Regresión Robusta

Víctor Morales Oñate
Sitio personal
ResearchGate
GitHub
LinkedIn

25 de abril de 2019

Contents

Puntos de influencia

Vamos a aprender cómo las observaciones de datos pueden influir potencialmente de diferentes maneras.

Si una observación tiene un *valor de respuesta que es muy diferente del valor predicho en base a un modelo*, entonces esa observación se llama un **valor atípico**.

Por otro lado, si una observación tiene una combinación particularmente inusual de valores de predictores (por ejemplo, un predictor tiene un valor muy diferente para esa observación en comparación con todas las otras observaciones de datos), se dice que esa observación tiene un alto *leverage*.

Por lo tanto, hay una distinción entre los valores atípicos y las observaciones de alto *leverage*, y cada una puede impactar nuestros análisis de regresión de manera diferente.

También es posible que una observación sea un valor atípico y un alto *leverage* Por lo tanto, es importante saber cómo detectar valores atípicos y puntos de datos de alto *leverage*.

Una vez que hemos identificado puntos atípicos y/o puntos de datos de alto *leverage*, debemos determinar si los puntos realmente tienen una influencia indebida en nuestro modelo. Esta lección aborda todos estos problemas utilizando las siguientes medidas:

- *leverages*
- residuos
- residuos *studentized* (algunos softwares lo denomina residuos estandarizados)
- Residuos eliminados (no estandarizados) (o errores de predicción de PRESS)
- residuos de student eliminados

Distinción entre los valores atípicos y las observaciones de alto apalancamiento

- Un valor atípico es un punto de datos cuya respuesta y no sigue la tendencia general del resto de los datos.
- Un punto de datos tiene un alto leverage si tiene valores de predictor x *extremos*.
  - `Con un solo predictor, un valor x extremo es simplemente uno que es particularmente alto o bajo`
  - `Con múltiples predictores, los valores extremos de $x$ pueden ser particularmente altos o bajos`

Ten en cuenta que, para nuestros propósitos, **consideramos que un punto de datos es un valor atípico solo si es extremo con respecto a los otros valores de y, no los valores de x.**

Un punto de datos es influyente si influye indebidamente en cualquier parte de un análisis de regresión, como las respuestas pronosticadas, los coeficientes de pendiente estimados o los resultados de la prueba de hipótesis.

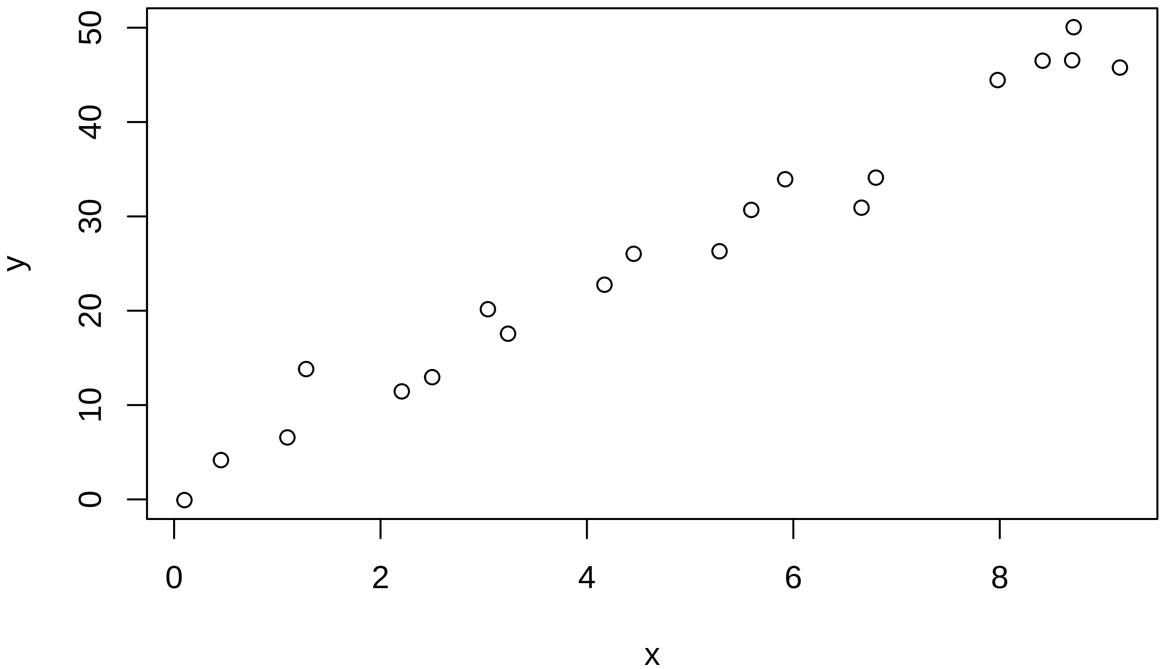
Los valores atípicos y los puntos de datos de alto leverage tienen el potencial de ser influyentes, pero generalmente tenemos que investigar más para determinar **si son o no realmente influyentes**.

Una ventaja del caso en el que solo tenemos un predictor es que podemos ver gráficos de dispersión simples para identificar cualquier valor atípico y puntos de datos influyentes. Veamos algunos ejemplos que deberían ayudar a aclarar la distinción entre los dos tipos de valores extremos.

Ejemplo 1

Según las definiciones anteriores, ¿cree que el siguiente conjunto de datos contiene valores atípicos? ¿O, cualquier punto de datos de alto leverage?

```r
Input <- (
  "
Row x   y
1   0.1 -0.0716
2   0.45401 4.1673
3   1.09765 6.5703
4   1.27936 13.815
5   2.20611 11.4501
6   2.50064 12.9554
7   3.0403  20.1575
8   3.23583 17.5633
9   4.45308 26.0317
10  4.1699  22.7573
11  5.28474 26.303
12  5.59238 30.6885
13  5.92091 33.9402
14  6.66066 30.9228
15  6.79953 34.11
16  7.97943 44.4536
17  8.41536 46.5022
18  8.71607 50.0568
19  8.70156 46.5475
20  9.16463 45.7762
  "
)
d1 = read.table(textConnection(Input),header=TRUE)
d1 <- d1[,-1]
plot(d1)
```



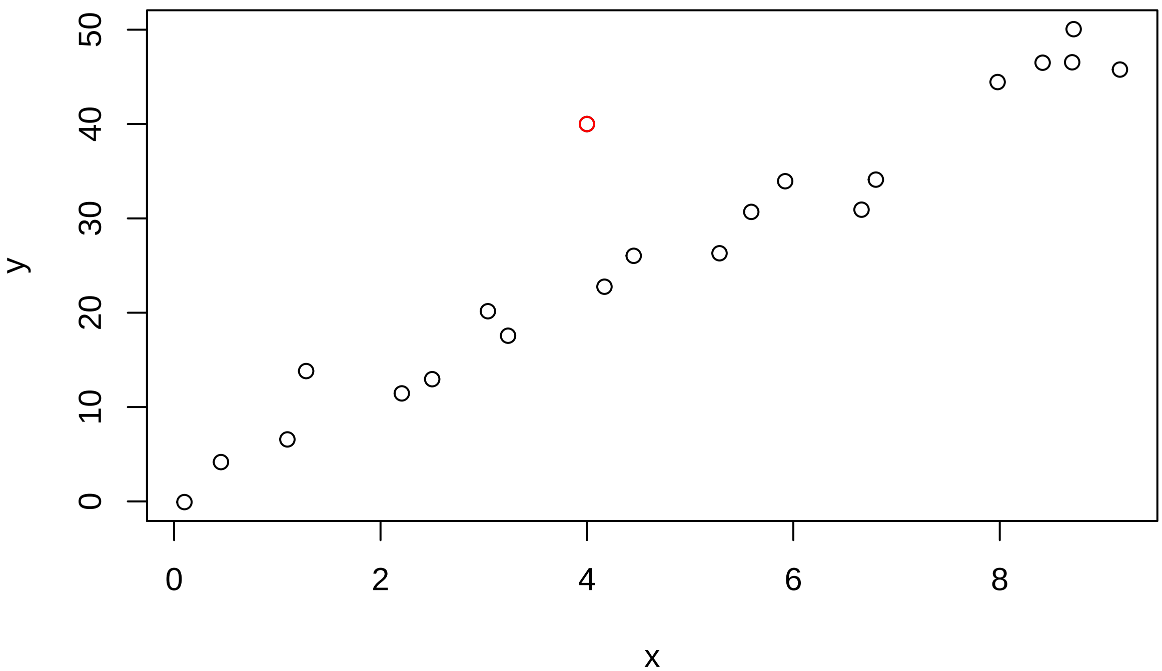
¡Exacto! Todos los puntos de datos **siguen la tendencia general del resto de los datos**, por lo que **no hay valores atípicos** (en la dirección y). Y, ninguno de los puntos de datos es extremo con respecto a x, por lo que no hay puntos de alto leverage. En general, ninguno de los puntos de datos parece ser influyente con respecto a la ubicación de la línea de mejor ajuste

