9. Элементы вариационного исчисления

9.1. Исторический экскурс. Задача о брахистохроне

Вариационное исчисление зародилось в 1696 г., когда Иоганн Бернулли поставил задачу об отыскании кривой «наибыстрейшего спуска» т.н. «брахистохроне».

Эта задача формулируется так:
из точки A в точку B (рис. 9.1) под действием силы тяжести без начальной скорости движется точка $M(x,y(x))$.
Какой должна быть кривая AB: $y = y^*(x), x \in [a,b]$, чтобы время спуска по ней было минимальным?

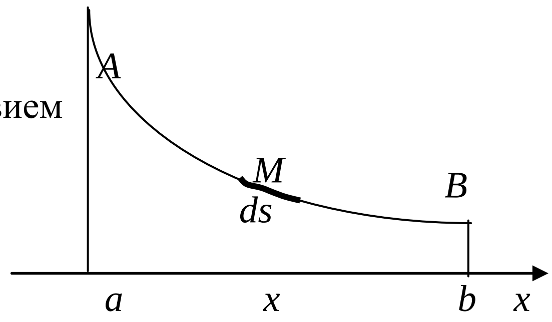

Рис. 9.1

Решение:

По закону сохранения энергии имеем $\frac{mv^2}{2} = mgy$, откуда $v = \sqrt{2gy}$.

Тогда время пробега отрезка ds кривой AB находится так:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + d^2 y(x)}}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx,$$

а время спуска вдоль всей кривой AB определится интегралом

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx.$$

Решение задачи о брахистохроне было дано целым рядом математиков И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном, Г. Лопиталем.

Таким образом, наряду с задачами, в которых необходимо найти максимальные и минимальные значения некоторой функции, в прикладных задачах физики, механики и других наук возникает необходимость найти максимальные или минимальные значения величин особого рода, называемых функционалами. Например, функционалом является длина l дуги плоской или пространственной кривой, соединяющей две заданные точки.

Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются **вариационными задачами**. К концу 20 в. вариационное исчисление переросло в математическую теорию оптимального управления, основателями которой явились Л.С. Понтрягин (Россия) и Р.Э. Беллман (США).

9.2. Основные понятия вариационного исчисления

Определение 9.1. Пусть дан некоторый класс M функций $y(x)$. Если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому закону ставится в соответствие определенное число J, то говорят, что в классе M определен **функционал** J: $J = J[y(x)]$.

Определение 9.2. Совокупность функций, на которых определен функционал, называется **классом допустимых функций** или **областью задания функционала**.

Таким образом, понятие функционала является обобщением понятия функции: аргумент функции – число, аргумент функционала – функция.

Наиболее часто рассматриваются следующие классы функций:

1). $M \subset C^0[a;b]$ – пространство функций непрерывных на отрезке $[a;b]$;

2). $M \subset C^1[a;b]$ – пространство функций непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a;b]$;

3). $M \subset C^2[a;b]$ – пространство функций дважды непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a;b]$;

Пример 9.1. Пусть $M = C^0[a;b]$ и функционал $J = J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx$, который каждой функции ставит в соответствие число – значение определенного интеграла от этой функции на $[0;1]$. Подставляя вместо $y(x)$ конкретные функции, мы будем получать соответствующие значения $J[y(x)]$.

Если $y(x) = 1$, то $J[1] = \int_0^1 dx = 1$.

Если $y(x) = e^x$, то $J[e^x] = \int_0^1 e^x dx = e - 1$.

Определение 9.3. Приращение аргумента $y(x)$ в функционале $J[y(x)]$ называется **вариацией функции** $y(x)$ и обозначается δy: $\delta y = y(x) - y_1(x)$, где $y(x), y_1(x) \in M$.

Соответствующее приращение функционала определяется как

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$$

или

$$\Delta J = L[y(x);\delta y] + \beta[y(x);\delta y]\|\delta y\|,$$

где $L[y(x);\delta y]$ является линейным относительно δy функционалом.

Если $\beta[y(x);\delta y] \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, то главная часть приращения функционала $L[y(x);\delta y]$ называется **вариацией функционала** $J[y(x)]$ и обозначается δJ.

