Цифровая обработка сигналов и изображений

Ключевые операции ЦОС

Перцев Дмитрий

January 30, 2025

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Table of Contents

Ключевые операции ЦОС

- прохождение сигнала через цифровой узел:
  - свертка:
    - линейная
    - циклическая
- на сколько один процесс похож на другой:
  - автокорреляция
  - взаимная корреляция
- импульсная характеристика
- цифровая фильтрация
- дискретные преобразования
  - преобразование Фурье
  - вейвлет-преобразования
- модуляция

Table of Contents

Линейная (апериодическая) свертка (convolution)

Пусть имеется два дискретных сигнала:

- $a(n), n = \overline{0, N-1}$
- $b(n), n = \overline{0, M-1}$

где N и M - длины сигналов $a(n)$ и $b(n)$ соответственно
Линейной сверткой сигналов $a(n)$ и $b(n)$ называется дискретный сигнал вида:

$$s(n) = a \circledast b = \sum_{m=0}^{n} a(m) \cdot b(n-m), n = \overline{0, N+M-2}$$

Сигналы равны нулю вне заданных своих диапазонов: $a(n) = 0$ при $n < 0$ и $n > N$, $b(n) = 0$ при $n < 0$ и $n > M$

Свойства свертки

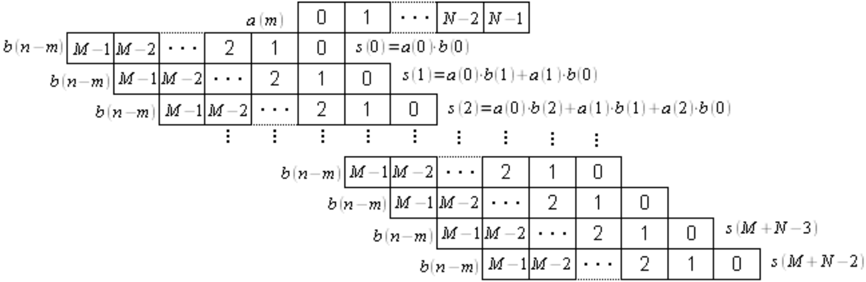
- коммутативность
  - $a \circledast b = b \circledast a$
- дистрибутивность
  - $a \circledast (b + c) = a \circledast b + a \circledast c$
- ассоциативность
  - $a \circledast (b \circledast c) = (a \circledast b) \circledast c = (a \circledast c) \circledast b$

Линейная свертка

- дополняем нулями слева первый сигнал до длины $N + M - 1$
- инвертируем во времени второй сигнал
- дополняем нулями справа второй сигнал до длины $N + M - 1$
- в цикле от 0 до $N + M - 2$ сдвигаем второй сигнал вправо (или первый сигнал влево)
- вычисляем на каждом шаге цикла произведения элементов и подсчитываем сумму произведений

Линейная свертка

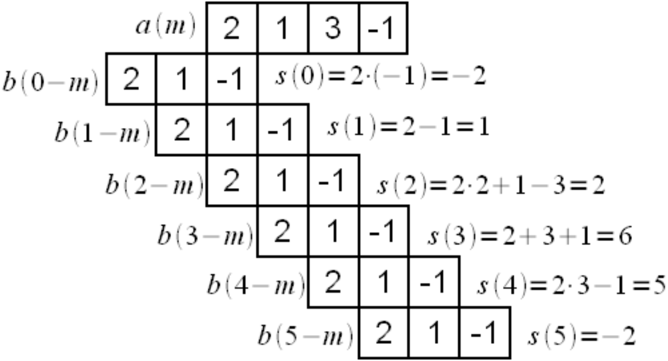
Графическое представление линейной свертки