Ejemplo 2

Ahora, ¿qué hay de este ejemplo? ¿Cree que el siguiente conjunto de datos contiene algún valor atípico? ¿O, cualquier punto de datos de alto leverage?

```
Input <- (
  "
Row x   y
1   0.1 -0.0716
2   0.45401 4.1673
3   1.09765 6.5703
4   1.27936 13.815
5   2.20611 11.4501
6   2.50064 12.9554
7   3.0403  20.1575
8   3.23583 17.5633
9   4.45308 26.0317
10  4.1699  22.7573
11  5.28474 26.303
12  5.59238 30.6885
13  5.92091 33.9402
14  6.66066 30.9228
15  6.79953 34.11
16  7.97943 44.4536
17  8.41536 46.5022
18  8.71607 50.0568
19  8.70156 46.5475
```

```
20  9.16463 45.7762
21  4   40
  "
)
d2 = read.table(textConnection(Input),header=TRUE)
d2 <- d2[,-1]
plot(d2)
points(d2[21,],col = "red")
```



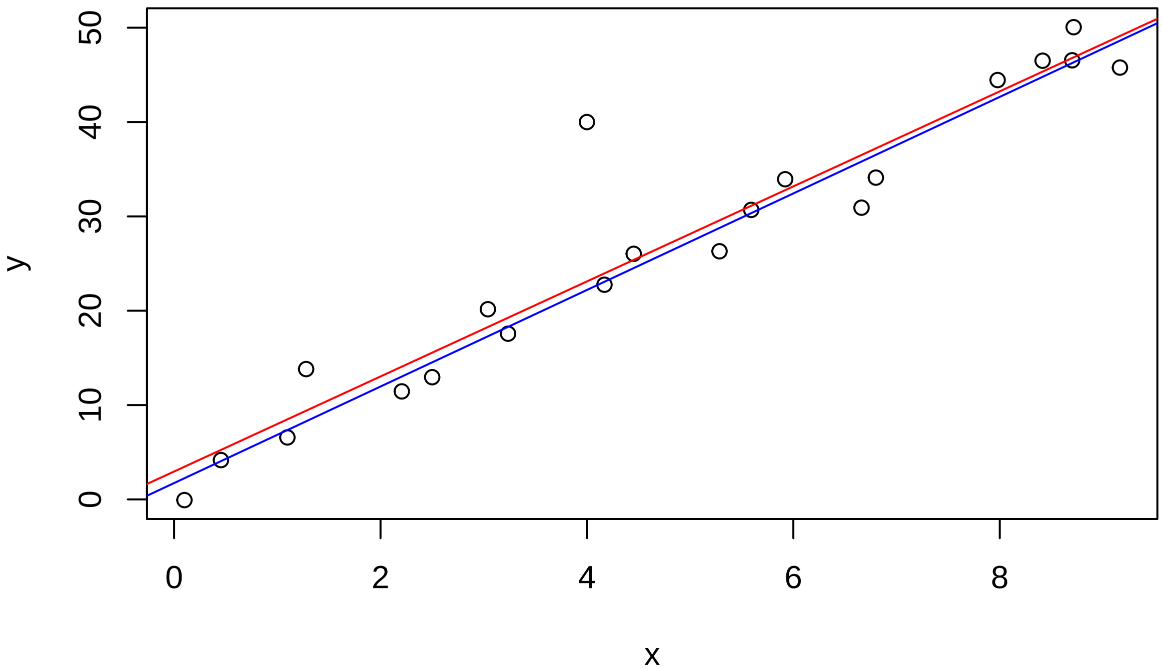
¡Por supuesto! Debido a que el punto de datos rojo no sigue la tendencia general del resto de los datos, se consideraría un valor atípico.

Sin embargo, este punto no tiene un valor x extremo, por lo que no tiene un alto leverage.

¿Es el punto de datos rojo influyente? Una forma fácil de determinar si el punto de datos es influyente es encontrar la mejor línea de ajuste dos veces: una vez con el punto de datos rojo incluido y una vez con el punto de datos rojo excluido.

La siguiente gráfica ilustra las dos mejores líneas de ajuste:

```
pp <- 21

m1 <- lm(y~x,data = d2)
m2 <- lm(y~x,data = d2[-pp,])

plot(d2)
abline(coef(m1),col = "red")
abline(coef(m2),col = "blue")
```




```r
summary(m1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x, data = d2)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -5.587 -2.620 -1.077  1.157 16.893
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   2.9576     2.0091   1.472    0.157
## x             5.0373     0.3633  13.865 2.18e-11 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.711 on 19 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9101, Adjusted R-squared:  0.9053
## F-statistic: 192.2 on 1 and 19 DF,  p-value: 2.179e-11
```

```r
summary(m2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x, data = d2[-pp, ])
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -4.8911 -1.7580 -0.0998  1.7552  5.5365
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
## (Intercept)   1.7322     1.1205   1.546     0.14    
## x             5.1169     0.2003  25.551 1.35e-15 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## 
## Residual standard error: 2.592 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9732, Adjusted R-squared:  0.9717 
## F-statistic: 652.8 on 1 and 18 DF,  p-value: 1.353e-15
```

Aún es difícil decir si hay puntos influyentes, o si estamos frente a un outlier.

Evaluemos los resultados:

- El valor de R^2 ha disminuido ligeramente, pero la relación entre y y x todavía se consideraría fuerte.
- El error estándar de b_1, que se utiliza para calcular nuestro intervalo de confianza para β_1, es mayor cuando se incluye el punto de datos rojo, lo que aumenta el ancho de nuestro intervalo de confianza. Puede recordar que el error estándar de b_1 depende de la media cuadrada de error MSE, que cuantifica la diferencia entre las respuestas observadas y pronosticadas. Debido a que el punto de datos rojo es un valor atípico, en la dirección y, aumenta el error estándar de b_1, no porque el punto de datos sea influyente de ninguna manera.
- En cada caso, el valor p para la prueba $H_0 : \beta_1 = 0$ es menor que 0.001. En cualquier caso, podemos concluir que hay evidencia suficiente en el nivel de 0.05 para concluir que, en la población, x está relacionada con y.

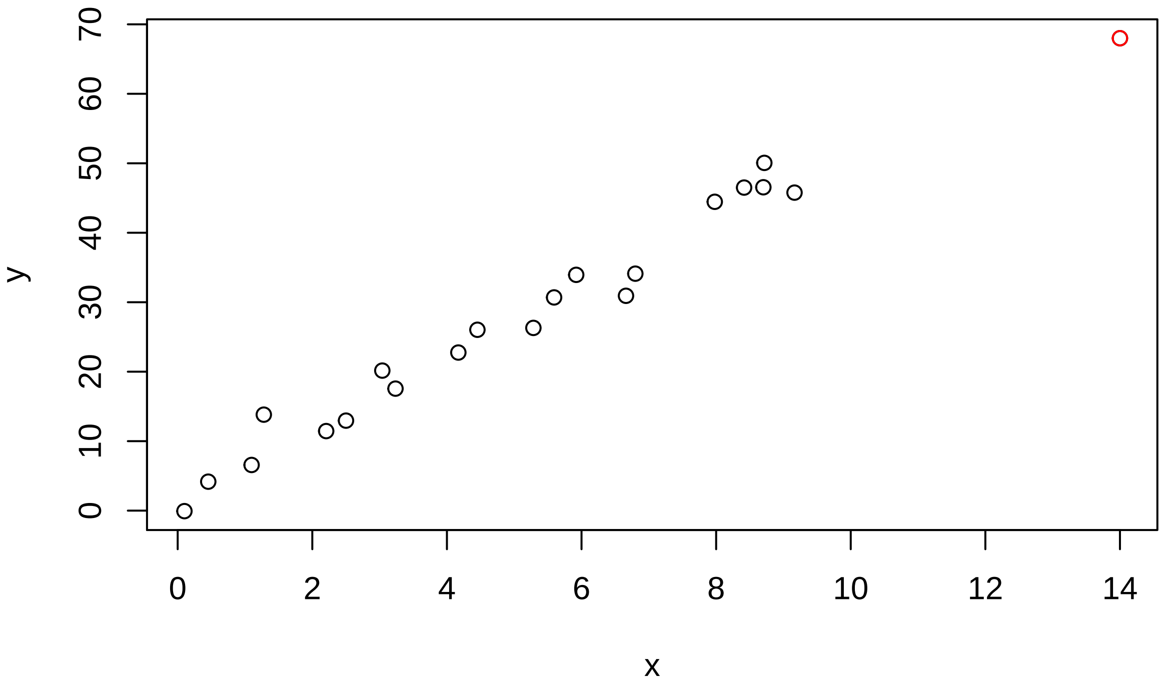
En resumen, las respuestas pronosticadas, los coeficientes de pendiente estimados y los resultados de las pruebas de hipótesis no se ven afectados por la inclusión del punto de datos rojo. Por lo tanto, el punto de datos no se considera influyente. **En resumen, el punto de datos rojo no es influyente y no tiene un alto apalancamiento, pero es un valor atípico**.