Пример 9.2. Вычислите приращение функционала $J[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x) y^{/}(x) dx$, определенного в пространстве $C^1[a;b]$, если $y(x) = x,\ y_1(x) = x^2$.

Решение

По определению

$$\Delta J = J[y_1(x)] - J[y(x)] = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \int\limits_0^1 x \cdot 1 dx = \int\limits_0^1 (2x^3 - x) dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

Ответ: 0.

9.3. Простейшая задача вариационного исчисления

Определение 9.4. Будем говорить, что функционал $J[y(x)]$ **достигает** на кривой $y_0(x)$ своего **максимума**, если $J[y(x)] < J[y_0(x)]$, $y(x), y_0(x) \in M$. Будем говорить, что функционал $J[y(x)]$ **достигает** на кривой $y_0(x)$ своего **минимума**, если $J[y(x)] > J[y_0(x)]$, $y(x), y_0(x) \in M$. Кривая $y_0(x)$ называется **экстремалью** функционала $J[y(x)]$.

Постановка задачи. Рассмотрим функционал

$$J[y(x)] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \tag{9.1}$$

сопоставляющий каждой кривой AB: $y = y(x), x \in [a,b]$, некоторое число $J[y(x)]$.

Отметим, что функция $F(x,y,y')$ предполагается гладкой, т.е. ее частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам x,y,y' непрерывны в некоторой области $D:\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ -\infty<y<+\infty \\ -\infty<y'<+\infty \end{matrix}\right\}$.

Необходимо найти функцию $y^*(x)\in C^2[a;b]$, удовлетворяющую краевым условиям

$$y(a)=y_A,\ \ y(b)=y_B, \tag{9.2}$$

на которой функционал (9.1) достигает экстремума (максимума или минимума).

Для решения этой задачи используем метод, предложенный Лагранжем.

Пусть $y^*(x)$ является экстремалью для функционала (9.1), а $\delta y(x)$ – зафиксированная произвольная вариация, т.е. непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая нулевым краевым условиям

$$\delta y(a)=\delta y(b)=0. \tag{9.3}$$

Получим множество функций $y(x)$, отличных от функции $y^*(x)$, прибавляя вариацию $\delta y(x)$ к функции $y^*(x)$:

$$y(x)=y^*(x)+t\cdot\delta y(x), \tag{9.4}$$

где t параметр: $|t|<1$.

Геометрически множество функций $y(x)$ можно представить так:

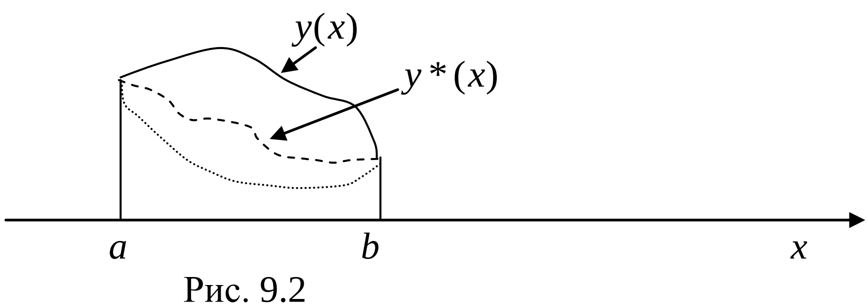

Рис. 9.2

После подстановки в функционал (9.1) выражения (9.4) для $y(x)$ получим функцию $\varphi(t)$:

$$J[y(x)]=J[y^*(x)+t\cdot\delta y(x)]=\varphi(t),$$

которая достигает экстремума при $t=0$ (т.к. $y^*(x)$ является экстремалью функционала), а значит $\varphi'(0)=0$.

Найдем $\varphi'(0)$:

$$\varphi'(t)\Big|_{t=0}=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}F(x,\underbrace{y^*+t\cdot\delta y}_{y},\underbrace{y^{*\prime}+t\cdot\delta y'}_{y'})dx\Bigg|_{t=0}=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')\right)dx\Bigg|_{t=0}=0 \qquad (9.5)$$

В полученном выражении (9.5) преобразуем второе слагаемое:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям}\\ u=\dfrac{\partial F}{\partial y'},\ du=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)dx\\ dv=\delta y'(x)dx,\ v=\delta y(x)\end{array}\right|=\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\delta y(x)\Bigg|_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx\overset{(9.3)}{=}-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx.$$

Здесь учтено условие (9.3), что $\delta y(a)=\delta y(b)=0$.

