Análisis Estadístico con R

Regresión

Víctor Morales-Oñate

18 de abril de 2018

Contents

RLM: Supuestos **1**
- Multicolinealidad . . . 1
- Heterocedasticidad . . . 6
- Autocorrelación . . . 12

RLM: Supuestos

Multicolinealidad

El problema:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

- Se tiene un problema en cuanto a la transpuesta de la matriz $(X'X)$

- Perfecta: Si se tiene este tipo, el modelo simplemente no toma en cuenta esta variable
- Imperfecta: El cáclulo de la inversa es computacionalmente exigente

Posibles causas

- El método de recolección de información
- Restricciones en el modelo o en la población objeto de muestreo
- Especificación del modelo
- Un modelo sobredetermindado
- Series de tiempo

¿Cuál es la naturaleza de la multicolinealidad?

Causas - ¿Cuáles son sus consecuencias prácticas?

Incidencia en los errores estándar y sensibilidad

- ¿Cómo se detecta?

Pruebas

¿Qué medidas pueden tomarse para aliviar el problema de multicolinealidad?

- No hacer nada
- Eliminar variables
- Transformación de variables
- Añadir datos a la muestra
- Componentes principales, factores, entre otros

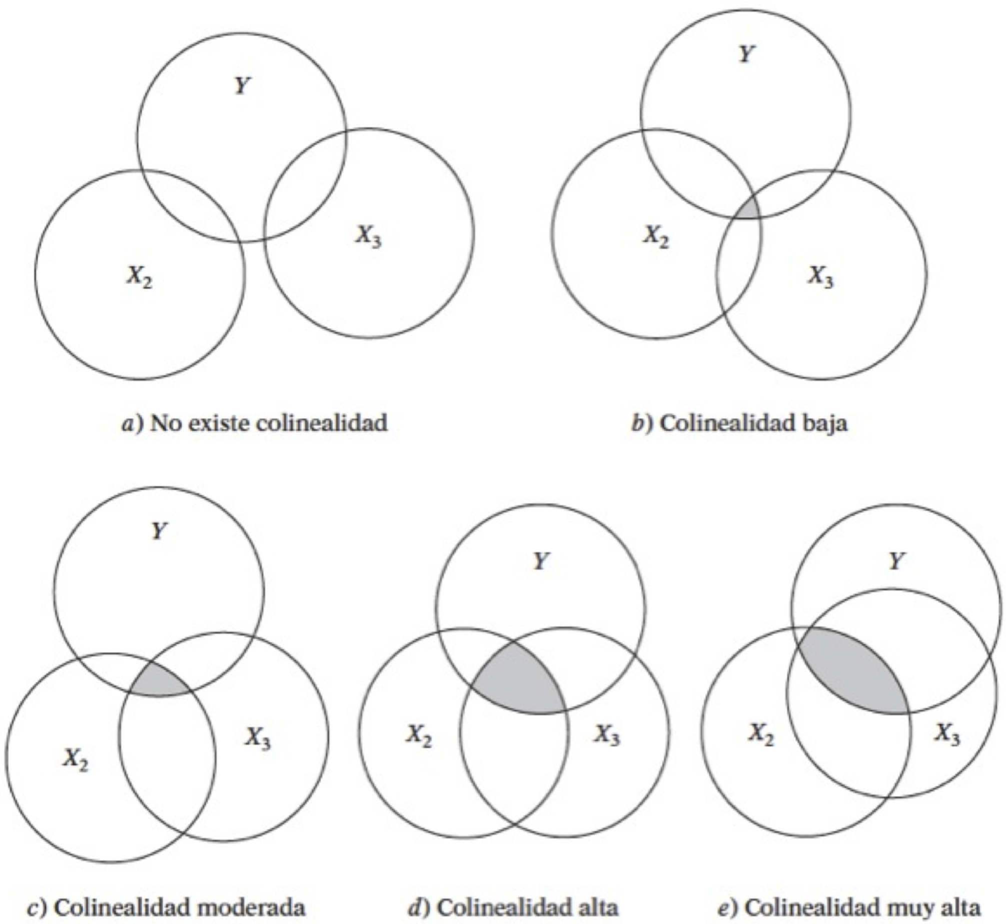

Y
X_2
X_3
a) No existe colinealidad
b) Colinealidad baja
c) Colinealidad moderada
d) Colinealidad alta
e) Colinealidad muy alta

Figure 1:

¿Cómo se detecta?

- Un R^2 elevado pero con pocas razones t significativas
- Regresiones auxiliares (Pruebas de Klein)
- Factor de inflación de la varianza

$$VIF = \frac{1}{(1 - R^2)}$$

Ejemplo 1

- Haremos uso del paquete AER
- Abrir la tabla 10.8
- Ajusta el modelo

donde

- X_1 índice implícito de deflación de precios para el PIB,
- X_2 es el PIB (en millones de dólares),
- X_3 número de desempleados (en miles),
- X_4 número de personas enlistadas en las fuerzas armadas,
- X_5 población no institucionalizada mayor de 14 años de edad
- X_6 año (igual a 1 para 1947, 2 para 1948 y 16 para 1962).

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + u_i$$

- Analice los resultados

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/tabla10_8.csv"
datos<- read.csv(url(uu),sep=";",header=TRUE)
attach(datos)
```

Agreguemos el tiempo: - Las correlaciones muy altas también suelen ser síntoma de multicolinealidad

```
ajuste.2 <- lm(Y~X1+X2+X3+X4+X5+TIME)
summary(ajuste.2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + TIME)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -381.7 -167.6   13.7  105.5  488.9
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  6.727e+04  2.324e+04   2.895  0.02005 *
## X1          -2.051e+00  8.710e+00  -0.235  0.81974
## X2          -2.733e-02  3.317e-02  -0.824  0.43385
## X3          -1.952e+00  4.767e-01  -4.095  0.00346 **
## X4          -9.582e-01  2.162e-01  -4.432  0.00219 **
## X5           5.134e-02  2.340e-01   0.219  0.83181
## TIME         1.585e+03  4.827e+02   3.284  0.01112 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 295.6 on 8 degrees of freedom
```

```
## Multiple R-squared:  0.9955, Adjusted R-squared:  0.9921
## F-statistic: 295.8 on 6 and 8 DF,  p-value: 6.041e-09
```

```r
cor(cbind(X1,X2,X3,X4,X5,TIME))
```

```
##             X1        X2         X3         X4        X5      TIME
## X1   1.0000000 0.9936689  0.5917342  0.4689737 0.9833160 0.9908435
## X2   0.9936689 1.0000000  0.5752804  0.4587780 0.9896976 0.9947890
## X3   0.5917342 0.5752804  1.0000000 -0.2032852 0.6747642 0.6465669
## X4   0.4689737 0.4587780 -0.2032852  1.0000000 0.3712428 0.4222098
## X5   0.9833160 0.9896976  0.6747642  0.3712428 1.0000000 0.9957420
## TIME 0.9908435 0.9947890  0.6465669  0.4222098 0.9957420 1.0000000
```

- Prueba de Klein: Se basa en realizar regresiones auxiliares de *todas contra todas* las variables regresoras.
- Si el R^2 de la regresión aux es mayor que la global, esa variable regresora podría ser la que genera multicolinealidad
- ¿Cuántas regresiones auxiliares se tiene en un modelo en general?

Regresemos una de las variables