Ejemplo 3

Ahora, ¿qué hay de este ejemplo? ¿Crees que el siguiente conjunto de datos contiene algún valor atípico? ¿O, cualquier punto de datos de alto leverage?

```
Input <- (
  "
Row x   y
1   0.1 -0.0716
2   0.45401 4.1673
3   1.09765 6.5703
4   1.27936 13.815
5   2.20611 11.4501
6   2.50064 12.9554
7   3.0403  20.1575
8   3.23583 17.5633
9   4.45308 26.0317
10  4.1699  22.7573
11  5.28474 26.303
12  5.59238 30.6885
13  5.92091 33.9402
14  6.66066 30.9228
15  6.79953 34.11
16  7.97943 44.4536
17  8.41536 46.5022
18  8.71607 50.0568
```

```
19  8.70156 46.5475
20  9.16463 45.7762
21  14  68
  "
)
d3 = read.table(textConnection(Input),header=TRUE)
d3 <- d3[,-1]
plot(d3)
points(d3[21,],col = "red")
```

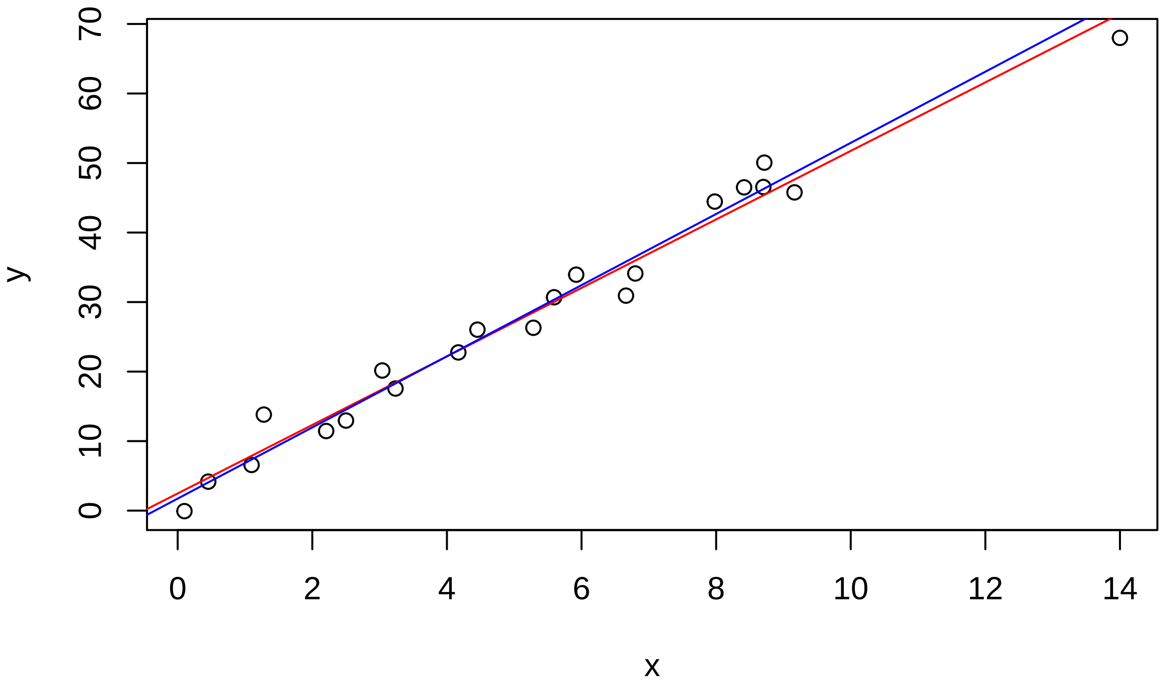


En este caso, el punto de datos rojo sigue la tendencia general del resto de los datos. Por lo tanto, no se considera un valor atípico aquí.

Sin embargo, este punto tiene un valor x extremo, por lo que tiene un alto leverage ¿Es el punto de datos rojo influyente? Ciertamente, parece estar muy alejado del resto de los datos (en la dirección x), pero ¿es eso suficiente para hacer que los datos sean influyentes en este caso?

La siguiente gráfica ilustra dos líneas de mejor ajuste: una obtenida cuando se incluye el punto de datos rojo y otra obtenida cuando se excluye el punto de datos rojo:

```
pp <- 21

m1 <- lm(y~x,data = d3)
m2 <- lm(y~x,data = d3[-pp,])

plot(d3)
abline(coef(m1),col = "red")
abline(coef(m2),col = "blue")
```




```r
summary(m1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x, data = d3)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -4.3636 -1.8607 -0.5376  2.2987  5.0434
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   2.4679     1.0757   2.294   0.0333 *
## x             4.9272     0.1719  28.661   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.709 on 19 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9774, Adjusted R-squared:  0.9762
## F-statistic: 821.4 on 1 and 19 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
summary(m2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x, data = d3[-pp, ])
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -4.8911 -1.7580 -0.0998  1.7552  5.5365
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
## (Intercept)   1.7322     1.1205   1.546     0.14    
## x             5.1169     0.2003  25.551 1.35e-15 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## 
## Residual standard error: 2.592 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9732, Adjusted R-squared:  0.9717 
## F-statistic: 652.8 on 1 and 18 DF,  p-value: 1.353e-15
```

Evaluemos los resultados:

- El valor de R^2 apenas ha cambiado, aumentando solo ligeramente de 97.3% a 97.7%. En cualquier caso, la relación entre y y x se considera fuerte.
- El error estándar de b1 es aproximadamente el mismo en cada caso: 0.172 cuando se incluye el punto de datos rojo, y 0.200 cuando se excluye el punto de datos rojo. Por lo tanto, el ancho de los intervalos de confianza para β_1 no se vería afectado en gran medida por la existencia del punto de datos rojo. Puede tomar nota de que esto se debe a que el punto de datos no es un MSE extremadamente impactante.
- En cada caso, el valor P para la prueba $H_0 : \beta_1 = 0$ es menor que 0.001. En cualquier caso, podemos concluir que hay evidencia suficiente en el nivel de 0.05 para concluir que, en la población, x está relacionada con y.

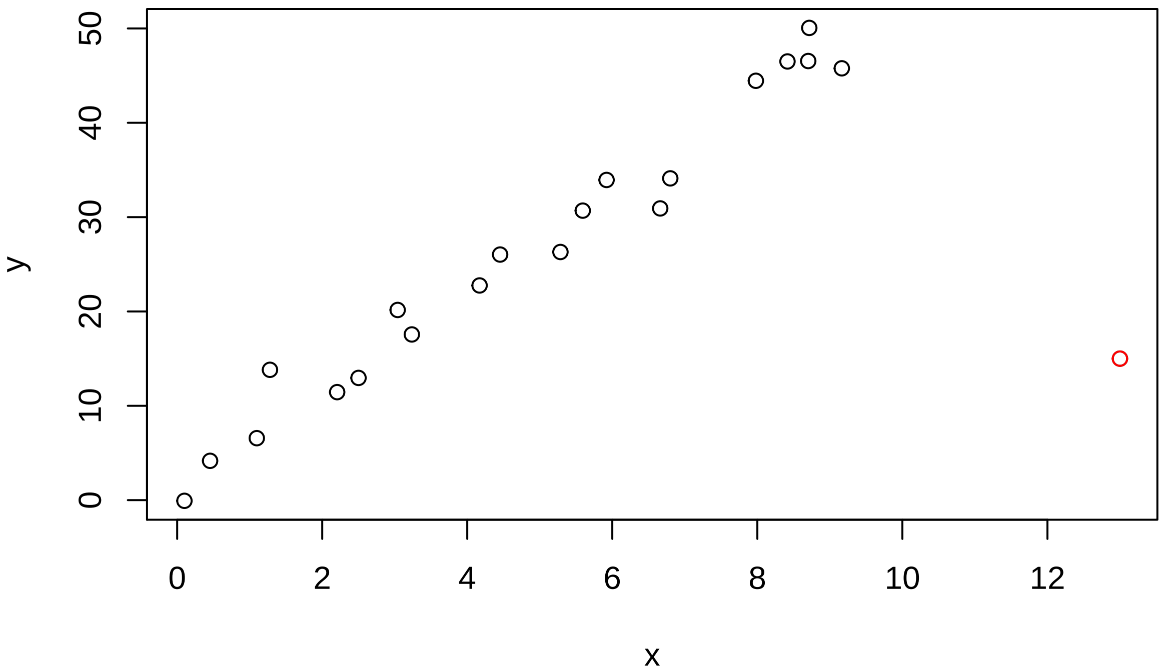
En resumen, las respuestas pronosticadas, los coeficientes de pendiente estimados y los resultados de las pruebas de hipótesis no se ven afectados por la inclusión del punto de datos rojo. Por lo tanto, el punto de datos no se considera influyente. En resumen, **el punto de datos rojo no es influyente, ni es un valor atípico, pero tiene un alto apalancamiento**.

Ejemplo 4

Un último ejemplo! ¿Crees que el siguiente conjunto de datos contiene algún valor atípico? ¿O, cualquier punto de datos de alto leverage?

```
Input <- (
  "
Row x   y
1   0.1 -0.0716
2   0.45401 4.1673
3   1.09765 6.5703
4   1.27936 13.815
5   2.20611 11.4501
6   2.50064 12.9554
7   3.0403  20.1575
8   3.23583 17.5633
9   4.45308 26.0317
10  4.1699  22.7573
11  5.28474 26.303
12  5.59238 30.6885
13  5.92091 33.9402
14  6.66066 30.9228
15  6.79953 34.11
16  7.97943 44.4536
17  8.41536 46.5022
18  8.71607 50.0568
19  8.70156 46.5475
20  9.16463 45.7762
21  13  15
```

```
  "
)
d4 = read.table(textConnection(Input),header=TRUE)
d4 <- d4[,-1]
plot(d4)
points(d4[21,],col = "red")
```

