4. Обобщенные ряды Фурье

4.1. Ортогональные системы функций. Тригонометрический ряд Фурье и его коэффициенты.

Будем рассматривать пространство $L_2[a;b]$ функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a;b]$, для которых выполнено условие $\int\limits_a^b f^2(x)dx < +\infty$, со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ и нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Определение 4.1. Множество функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

называется основной тригонометрической системой функций.

Теорема 4.1. Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на отрезке $[-\pi;\pi]$, при этом $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, для любого $n \in N$.

Замечания.

1. Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке $[a;a+2\pi]$, $a \in R$, длиной 2π.

2. Тригонометрическая система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\pi}, \dots$ является ортонормированной на отрезке $[-\pi;\pi]$, и, значит, на любом отрезке $[a;a+2\pi]$, $a \in R$.

3. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots$$

является ортогональной на любом отрезке $[-l;l]$, и, значит, на любом отрезке $[a;a+2l]$, $a \in R$, длиной $2l$.

4. Тригонометрическая система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

является ортонормированной на любом отрезке $[a; a+2l]$, $a \in R$.

Определение 4.2. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{4.1}$$

где $a_0, a_n, b_n \in R$, называется **тригонометрическим рядом**, а числа a_0, a_n, b_n – его коэффициентами.

Теорема 4.2. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{4.2}$$

и ряд, стоящий в правой части равенства (4.2), сходится равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \; n \in N. \tag{4.3}$$

Определение 4.3. Тригонометрический ряд (4.1), коэффициенты которого определяются по формулам (4.3), называется **тригонометрическим рядом Фурье**, а числа a_0, a_n, b_n – **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$ и записывается как

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{4.4}$$

Если функция $f(x)$ – $2\pi-$периодическая функция, заданная на отрезке $[a; a+2\pi]$, $a \in R$, длиной 2π, то коэффициенты a_0, a_n, b_n могут быть вычислены по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx, \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nxdx, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nxdx, \; n \in N. \tag{4.5}$$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi; \pi]$. Для того, чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье, нужно периодически продолжить ее с отрезка $[-\pi; \pi]$ на всю числовую ось, то есть получить $2\pi-$периодическую функцию $f^*(x)$ такую, что $f^*(x) = f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$, и $f^*(x+2\pi) = f^*(x)$, $x \in R$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ совпадает с рядом Фурье функции $f^*(x)$ и имеет вид (4.4) с коэффициентами (4.3).

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;a+2\pi]$, $a \in R$, то чтобы получить разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье, периодически продолжим $f(x)$ с отрезка $[a;a+2\pi]$ на всю числовую ось. Полученная функция $f^*(x)$ является $2\pi-$периодической функцией: $f^*(x) = f(x)$, $[a;a+2\pi]$, и $f^*(x+2\pi) = f^*(x)$, $x \in R$. Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ совпадает с рядом Фурье функции $f^*(x)$ и имеет вид (4.4) с коэффициентами (4.5.).

Теорема 4.3 (Дирихле). Пусть $2\pi-$периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ является кусочно–непрерывной на $[-\pi;\pi]$, то есть функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке;

2) $f(x)$ является кусочно–монотонной на $[-\pi;\pi]$, то есть функция является монотонной на всем отрезке или этот отрезок можно разбить на конечное число таких отрезков, на каждом из которых функция $f(x)$ монотонна.