Формулу (9.5) можно переписать следующим образом:

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\delta y(x)dx=0. \qquad (9.6)$$

Заметим, что равенство (9.6) должно выполняться для *<u>любой</u>* функции $\delta y(x)$.

И возникает вопрос: каким же тогда должен быть множитель $\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)$?

Ответ на этот вопрос дает основная лемма вариационного исчисления.

Лемма 9.1. (основная лемма вариационного исчисления) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0,\,x_1]$ и для любой непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0$ верно

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot\varphi(x)dx=0,$$

то функция $f(x)$ должна быть тождественно равна нулю: $f(x)\equiv 0$ для $\forall x\in[x_0,x_1]$.

▲ Докажем методом от противного.

Пусть $f(x)\neq 0$, не ограничивая общности, будем считать, что $f(x)>0$ (если $f(x)<0$, то рассмотрим $-f(x)$). Так как $f(x)$ непрерывна, то существует окрестность $(a;b)$ точки x_0 такая, что $f(x)>0$.

Положим $\varphi(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & x\in(a;b)\\ 0, & x\notin(a;b)\end{cases}$

Функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и $\varphi(x_0)=\varphi(x_1)=0$, но

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)(x-a)^2(x-b)^2dx>0.$$

То есть получено противоречие, а значит $f(x)\equiv 0$. Δ

Возвращаясь к выражению (9.6), можно сделать вывод о том, что экстремальная кривая $y=y^*(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0}, \qquad (9.7)$$

которое называется **уравнением Эйлера**.

Таким образом, решение простейшей задачи вариационного исчисления свелось к решению уравнения Эйлера (9.7) при краевых условиях (9.2). Отметим, что иногда уравнение (9.7) называется *уравнением Эйлера-Лагранжа*.

Решения уравнения Эйлера называются **допустимыми экстремалями** для функционала $J[y(x)]$.

Замечание. Если краевая задача для уравнения Эйлера и разрешима, то это еще не означает существование экстремумов у функционала, так как экстремаль – это кривая, на которой может достигаться экстремум функционала. Как и при исследовании экстремумов функций, требуется дополнительный анализ решения, чтобы установить, реализуется ли в действительности экстремум и какого характера (максимум или минимум). Для этого надо использовать достаточные условия экстремума.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 9.3. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_0^1(y'^2-12xy)dx$ при краевых условиях $y(0)=0, y(1)=1$.

Решение

Так как $F(x,y,y')=y'^2-12xy$, то для записи уравнения Эйлера найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -12x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''.$$

А значит уравнение Эйлера (9.7) имеет вид: $-12x - 2y'' = 0$ или $y'' = -6x$.

Дважды интегрируя его, находим общее решение: $y(x) = -x^3 + C_1 x + C_2$.

Найдем частное решение с учетом краевых условий: $\begin{cases} y(0) = C_2 = 0, \\ y(1) = -1 + C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$

То есть $C_2 = 0$, а $C_1 = 2$. Следовательно, $y(x) = -x^3 + 2x$ – искомая экстремаль.

Ответ: $y(x) = -x^3 + 2x$.

Частные случаи уравнения Эйлера

I случай. Функция $F(x, y, y')$ не зависит от y', то есть имеет вид $F(x, y)$. Тогда уравнение Эйлера выглядит как

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

которое не является дифференциальным. Оно определяет одну или конечное число функций, которые могут и не удовлетворять граничным условиям. Лишь в исключительных случаях, когда полученная функция проходит через граничные точки $(a; y_A)$и $(b; y_B)$, существует функция, на которой может достигаться экстремум. Для произвольных краевых условий (9.2) непрерывного решения, вообще говоря, нет.

Пример 9.4. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)] = \int\limits_1^2 (2x - y^2)dx$ при краевых условиях $y(1) = 1, y(2) = 3$.