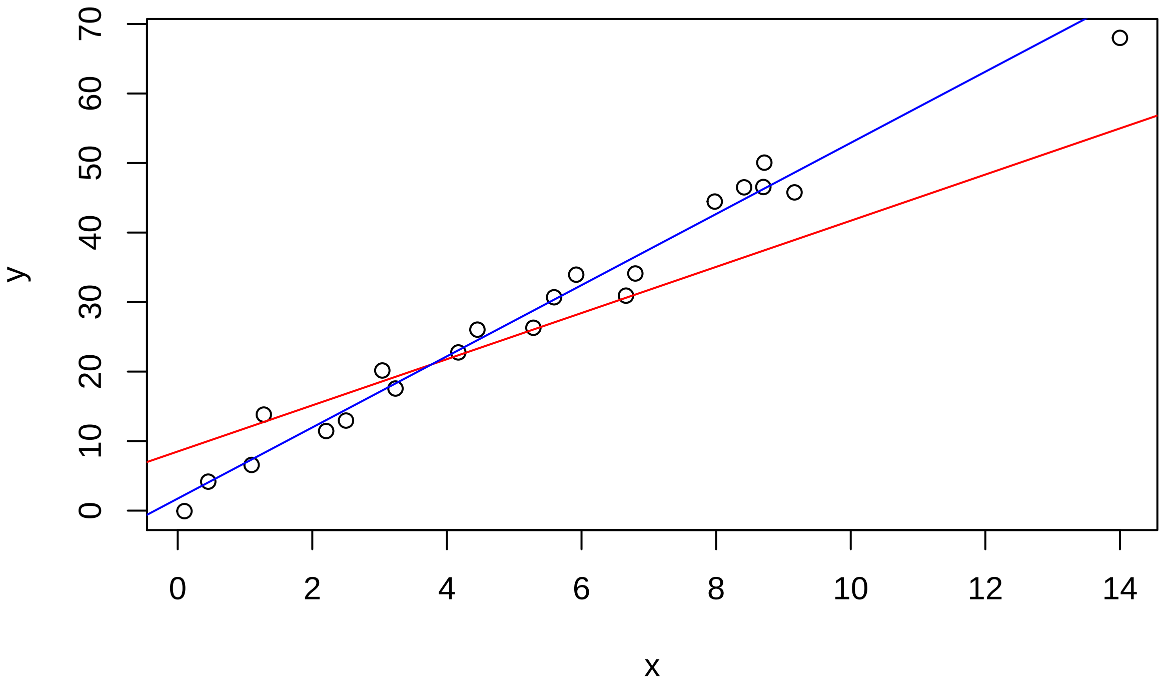


Así es, en este caso, el punto de datos rojo es ciertamente un valor atípico y tiene un alto leverage.

El punto de datos rojo no sigue la tendencia general del resto de los datos y también tiene un valor x extremo. Y, en este caso el punto de datos rojo es influyente.

Las dos líneas de mejor ajuste: una obtenida cuando se incluye el punto de datos rojo y otra obtenida cuando se excluye el punto de datos rojo:

```
pp <- 21

m1 <- lm(y~x,data = d4)
m2 <- lm(y~x,data = d4[-pp,])

plot(d3)
abline(coef(m1),col = "red")
abline(coef(m2),col = "blue")
```




```r
summary(m1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x, data = d4)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -36.662  -3.851   1.063   5.779  12.617
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   8.5046     4.2224   2.014 0.058374 .
## x             3.3198     0.6862   4.838 0.000114 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 10.45 on 19 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5519, Adjusted R-squared:  0.5284
## F-statistic: 23.41 on 1 and 19 DF,  p-value: 0.0001143
```

```r
summary(m2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x, data = d4[-pp, ])
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -4.8911 -1.7580 -0.0998  1.7552  5.5365
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
## (Intercept)   1.7322     1.1205   1.546     0.14
## x             5.1169     0.2003  25.551 1.35e-15 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.592 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9732, Adjusted R-squared:  0.9717
## F-statistic: 652.8 on 1 and 18 DF,  p-value: 1.353e-15
```

Evaluemos los resultados:

- El valor R^2 ha disminuido sustancialmente de 97.32% a 55.19%. Si incluimos el punto de datos rojo, concluimos que la relación entre y y x es solo moderadamente fuerte, mientras que si excluimos el punto de datos rojo, concluimos que la relación entre y y x es muy fuerte.
- El error estándar de b1 es casi 3.5 veces mayor cuando se incluye el punto de datos rojo, que aumenta de 0.200 a 0.686. Este aumento tendría un efecto sustancial en el ancho de nuestro intervalo de confianza para β_1. Nuevamente, el aumento se debe a que el punto de datos rojo es un valor atípico, en la dirección y.
- En cada caso, el valor P para la prueba $H_0 : \beta_1 = 0$ es menor que 0.001. En ambos casos, podemos concluir que existe evidencia suficiente en el nivel de 0.05 para concluir que, en la población, x está relacionada con y. Tenga en cuenta, sin embargo, que el estadístico t disminuye drásticamente de 25.55 a 4.84 al incluir el punto de datos rojo.

Aquí, las respuestas predichas y los coeficientes de pendiente estimados se ven claramente afectados por la presencia del punto de datos rojo. Si bien el punto de datos no afectó el significado de la prueba de hipótesis, el estadístico t cambió dramáticamente. En este caso, el punto de datos rojo se considera un leverage alto y un valor atípico, y también resultó ser influyente.

Resumen

Los ejemplos anteriores, a través del uso de gráficos simples, han resaltado la distinción entre valores atípicos y puntos de datos de alto apalancamiento.

Hubo valores atípicos en los ejemplos 2 y 4. Hubo puntos de datos de alto leverage en los ejemplos 3 y 4. Sin embargo, solo en el ejemplo 4 el punto de datos que era tanto un valor atípico como un punto de apalancamiento alto resultó ser influyente. Es decir, **no todos los puntos de datos de apalancamiento atípicos o altos influyen de manera importante en el análisis de regresión**.

Es su trabajo como analista de regresión determinar siempre si su análisis de regresión está indebidamente influenciado por uno o más puntos de datos.

Regresión Robusta

La regresión robusta es una alternativa a la regresión de mínimos cuadrados cuando los datos están contaminados con valores atípicos u observaciones influyentes, y también se puede utilizar para detectar observaciones influyentes.

Paquetes de esta sección

```r
if(!require(foreign)){install.packages("foreign")}
if(!require(robustbase)){install.packages("robustbase")}
if(!require(MASS)){install.packages("MASS")}
if(!require(robust)){install.packages("robust")}
if(!require(quantreg)){install.packages("quantreg")}
```

Introducción

Comencemos nuestra discusión sobre regresión robusta con algunos términos en regresión lineal.

- **Residuos**: la diferencia entre el valor predicho (basado en la ecuación de regresión) y el valor real observado.
- **Outlier**: en regresión lineal, un outlier es una observación con un gran residual (error). En otras palabras, es una observación cuyo valor de variable dependiente es inusual dado su valor en las variables predictoras. Un valor atípico puede indicar una peculiaridad de la muestra o puede indicar un error de entrada de datos u otro problema.
- **Apalancamiento** (leverage): una observación con un valor extremo en una variable predictiva es un punto con alto apalancamiento. El *leverage* es una medida de cuánto se desvía una variable independiente de su media. Los puntos de alto *leverage* pueden tener una gran efecto en la estimación de los coeficientes de regresión.
- **Influencia**: se dice que una observación es influyente si la eliminación de la observación cambia sustancialmente la estimación de los coeficientes de regresión. Se puede pensar en la influencia como el producto del *leverage* y el valor atípico.
- **Distancia de Cook (o D de Cook)**: una medida que combina la información de *leverage* y el residuo de la observación.

La regresión robusta se puede utilizar en cualquier **situación en la que usaría la regresión de mínimos cuadrados**. Al ajustar una regresión de mínimos cuadrados, es posible que encontremos algunos valores atípicos o puntos de datos de alto *leverage*.

Hemos decidido que estos puntos de datos **no son errores de entrada de datos, ni de una población diferente a la mayoría de nuestros datos**. Por lo tanto, no tenemos ninguna razón convincente para excluirlos del análisis.

La regresión robusta puede ser una buena estrategia, ya que es un **compromiso entre la exclusión de estos puntos por completo del análisis y la inclusión de todos los puntos** de datos y el tratamiento de todos ellos por igual en la regresión OLS.

La idea de una regresión robusta es **sopesar las observaciones de manera diferente según el comportamiento de estas observaciones**. En términos generales, es una forma de regresión de mínimos cuadrados ponderada y re-ponderada.

El comando `rlm` en el comando del paquete `MASS` implementa varias versiones de regresión robusta. En esta sección, mostraremos la estimación M con ponderación de Huber y bisquare. Estos dos son muy estándar.

La estimación M define una función de ponderación tal que la ecuación de estimación se convierte en

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(y_i - x'b)x_i' = 0.$$

Pero los pesos dependen de los residuos y los residuos de los pesos. La ecuación se resuelve utilizando los **mínimos cuadrados reponderados iterativamente** (*Iteratively Reweighted Least Squares - IRLS*).

Por ejemplo, la matriz de coeficientes en la iteración j es

$$B_j = [X'W_{j-1}X]^{-1}X'W_{j-1}Y$$

donde **los subíndices indican la matriz en una iteración particular (no filas o columnas)**. El proceso continúa hasta que converge.

En la ponderación de Huber, las observaciones con pequeños residuos obtienen un peso de 1 y cuanto mayor sea el residuo, menor será el peso. Esto se define por la función de peso

$$w(e) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |e| \leq k \\ \dfrac{k}{|e|} & \text{for} \quad |e| > k \end{cases}$$

Con la ponderación *bisquare*, todos los casos con un residuo distinto de cero se reducen al menos un poco.

Ejemplo

Para nuestro análisis de datos utilizaremos el conjunto de datos de delitos que aparece en *Statistical Methods for Social Sciences*, Tercera edición de Alan Agresti y Barbara Finlay (Prentice Hall, 1997).