```r
ajuste.3<- lm(X1~X2+X3+X4+X5+TIME)
summary(ajuste.3)
```

```
## 
## Call:
## lm(formula = X1 ~ X2 + X3 + X4 + X5 + TIME)
## 
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max 
## -18.8602  -4.3277  -0.3175   4.3726  14.8438 
## 
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## (Intercept)  1.529e+03  7.288e+02   2.098   0.0653 .
## X2           2.543e-03  9.453e-04   2.690   0.0248 *
## X3           3.056e-02  1.514e-02   2.019   0.0742 .
## X4           1.011e-02  7.559e-03   1.337   0.2140  
## X5          -1.263e-02  7.903e-03  -1.598   0.1445  
## TIME        -1.621e+01  1.766e+01  -0.918   0.3826  
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## 
## Residual standard error: 11.31 on 9 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9923, Adjusted R-squared:  0.9881 
## F-statistic: 232.5 on 5 and 9 DF,  p-value: 3.127e-09
```

```r
tolerancia<-1-0.9923
```

Factor de inflación de la varianza

Si este valor es mucho mayor que 10 y se podría concluir que si hay multicolinealidad

```r
vif <- 1/tolerancia
vif
```

```
## [1] 129.8701
```

Ahora vamos a usar el paquete `AER`:

```r
library(AER)
```

```r
vif1 <- vif(ajuste.2)
Raux <- (vif1-1)/vif1
Rglobal <- 0.9955

Rglobal-Raux
```

```
##          X1           X2           X3           X4           X5
##  0.003181137 -0.003829181  0.026533869  0.254649059 -0.001623122
##        TIME
## -0.003160352
```

Se podría no hacer nada ante este problema. O se puede tratar con transformaciones. Deflactamos el PIB: `PIB_REAL <- X2/X1`

```r
# La variable X5 (población)
# esta correlacionada con el tiempo
PIB_REAL <- X2/X1
ajuste.4<-lm(Y~PIB_REAL+X3+X4)
summary(ajuste.4)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ PIB_REAL + X3 + X4)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -760.29 -197.71  -53.69  234.77  603.15
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 42716.5646   710.1206  60.154 3.31e-15 ***
## PIB_REAL       72.0074     3.3286  21.633 2.30e-10 ***
## X3             -0.6810     0.1693  -4.023  0.00201 **
## X4             -0.8392     0.2206  -3.805  0.00292 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 389 on 11 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9893, Adjusted R-squared:  0.9864
## F-statistic: 339.5 on 3 and 11 DF,  p-value: 4.045e-11
```

```r
vif(ajuste.4)
```

```
## PIB_REAL       X3       X4
## 3.054580 2.346489 2.318500
```

```r
ajuste.5<-lm(Y~PIB_REAL+X3+X4)
summary(ajuste.5)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ PIB_REAL + X3 + X4)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
```

```
## -760.29 -197.71  -53.69  234.77  603.15
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 42716.5646   710.1206  60.154 3.31e-15 ***
## PIB_REAL       72.0074     3.3286  21.633 2.30e-10 ***
## X3             -0.6810     0.1693  -4.023  0.00201 **
## X4             -0.8392     0.2206  -3.805  0.00292 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 389 on 11 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9893, Adjusted R-squared:  0.9864
## F-statistic: 339.5 on 3 and 11 DF,  p-value: 4.045e-11
```

```r
vif(ajuste.5)
```

```
## PIB_REAL       X3       X4
## 3.054580 2.346489 2.318500
```

Heterocedasticidad

Ocurre cuando la varianza no es constante.

¿Cuál es la naturaleza de la heterocedasticidad?

- Modelos de aprendizaje de los errores: con el paso del tiempo, las personas cometen menos errores de comportamiento. Es decir que la varianza disminuye.
- Ingreso direccional: Es probable que la varianza aumente con el ingreso dado que el aumento del ingreso se tiene más opciones del cómo disponer de él.

- Técnicas de recolección de datos: si la técnica mejora, es probable que la varianza se reduzca.
- Datos atípicos o aberrantes: Sensibilidad en las estimaciones
- Especificaciones del modelo: Omisión de variables importantes en el modelo.
- Asimentría: Surge a partir de la distribución de una o más regresoras en el modelo. Ejemplo: Distribución del ingreso *generalmente inequitativo*

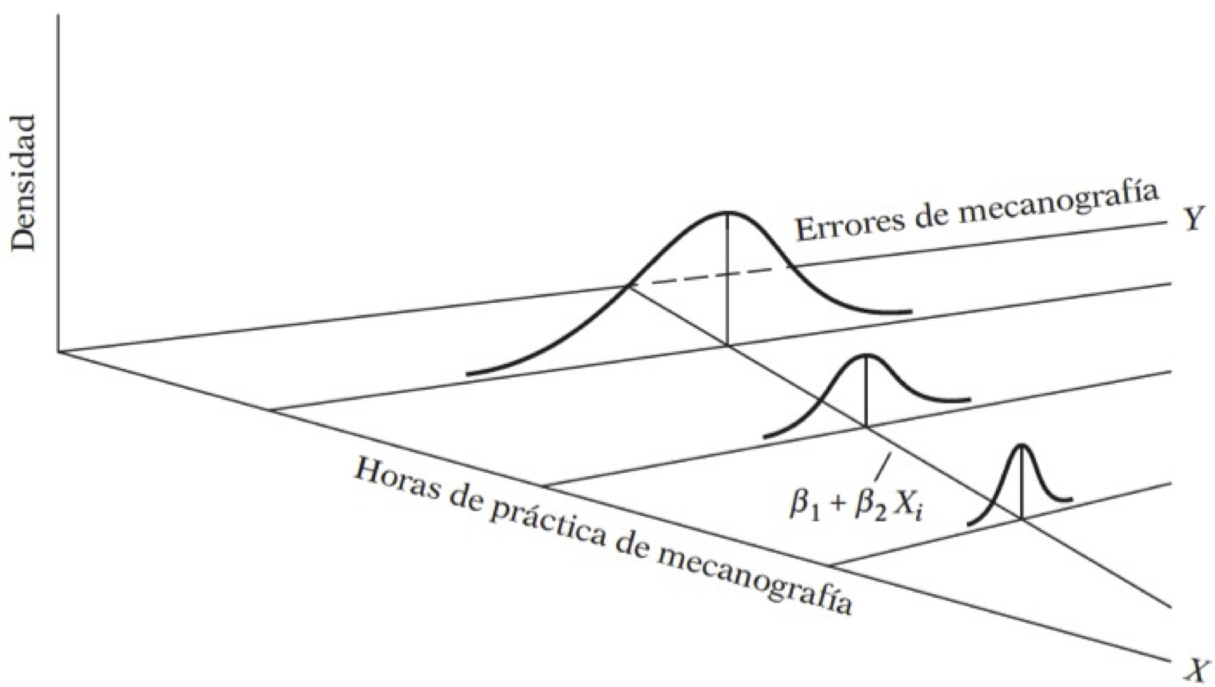
¿Cómo detectarla?

Método gráfico

Veamos las pruebas de detección en un ejemplo

- Abrir la base de datos *wage1* de Wooldrigde