Решение

Так как $F(x, y, y') = 2x - y^2$, то для записи уравнения Эйлера найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

А значит уравнение Эйлера (9.7) имеет вид: $-2y = 0$ или $y = 0$.

Полученное уравнение задает единственную экстремаль рассматриваемого функционала, которая не удовлетворяет данным краевым условиям. Следовательно, у исходной задачи нет решения.

Ответ: нет решения.

II случай. Функция $F(x, y, y')$ не зависит ни от x, ни от y, то есть имеет вид $F(y')$. Тогда уравнение Эйлера имеет вид

$$y''=0.$$

Дважды интегрируя его, находим общее решение: $y(x)=C_1x+C_2$, а затем и единственное решение при краевых условиях (9.2).

III случай. Функция $F(x, y, y')$ не зависит от y, то есть имеет вид $F(x, y')$. Тогда уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,$$

которое является дифференциальным уравнением первого порядка, решив которое мы найдем экстремали функционала.

Отметим, что промежуточным интегралом данного уравнения является

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=C. \tag{9.8}$$

Пример 9.5. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_1^2 y'(1+x^2y')dx$ при краевых условиях $y(1)=3, y(2)=5$.

Решение

Так как $F(x, y, y')=y'(1+x^2y')$, то для записи промежуточного интеграла (9.8) найдем $\frac{\partial F}{\partial y'}=1+2x^2y'$.

А значит интеграл (9.8) имеет вид $1+2x^2y'=C$.

Тогда $y'=\frac{C-1}{2x^2}$, а значит $y(x)=\frac{C_1}{x}+C_2$.

Далее найдем C_1 и C_2 потребовав, чтобы выполнялись краевые условия:

$$\begin{cases} y(1)=C_1+C_2=3, \\ y(2)=\frac{C_1}{2}+C_2=5. \end{cases}$$

Получим $C_1=-4$, $C_2=7$. Следовательно, $y(x)=7-\frac{4}{x}$ – искомая экстремаль.

Ответ: $y(x)=7-\dfrac{4}{x}$.

IV случай. Функция $F(x,y,y')$ не зависит от x, то есть имеет вид $F(y,y')$. Распишем подробнее уравнение Эйлера (9.7):

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}y'-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''=0. \tag{9.9}$$

Покажем, что уравнение (9.9) имеет первый интеграл следующего вида

$$F(y,y')-y'\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}=C_1. \tag{9.10}$$

Действительно, продифференцировав (9.10) по x, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''-y''\frac{\partial F}{\partial y'}-y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''\right)=0$$

или

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}y'-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''\right)y'=0$$

Сократив последнее уравнение на y', получим уравнение (9.9).

Пример 9.6. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+y^2}{y'}dx$ при краевых условиях $y(0)=0, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

Решение

Так как $F(x,y,y')=\dfrac{1+y^2}{y'}$, то первый интеграл согласно формуле (9.10) имеет вид

$$\frac{1+y^2}{y'}+y'\cdot\frac{1+y^2}{(y')^2}=C_1$$

или $\dfrac{C_1}{2}\cdot y'=1+y^2 \quad\Leftrightarrow\quad C_2\cdot y'=1+y^2$.

Решив стандартным образом данное уравнение получим

$C_2\cdot\dfrac{dy}{1+y^2}=dx \quad\Rightarrow\quad C_2\cdot\mathrm{arctg}y=x+C \quad\Rightarrow\quad y(x)=\mathrm{tg}\dfrac{x+C}{C_2}$.

Далее найдем C и C_2 из равенства $x + C = C_2 \cdot \operatorname{arctg} y$:

$$\begin{cases} y(0) = 0: \quad C = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1: \quad \dfrac{\pi}{4} = C_2 \cdot \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow C_2 = 1 \end{cases}$$

Следовательно, $y(x) = \operatorname{tg} x$ – искомая экстремаль.

Ответ: $y(x) = \operatorname{tg} x$.

Вернемся теперь к задаче Бернулли о брахистохроне.

Дан функционал

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{a=0}^{b=1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

и краевые условия $y(a) = y_A, y(b) = y_B$ и необходимо найти его экстремаль.