Las variables son

- identificación del estado (`sid`),
- nombre del estado (`state`),
- delitos violentos por 100,000 personas (`crime`),
- asesinatos por 1,000,000 (`murder`),
- el porcentaje de la población que vive en áreas metropolitanas (`pctmetro`),
- el porcentaje de la población que es blanco (`pctwhite`),
- porcentaje de la población con educación secundaria o superior (`pcths`),
- porcentaje de la población que vive bajo la línea de pobreza (`poverty`) y

- porcentaje de la población que son padres solteros (`single`).

Tiene 51 observaciones. Vamos a utilizar la `poverty` y `single` para predecir el `crime`.

```r
cdata <- read.dta("https://stats.idre.ucla.edu/stat/data/crime.dta")
summary(cdata)
```

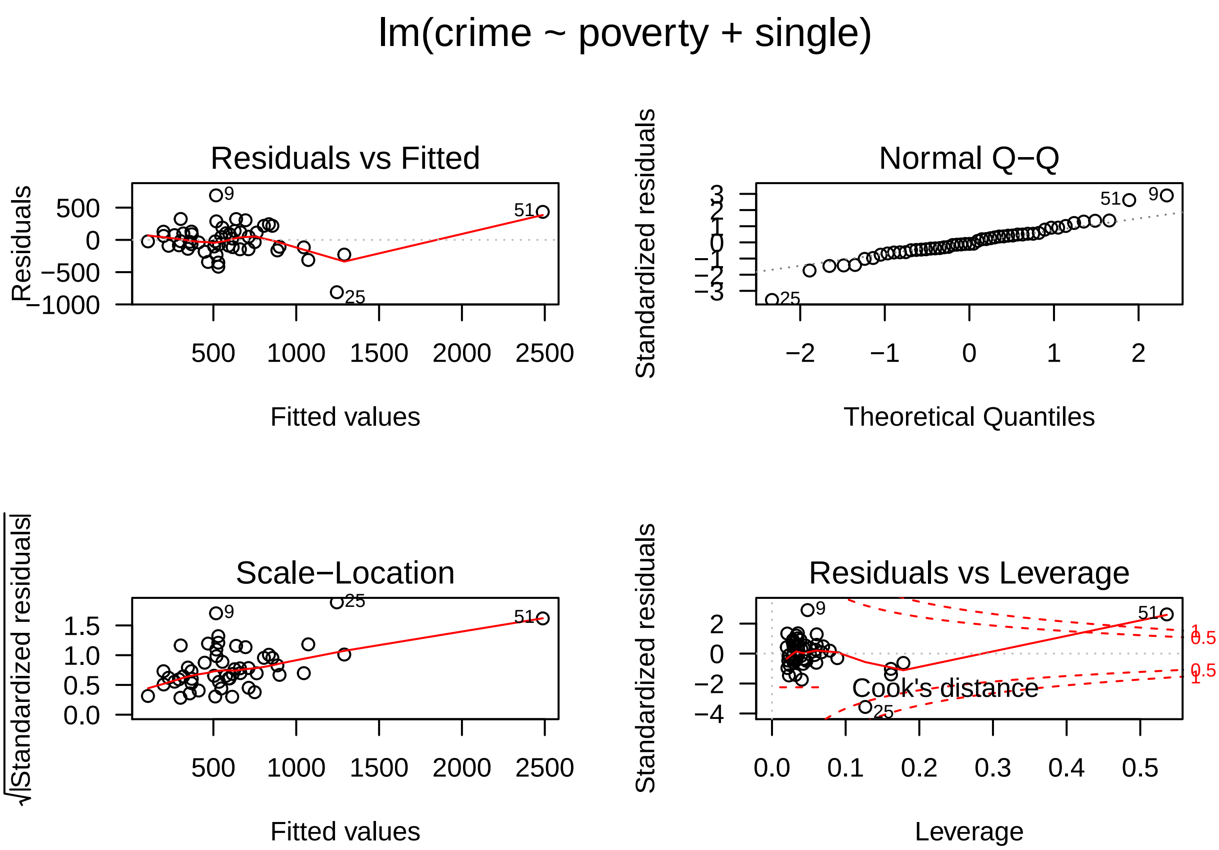
```
##       sid          state               crime            murder      
##  Min.   : 1.0   Length:51          Min.   :  82.0   Min.   : 1.600  
##  1st Qu.:13.5   Class :character   1st Qu.: 326.5   1st Qu.: 3.900  
##  Median :26.0   Mode  :character   Median : 515.0   Median : 6.800  
##  Mean   :26.0                      Mean   : 612.8   Mean   : 8.727  
##  3rd Qu.:38.5                      3rd Qu.: 773.0   3rd Qu.:10.350  
##  Max.   :51.0                      Max.   :2922.0   Max.   :78.500  
##     pctmetro         pctwhite         pcths          poverty     
##  Min.   : 24.00   Min.   :31.80   Min.   :64.30   Min.   : 8.00  
##  1st Qu.: 49.55   1st Qu.:79.35   1st Qu.:73.50   1st Qu.:10.70  
##  Median : 69.80   Median :87.60   Median :76.70   Median :13.10  
##  Mean   : 67.39   Mean   :84.12   Mean   :76.22   Mean   :14.26  
##  3rd Qu.: 83.95   3rd Qu.:92.60   3rd Qu.:80.10   3rd Qu.:17.40  
##  Max.   :100.00   Max.   :98.50   Max.   :86.60   Max.   :26.40  
##      single     
##  Min.   : 8.40  
##  1st Qu.:10.05  
##  Median :10.90  
##  Mean   :11.33  
##  3rd Qu.:12.05  
##  Max.   :22.10  
```

En la mayoría de los casos, comenzamos ejecutando una regresión OLS y realizando algunos diagnósticos. Comenzaremos ejecutando una regresión OLS y observando diagramas de diagnóstico que examinan los residuos, los valores ajustados, la distancia de Cook y el *leverage*.

```
summary(ols <- lm(crime ~ poverty + single, data = cdata))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = crime ~ poverty + single, data = cdata)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -811.14 -114.27  -22.44  121.86  689.82
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -1368.189    187.205  -7.308 2.48e-09 ***
## poverty         6.787      8.989   0.755    0.454
## single        166.373     19.423   8.566 3.12e-11 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 243.6 on 48 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7072, Adjusted R-squared:  0.695
## F-statistic: 57.96 on 2 and 48 DF,  p-value: 1.578e-13
```

```
opar <- par(mfrow = c(2,2), oma = c(0, 0, 1.1, 0))
plot(ols, las = 1)
```



```r
par(opar)
```

A partir de estos gráficos, podemos identificar las observaciones 9, 25 y 51 como posiblemente problemáticas para nuestro modelo. Podemos observar estas observaciones para ver qué estados representan.

```r
cdata[c(9, 25, 51), 1:2]
```

```
##    sid state
## 9    9    fl
## 25  25    ms
## 51  51    dc
```

DC, Florida y Mississippi tienen un alto *leverage* o grandes residuos. Podemos mostrar las observaciones que tienen valores relativamente grandes de la D de Cook. Un punto de corte convencional es $4/n$, donde n es el número de observaciones en el conjunto de datos. Usaremos este criterio para seleccionar los valores a mostrar.

```r
d1 <- cooks.distance(ols)
r <- stdres(ols)
a <- cbind(cdata, d1, r)
a[d1 > 4/51, ]
```

```
##    sid state crime murder pctmetro pctwhite pcths poverty single        d1
## 1    1    ak   761    9.0     41.8     75.2  86.6     9.1   14.3 0.1254750
## 9    9    fl  1206    8.9     93.0     83.5  74.4    17.8   10.6 0.1425891
## 25  25    ms   434   13.5     30.7     63.3  64.3    24.7   14.7 0.6138721
## 51  51    dc  2922   78.5    100.0     31.8  73.1    26.4   22.1 2.6362519
##            r
## 1  -1.397418
## 9   2.902663
## 25 -3.562990
## 51  2.616447
```

Probablemente deberíamos eliminar DC, ya que ni siquiera es un estado. Lo incluimos en el análisis solo para mostrar que tiene una gran D de Cook y demostrar cómo lo manejará `rlm`.

Ahora vamos a ver los residuos. Generaremos una nueva variable llamada `absr1`, que es el valor absoluto de los residuos (porque el signo del residuo no importa). Luego imprimimos las diez observaciones con los valores residuales absolutos más altos.

```r
rabs <- abs(r)
a <- cbind(cdata, d1, r, rabs)
asorted <- a[order(-rabs), ]
asorted[1:10, ]
```

```
##    sid state crime murder pctmetro pctwhite pcths poverty single
## 25  25    ms   434   13.5     30.7     63.3  64.3    24.7   14.7
## 9    9    fl  1206    8.9     93.0     83.5  74.4    17.8   10.6
## 51  51    dc  2922   78.5    100.0     31.8  73.1    26.4   22.1
## 46  46    vt   114    3.6     27.0     98.4  80.8    10.0   11.0
## 26  26    mt   178    3.0     24.0     92.6  81.0    14.9   10.8
## 21  21    me   126    1.6     35.7     98.5  78.8    10.7   10.6
## 1    1    ak   761    9.0     41.8     75.2  86.6     9.1   14.3
## 31  31    nj   627    5.3    100.0     80.8  76.7    10.9    9.6
## 14  14    il   960   11.4     84.0     81.0  76.2    13.6   11.5
## 20  20    md   998   12.7     92.8     68.9  78.4     9.7   12.0
##            d1         r     rabs
## 25 0.61387212 -3.562990 3.562990
```

```
## 9  0.14258909  2.902663 2.902663
## 51 2.63625193  2.616447 2.616447
## 46 0.04271548 -1.742409 1.742409
## 26 0.01675501 -1.460885 1.460885
## 21 0.02233128 -1.426741 1.426741
## 1  0.12547500 -1.397418 1.397418
## 31 0.02229184  1.354149 1.354149
## 14 0.01265689  1.338192 1.338192
## 20 0.03569623  1.287087 1.287087
```

Ahora vamos a correr nuestra primera regresión robusta. La regresión robusta se realiza por mínimos cuadrados re-ponderados iterados (IRLS). El comando para ejecutar una regresión robusta es `rlm` en el paquete `MASS`.