```r
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/wage1.csv"
datos <- read.csv(url(uu),header=FALSE)
names(datos) <- c("wage",  "educ",  "exper",  "tenure",
               "nonwhite",  "female",   "married",
               "numdep",    "smsa", "northcen", "south",
               "west",  "construc", "ndurman",  "trcommpu",
               "trade", "services", "profserv", "profocc",
               "clerocc",   "servocc",  "lwage",    "expersq",
               "tenursq")
attach(datos)

casados = (1-female)*married  # female 1=mujer  married=1 casado
```



Densidad
Errores de mecanografía
Y
$\beta_1 + \beta_2 X_i$
Horas de práctica de mecanografía
X

Figure 2:

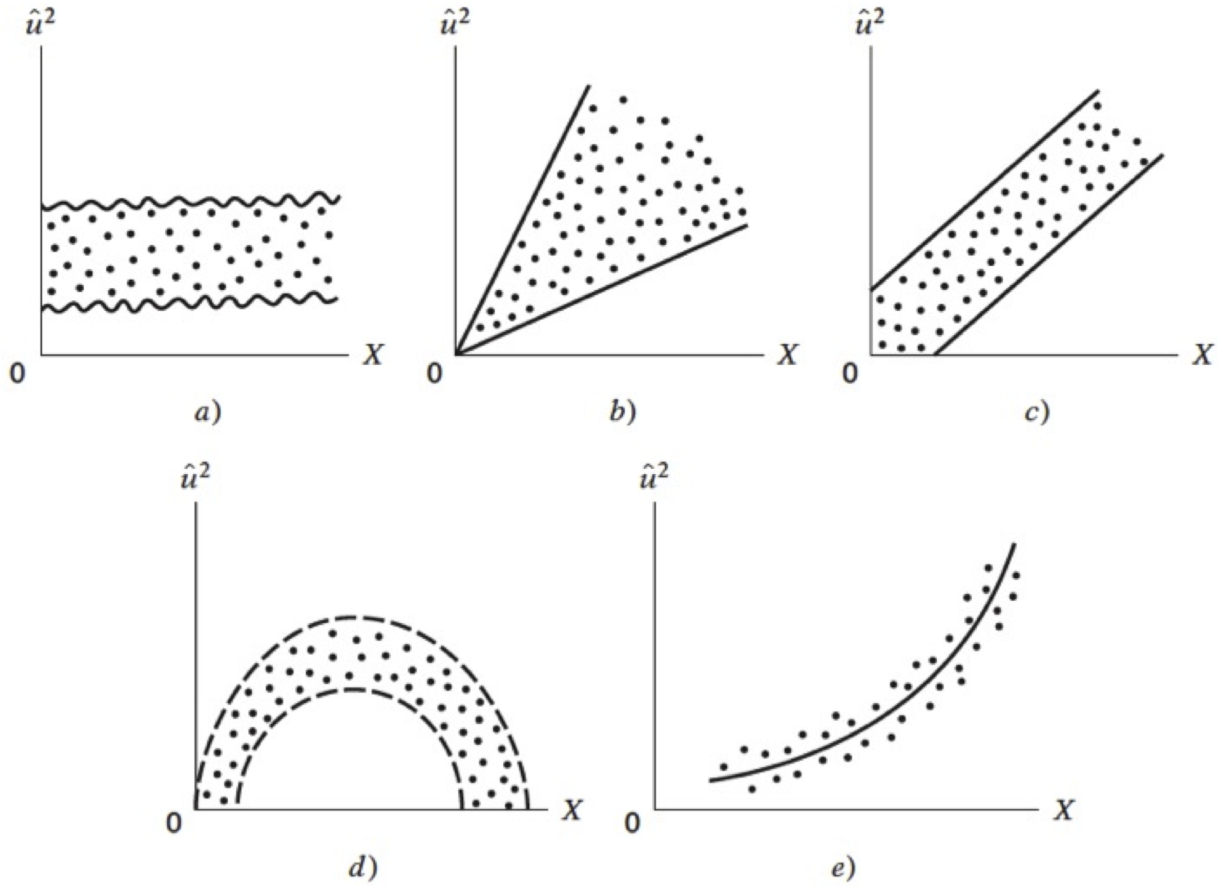


Figure 3:

```r
casadas = (female)*married
solteras = (female)*(1-married)
solteros = (1-female)*(1-married)
```

- Correr el modelo

  $lwage = \beta_0 + \beta_1 casados + \beta_2 casadas + \beta_3 solteras + \beta_4 educ + \beta_5 exper + \beta_6 expersq + \beta_7 tenure + \beta_8 tenuresq + u_i$

- Hacer un gráfico de los valores estimados y los residuos al cuadrado

Prueba de Breusch Pagan

- Correr un modelo de los residuos al cuadrado regresado en las variables explicativas del modelo global.

  $sqresid = \beta_0 + \beta_1 casados + \beta_2 casadas + \beta_3 solteras + \beta_4 educ + \beta_5 exper + \beta_6 expersq + \beta_7 tenure + \beta_8 tenuresq + u_i$

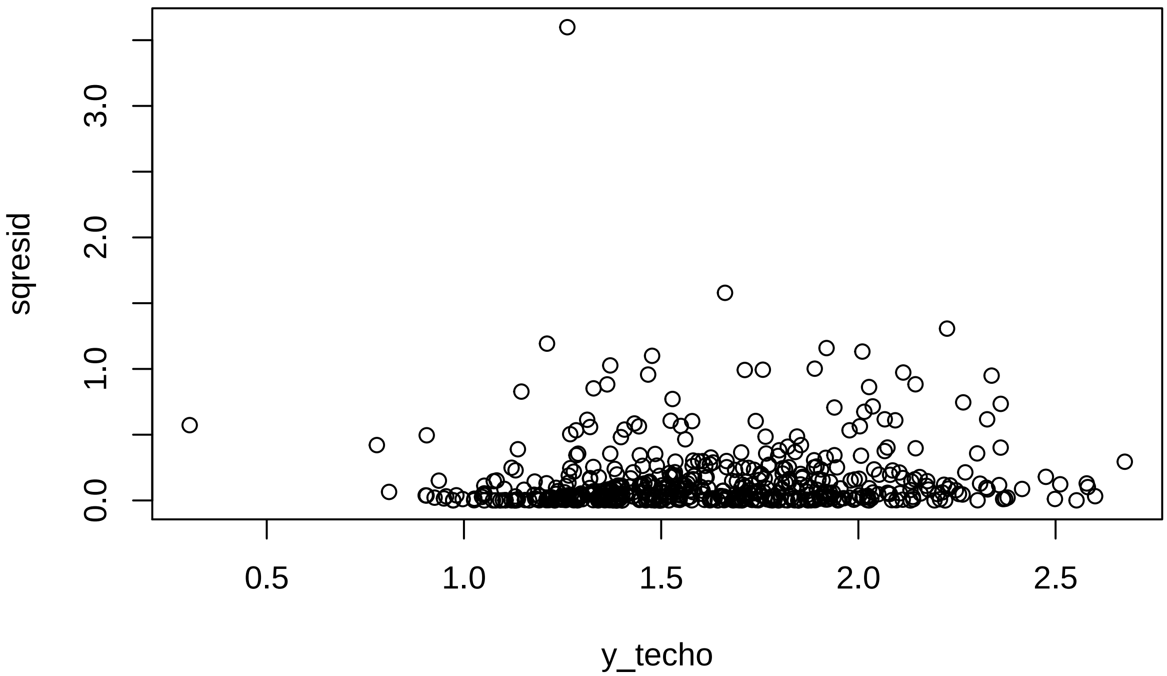
- `bptest(objeto)`: si el pvalor es inferior a 0.05, `Ho: Homocedasticidad`

El códgio en R sería:

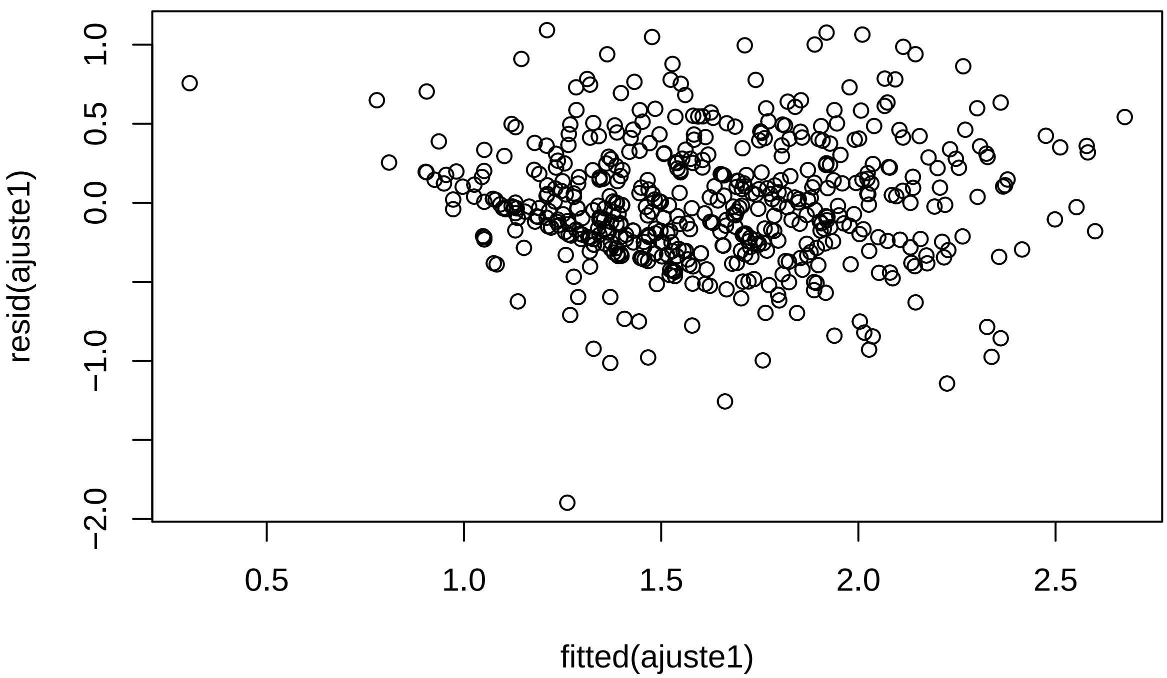
```r
ajuste1 <- lm(lwage~casados+casadas+solteras+educ+exper+
                  expersq+tenure+tenursq)