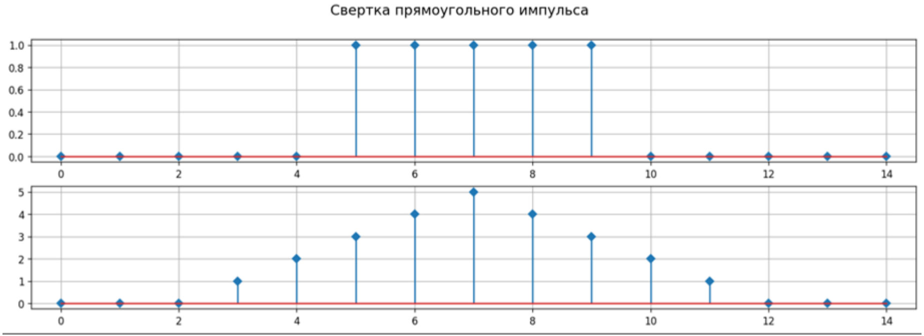
Отсчеты сигнала $b(n)$ сдвигаются относительно отсчетов последовательности $a(n)$ все возможные перекрывающиеся отсчеты почленно перемножаются и складываются.

Линейная свертка

Пример вычисления линейной свертки двух сигналов $a(n) = [2, 1, 3, -1]$ длиной 4 отсчета и $b(n) = [-1, 1, 2]$ длиной 3 отсчета.

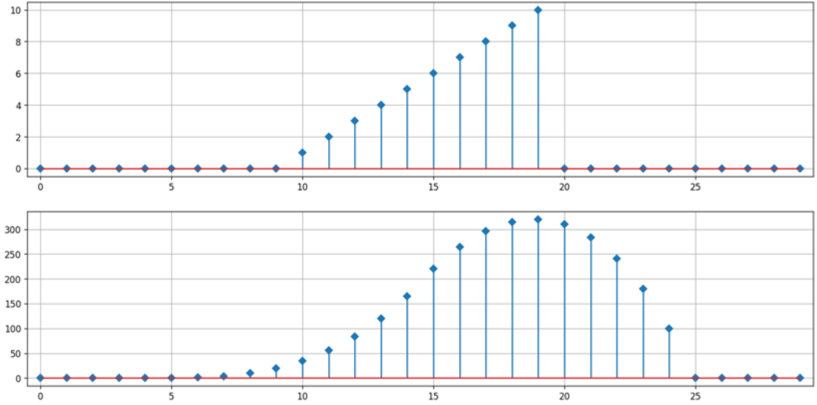


Свертка прямоугольного импульса



Свертка треугольного импульса

2 Свертка (convolution) и корреляция (correlation)



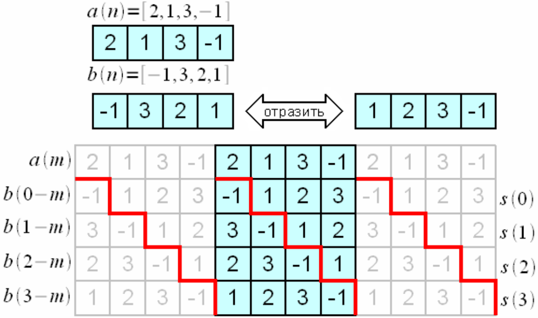
Циклическая свертка

В случае циклической свертки предполагается, что дискретные сигналы $a(n)$ и $b(n)$ - периодические с одинаковым периодом, равным N отсчетов. Тогда циклической сверткой сигналов $a(n)$ и $b(n)$ называется сигнал вида:

$$s(n) = \sum_{m=0}^{N} a(m) \cdot b(n-m), n = \overline{0, N-1}$$

Результат циклической свертки также имеет длину n отсчетов.

Рассмотрим циклическую свертку на примере двух сигналов $a(n) = [2, 1, 3, -1]$ и $b(n) = [-1, 3, 2, 1]$.

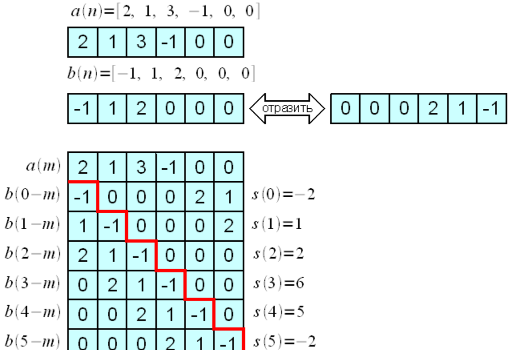


Красной линией отмечены границы периодов повторения сигнала $b(n-m)$. Заметим, что в силу периодичности сигналов $b(-m) = b(N-m)$.

