}-2c_2+2c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\forall c_2,c_3\in R,c_2{}^2+c_3{}^2\neq 0,\lambda_1=2;$

$\vec{X}_2=\begin{pmatrix}-\frac{c_3}{2}\\-c_3\\c_3\end{pmatrix},\forall c_3\in R,c_3\neq 0,\lambda_2=7.$

1.6. не является.

2. Даны координаты вектора $\vec{x}$ и матрица A линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Найдите координаты вектора $f(\vec{x})$ в этом базисе.

2.1. $\vec{x}=(2;-1;3),A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&3&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$; **2.2.** $\vec{x}=(1;1;-1),A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$

Ответы:

2.1. $f(\vec{x})=(4;4;-4)$; **2.2.** $f(\vec{x})=(0;2;0).$

3. Даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ и $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'$ и матрица A линейного оператора в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3',$ если

3.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2, \vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_3, \vec{e}_3'=\vec{e}_2+\vec{e}_3;$

3.2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2, \vec{e}_2'=2\vec{e}_1-\vec{e}_2, \vec{e}_3'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3.$

Ответы: 3.1. $B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}$; **3.2.** $B=\begin{pmatrix}\frac{10}{3} & \frac{5}{3} & -3\\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -2\\ \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -3\end{pmatrix}$.