summary(ajuste1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = lwage ~ casados + casadas + solteras + educ + exper +
##     expersq + tenure + tenursq)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.89697 -0.24060 -0.02689  0.23144  1.09197
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.3213780  0.1000090   3.213 0.001393 **
## casados      0.2126756  0.0553572   3.842 0.000137 ***
## casadas     -0.1982677  0.0578355  -3.428 0.000656 ***
## solteras    -0.1103502  0.0557421  -1.980 0.048272 *
## educ         0.0789103  0.0066945  11.787  < 2e-16 ***
## exper        0.0268006  0.0052428   5.112 4.50e-07 ***
## expersq     -0.0005352  0.0001104  -4.847 1.66e-06 ***
## tenure       0.0290875  0.0067620   4.302 2.03e-05 ***
## tenursq     -0.0005331  0.0002312  -2.306 0.021531 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3933 on 517 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4609, Adjusted R-squared:  0.4525
## F-statistic: 55.25 on 8 and 517 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

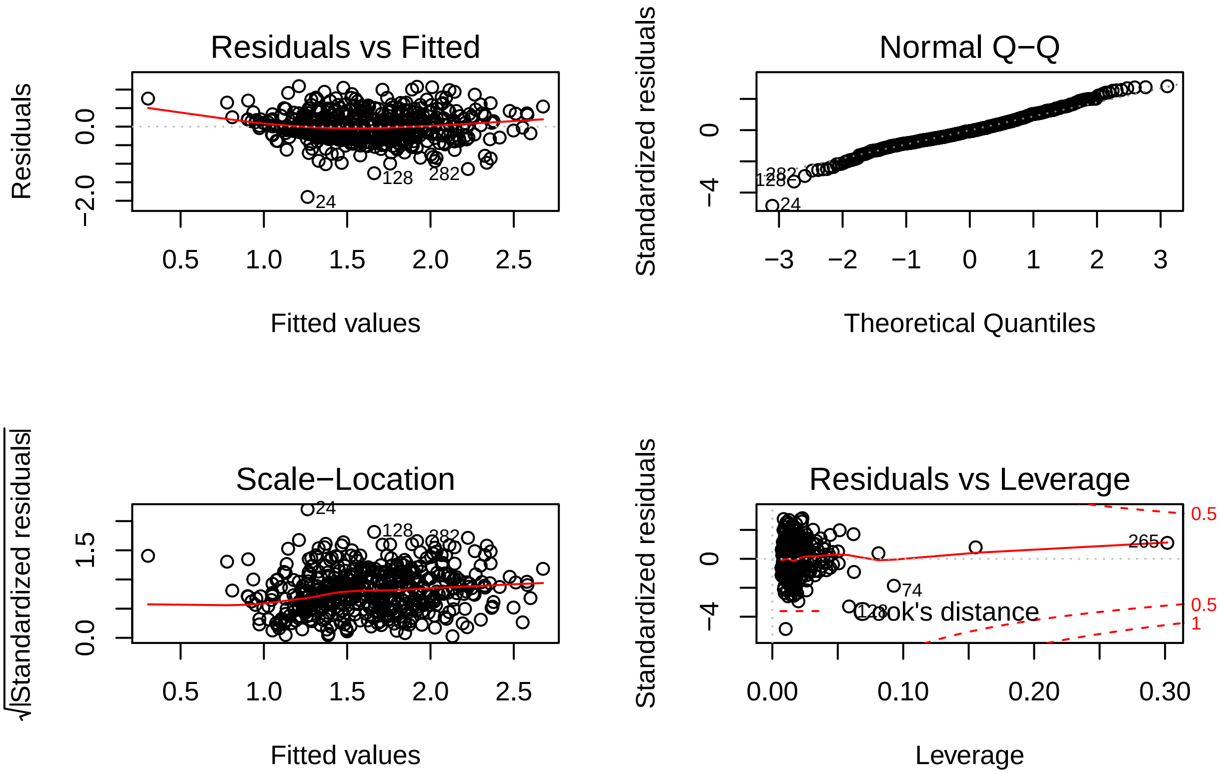
```r
residuos <- resid(ajuste1)
sqresid <- residuos^2
y_techo <- fitted(ajuste1)
plot(y_techo,sqresid)
```




```r
plot(fitted(ajuste1),resid(ajuste1))
```




```r
# Usando el "default" de R:
par(mfrow=c(2,2))
plot(ajuste1)
```




```r
par(mfrow=c(1,1))


library(sandwich)
library(lmtest)
#install.packages("lmSupport")
library(lmSupport)

# Test para ver si hay heterocedasticidad
residuos <- resid(ajuste1)
sqresid <- (residuos)^2
ajuste2 <- lm(sqresid~casados+casadas+solteras+educ+exper+expersq+tenure+tenursq)
summary(ajuste2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = sqresid ~ casados + casadas + solteras + educ +
##     exper + expersq + tenure + tenursq)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -0.2346 -0.1237 -0.0887  0.0202  3.4689
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  5.029e-02  6.893e-02   0.729  0.46603
## casados     -4.870e-02  3.816e-02  -1.276  0.20241
## casadas     -5.147e-02  3.986e-02  -1.291  0.19727
## solteras     4.162e-03  3.842e-02   0.108  0.91379
```

```
## educ         3.849e-03  4.614e-03   0.834  0.40462
## exper        1.008e-02  3.614e-03   2.790  0.00546 **
## expersq     -2.071e-04  7.611e-05  -2.720  0.00674 **
## tenure       4.763e-04  4.661e-03   0.102  0.91864
## tenursq      8.670e-05  1.594e-04   0.544  0.58672
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.2711 on 517 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.02507,    Adjusted R-squared:  0.009989
## F-statistic: 1.662 on 8 and 517 DF,  p-value: 0.105
```

```
# F =1.662 y pvalue=0.105 NO EXISTE HETEROCEDASTICIDAD
#Breusch-Pagan test

'bptest es igual a hettest en STATA'
```

```
## [1] "bptest es igual a hettest en STATA"
```

```
bptest(ajuste1)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  ajuste1
## BP = 13.189, df = 8, p-value = 0.1055
```