Циклическая свертка

Приведем пример вычисления линейной свертки через циклическую для $a(n) = [2, 1, 3, -1]$ длиной 4 отсчета и $b(n) = [-1, 1, 2]$ длиной 3 отсчета (этот пример был рассмотрен выше).

Дополним нулями $a(n) = [2, 1, 3, -1, 0, 0]$ и $b(n) = [-1, 1, 2, 0, 0, 0]$, так чтобы в каждой последовательности было по 6 отсчетов.



Корреляция (correlation)

- корреляция - это мера схожести двух сигналов
- является методом анализа сигналов
- используется для оценки схожести 2 сигналов
- может быть выражена как косинус угла между векторами

Корреляция

Пример использования. Допустим, имеется сигнал $s(t)$, в котором может быть (а может и не быть) некоторая последовательность $x(t)$ конечной длины , временное положение которой нас интересует. Для поиска этой последовательности в скользящем по сигналу $s(t)$ временном окне длиной вычисляются скалярные произведения сигналов $s(t)$ и $x(t)$. Тем самым мы "прикладываем" искомый сигнал $x(t)$ к сигналу $s(t)$, скользя по его аргументу, и по величине скалярного произведения оцениваем степень сходства сигналов в точках сравнения.
Смысл этой операции в том, чтобы найти наиболее вероятные периоды повторения формы исходного сигнала.

Корреляция (correlation)

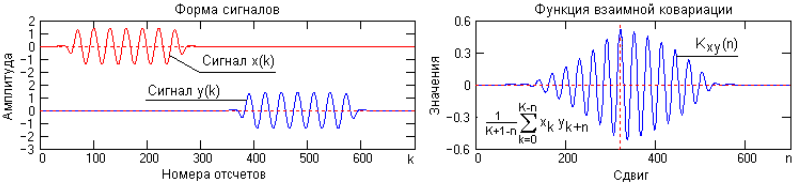
$$C_{xy}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt$$

$$C_{xy}(m) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_{n-m}$$

где m, τ - запаздывание (временной сдвиг)

Взаимно-корреляционная функция (cross-correlation function, CCF)

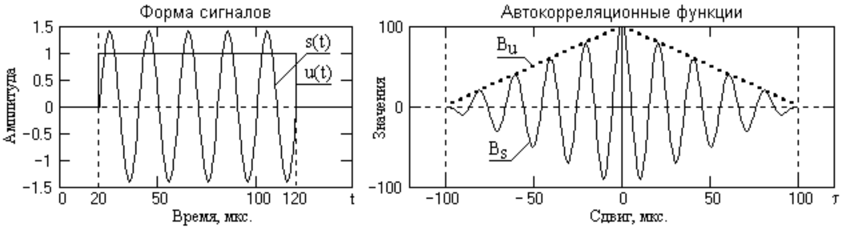
Интервал изменения значений корреляционных коэффициентов при сдвигах n может изменяться от -1 (полная обратная корреляция) до 1 (полное сходство или стопроцентная корреляция).



Пример определения сдвига между двумя детерминированными сигналами, представленными радиоимпульсами, по максимуму CCF приведен на рисунке. По максимуму CCF может определяться и сдвиг между сигналами, достаточно различными по форме.

Автокорреляционная функция (auto-correlation function, ACF)

подразумевает существование только одного сигнала и дает информацию о структуре сигнала и его поведении во времени



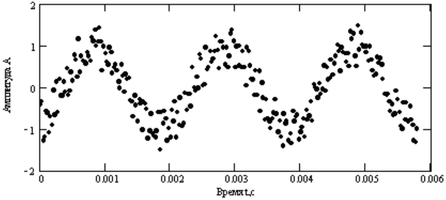
В качестве примера приведены два сигнала - прямоугольный импульс и радиоимпульс одинаковой длительности T. Максимумы АКФ совпадают, что говорит о равной энергии сигналов.