Hay varias funciones de ponderación que se pueden utilizar para IRLS. Primero vamos a utilizar los pesos de Huber en este ejemplo. Luego veremos los pesos finales creados por el proceso IRLS. Esto puede ser muy útil.

```
summary(rr.huber <- rlm(crime ~ poverty + single, data = cdata))
```

```
##
## Call: rlm(formula = crime ~ poverty + single, data = cdata)
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -846.09 -125.80  -16.49  119.15  679.94
##
## Coefficients:
##             Value      Std. Error t value
## (Intercept) -1423.0373   167.5899    -8.4912
## poverty         8.8677     8.0467     1.1020
## single        168.9858    17.3878     9.7186
##
## Residual standard error: 181.8 on 48 degrees of freedom
```

```
hweights <- data.frame(state = cdata$state, resid = rr.huber$resid, weight = rr.huber$w)
hweights2 <- hweights[order(rr.huber$w), ]
hweights2[1:15, ]
```

```
##    state      resid    weight
## 25    ms -846.08536 0.2889618
## 9     fl  679.94327 0.3595480
## 46    vt -410.48310 0.5955740
## 51    dc  376.34468 0.6494131
## 26    mt -356.13760 0.6864625
## 21    me -337.09622 0.7252263
## 31    nj  331.11603 0.7383578
## 14    il  319.10036 0.7661169
## 1     ak -313.15532 0.7807432
## 20    md  307.19142 0.7958154
## 19    ma  291.20817 0.8395172
## 18    la -266.95752 0.9159411
## 2     al  105.40319 1.0000000
## 3     ar   30.53589 1.0000000
## 4     az  -43.25299 1.0000000
```

Podemos ver que aproximadamente, a medida que disminuye el residuo absoluto, el peso aumenta. En otras palabras, los casos con una gran cantidad de residuos tienden a ser de baja ponderación.

Este resultado nos muestra que la observación para Mississippi será la de mayor peso. Florida también tendrá una baja de peso. Todas las observaciones que no se muestran arriba tienen un peso de 1. En la regresión OLS, todos los casos tienen un peso de 1. Por lo tanto, cuantos más casos en la regresión robusta tengan un peso cercano a uno, más cerca estarán los resultados del OLS y las regresiones robustas.

A continuación, vamos a ejecutar el mismo modelo, pero utilizando la función de ponderación bisquare. De nuevo, podemos mirar los pesos.

```
rr.bisquare <- rlm(crime ~ poverty + single, data=cdata, psi = psi.bisquare)
summary(rr.bisquare)
```

```
##
## Call: rlm(formula = crime ~ poverty + single, data = cdata, psi = psi.bisquare)
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -905.59 -140.97  -14.98  114.65  668.38
##
## Coefficients:
##             Value      Std. Error t value
## (Intercept) -1535.3338   164.5062    -9.3330
## poverty        11.6903     7.8987     1.4800
## single        175.9303    17.0678    10.3077
##
## Residual standard error: 202.3 on 48 degrees of freedom
```

```
biweights <- data.frame(state = cdata$state, resid = rr.bisquare$resid, weight = rr.bisquare$w)
biweights2 <- biweights[order(rr.bisquare$w), ]
biweights2[1:15, ]
```

```
##    state     resid      weight
## 25    ms -905.5931 0.007652565
## 9     fl  668.3844 0.252870542
## 46    vt -402.8031 0.671495418
## 26    mt -360.8997 0.731136908
## 31    nj  345.9780 0.751347695
## 18    la -332.6527 0.768938330
## 21    me -328.6143 0.774103322
## 1     ak -325.8519 0.777662383
## 14    il  313.1466 0.793658594
## 20    md  308.7737 0.799065530
## 19    ma  297.6068 0.812596833
## 51    dc  260.6489 0.854441716
## 50    wy -234.1952 0.881660897
## 5     ca  201.4407 0.911713981
## 10    ga -186.5799 0.924033113
```

Podemos ver que el peso otorgado a Mississippi es dramáticamente más bajo usando la función de ponderación bisquare que la función de ponderación de Huber y las estimaciones de los parámetros de estos dos métodos de ponderación diferentes difieren.

Al comparar los resultados de una regresión OLS regular y una regresión robusta, si los resultados son muy diferentes, lo más probable es que desee utilizar los resultados de la regresión robusta.

Las grandes diferencias sugieren que los parámetros del modelo están siendo altamente influenciados por valores atípicos. Diferentes funciones tienen ventajas e inconvenientes. Las ponderaciones de Huber pueden tener dificultades con los valores atípicos graves, y las ponderaciones de bisquared pueden tener dificultades para converger o pueden dar múltiples soluciones.

Como puede ver, los resultados de los dos análisis son bastante diferentes, especialmente con respecto a los coeficientes de individual y la constante (intercepto).

Si bien normalmente no estamos interesados en la constante, si se hubiera centrado una o ambas variables predictoras, la constante sería útil. Por otro lado, notará que la `poverty` no es estadísticamente significativa en ninguno de los análisis, mientras que la `single` es significativa en ambos análisis.

Cosas para considerar

```
La regresión robusta **no aborda los problemas de heterogeneidad de la varianza**. Este problema se pue

Los ejemplos que se muestran aquí han presentado el código R para la estimación de M. Hay otras opcione
```

Más estimaciones Robustas

Como hemos mencionado en los apartados anteriores, el ajuste de la regresión lineal es sensible al incumplimiento de los supuestos del modelo y a la presencia de datos extremos. Esto implica que la estimación de los parámetros y los test de hipótesis del modelo se ven afectados por estos problemas. Además, aunque queramos solventar el problema de los supuestos modelando mediante regresiones no paramétricas o con alguna distribución que no sea la normal para el término de los errores (ej. mediante modelos GLM), la presencia de datos extremos afecta a estos tipo de modelos alternativos.

Por ello veremos las técnicas de regresión robustas que son menos sensibles a estos problemas.

Los procedimientos de regresión robusta son de dos tipos:

1. Aquellos que cambian los estimadores clásicos por sus análogos robustos, como es la media bi-ponderada, la media winsorizada, la media recortada o la mediana. Por ejemplo:

- **regresión por media bi-ponderada** (función `bireg`),
- **regresión winsorizada** (función `winreg`),
- **regresión por mínimos cuadrados recortados** (*least trimmed squares*, **LTS**; con la función `ltsreg`, `ltsgreg`, `lmrob` o `ltsReg` del paquete `robustbase`)
- **regresión por mínimas medianas de cuadrados** (*least median of squares*, LMS; con la función `lmsreg` o `lqs` del paquete `robustbase`).

2. Aquellos que utilizan otras funciones para minimizar los residuos. Estos modelos de regresión robustos utilizan técnicas de mínimas desviaciones absolutas (least absolute deviations, LAD) o mínimos errores absolutos (least absolute residuals, LAR), en lugar de las técnicas de mínimos cuadrados ordinarios (Ordinary Least Squares, OLS). Eso quiere decir que las estimaciones de los coeficientes son aquellas que **minimizan la suma de valores absolutos de los residuales en lugar de la suma de residuales al cuadrado**. Por ejemplo:

- **regresión de Huber** (función `rlm`, paquete *MASS*). Es sensible a puntos de leverage.
- **regresión B-robusta óptima** (función `bmreg`).

Aplicación en R

Se recomienda principalmente las siguientes funciones de R:

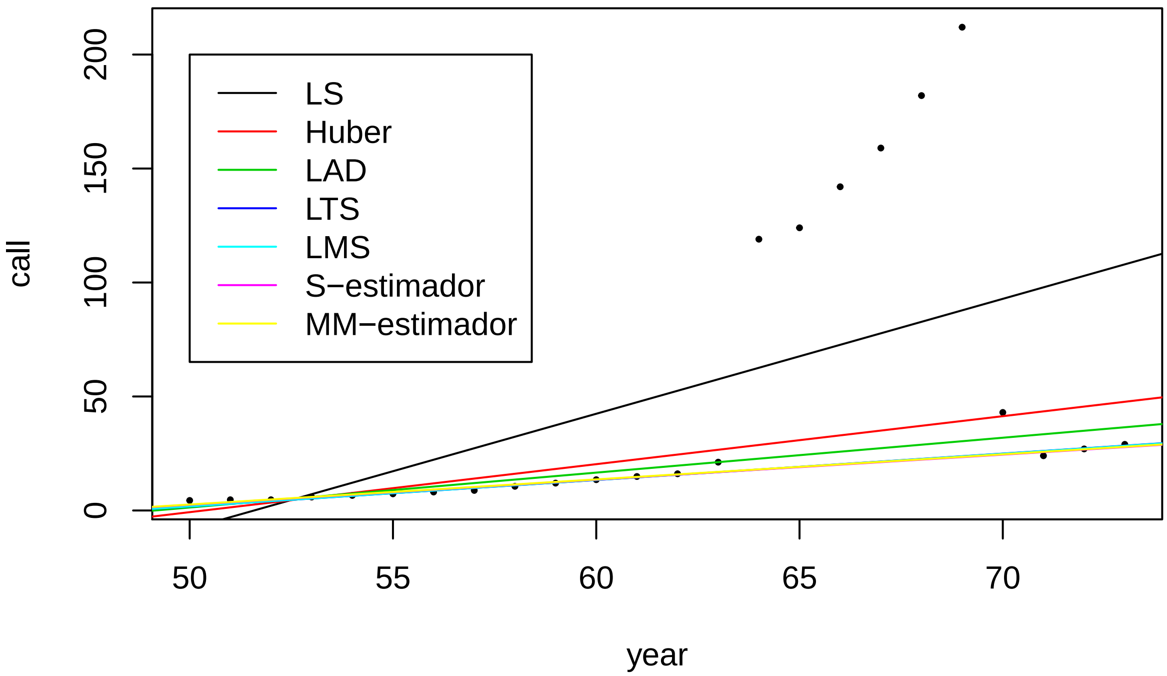
- `lmrob` Regresión LTS. `library(robustbase)`
- `lqs` Regresión con estimadores LMS y LTS. `library(MASS)`
- `rlm` Regresión con MM-estimadores. `library(MASS)`
- `lmRob` Regresión con MS- y S-estimadores. `library(robust)`

Regresión robusta simple

Ejemplo

Continuamos con los datos `phones` del paquete `MASS` donde x son los años (1950-1973) e y el número de llamadas realizadas en Bélgica. Vamos a ajustar varios modelos de regresión robusta y graficarlos para su comparación.

```
library(MASS)
library(robust)
library(robustbase)

x=phones$year
y=phones$calls

fitLS=lm(y~x)

# recta de Huber
# elige por defecto el valor constante "tuning" k2=1.345
fitH=rlm(y~x, k2=1.345, scale.eset="MAD")
fitHMM=rlm(y~x, method="MM") #estimador bicuadrado
# LMS
fitLMS=lqs(y~x,data=,method="lms")
# LTS
# si se usa lmsreg o ltsreg se fuerza a "lms" y "lts", respectivamente.
fitLTS=lqs(y~x,data=,method="lts") #por defecto usa lts
# LAD
library(quantreg)
fitLAD=rq(y~x,data=,tau=0.5)
# S-estimador
fitS=lqs(y~x, method="S")
# MM-estimador
fitMM=rlm(y~x, method="MM")

#graficamos --------
plot(x,y,xlab="year", ylab="call",type = "p", pch=20, cex=.5)
abline(fitLS,col = 1)
abline(fitH,col = 2)
abline(fitLAD,col = 3)
abline(fitLTS,col = 4)
abline(fitLMS,col = 5)
abline(fitS,col = 6)
abline(fitMM,col = 7)

legend(50,200,c("LS", "Huber", "LAD","LTS","LMS","S-estimador","MM-estimador" ),lty=rep(1,7),
col = c(1,2,3,4,5,6,7))
```



Observamos que todas las rectas son robustas a excepción de la recta de Huber (Huber) y la regresión lineal simple (LS).

Regresión robusta múltiple

Ejemplo

Utilizaremos nuevamente el conjunto de datos `stackloss` que corresponde a datos de una fábrica de oxidación de amonio ($NH3$) a ácido nítrico ($HNO3$). Son 21 observaciones de 4 variables: flujo del aire (Air Flow; representa la tasa de operación en la fábrica), temperatura del agua (Water Temp), concentración de ácido (por 1000 menos 500; es decir, un valor de 89 corresponde a 58.9%) (Acid Conc.), y la variable dependiente pérdida (stack.loss; es una medida -inversa- de la eficiencia de la planta).

```
library(car)
library(MASS)
data(stackloss)
head(stackloss)
```

```
##   Air.Flow Water.Temp Acid.Conc. stack.loss
## 1       80         27         89         42
## 2       80         27         88         37
## 3       75         25         90         37
## 4       62         24         87         28
## 5       62         22         87         18
## 6       62         23         87         18
```

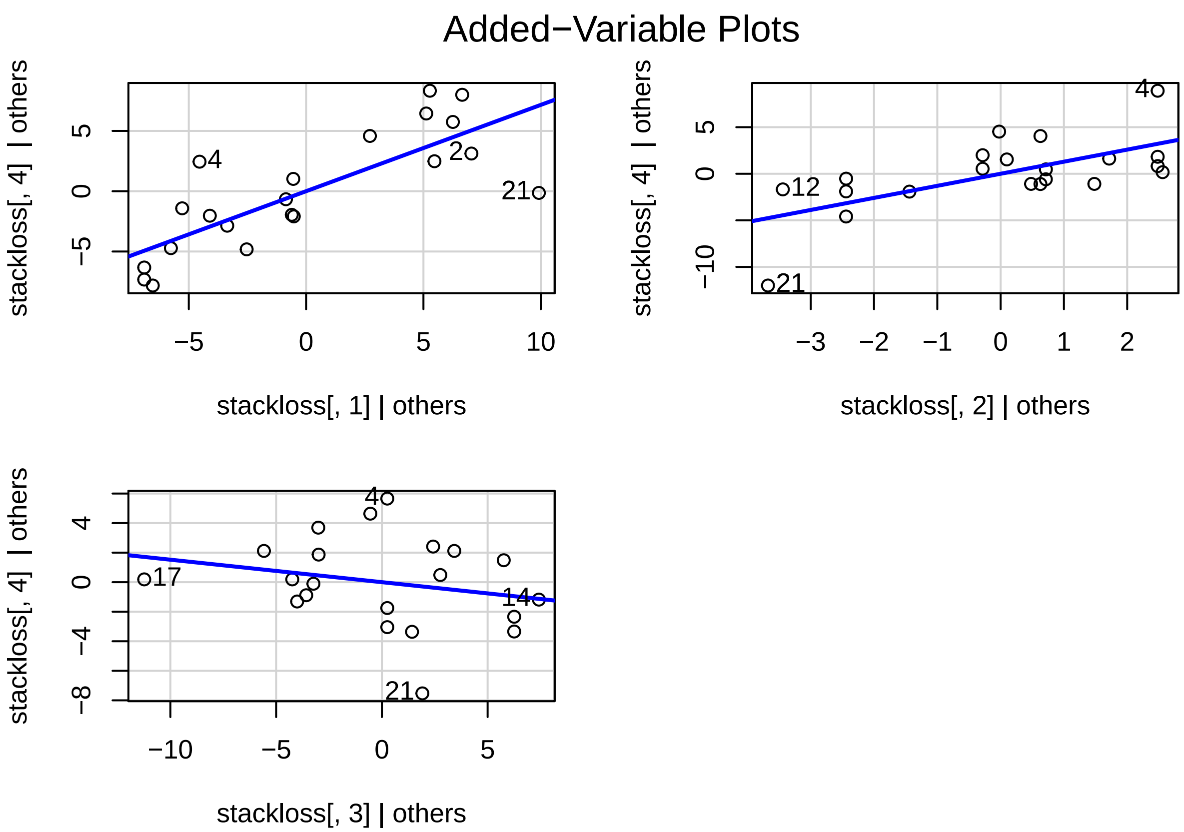
```
# por mínimos cuadrados (LS) --------
fitLSs=lm(stackloss[,4] ~ stackloss[,1] + stackloss[,2] + stackloss[,3])
# o lm(stack.loss ~ ., data=stackloss)
summary(fitLSs)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = stackloss[, 4] ~ stackloss[, 1] + stackloss[, 2] +
```