Тогда ряд Фурье (4.4) сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$ к функции $S(x)$ следующим образом: $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$; $S(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, если x_0-точка разрыва первого рода; $S(\pi) = S(-\pi) = \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

4.2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Пусть $f(x)$ – четная $2\pi-$периодическая функция. Тогда функция $f(x)\cos nx$ является четной, а $f(x)\sin nx$ – нечетной функций при любом $n\in N$. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0,\ n\in N.$$

Поэтому ряд Фурье четной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{4.6}$$

в котором коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ b_n = 0,\ n\in N. \tag{4.7}$$

Пусть теперь $f(x)$ – нечетная $2\pi-$периодическая функция. Тогда функция $f(x)\cos nx$ является нечетной, а $f(x)\sin nx$ – четной функций при любом $n\in N$. Отсюда,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

$$n\in N.$$

Следовательно, ряд Фурье нечетной функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx, \tag{4.8}$$

при этом коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по формулам

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n\in N. \tag{4.9}$$

4.3. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на промежутке $(0;\pi)$.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(0;\pi)$. Для того, чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0;\pi)$, нужно доопределить $f(x)$ на интервале $(-\pi;0)$. Полученная при этом функция будет задана на интервале $(-\pi;\pi)$, которую можно разложить в ряд Фурье, при этом ряды Фурье полученной и данной функций будут совпадать.

Доопределим функцию $f(x)$ четным образом с интервала $(0;\pi)$ на интервал $(-\pi;0)$. Получим четную функцию $f^*(x)$ такую, что $f^*(x)=f(x), x\in(0;\pi)$, и $f^*(x)=f(-x), x\in(-\pi;0)$.

Тогда ряды Фурье функций $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают и ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид (4.6) с коэффициентами (4.7).

Продолжим теперь функцию $f(x)$ нечетным образом с интервала $(0;\pi)$ на интервал $(-\pi;0)$. Получим нечетную функцию $f^*(x)$ такую, что $f^*(x)=f(x), x\in(0;\pi)$, и $f^*(x)=-f(-x), x\in(-\pi;0)$.

Следовательно, ряды Фурье функций $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают и ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид (4.8) с коэффициентами (4.9).

4.4. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом.

Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, является периодической с периодом $T=2l, l\neq\pi$, то есть $f(x+2l)=f(x), x\in R.$

Введем замену переменной $u=\dfrac{\pi x}{l}$. В результате получим функцию $f\left(\dfrac{lu}{\pi}\right)=\varphi(u)$, которая является $2\pi-$периодической, поскольку

$$\varphi(u+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(u+2\pi)\right)=f\left(\frac{lu}{\pi}+2l\right)=f\left(\frac{lu}{\pi}\right)=\varphi(u).$$

Тогда функцию $\varphi(u)$ можно разложить в ряд Фурье следующим образом:

$$\varphi(u)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nu+b_n\sin nu),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du\,,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\cos nudu\,,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin nudu\,,\; n \in N\,.$$

Возвращаясь к переменной x, полагая $u = \frac{\pi x}{l}$, получим ряд Фурье $2l$ – периодической функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{4.10}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du = \left|\begin{array}{l} u = \frac{\pi x}{l} \\ u = \frac{\pi}{l}dx \\ u_1 = -\pi \Rightarrow x_1 = -l \\ u_2 = \pi \Rightarrow x_2 = l \end{array}\right| = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\cos nudu = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin nudu = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\; n \in N.$$

Если $2l$ – периодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; a+2l]$, $a \in R$, то она разлагается в ряд Фурье (4.10), коэффициенты которого вычисляются по формулам $a_0 = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)dx,$ $a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$ $b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n \in N.$

Если $2l$ – периодическая функция $f(x)$ является четной и задана на отрезке $[-l; l]$, то она разлагается в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

при этом коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ \ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=0,\ n\in N.$$

Если $2l-$периодическая функция $f(x)$ является нечетной и задана на отрезке $[-l;l]$, то она разлагается в ряд Фурье

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

при этом коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0=0,\ \ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n\in N.$$

4.5. Комплексная форма ряда Фурье.