Автокорреляционная функция (auto-correlation function, ACF)

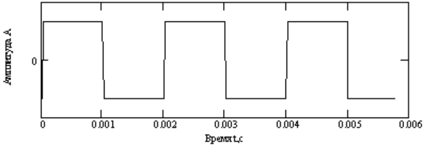
- физический смысл АКФ - энергия сигнала
- свойства:
  - симметричная и четная функция
  - имеет максимум в нуле (равна энергии сигнала)
  - АКФ периодической последовательности - периодическая функция
  - АКФ суммы двух некоррелированных сигналов - сумма АКФ этих сигналов
  - АКФ бесконечного во времени белого шума имеет пик в нулевом значении и нули во всех остальных

Корреляция

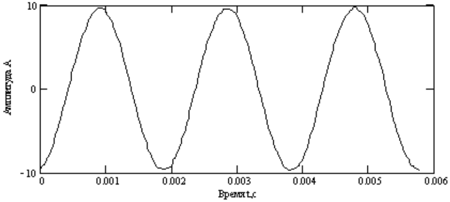
Исходный сигнал с шумами:



Меандр той же частоты:



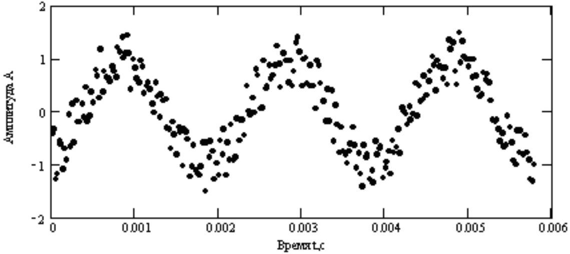
Корреляция исходного сигнала и меандра:



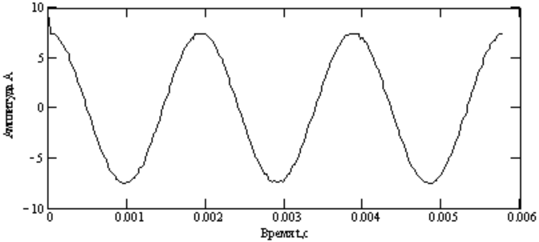
Корреляции

2 Свертка (convolution) и корреляция (correlation)

Исходный сигнал с шумами:

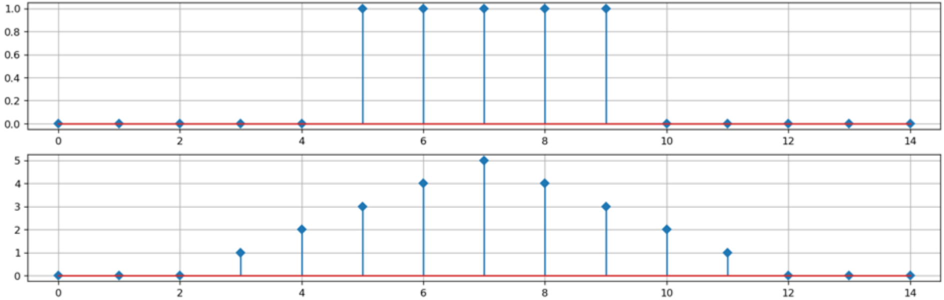


Автокорреляционная функция исходного сигнала:



АКФ прямоугольного импульса

2 Свертка (convolution) и корреляция (correlation)



Свертка (convolution)

$$y[n] = x[n] \cdot h[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k]$$

где $h[k]$ - ядро свертки (kernel) или импульсная характеристика линейной системы.

Корреляция (correlation)

$$y[n] = x[n] \cdot g[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n+k] \cdot g[k]$$

где $g[k]$ - искомый сигнал.