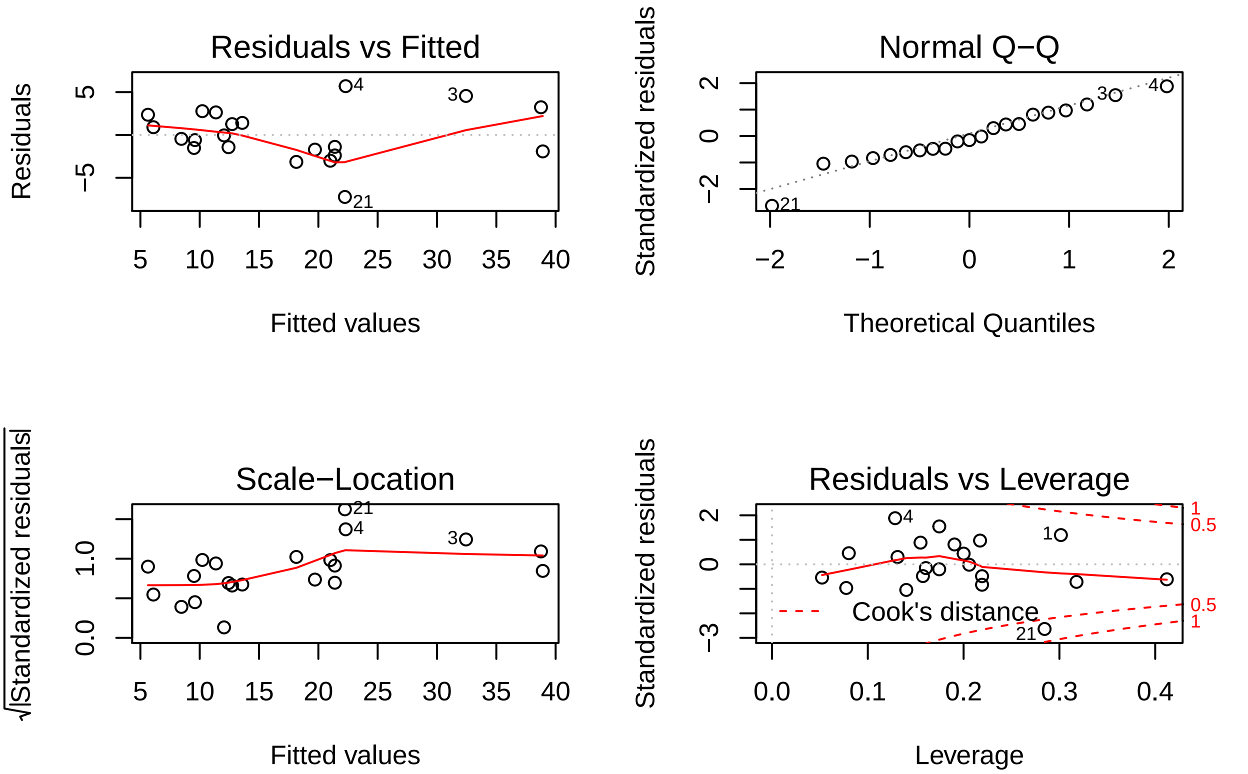
```
##     stackloss[, 3])
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -7.2377 -1.7117 -0.4551  2.3614  5.6978
##
## Coefficients:
##                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)     -39.9197    11.8960  -3.356  0.00375 **
## stackloss[, 1]    0.7156     0.1349   5.307  5.8e-05 ***
## stackloss[, 2]    1.2953     0.3680   3.520  0.00263 **
## stackloss[, 3]   -0.1521     0.1563  -0.973  0.34405
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 3.243 on 17 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9136, Adjusted R-squared:  0.8983
## F-statistic:  59.9 on 3 and 17 DF,  p-value: 3.016e-09
```

Realizamos el diagnóstico del modelo.

```r
avPlots(fitLSs, ask=F)
```




```r
par(mfrow = c(2,2))
plot(fitLSs) #varios outliers
```



Observamos que los casos 3, 4 y 21 son outliers. Vamos a realizar regresiones robustas para disminuir la influencia de estos puntos.

```
# por Huber ----------
fitHs=rlm(stackloss[,4] ~ stackloss[,1] + stackloss[,2] + stackloss[,3])
# o rlm(stack.loss ~ ., data=stackloss)
summary(fitHs)
```

```
##
## Call: rlm(formula = stackloss[, 4] ~ stackloss[, 1] + stackloss[, 2] +
##     stackloss[, 3])
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -8.91753 -1.73127  0.06187  1.54306  6.50163
##
## Coefficients:
##                Value    Std. Error t value
## (Intercept)    -41.0265   9.8073    -4.1832
## stackloss[, 1]   0.8294   0.1112     7.4597
## stackloss[, 2]   0.9261   0.3034     3.0524
## stackloss[, 3]  -0.1278   0.1289    -0.9922
##
## Residual standard error: 2.441 on 17 degrees of freedom
```

```
# para S_estimador ---------
lqs(stack.loss ~ ., data=stackloss)
```

```
## Call:
## lqs.formula(formula = stack.loss ~ ., data = stackloss)
##
## Coefficients:
```

```
## (Intercept)     Air.Flow   Water.Temp   Acid.Conc.
##  -3.581e+01    7.500e-01    3.333e-01    4.361e-16
##
## Scale estimates 0.8482 0.8645
```

```r
lqs(stack.loss ~ ., data=stackloss, method="S")
```

```
## Call:
## lqs.formula(formula = stack.loss ~ ., data = stackloss, method = "S")
##
## Coefficients:
## (Intercept)     Air.Flow   Water.Temp   Acid.Conc.
##   -35.58140      0.81395      0.44186     -0.06977
##
## Scale estimates 1.912
```

```r
# para MM-estimador ---------
rlm(stack.loss ~ ., data=stackloss, method="MM")
```

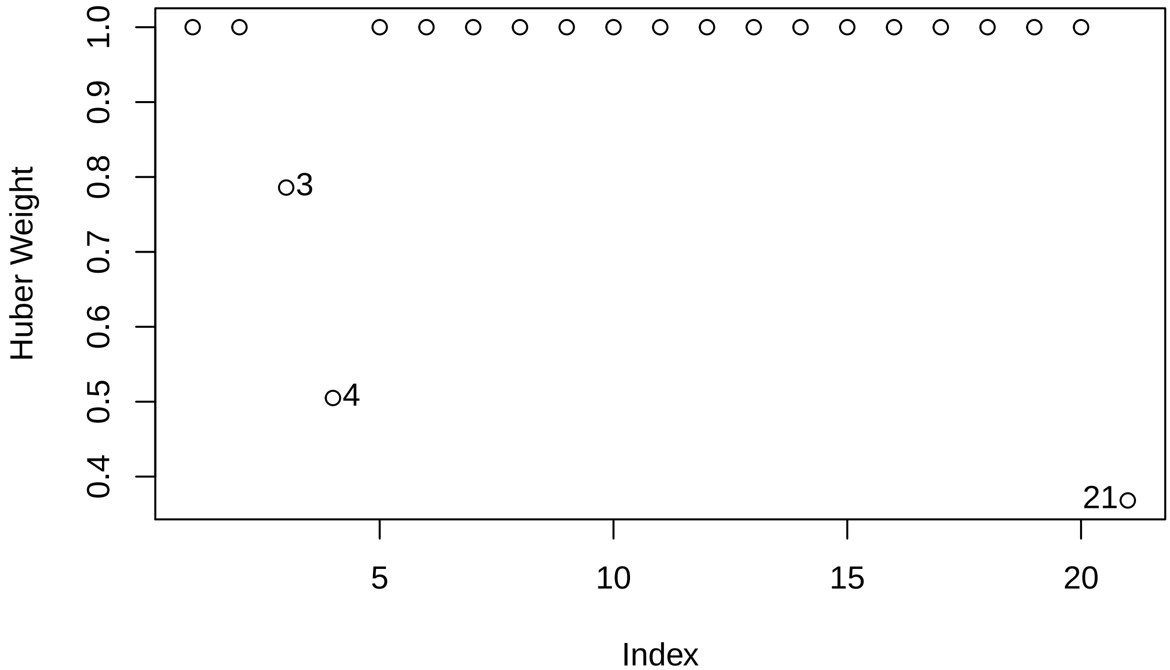
```
## Call:
## rlm(formula = stack.loss ~ ., data = stackloss, method = "MM")
## Converged in 11 iterations
##
## Coefficients:
## (Intercept)    Air.Flow  Water.Temp  Acid.Conc.
## -41.5230536   0.9388403   0.5794532  -0.1129150
##
## Degrees of freedom: 21 total; 17 residual
## Scale estimate: 1.91
```

```r
# otra opción para MM-estimadores
library(robustbase)
lmrob(stack.loss ~ ., data=stackloss)
```

```
##
## Call:
## lmrob(formula = stack.loss ~ ., data = stackloss)
##  \--> method = "MM"
## Coefficients:
## (Intercept)     Air.Flow   Water.Temp   Acid.Conc.
##    -41.5246       0.9388       0.5796      -0.1129
```

Graficamos el peso que el modelo de regresion de Huber le da a los casos que son *outliers*.

```r
plot(fitHs$w, ylab="Huber Weight")
smallweights <- which(fitHs$w < 0.8)
showLabels(1:45, fitHs$w, rownames(stackloss), method=smallweights, cex.=.6)
```




```
## [1]  3  4 21
```

Vemos que estos casos pasan a tener un peso inferior a 1.

Estrategia para tratar datos problemáticos

En primer lugar, compruebe si hay errores de datos obvios:

```
Si el error es solo una entrada de datos o un error de recopilación de datos, corríjalo.
Si el punto de datos no es representativo de la población de estudio deseada, elimínelo.
Si el punto de datos es un error de procedimiento e invalida la medición, elimínelo.
```

Considere la posibilidad de que podría haber malformado su modelo de regresión:

```
¿Te has dejado algún predictor importante?
¿Deberías considerar agregar algunos términos de interacción?
¿Hay alguna no linealidad que necesita ser modelada?
```

Si la no linealidad es un problema, una posibilidad es simplemente reducir el alcance de su modelo. Si reduce el alcance de su modelo, debe asegurarse de reportarlo, para que los lectores no usen mal su modelo.

Decida si la eliminación de puntos de datos está justificada o no:

```
No elimine puntos de datos simplemente porque no se ajustan a su modelo de regresión preconcebida.
Debe tener una buena razón objetiva para eliminar puntos de datos.
Si elimina cualquier dato después de haberlo recopilado, justifíquelo y describalo en sus informes.
Si no está seguro de qué hacer con un punto de datos, analícelos dos veces (una vez con y una vez sin el
```

Primero, ante todo, y finalmente: está bien usar su sentido común y conocimiento sobre la situación.

R CRAN tiene un excelente material para realizar análisis de puntos influyentes: https://cran.r-project.org/web/packages/olsrr/vignettes/influence_measures.html

Referencias

Li, G. 1985. Robust regression. In Exploring Data Tables, Trends, and Shapes, ed. D. C. Hoaglin, F. Mos

John Fox, Applied regression analysis, linear models, and related models, Sage publications, Inc, 1997

UCLA: https://stats.idre.ucla.edu/r/dae/robust-regression/

Penn State University: https://science.psu.edu/