Para estimar errores robustos (como `robust` en stata):

```
coeftest(ajuste1, vcovHC(ajuste1,"HC0"))
```

```
##
## t test of coefficients:
##
##                Estimate  Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.32137805  0.10852844  2.9612 0.0032049 **
## casados      0.21267564  0.05665095  3.7541 0.0001937 ***
## casadas     -0.19826765  0.05826506 -3.4029 0.0007186 ***
## solteras    -0.11035021  0.05662552 -1.9488 0.0518632 .
## educ         0.07891029  0.00735096 10.7347 < 2.2e-16 ***
## exper        0.02680057  0.00509497  5.2602 2.111e-07 ***
## expersq     -0.00053525  0.00010543 -5.0770 5.360e-07 ***
## tenure       0.02908752  0.00688128  4.2270 2.800e-05 ***
## tenursq     -0.00053314  0.00024159 -2.2068 0.0277671 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Autocorrelación

- ¿Cuál es la naturaleza de la autocorrelación?
- ¿Cuáles son las consecuencias teóricas y prácticas de la autocorrelación?
- ¿Cómo remediar el problema de la autocorrelación?

  Autocorrelación: correlación entre miembros de series de observaciones ordenadas en el tiempo [como en datos de series de tiempo] o en el espacio [como en datos de corte transversal]:

$$E(u_i, u_j) \neq 0 i \neq j$$

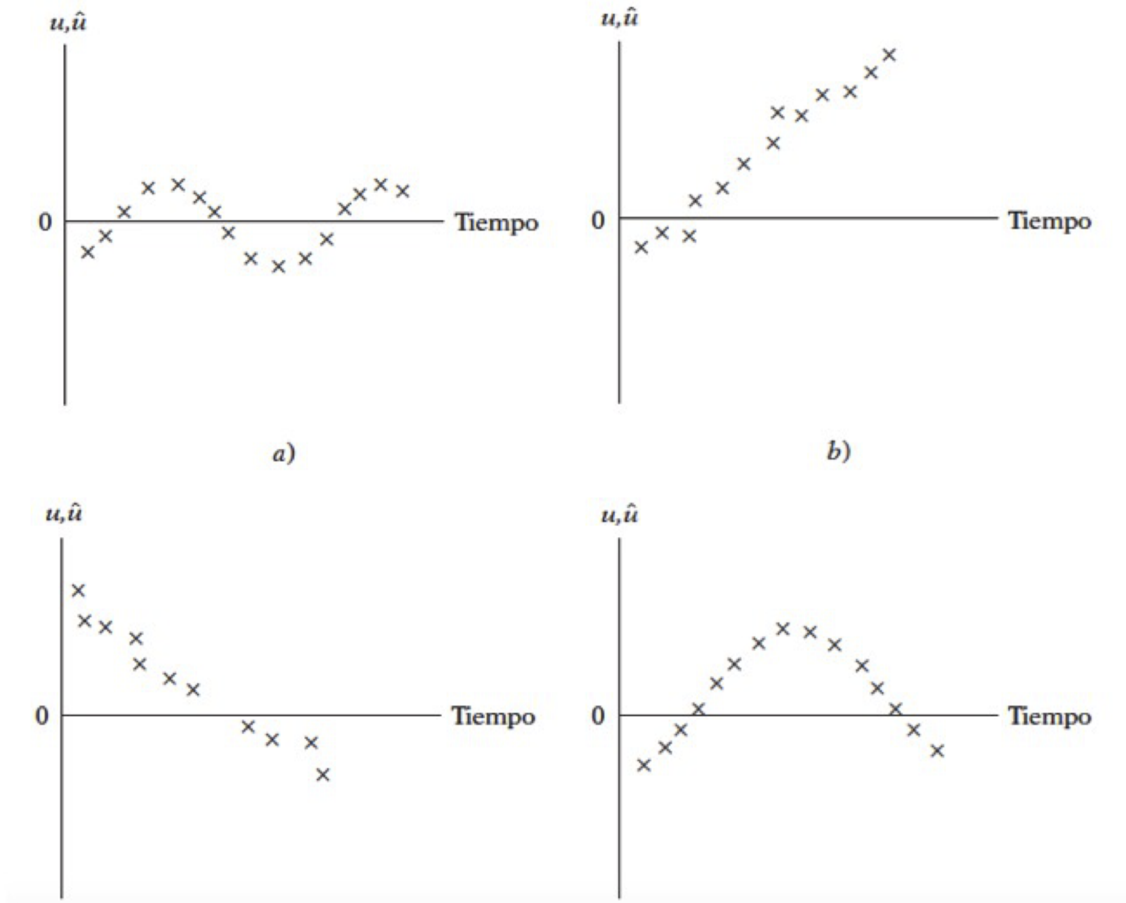
El supuesto es:

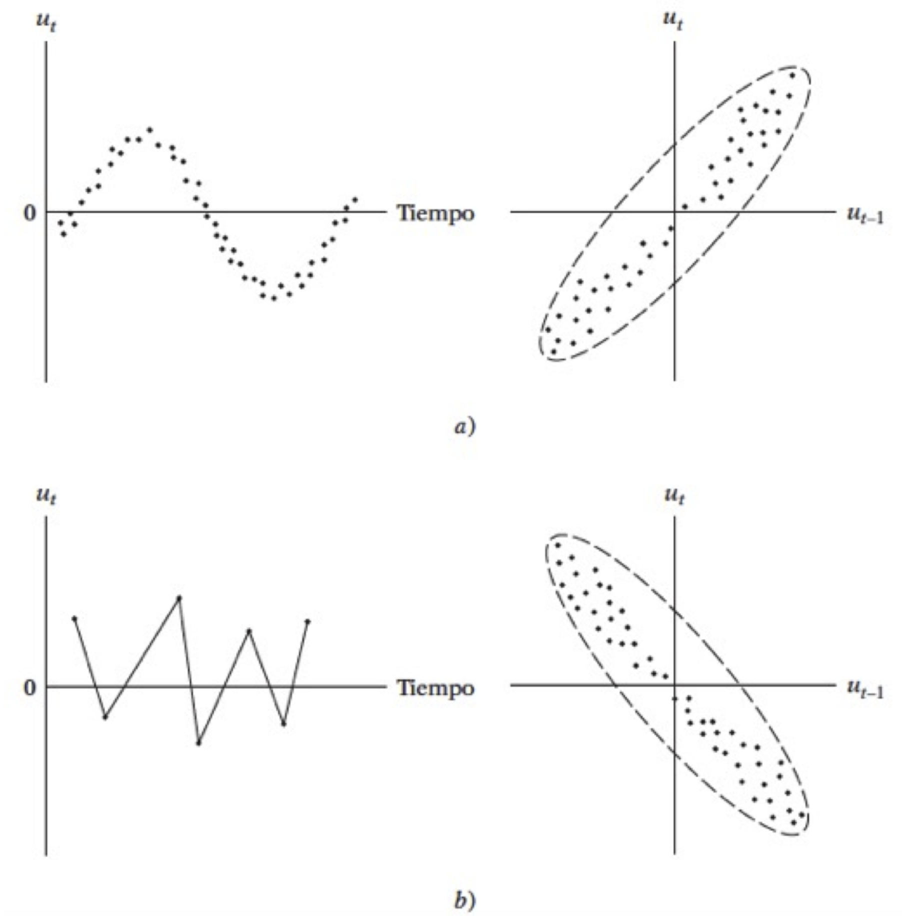
$$cov(u_i, u_j | x_i, x_j) = E(u_i, u_j) = 0 i \neq j$$

- Datos atípicos o aberrantes: Sensibilidad en las estimaciones
- Especificaciones del modelo: Omisión de variables importantes en el modelo.
- Asimentría: Surge a partir de la distribución de una o más regresoras en el modelo. Ejemplo: Distribución del ingreso *generalmente inequitativo*

Cómo detectarla sesgos de especificación

Método gráfico





Veamos las pruebas de detección en un ejemplo

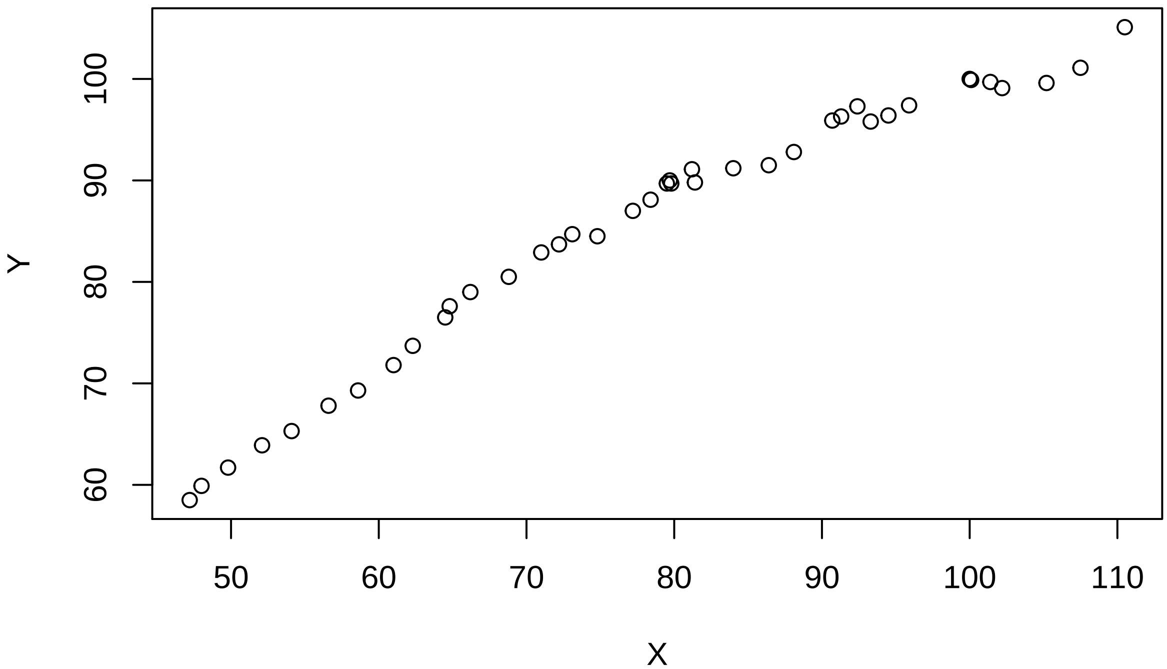
Ejemplo

Abrir la `tabla 12.4`. Veamos los datos en forma gráfica, y corramos el modelo:

- Y, índices de remuneración real por hora
- X, producción por hora X

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/tabla12_4.csv"
datos1<- read.csv(url(uu), sep=";",dec=".", header=T)
attach(datos1)
```

```
#Indice de compensacion real (salario real)
plot(X,Y)
```