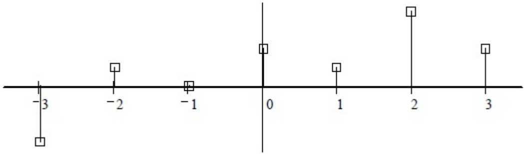
Эта формула совпадает с формулой свертки, если положить ядро свертки $h[k] = g[-k]$. Корреляцию можно вычислять как свертку, положив в качестве ядра свертки искомый сигнал, развернутый относительно нулевой точки.

Table of Contents

3 Импульсная характеристика. Дельта-функция

Импульсная характеристика

Мы рассматриваем *дискретные линейные системы*, т.е. системы, работающие с *дискретными сигналами*.
На вход такой системы подается последовательность чисел $x[n]$ (*дискретный сигнал*), и на выходе получается последовательность чисел $y[n]$.

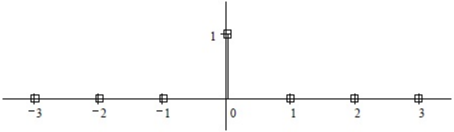


По оси абсцисс отложены дискретные моменты времени.
По оси ординат - амплитуды сигнала в эти моменты времени.

Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию

Цифровая дельта-функция (функция Кронекера) - это сигнал вида

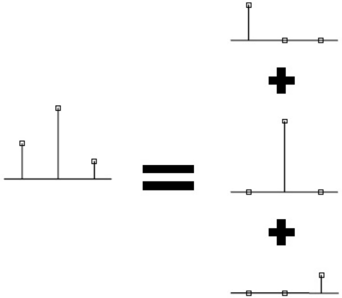
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Цифровой единичный импульс

Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию

Любой дискретный сигнал можно разложить на сумму функций, сдвинутых во времени. Например, бесконечный сигнал $x[n]$ можно представить в виде



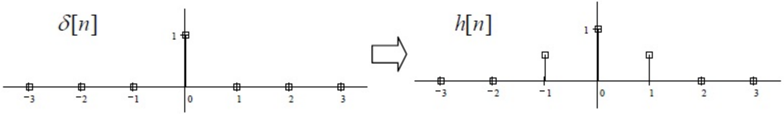
$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i] \cdot \delta[n-1].$$

Здесь дельта-функция - "базисная функция", а $x[i]$ - это их коэффициенты в линейной комбинации.
Представление сигнала в виде линейной комбинации сдвинутых во времени дельта-функций.

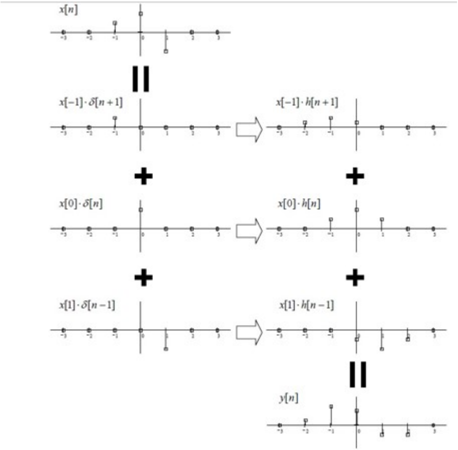
Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию

Исследуем отклил (выходной сигнал) линейной системы на цифровую дельта-функцию. Для этого подадим дельта-функцию в систему и измерим выходной сигнал.

Пусть выходной сигнал равен $h[n]$, т.е. $\delta[n] \to h[n]$



Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию



Импульсная характеристика. Реакция системы на цифровую дельта-функцию

Зная $h[n]$ (отклик системы на дельта-функцию), можно вычислить отклик системы на любой входной сигнал.
Действительно, т.к. любой входной сигнал является линейной комбинацией сдвинутых во времени дельта-функций, входной сигнал будет той же самой линейной комбинацией сдвинутых во времени функций $h[n]$.
Результирующая формула для вычисления выходного сигнала $y[n]$ по входному сигналу такова:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k].$$

Сигнал $h[n]$ называется **импульсной характеристикой** (impulse response) системы, т.к. он является откликом системы на единичный импульс (дельта-функцию).