Пусть $2\pi-$периодическая функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{\mathrm{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Воспользовавшись формулами Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$, найдем $\cos nx,\ \sin nx$:

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\ \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=-i\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}.$$

Подставим в ряд Фурье вместо $\cos nx,\ \sin nx$ полученные значения:

$$f(x)\sim\frac{\mathrm{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right)=\frac{\mathrm{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right).$$

Введем обозначения

$$\frac{\mathrm{a}_0}{2}=c_0,\ \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n,\ \frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n},\ n\in N. \tag{4.11}$$

Тогда

$$f(x)\sim \mathrm{c}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right)=\mathrm{c}_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_ne^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},$$

то есть

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}. \tag{4.12}$$

Ряд (4.12) называется комплексной формой ряда Фурье функции $f(x)$ с комплексными коэффициентами Фурье c_n, $n \in Z$, определяемыми формулами (4.11).

Найдем явное выражение для коэффициентов Фурье c_n, $n \in Z$, получим

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n \in N;$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx,\ n \in N;$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{i0x}dx.$$

Следовательно, комплексные коэффициенты Фурье c_n, $n \in Z$, вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, n \in Z. \qquad (4.13)$$

Таким образом, **комплексная форма ряда Фурье** $2\pi -$периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right). \qquad (4.14)$$

Зная комплексную форму ряда Фурье функции $f(x)$, можно найти ее действительный ряд Фурье, воспользовавшись формулами

$$\mathrm{a}_0 = 2c_0,\ a_n = \mathrm{Re}(2c_n),\ b_n = -\mathrm{Im}(2c_n),\ n \in N.$$

Комплексная форма ряда Фурье $2l -$периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}},$$

где коэффициенты вычисляются по формулам $c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx, n \in Z$, то

есть $f(x) \sim \frac{1}{2l}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dt\right)$.

4.6. Интеграл Фурье. Косинус– и синус– преобразования Фурье.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси.

Определение 4.4. Интегралом Фурье функции $f(x)$ называется интеграл вида

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\left(a(z)\cos zx + b(z)\sin zx\right)dz, \tag{4.15}$$

где $a(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos zt dt$, $b(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin zt dt$.

Подставим значения $a(z)$, $b(z)$ в интеграл (4.15), получим

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\left(a(z)\cos zx + b(z)\sin zx\right)dz = \int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos zt dt \cos zx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin zt dt \sin zx\right)dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos zt \cos zx + \sin zt \sin zx\right)dt\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z\left(x-t\right)dt\right).$$

Пусть $f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty}\left(a(z)\cos zx + b(z)\sin zx\right)dz$.

Если $f(x)$ – четная функция, то $a(z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos zt dt$, $b(z) = 0$, и

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} a(z)\cos zx dz = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos zx dz \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos zt dt.$$

Обозначим $F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos zt dt$, тогда $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} F_c(z)\cos zx dz$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $a(z)=0$, $b(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt dt$, и

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty} b(z)\sin zx dz=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin zx dz\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt dt.$$

Обозначим $F_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt dt$, тогда $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_s(z)\sin zx dz$.

Определение 4.5. Функции $F_c(z)$ и $F_s(z)$ называются **косинус– и синус– преобразования Фурье**.

4.7. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на всей числовой оси, имеет односторонние производные. Тогда для любого $x\in R$ справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt\right), \tag{4.16}$$

а так как подынтегральная функция $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt$ является четной относительно переменной z, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt\right). \tag{4.17}$$

Из неравенства $\left|f(t)\sin z(x-t)\right|\le\left|f(t)\right|, t\in R,$ существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt$, который в силу признака Вейерштрасса сходится равномерно на всей числовой оси переменной z и, следовательно, является непрерывной функцией от z. Поэтому для любого числа η существует интеграл $\int\limits_{-\eta}^{\eta} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right)$, который в силу нечетности подынтегральной функции равен нулю, то есть $\int\limits_{-\eta}^{\eta} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right)$, значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right)=0. \tag{4.18}$$

Умножим обе части равенства (4.18) на $\frac{i}{2\pi}$ и сложим с равенством (4.17), получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(x-t)dt\right)+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(x-t)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos z(x-t)+i\sin z(x-t))dt\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iz(x-t)}dt\right),$$

то есть

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}dz\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt\right). \tag{4.19}$$

Определение 4.6. Формула (4.19) называется **комплексной формой интеграла Фурье**.