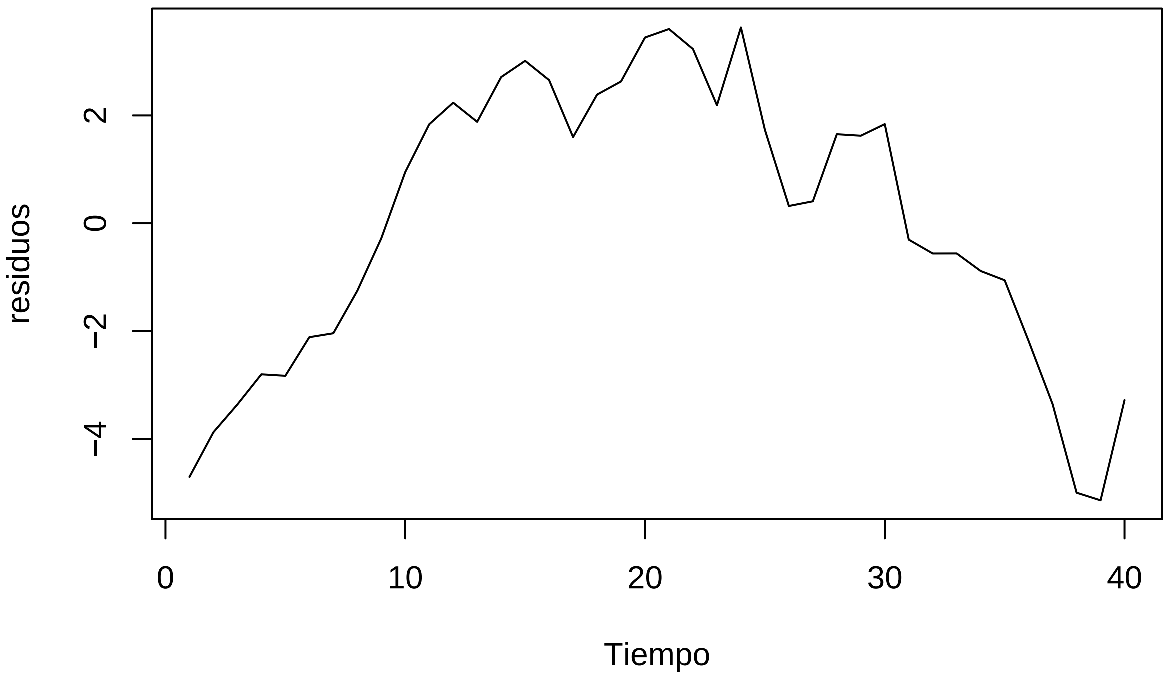



```r
ajuste.indice<-lm(Y~X)
summary(ajuste.indice)
```