Table of Contents

4 Цифровая фильтрация

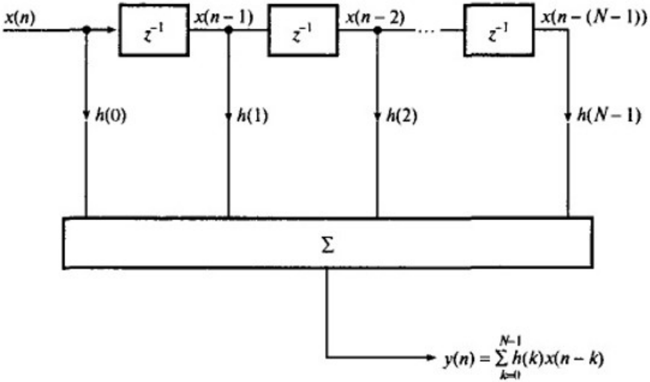
Цифровая фильтрация

Линейная цифровая фильтрация определяется как:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

где $h(k), k = \overline{0, N-1}$ - коэффициенты фильтра, $x(k)$, $y(k)$ - вход и выход фильтра. Фильтрация - это свертка сигнала с импульсной характеристикой фильтра во временных координатах.

В таком виде данный фильтр известен как **трансверсальный** фильтр
z^{-1} - задержка на один интервал дискретизации.



Цифровая фильтрация. Пример

Цифровая низкочастотная фильтрация биомедицинского сигнала с целью устранения шума.

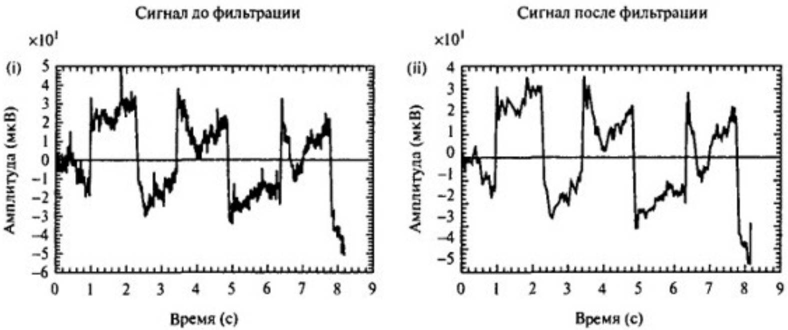


Table of Contents

5 Дискретные преобразования

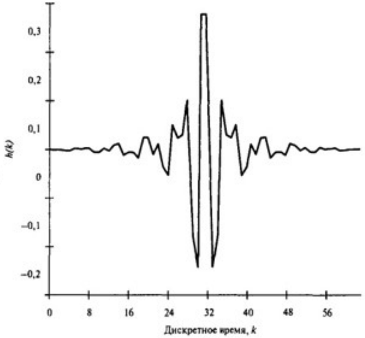
Дискретные преобразования

Дискретные преобразования позволяют описывать сигналы с дискретным временем в частотных координатах или переходить от описания во временной области к описанию в частотной области.
Для получения спектра сигнал раскладывается на частотные составляющие с помощью дискретного преобразования. Это часто используется при реализации операций фильтрации, свертки и корреляции.
Существует много дискретных преобразований, из которых самым распространенным является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое определяется следующим образом:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{kn}, \text{ где } W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

Дискретные преобразования. Пример

Описание цифрового фильтра во временных и частотных координатах (импульсная характеристика и спектр фильтра). Спектр фильтра был получен с помощью ДПФ.