▲ Приступая к обсуждению поиска решения этой задачи, замечаем, что подынтегральная функция здесь не зависит от *x*, т.е. мы находимся в условиях IV случая. Поэтому должны воспользоваться формулой (9.10). Найдем

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}},$$

тогда $F - y' \dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \dfrac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$.

Упрощая левую часть последнего выражения, получаем $\dfrac{1}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + y'^2}} = C_1$

или

$$y(1 + y'^2) = \tilde{C}_1. \tag{9.11}$$

Решим уравнение (9.11), введя замену

$$y' = \operatorname{ctg} t. \tag{9.12}$$

Тогда из уравнения (9.11)

$$y = \frac{\tilde{C}_1}{1 + y'^2} = \frac{\tilde{C}_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \tilde{C}_1 \sin^2 t$$

или

$$y=\frac{\tilde{C}_1}{2}\left(1-\cos 2t\right)$$

Мы нашли y как функцию от t. Теперь нам надо отыскать x как функцию от параметра t. Из (9.12) следует, что

$$dx=\frac{dy}{\operatorname{ctg}t}=\frac{\tilde{C}_1\sin 2t dt}{\operatorname{ctg}t}=\frac{2\tilde{C}_1\sin t\cos t dt}{\dfrac{\cos t}{\sin t}}=2\tilde{C}_1\sin^2 t dt$$

или

$$dx=\tilde{C}_1(1-\cos 2t)dt.$$

Отсюда, интегрируя по t, будем иметь

$$x=\tilde{C}_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+\tilde{C}_2$$

или

$$x=\frac{\tilde{C}_1}{2}\left(2t-\sin 2t\right)+\tilde{C}_2.$$

Полагая теперь $2t=\varphi$, получим

$$\begin{cases} x=\dfrac{\tilde{C}_1}{2}\left(\varphi-\sin\varphi\right)+\tilde{C}_2, \\ y=\dfrac{\tilde{C}_1}{2}(1-\cos\varphi). \end{cases} \qquad (9.13)$$

Система (9.13) задает кривую, называемую *циклоидой.*

Несколько слов о том, что такое циклоида.

Возьмем окружность радиуса *R*. Пусть она касается в начале координат оси *Ox*.

Будем теперь катить окружность как колесо вдоль оси *Ox* без скольжения и наблюдать при этом за отмеченной точкой. Эта точка и опишет циклоиду (рис. 9.3). Для решения задачи о брахистохроне нам придется циклоиду зеркально отобразить относительно оси *Ox* и взять какой-то ее кусок AB.

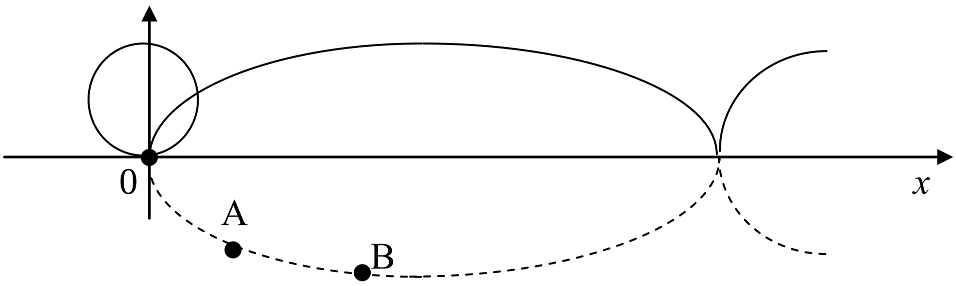

Рис. 9.3

Мы не будем останавливаться на поисках значений постоянных C_1 и C_2, при которых кривая (9.13) удовлетворяет краевым условиям $y(a) = y_A, y(b) = y_B$. ▲

Заметим интересный факт о том, что японцы, китайцы, вьетнамцы испокон веков строят крыши так, что их профиль есть циклоиды, с которых быстрее всего стекает вода (рис. 9.4).

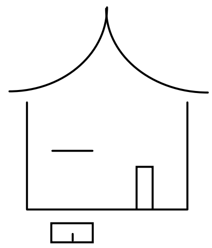

Рис. 9.4