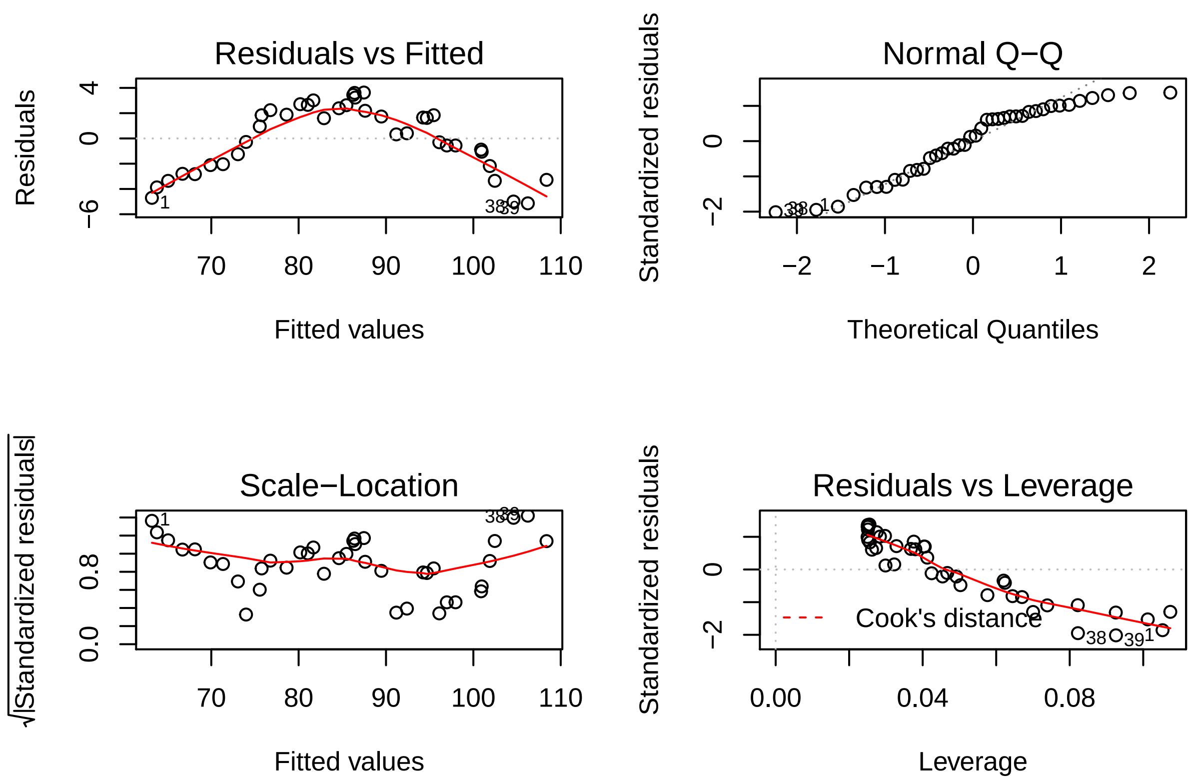
```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -5.138 -2.130  0.364  2.201  3.632
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  29.5192     1.9424   15.20   <2e-16 ***
## X             0.7137     0.0241   29.61   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.676 on 38 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9584, Adjusted R-squared:  0.9574
## F-statistic: 876.5 on 1 and 38 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Revisemos si hay autocorelación:

```r
residuos<- resid(ajuste.indice)
plot(residuos,t="l",xlab="Tiempo")
```




```r
par(mfrow = c(2,2))
plot(ajuste.indice)
```




```r
par(mfrow = c(1,1))
```

- Los datos NO DEBEN TENER UN PATRON (si tienen patron, algo anda mal)
- En este caso se tiene un curva cuadrática, el modelo podría estar mal especificado
- Podría ser que el modelo no se lineal o estar correlacionado

Veamos si se trata de una función cuadrática y cúbica

```
ajuste2 <- lm(Y~X+I(X^2))
summary(ajuste2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X + I(X^2))
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.58580 -0.76248  0.09209  0.68442  2.63570
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -1.622e+01  2.955e+00  -5.489 3.09e-06 ***
## X            1.949e+00  7.799e-02  24.987  < 2e-16 ***
## I(X^2)      -7.917e-03  4.968e-04 -15.936  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9669 on 37 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9947, Adjusted R-squared:  0.9944
## F-statistic:  3483 on 2 and 37 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

