9. Элементы вариационного исчисления

Рассмотрим некоторые типовые примеры.

Пример 1. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy \cdot e^x)dx$ при краевых условиях $y(0) = y(1) = 0$.

Решение

Так как $F(x, y, y') = y'^2 + y^2 + 2xy \cdot e^x$, то для записи уравнения Эйлера найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2xe^x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''.$$

А значит уравнение Эйлера (9.7) имеет вид: $2y + 2xe^x - 2y'' = 0$ или $y'' - y = xe^x$, которое является линейным неоднородным уравнением второго порядка со специальной правой частью. Решим его.

$y'' - y = xe^x$ (*)

$y(x) = y_0(x) + y^*(x)$

Для нахождения $y_0(x)$ составим характеристическое уравнение:

$k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Запишем в общем виде $y^*(x)$: $y^*(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$, тогда

$\left(y^*(x)\right)' = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x$ и $\left(y^*(x)\right)'' = (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x$.

Подставляя полученные выражения в уравнение (*) и сокращая e^x, получим

$4Ax + 2A + 2B = x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y^*(x) = \frac{x(x-1)}{4}e^x$.

Таким образом $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x(x-1)}{4}e^x$.

Найдем значения C_1 и C_2 с учетом краевых условий: $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ y(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} = 0. \end{cases}$

Получим, что $C_1 = C_2 = 0$, а значит $y(x) = \frac{x(x-1)}{4}e^x$ – искомая экстремаль.

Ответ: $y(x) = \frac{x(x-1)}{4}e^x$.

Пример 2. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_1^e (xy'^2-2y')dx$ при краевых условиях $y(1)=1,\ y(e)=2$.

Решение

Так как $F(x,y,y')=xy'^2-2y'$, то для записи промежуточного интеграла (9.8) найдем $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=2xy'-2$.

А значит интеграл (9.8) имеет вид $2xy'-2=C$.

Тогда $y'=\dfrac{C+2}{2x}$, а значит $y(x)=C_1\ln x+C_2$.

Далее найдем C_1 и C_2 потребовав, чтобы выполнялись краевые условия:

$$\begin{cases} y(1)=C_2=1, \\ y(e)=C_1+C_2=2. \end{cases}$$

Получим $C_1=C_2=1$. Следовательно, $y(x)=\ln x+1$ – искомая экстремаль.

Ответ: $y(x)=\ln x+1$.

Пример 3. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2-y^2)dx$ при краевых условиях $y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение

Так как $F(x,y,y')=y'^2-y^2$, то для записи уравнения Эйлера найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=2y', \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''.$$

А значит уравнение Эйлера (9.7) имеет вид: $-2y-2y''=0$ или $y''+y=0$, которое является линейным однородным уравнением второго порядка. Решив его, получим

$y''+y=0$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\pm i \quad \Rightarrow \quad y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Найдем значения C_1 и C_2 с учетом краевых условий: $\begin{cases} y(0) = C_1 = 1, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = C_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + C_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Получим, что $C_1 = 1,\ C_2 = 0$, а значит $y(x) = \cos x$ – искомая экстремаль.

Ответ: $y(x) = \cos x$.

Пример 4. Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)] = \int_0^1 (2e^y - y^2)dx$ при краевых условиях $y(0) = 1,\ y(1) = e$.

Решение

Так как $F(x, y, y') = 2e^y - y^2$, то для записи уравнения Эйлера найдем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2e^y - 2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

А значит уравнение Эйлера (9.7) имеет вид: $2e^y - 2y = 0$ или $e^y - y = 0$, которое не является дифференциальным и не удовлетворяет заданным краевым условиям. Следовательно, у исходной задачи нет решения.

Ответ: нет решения.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите допустимую экстремаль функционала $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ при заданных краевых условиях $y(a) = y_A,\ y(b) = y_B$:

1) $J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (y'^2 - 9y^2 + 4xy\sin x)dx$ при $y(0) = -\dfrac{1}{16},\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{48}$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{32}\sin 3x - \dfrac{1}{16}\cos x + \dfrac{1}{4}x\sin x\right)$

2) $J[y(x)] = \int_0^{\pi} (4y\cos x + y'^2 - y^2)dx$ при $y(0) = y(\pi) = 0$.

$(\text{Ответ}: \quad y(x) = (C + x)\sin x)$

3) $J[y(x)] = \int_0^1 (x + y'^2)dx$ при $y(0) = 1,\ y(1) = 2$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = x + 1\right)$

4) $J[y(x)] = \int_1^3 (12xy' + y'^2)dx$ при $y(1) = 0,\ y(3) = 26$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = -3x^2 + 25x - 22\right)$

5) $J[y(x)] = \int_1^3 xy'(6 + x^2 y')dx$ при $y(1) = 5,\ y(3) = 3$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = \dfrac{3}{x} + 2\right).$

6) $J[y(x)] = \int_0^1 yy'^2\, dx$ при $y(0) = 1,\ y(1) = \sqrt[3]{4}$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}\right).$

7) $J[y(x)] = \int_1^2 \dfrac{x^3}{y'^2} dx$ при $y(1) = 1,\ y(2) = 4$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = x^2\right).$

8) $J[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 - 4y' e^{2x} + \sin^2 x)dx$ при $y(0) = 1,\ y(2) = -2$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = e^{2x} - \dfrac{x(2 + e^4)}{2}\right).$

9) $J[y(x)] = \int_0^2 \left(e^{y'} + 3\right)dx$ при $y(0) = 0,\ y(2) = 1$.

$\left(\text{Ответ}: \quad y(x) = \dfrac{x}{2}\right).$

10) $J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)dx$ при $y(1) = 1,\ y(3) = \dfrac{9}{2}$.

$\left(\text{Ответ}: \quad \text{нет решений}\right).$