Обозначим $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-izt}dt$, тогда $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(z)e^{izx}dz$.

Определение 4.7. Функция $F(z)$ называется **прямым преобразованием Фурье** функции $f(x)$, а функция $f(x)$ – **обратным преобразованием Фурье.**

4.8. Обобщенные ряды Фурье.

Пусть $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ – ортогональная система функций из $L_2[a;b]$ и функция $f(x)$ представима на отрезке $[a;b]$ в виде ряда

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x), \tag{4.20}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ – постоянные, называемые коэффициентами ряда. Предположим, что ряд правой части равенства (4.20) сходится равномерно к $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Умножим обе части равенства (4.20) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем результат почленно на отрезке $[a;b]$, получим

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \cdot \varphi_n(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx .$$

Отсюда

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\|\varphi_n\|^2}, \; n = 0,1,\ldots. \tag{4.21}$$

Определение 4.8. Ряд (4.20) называется **обобщенным рядом Фурье** функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, а числа c_n, вычисляемые по формулам (4.21), – **коэффициентами Фурье**.

4.9. Многочлены Лежандра.

Определение 4.9. Многочленом Лежандра называется многочлен вида

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Теорема 4.4. Многочлены Лежандра $\{P_n(x)\}$ образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1;1]$, при этом $\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$**.**

Непосредственным вычислением можно найти первые шесть многочленов Лежандра: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$, $P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$, $P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$.

Тогда обобщенный ряд Фурье для функции $f(x) \in L_2[-l;l]$ по многочленам Лежандра будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots,$$

где коэффициенты $c_k = \frac{\left(f(x), P_k(x)\right)}{\left(P_k(x), P_k(x)\right)} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx$.

Пример 4.1.

Разложите функцию $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$, $[-1;1]$, в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

Δ Поскольку $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) Q_m(x) dx = 0$ при $m < n$, где $P_n(x) -$ многочлен Лежандра, $Q_m(x) -$любой многочлен степени m, и в силу формулы (4.21), будем искать коэффициенты c_k, $k = 0,1,2,3$.

Получим

$$c_0 = \frac{\left(f(x), P_0(x)\right)}{\left(P_0(x), P_0(x)\right)} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_0(x) dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3 + x^2 - x + 3\right)\cdot 1 dx =$$

$$= \frac{2}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(x^2 + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}.$$

$$c_1 = \frac{\left(f(x), P_1(x)\right)}{\left(P_1(x), P_1(x)\right)} = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_1(x) dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3 + x^2 - x + 3\right)\cdot x dx =$$

$$= 3\int\limits_{0}^{1}\left(-x^4 - x^2\right)dx = 3\left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 3\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{5}.$$

$$c_2 = \frac{\left(f(x), P_2(x)\right)}{\left(P_2(x), P_2(x)\right)} = \frac{5}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_2(x) dx = \frac{5}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3 + x^2 - x + 3\right)\cdot \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(3x^4 + 8x^2 - 3\right)dx = \frac{5}{2}\left(3\frac{x^5}{5} + 8\frac{x^3}{3} - 3x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{8}{3} - 3\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{4}{15} = \frac{2}{3}.$$

$$c_3 = \frac{\left(f(x), P_3(x)\right)}{\left(P_3(x), P_3(x)\right)} = \frac{7}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_7(x) dx = \frac{7}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^3 + x^2 - x + 3\right)\cdot \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)dx =$$

$$= \frac{7}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(-5x^6 - 2x^4 + 3x^2\right)dx = \frac{7}{2}\cdot\left(-5\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{7} - \frac{2}{5} + 1\right) = -\frac{2}{5}.$$

Окончательно получим

$$-x^3 + x^2 - x + 3 = \frac{10}{3}P_0(x) - \frac{8}{5}P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x) - \frac{2}{5}P_3(x).$$