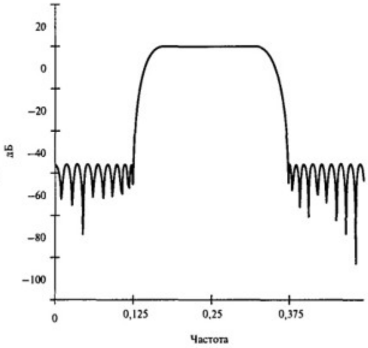


Table of Contents

6 Модуляция

Модуляция

- Модуляция - это процесс изменения одного или нескольких параметров сигнала
- модулируемый сигнал называется ”**несущим**” (на частоте этого сигнала передается модулируемое сообщение, как правило, *высокочастотный*)
- информационный сигнал называется **модулирующим** (как правило, *низкочастотный*).
- в процессе модуляции несущего сигнала спектр модулирующего сигнала переносится в область несущей частоты
- гармонические сигналы можно модулировать во времени по амплитуде, частоте и фазе
- обычно сигналы модулируются таким образом, чтобы их частотных характеристики совпадали с характеристиками средств передачи и/или хранения, для минимизации искажения сигнала, эффективного использования доступной ширины полосы и придания сигналам некоторых желаемых свойств
- область применения: связь и цифровые аудиосистемы

Процесс модуляции часто приводит к изменению свойств высокочастотного сигнала, известного как несущая частота, в соответствии с сигналом, который нужно передать или сохранить, называемым модулирующим сигналом.

Модуляция - это процесс преобразования одного или нескольких информационных параметров несущего сигнала в соответствии с мгновенными значениями информационного сигнала.

В результате модуляции сигналы переносятся в область более высоких частот.

Модуляция

Использование модуляции позволяет:

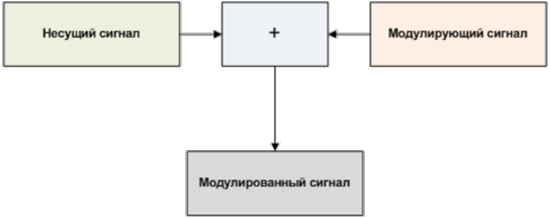
- согласовать параметры сигнала с параметрами линии;
- повысить помехоустойчивость сигналов;
- увеличить дальность передачи сигналов;
- организовать многоканальные системы передачи.

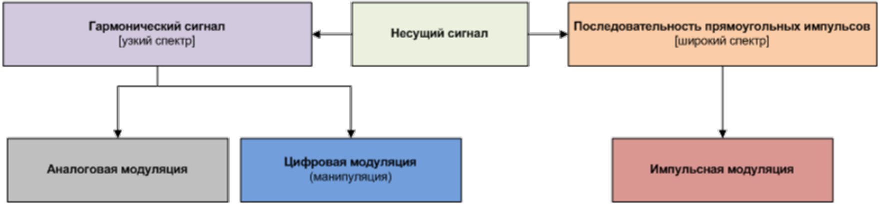
При модуляции на вход модулятора подаются сигналы:

- $u(t)$ - *модулирующий*, данный сигнал является информационным и низкочастотным (его частоту обозначают W или F);
- $S(t)$ - *модулируемый (несущий)*, данный сигнал является неинформационным и высокочастотным (его частота обозначается w_0 или f_0);
- $S_{res}(t)$ - *модулированный сигнал*, данный сигнал является информационным и высокочастотным.

Модуляция

6 Модуляция





Модуляция

В качестве несущего сигнала может использоваться:

- гармоническое колебание, при этом модуляция называется *аналоговой* или *непрерывной*;
- периодическая последовательность импульсов, при этом модуляция называется *импульсной*;
- постоянный ток, при этом модуляция называется *шумоподобной*.

Виды аналоговой модуляции

- *амплитудная модуляция (АМ)*, происходит изменение амплитуды несущего колебания;
- *частотная модуляция (ЧМ)*, происходит изменение частоты несущего колебания;
- *фазовая модуляция (ФМ)*, происходит изменение фазы несущего колебания.

Виды импульсной модуляции

- *амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)*, происходит изменение амплитуды импульсов несущего сигнала;
- *частотно-импульсная модуляция (ЧИМ)*, происходит изменение частоты следования импульсов несущего сигнала;
- *фазо-импульсная модуляция (ФИМ)*, происходит изменение фазы импульсов несущего сигнала;
- *широтно-импульсная модуляция (ШИМ)*, происходит изменение длительности импульсов несущего сигнала.

Цифровая обработка сигналов и изображений

Thank you for listening!

Any questions?