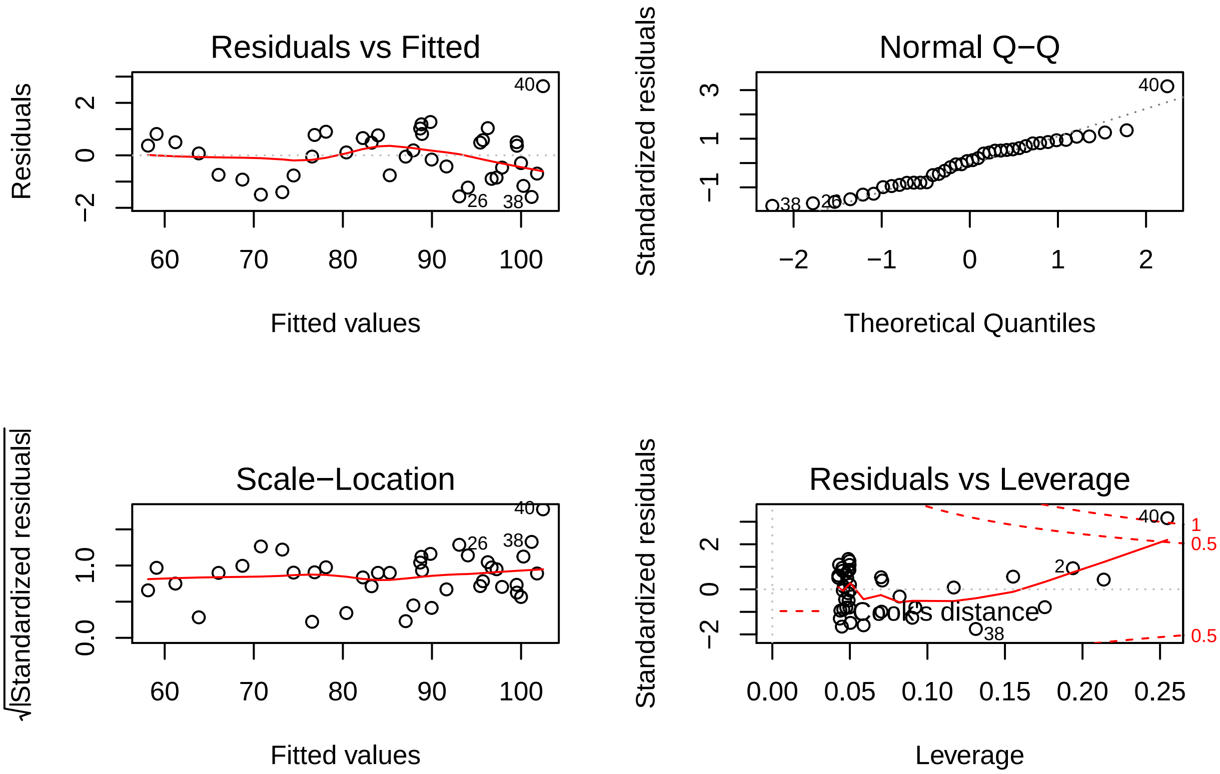
```
ajuste3 <- lm(Y~X+I(X^2)+I(X^3))
summary(ajuste3)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X + I(X^2) + I(X^3))
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.63265 -0.79419  0.06568  0.66627  2.43810
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -2.222e+01  1.344e+01  -1.653 0.107060
## X            2.196e+00  5.466e-01   4.018 0.000286 ***
## I(X^2)      -1.119e-02  7.178e-03  -1.559 0.127658
## I(X^3)       1.398e-05  3.054e-05   0.458 0.649958
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9774 on 36 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9947, Adjusted R-squared:  0.9943
## F-statistic:  2272 on 3 and 36 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

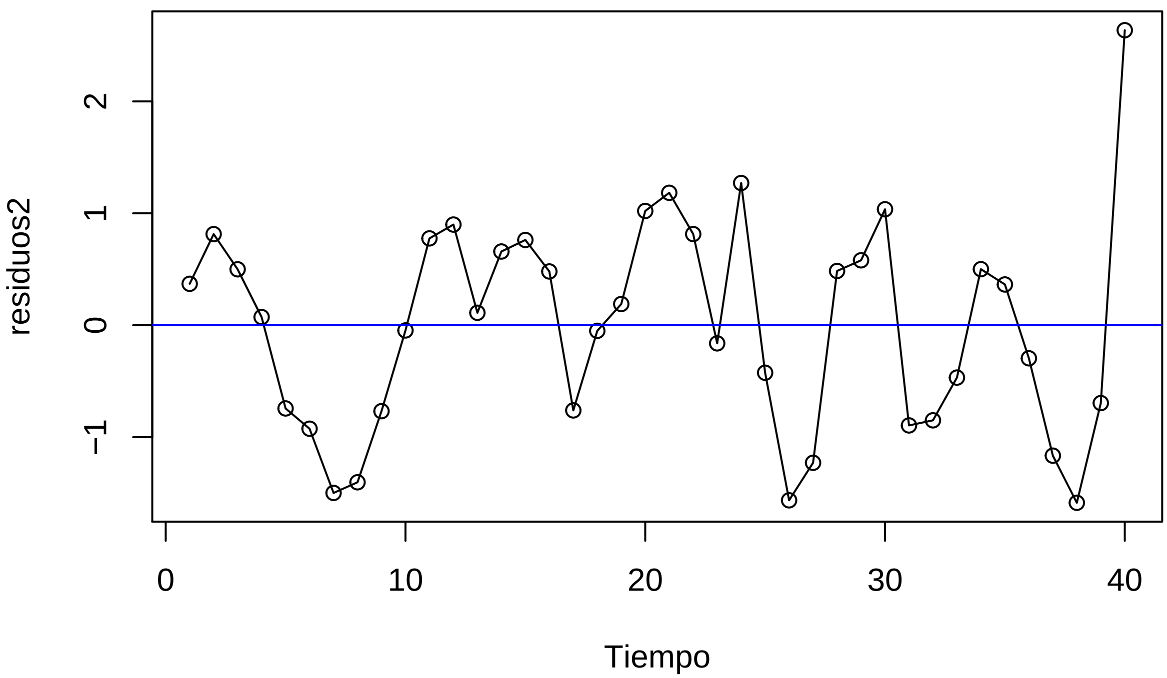
Nos quedamos con el ajuste 2

El gráfico de los val ajustados, muestra que se ha eliminado el patron inicial

```
par(mfrow = c(2,2))
plot(ajuste2)
```

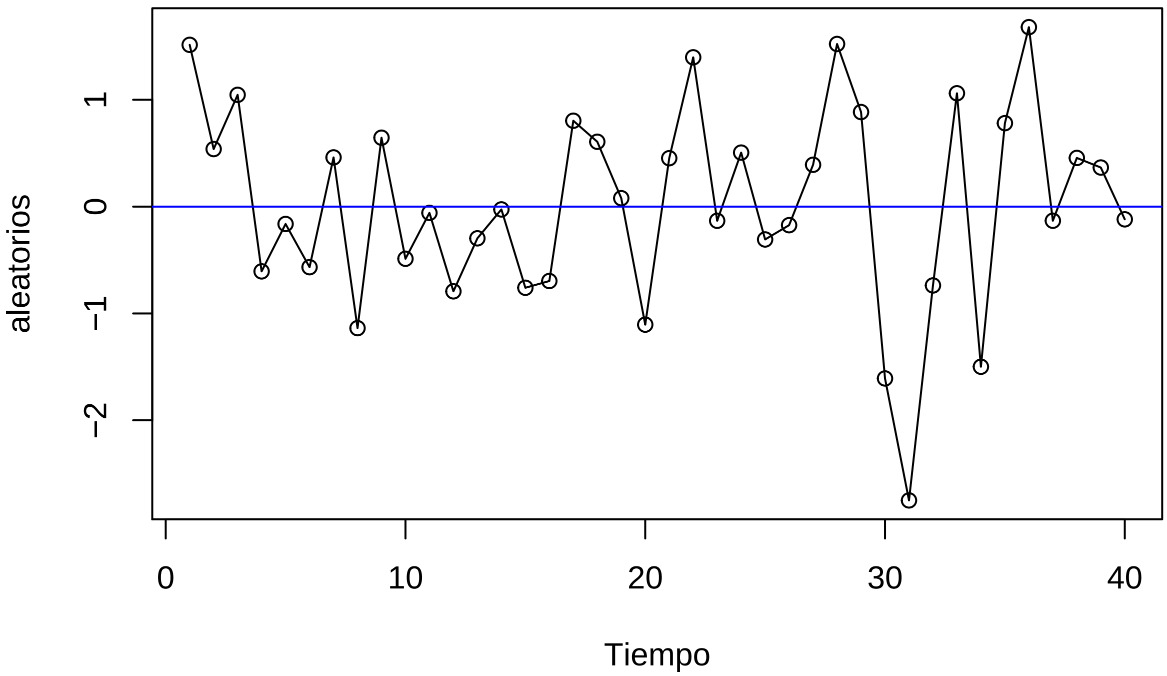



```r
par(mfrow = c(1,1))

residuos2 <- resid(ajuste2)
plot(residuos2,t="l",xlab="Tiempo")
points(residuos2)
abline(h=0,col="blue")
```



Cómo debe ser el gráfico

```r
aleatorios=rnorm(40,0,1)
plot(aleatorios,t="l",xlab="Tiempo")
points(aleatorios)
abline(h=0,col="blue")
```



¿Se parece?

Ejemplo: Pruebas

Ho: No hay autocorrelación

```r
dwtest(ajuste2)
```

```
##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  ajuste2
## DW = 1.03, p-value = 0.0001178
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

¿Cuál es la conclusión?

Otra prueba:

```r
# Ajuste Breuch Godfrey (Ho: No hay autocorrelación)
bgtest(ajuste2,order=4)
```

```
##
##  Breusch-Godfrey test for serial correlation of order up to 4
##
## data:  ajuste2
## LM test = 14.945, df = 4, p-value = 0.004817
```